Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Sandro Faedo

Il principio di Zermelo per gli spazi astratti

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 9, nº 3-4 (1940), p. 263-276

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1940_2_9_3-4_263_0>

IL PRINCIPIO DI ZERMELO PER GLI SPAZI ASTRATTI (*)

di SANDRO FAEDO (Roma).

Il principio di ZERMELO (1) delle infinite scelte arbitrarie si può sostanzialmente formulare nel modo seguente:

Dati infiniti insiemi I, è possibile considerare un nuovo insieme C, ottenuto scegliendo ad arbitrio un elemento da ciascuno degli insiemi I, senza che a priori sia data la legge con cui compiere tali scelte.

Sono note le discussioni che si sono avute e si hanno tnttora su tale questione e come buona parte dei matematici cerchi di evitare tale principio, rifiutandosi o diffidando di ammettere tale capacità della mente umana.

Però in alcuni casi particolari si potrebbe fissare la legge di scelta postulata dal ZERMELO.

È ovvio, ad esempio, che si può dare una legge generale con cui scegliere un punto da ogni insieme chiuso di punti di una retta. Se l'insieme è per esempio limitato basterebbe prendere l'estremo superiore dei suoi punti; e quanto si fa per un insieme chiuso di una retta si estende senz'altro agli insiemi chiusi di uno spazio ad un numero qualunque finito di dimensioni (2).

In una interessante discussione, che è seguita ad una lezione del R. Istituto di Alta Matematica, mi è stato proposto il problema di ricercare se ciò si estenda agli *insiemi chiusi* e *compatti* (3) di uno spazio a *infinite dimensioni*.

(*) Lavoro eseguito nella Scuola di Analisi Matematica della R. Università di Roma.

(1) Sul principio di ZERMELO si veda ad esempio:

R. BAIRE, E. BOREL, J. HADAMARD, H. LEBESGUE: *Cinq lettres sur la théorie des ensembles.* (Bulletin de la Société Mathématique de France, T. 33, 1905, pp. 261-273). M. CIPOLLA: *Sul postulato di Zermelo e la teoria dei limiti delle funzioni.* (Atti dell'Accad. Gioenia di Catania, Serie 5, Vol. VI). W. SIERPINSKI: *L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la Théorie des ensembles et l'Analyse.* (Bulletin de l'Acad. des Sciences de Cracovie, Avril-Mai 1918, pp. 97-152). B. LEVI: *Riflessioni sopra alcuni principi della teoria degli aggregati e delle funzioni.* (*Scritti matematici offerti ad Enrico D'Ovidio*, 1918, pp. 305-324); vedi anche Mathematische Annalen, 1923.

(2) Per una dimostrazione di tale fatto cfr. F. SEVERI: *Lezioni di Analisi.* (I Vol., Cap. V, 7, n. 20; Zanichelli, Bologna, 1933).

(3) Un insieme si dice *compatto* quando ogni suo sottoinsieme infinito ha almeno un punto di accumulazione. Cfr. M. FRÉCHET: *Les Espaces Abstraits.* (Gauthier-Villars, Paris, 1929, p. 66).

Un primo ben noto esempio, in senso affermativo, era stato dato fin dal 1913 da L. TONELLI [4]. Dopo aver dimostrato, senza ricorrere al postulato delle infinite scelte, il teorema di ASCOLI, ossia che ogni insieme di infinite funzioni ugualmente continue e ugualmente limitate ammette sempre una funzione di accumulazione [5], il TONELLI osservava esplicitamente che ove tali insiemi fossero chiusi il procedimento usato faceva corrispondere ad ogni insieme un proprio elemento ben determinato.

In un primo tempo ho dimostrato che la proprietà in discorso si estende agli insiemi chiusi dello spazio Hilbertiano [6].

È da osservare che un insieme dello spazio Hilbertiano non è in generale compatto, e che quindi tale proprietà non dipende dalla compattezza dell'insieme.

Volendo però dimostrare il principio di ZERMELO per gli insiemi chiusi di uno spazio non compatto è necessario abbandonare i processi logici che si seguono, ad esempio, nell'S_n, in quanto che essi si fondano sul fatto che nell'S_n vale il teorema di BOLZANO-WEIERSTRASS [7].

In questo lavoro dimostro il principio di ZERMELO per gli insiemi chiusi di spazi molto più generali, comprendenti ad esempio come casi particolari lo spazio Hilbertiano e quello fondato sulla metrica di FRÉCHET [8].

È da rilevare che tali spazi non sono necessariamente metrici, nel senso di HAUSDORFF [9]; cioè per essi non è definita una distanza Δ soddisfacente ai tre noti assiomi:

I°) $\Delta(P, P)=0$

II°) $\Delta(P, P')=\Delta(P', P)>0$ per $P \neq P'$

III°) $\Delta(P, P'')\leq \Delta(P, P')+\Delta(P', P'')$

dove $\Delta(P, P')$ indica la distanza dei punti P e P'.

---

(4) L. TONELLI: *Sul valore di un certo ragionamento.* (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, 1913); *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, I Vol., Cap. II, 2, n. 22, Osservazione II; Zanichelli, Bologna, 1921).

(5) Il TONELLI dice che $f(x)$ è *funzione di accumulazione* di un insieme di funzioni se, preso ad arbitrio un numero positivo ϱ, esistono sempre nell'insieme infinite funzioni che appartengono *propriamente* all'intorno ϱ della $f(x)$. Si dice poi che $f_1(x)$ appartiene propriamente all'intorno ϱ di $f(x)$ se, essendo (a, b) e (c, d) gli intervalli in cui sono definite f e f_1, si ha

$$\begin{array}{ll} |f(x)-f_1(x)|\leq\varrho & \text{per ogni } x \text{ comune ai due intervalli;} \\ a-x\leq\varrho,\ |f(a)-f_1(x)|\leq\varrho & \text{per ogni } x<a \text{ ed appartenente a } (c, d); \\ x-b\leq\varrho,\ |f(b)-f_1(x)|\leq\varrho & \text{per ogni } x>b \text{ ed appartenente a } (c, d); \\ & \text{ed è inoltre } |a-c|\leq\varrho,\ |b-d|\leq\varrho. \end{array}$$

(6) S. FAEDO: *Il principio di Zermelo nello spazio Hilbertiano.* (Atti del II° Congresso dell'Unione Matematica Italiana in Bologna, 1940).

(7) S. FAEDO, loc. cit.

(8) M. FRÉCHET, loc. cit. in (3), p. 81.

(9) F. HAUSDORFF: *Mengenlehre.* (Berlin, 1935, III ed., VI Cap., 20, p. 94).

Gli spazi che qui si considerano possiedono una distanza che soddisfa al primo assioma e, invece che al II°) e al III°), alle seguenti più larghe condizioni

II') $$\Delta(P, P') = \Delta(P', P) \geqslant 0 \quad \text{per} \quad P \neq P'.$$

Indicata con $\Delta(P)$ la distanza di P da un punto fisso 0, detto origine delle coordinate, in corrispondenza ad ogni numero positivo M, si può determinare un $K_M \geqslant 1$ tale che, se è $\Delta(P) \leqslant M$, $\Delta(P^*) \leqslant M$, sia

III') $$\Delta(P, P^*) \leqslant K_M [\Delta(P) + \Delta(P^*)].$$

Dopo aver dimostrato il principio di ZERMELO per questi spazi generali, esamino alcuni casi particolari e infine ne deduco dei corollari che mi sembrano non privi d'interesse.

In un successivo lavoro considererò la stessa questione per un altro tipo di spazi, riottenendo in particolare il teorema già citato del TONELLI.

Lo spazio S_Δ.

1. - Chiamo *punto* P una successione $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ di numeri reali e scriverò

$$P \equiv (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots).$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ si diranno la prima, seconda,...., ennesima,.... coordinata di P.

Chiamo *spazio* S l'insieme di tutti i punti P.

Dico *modulo di* P il valore, finito o no, di una funzione univoca e reale dei valori assoluti di tutte le coordinate $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$: $\Delta(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|, \ldots)$ [che scriverò anche per semplicità $\Delta(P)$], soddisfacente alle seguenti ipotesi:

I) *Qualunque sia* P *di* S *è* $\Delta(P) \geqslant 0$.

II) Se tutte le coordinate di P sono nulle — nel qual caso P sarà detto l'*origine* 0 dello spazio S — è $\Delta(P) = \Delta(0) = 0$.

III) $\Delta(P)$ è funzione *non decrescente e continua* del *valore assoluto* $|a_n|$ di ciascuna coordinata a_n.

IV) Detto *punto ridotto di indice* m *di* P il punto P_m che ha le sue prime m coordinate uguali a quelle corrispondenti di P e tutte le altre nulle, se *i moduli di tutti i punti ridotti risultano superiormente limitati,* $\Delta(P)$ *è finito.*

V) Detto *punto resto di indice* m *di* P il punto P^m che ha le sue prime m coordinate nulle e le rimanenti uguali alle corrispondenti di P, *se* $\Delta(P)$ *è finito è anche* $\lim\limits_{m \to \infty} \Delta(P^m) = 0$.

Se $P \equiv (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, $P^* \equiv (a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*, \ldots)$ sono due punti di S di modulo finito, chiamo *distanza* fra questi due punti, $\Delta(P, P^*)$, il *modulo del punto* $D \equiv (a_1 - a_1^*, a_2 - a_2^*, \ldots, a_n - a_n^*, \ldots)$, ossia pongo

$$\Delta(P, P^*) = \Delta(|a_1 - a_1^*|, |a_2 - a_2^*|, \ldots, |a_n - a_n^*|, \ldots).$$

VI) In corrispondenza ad ogni numero positivo M si può determinare un $K_M \geqslant 1$ tale che, se è $\Delta(P) \leqslant M$, $\Delta(P^*) \leqslant M$, risulti

$$\Delta(P, P^*) \leqslant K_M[\Delta(P) + \Delta(P^*)].$$

DEFINIZIONE. - *Dicesi spazio* S_Δ *l'insieme di tutti i punti di* S *che hanno modulo finito.*

La definizione di distanza data per S_Δ soddisfa alla prima delle proprietà fondamentali del concetto di distanza [HAUSDORFF (10)]

$$\Delta(P, P) = 0$$

e, invece che alla seconda, alla più generale disuguaglianza

$$\Delta(P, P^*) = \Delta(P^*, P) \geqslant 0$$

per $P \not\equiv P^*$.

Quanto alla terza proprietà, ossia la disuguaglianza triangolare

$$\Delta(P, P') \leqslant \Delta(P, P'') + \Delta(P'', P'),$$

nelle nostre considerazioni è sostituita dalla condizione meno restrittiva VI).

La VI) si può anche esprimere così:

In corrispondenza ad ogni numero positivo M si può determinare un $K_M \geqslant 1$ tale che, se è $\Delta(P) \leqslant M$ e $\Delta(P^*) \leqslant M$ è

$$\Delta(P, P^*) \leqslant K_M[\Delta(P, 0) + \Delta(0, P^*)].$$

Tale condizione è meno restrittiva della disuguaglianza triangolare; si osservi inoltre che, al crescere di M, K_M può non essere superiormente limitato.

Lo spazio S_Δ non è quindi, in generale, uno spazio metrico nel senso di HAUSDORFF.

Dalle ipotesi fatte sulla funzione Δ si deducono alcune conseguenze notevoli.

Se è $\Delta(P) \leqslant M$ per la proprietà III) è anche $\Delta(P^m) \leqslant M$ e quindi per la VI) si può determinare un K_M tale che per tutti gli m sia

$$\Delta(P, P^m) \leqslant K_M[\Delta(P) + \Delta(P^m)]$$

e cioè

$$\Delta(P_m) \leqslant K_M[\Delta(P) + \Delta(P^m)],$$

---

(10) F. HAUSDORFF, loc. cit. in (9).

e per la V)

$$\lim_{m\to\infty} \Delta(P_m) \leqslant K_M \Delta(P)$$

e quindi, essendo per la III) $\Delta(P_m)$ funzione non decrescente di m,

$$\Delta(P_m) \leqslant K_M \Delta(P). \tag{1}$$

Di qui segue che, se è $\Delta(P)=0$ è pure $\Delta(P_m)=0$.

Nel caso particolare in cui $\Delta(P)$ sia *funzione crescente e continua* di ogni $|a_n|$, segue che *se è* $\Delta(P)=0$ *è* $P\equiv 0$.

Inoltre, sempre essendo $\Delta(P)\leqslant M$ è, per (1) $\Delta(P_m)\leqslant K_M M$ e per la III) si può determinare un K'_M tale che

$$\Delta(P_m,\, P^m) \leqslant K'_M [\Delta(P_m) + \Delta(P^m)]$$

onde, essendo $\Delta(P_m,\, P^m)=\Delta(P)$,

$$\Delta(P) \leqslant K'_M [\Delta(P_m) + \Delta(P^m)], \tag{2}$$

Di qui, per la V), segue

$$\Delta(P) \leqslant K'_M \lim_{m\to\infty} \Delta(P_m). \tag{3}$$

La totalità dei punti P^* di S_Δ tali che sia $\Delta(P,\, P^*) \leqslant R$ sarà detta ipersfera di centro P e raggio R.

Dicesi intorno ε ($\varepsilon>0$) di un punto P di S_Δ la totalità dei punti di S_Δ che appartengono all'ipersfera di centro P e raggio ε.

Sia dato un insieme I di punti di S_Δ. Un punto P di S_Δ dicesi *punto di accumulazione* di I, se in ogni intorno ε di P cadono infiniti punti di I. I si dirà *chiuso* se tutti gli eventuali suoi punti di accumulazione sono anche punti di I.

È da osservare che in generale per lo spazio S_Δ non vale il teorema di BOLZANO-WEIERSTRASS, ossia non è detto che, se I possiede infiniti elementi, abbia di conseguenza almeno un punto di accumulazione ([11]).

([11]) Il teorema di BOLZANO-WEIERSTRASS non vale neppure per lo spazio Hilbertiano, che è, come vedremo, un caso particolare di S_Δ. Cfr. ad esempio il mio lavoro citato in ([6]).

Dimostrazione del principio di Zermelo per gli insiemi chiusi di S_Δ.

2. - TEOREMA: *Dato un insieme I chiuso di S_Δ, si può dare una legge con cui scegliere un punto di I.*

La dimostrazione è divisa in tre parti:

a) si costruisce una conveniente successione di sottoinsiemi di I, ognuno contenuto nel precedente;

b) da questa si deduce una successione di numeri reali $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \ldots$ e si dimostra ehe essa rappresenta un punto A di S_Δ;

c) si fa vedere che A è un punto di I.

DIMOSTRAZIONE: Se 0 appartiene ad I, si scelga 0 stesso.

In caso contrario sia $\varrho \geqslant 0$ l'estremo inferiore dei moduli dei punti di I, e sia $\mathfrak{J}_0$ la parte di I contenuta nella ipersfera di centro 0 e raggio $R = \varrho + 1$.

Se $\mathfrak{J}_0$ consta di un numero finito di punti, la legge di scelta può essere fissata nel modo seguente:

Si considerino dapprima i punti di $\mathfrak{J}_0$ per cui la prima coordinata a_1 ha il valore massimo; tra tutti questi punti, quelli per cui a_2 ha il valore massimo,..... Così proseguendo, essendo $\mathfrak{J}_0$ costituito di un numero finito di punti, dopo un numero finito di operazioni si arriva a fissare un punto in $\mathfrak{J}_0$ e quindi in I.

Andiamo ora a studiare il caso in cui $\mathfrak{J}_0$ sia costituito da infiniti punti.

a) *Ci costruiremo una successione di insiemi non vuoti di I, ognuno contenuto nel precedente.*

Sia $\delta_1 \geqslant 0$ il confine inferiore di $|a_1|$, dove a_1 è la prima coordinata di un punto di $\mathfrak{J}_0$. Indichiamo con $\mathfrak{J}_1'$ il sottoinsieme, non vuoto, di $\mathfrak{J}_0$ per cui è $|a_1| \leqslant \delta_1 + 1$ e sia α_{11} il confine superiore delle a_1 dei punti di $\mathfrak{J}_1'$.

È

$$|\alpha_{11}| \leqslant \delta_1 + 1$$

ed inoltre, per la (1), se P è un punto di $\mathfrak{J}_0$, essendo $\Delta(P) \leqslant R$, si può determinare un $K \geqslant 1$ e indipendente da P, per cui è, per ogni intero positivo m,

$$\Delta(P_m) \leqslant K\Delta(P) \leqslant KR. \tag{4}$$

Per la continuità della funzione $\Delta(|a_1|, 0, 0, \ldots)$ rispetto ad $|a_1|$ è quindi

$$\Delta(|\alpha_{11}|, 0, 0, \ldots) \leqslant KR$$

e si può determinare un $\sigma_1 > 0$ tale che, se è

(5) $$\alpha_{11} - \sigma_1 \leq a_1 \leq \alpha_{11},$$

e se $\bar{a}_1$ è un qualsiasi numero pure soddisfacente alla $\alpha_{11} - \sigma_1 \leq \bar{a}_1 \leq \alpha_{11}$ risulti

$$|\Delta(|a_1|, 0, 0, \ldots) - \Delta(|\bar{a}_1|, 0, 0, \ldots)| \leq 1, \qquad \Delta(|a_1 - \bar{a}_1|, 0, 0, \ldots) \leq 1.$$

Intenderemo di scegliere per σ_1 il massimo dei valori che esso può assumere e che risultano ≤ 1.

Sia $\mathfrak{J}_1''$ l'insieme, certamente non vuoto, dei punti di $\mathfrak{J}_1'$ la cui prima coordinata soddisfa alla (5).

Per ogni punto P di $\mathfrak{J}_1''$ si può determinare un intero N, variabile da punto a punto, per cui sia

$$\Delta(P^m) \leq 1 \quad \text{per} \quad m \geq N,$$

questo in virtù dell'ipotesi che, se $\Delta(P)$ è finito, è $\lim_{m \to \infty} \Delta(P^m) = 0$.

Sia $\mathfrak{J}_1$ l'insieme, non vuoto, dei punti di $\mathfrak{J}_1''$ per cui N assume il valore minimo N_1. Tale minimo esiste perchè N assume solo valori interi positivi.

I punti P di $\mathfrak{J}_1$ sono dunque tali che per la loro prima coordinata è

$$\alpha_{11} - \sigma_1 \leq a_1 \leq \alpha_{11}$$
$$|\Delta(|\alpha_{11}|, 0, 0, \ldots) - \Delta(|a_1|, 0, 0, \ldots)| \leq 1$$
$$\Delta(|a_1 - \bar{a}_1|, 0, 0, \ldots) \leq 1, \quad \text{se è pure} \quad \alpha_{11} - \sigma_1 \leq \bar{a}_1 \leq \alpha_{11},$$
$$\Delta(P^m) \leq 1 \quad \text{per} \quad m \geq N_1.$$

Andiamo ora a costruire un insieme non vuoto $\mathfrak{J}_2$ di punti di $\mathfrak{J}_1$.

Sia $\delta_2 \geq 0$ il confine inferiore di $|a_2|$, dove a_2 è la seconda coordinata di un punto generico di $\mathfrak{J}_1$. Con $\mathfrak{J}_2'$ indichiamo il sottoinsieme non vuoto di $\mathfrak{J}_1$ per cui è $|a_2| \leq \delta_2 + 1$, e sia $\alpha_{2,2}$ il confine superiore delle a_2 dei punti di $\mathfrak{J}_2'$. È $|\alpha_{2,2}| \leq \delta_2 + 1$ e ancora, se P è un punto di $\mathfrak{J}_2'$, è $\Delta(P_2) \leq KR$.

La funzione $\Delta(|a_1|, |a_2|, 0, 0, \ldots)$ è continua non decrescente rispetto a $|a_1|$ e $|a_2|$ separatamente; onde è continua anche rispetto alla coppia $(|a_1|, |a_2|)$.

Nel campo

$$\alpha_{11} - \sigma_1 \leq a_1 \leq \alpha_{11}$$
$$\alpha_{22} - 1 \leq a_{21} \leq \alpha_{22}$$

tale funzione è quindi uniformemente continua e si può determinare un σ_2, con $0 < \sigma_2 \leq \sigma_1$, in modo che, se per due punti (a_1, a_2), $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ di tale campo è

$$|a_1 - \bar{a}_1| \leq \sigma_2$$
$$|a_2 - \bar{a}_2| \leq \sigma_2,$$

ne segua

$$|\Delta(|a_1|, |a_2|, 0, 0,....) - \Delta(|\bar{a}_1|, |\bar{a}_2|, 0, 0,....)| \leqslant \frac{1}{2},$$

$$\Delta(|a_1 - \bar{a}_1|, |a_2 - \bar{a}_2|, 0, 0,....) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Intenderemo di scegliere per σ_2 il massimo dei valori che esso può assumere.

Indichiamo con $\mathfrak{J}_2''$ l'insieme dei punti di $\mathfrak{J}_2'$ la cui coordinata a_2 soddista alla disuguaglianza

$$\alpha_{22} - \sigma_2 \leqslant a_2 \leqslant \alpha_{22}.$$

Tale insieme non è certamente vuoto.

Per ogni punto P di $\mathfrak{J}_2''$ si può determinare N in modo che risulti

$$\Delta(P^m) \leqslant \frac{1}{2}, \quad \text{per} \quad m \geqslant N.$$

Consideriamo i punti di $\mathfrak{J}_2''$ per cui N assume il suo minimo valore N_2.

La prima coordinata di tali punti ha un confine superiore α_{12}; ed è

$$\alpha_{11} - \sigma_1 \leqslant \alpha_{12} \leqslant \alpha_{11}.$$

Indichiamo con $\mathfrak{J}_2$ l'insieme, certamente non vuoto, dei punti di $\mathfrak{J}_2'$ per cui è $N = N_2$ ed inoltre è

$$\alpha_{12} - \sigma_2 \leqslant a_1 \leqslant \alpha_{12}.$$

Per i punti $P \equiv (a_1, a_2,....)$ di $\mathfrak{J}_2$ è quindi

$$\alpha_{12} - \sigma_2 \leqslant a_1 \leqslant \alpha_{12}, \qquad \alpha_{22} - \sigma_2 \leqslant a_2 \leqslant \alpha_{22}$$

$$\Delta(P^m) \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{per} \quad m > N_2$$

ed inoltre, se $\bar{a}_1$ e $\bar{a}_2$ sono due numeri qualsiasi tali che

$$\alpha_{12} - \sigma_2 \leqslant \bar{a}_1 \leqslant \alpha_{12}, \qquad \alpha_{22} - \sigma_2 \leqslant \bar{a}_2 \leqslant \alpha_{22},$$

è

$$|\Delta(|a_1|, |a_2|, 0, 0,....) - \Delta(|\bar{a}_1|, |\bar{a}_2|, 0, 0,....)| \leqslant \frac{1}{2},$$

$$\Delta(|a_1 - \bar{a}_1|, |a_2 - \bar{a}_2|, 0, 0,....) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Così proseguendo si vengono a definire le successioni

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{r} \alpha_{1,1} \geqslant \alpha_{1,2} \geqslant .... \geqslant \alpha_{1,\nu} \geqslant .... \\ \alpha_{2,2} \geqslant .... \geqslant \alpha_{2,\nu} \geqslant .... \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_{r,r} \geqslant .... \geqslant \alpha_{r,\nu} \geqslant .... \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array} \right.$$

$$\delta_1, \ \delta_2, ..., \ \delta_r \quad \text{con} \quad \delta_r > 0.$$

È

$$(7) \qquad \begin{cases} |\alpha_{1,\nu}| \leqslant \delta_1 + 1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \\ |\alpha_{r,\nu}| \leqslant \delta_r + 1. \end{cases}$$

Si ottengono ancora le successioni

$$(8) \qquad \sigma_1, \quad \sigma_2, \dots, \quad \sigma_r, \dots$$

con $0 < \sigma_r \leqslant \sigma_{r-1}$, e

$$(9) \qquad N_1, \quad N_2, \dots, \quad N_r, \dots,$$

con N_r intero positivo.

Infine si viene ad avere una successione di insiemi *non vuoti*

$$(10) \qquad \mathfrak{I}_0 > \mathfrak{I}_1 > \mathfrak{I}_2 > \dots > \mathfrak{I}_r > \dots$$

ognuno contenuto nel precedente, e tutti in I, e che godono delle seguenti proprietà:

I punti di $\mathfrak{I}_r$ hanno coordinate a_1, $a_2, \dots, a_n, \dots$ tali che

$$(11) \qquad \begin{cases} \alpha_{1,r} - \sigma_r \leqslant a_1 \leqslant \alpha_{1,r} \\ \alpha_{2,r} - \sigma_r \leqslant a_2 \leqslant \alpha_{2,r} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{r,r} - \sigma_r \leqslant a_r \leqslant \alpha_{r,r} \end{cases}$$

ed è, per ogni $\nu > r$,

$$(12) \qquad \begin{cases} \alpha_{1,r} - \sigma_r \leqslant \alpha_{1,\nu} \leqslant \alpha_{1,r} \\ \alpha_{2,r} - \sigma_r \leqslant \alpha_{2,\nu} \leqslant \alpha_{2,r} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{r,r} - \sigma_r \leqslant \alpha_{r,\nu} \leqslant \alpha_{r,r}. \end{cases}$$

Inoltre, la funzione $\Delta(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_r|, 0, 0, \dots)$ è tale che se è

$$(13) \qquad \begin{cases} \alpha_{1,r} - \sigma_r \leqslant \bar{a}_1 \leqslant \alpha_{1,r} \\ \alpha_{2,r} - \sigma_r \leqslant \bar{a}_2 \leqslant \alpha_{2,r} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{r,r} - \sigma_r \leqslant \bar{a}_r \leqslant \alpha_{r,r} \end{cases}$$

ne segue

$$(14) \qquad \begin{cases} |\Delta(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_r|, 0, 0, \dots) - \Delta(|\bar{a}_1|, |\bar{a}_2|, \dots, |\bar{a}_r|, 0, 0, \dots)| \leqslant \frac{1}{r} \\ \Delta(|a_1 - \bar{a}_1|, |a_2 - \bar{a}_2|, \dots, |a_r - \bar{a}_r|, 0, 0, \dots) \leqslant \frac{1}{r}. \end{cases}$$

Per le (13) tale disuguaglianza vale anche fra due qualunque punti di $\mathfrak{I}_r$.
Infine, per $m > N_r$ e per ogni punto P di $\mathfrak{I}_r$, è

$$\Delta(P^m) \leq \frac{1}{r}. \tag{15}$$

b) Costruiamo ora un punto A di S_Δ.

Per le (6) e (7) la successione non crescente

$$\alpha_{1,1}, \quad \alpha_{1,2}, \ldots, \quad \alpha_{1,\nu}, \ldots$$

è anche inferiormente limitata e perciò ammette un limite finito α_1.

Analogamente è

$$\lim_{\nu \to \infty} \alpha_{n,\nu} = \alpha_n \tag{16}$$

con α_n numero finito.

Per le (12) è poi

$$\alpha_{n,n'} - \sigma_{n'} \leq \alpha_n \leq \alpha_{n,n'} \quad \text{per ogni } n' \geq n. \tag{17}$$

Posto

$$A \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$$

dimostriamo che A appartiene a S_Δ, ossia che è finito $\Delta(A)$.

Per la proprietà (IV) della funzione Δ, basta dimostrare che $\Delta(A_m)$ è superiormente limitato.

È intanto

$$\lim_{m \to \infty} \Delta(A_m) \leq KR.$$

Infatti, se ciò non fosse, si potrebbe determinare un $\varepsilon > 0$ ed un $\overline{m}$ tali da aversi, per $m > \overline{m}$

$$\Delta(A_m) > KR + \varepsilon. \tag{18}$$

Fissato allora $m > \overline{m}$ e tale che sia $m\varepsilon > 1$, per le (17) e (14) se $P \equiv (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ è il generico punto di $\mathfrak{I}_m$ si ha

$$|\Delta(A_m) - \Delta(P_m)| \leq \frac{1}{m}$$

e quindi

$$\Delta(A_m) \leq \Delta(P_m) + \frac{1}{m}$$

e per la (1)

$$\Delta(A_m) \leq K\Delta(P) + \frac{1}{m} < KR + \varepsilon,$$

che contraddice la (18).

Perciò è $\lim_{m\to\infty} \Delta(A_m) \leq KR$; ed essendo $\Delta(A_m)$ funzione non decrescente di m, è anche $\Delta(A_m) \leq KR$ e per la IV) $\Delta(A)$ è finito, e quindi $A \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots)$ è un punto di S_Δ.

c) Dimostriamo ora che il punto A di S, che si è costruito è un punto di I.

Per i punti P di $\mathfrak{I}_0$ è $\Delta(P^m) \leq \Delta(P) \leq R$; ed essendo $\Delta(A^m) \leq \Delta(A)$ per la VI) si può determinare un $K_1 \geq 1$ in modo da aversi

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta(A, P) \leq K_1[\Delta(A) + \Delta(P)] \leq K_1[\Delta(A) + R] \\ \Delta(A^m, P^m) \leq K_1[\Delta(A^m) + \Delta(P^m)]. \end{array}\right. \tag{19}$$

E siccome $K_1[\Delta(A) + R]$ è un numero indipendente da P per la (2) si può determinare $K_2 \geq 1$ in modo che sia

$$\Delta(A, P) \leq K_2[\Delta(A_m, P_m) + \Delta(A^m, P^m)]. \tag{20}$$

Si fissi ora $\varepsilon > 0$ ad arbitrio e sia r_1 il minimo intero tale che

$$r_1 \geq \frac{4K_1K_2}{\varepsilon}; \tag{21}$$

si scelga poi nella successione (9) il numero N_{r_1}.

Poichè A è un punto di S_Δ per la V) proprietà è $\lim_{m\to\infty} \Delta(A^m) = 0$.

Si determini quindi il minimo intero Q tale che per $m > Q$ sia

$$\Delta(A^m) < \frac{\varepsilon}{4K_1K_2}. \tag{22}$$

Si sono così determinati gli interi r_1, N_{r_1}, Q, e sia $T-1$ il massimo tra questi.

Ciò premesso, sia P un punto qualsiasi di $\mathfrak{I}_T$. Essendo $T > Q$, dalla (22) segue

$$\Delta(A^T) < \frac{\varepsilon}{4K_1K_2}. \tag{23}$$

Essendo poi $T > r_1$, $\mathfrak{I}_T$ è contenuto in $\mathfrak{I}_{r_1}$, e per la (15) e per essere $T > N_{r_1}$ si ha (tenendo conto della (21))

$$\Delta(P^T) \leq \frac{1}{r_1} \leq \frac{\varepsilon}{4K_1K_2}. \tag{24}$$

Dalle (19), (23), (24), segue pertanto

$$\Delta(A^T, P^T) \leq K_1[\Delta(A^T) + \Delta(P^T)] < \frac{\varepsilon}{2K_2}. \tag{25}$$

Osserviamo ora che la (17) dà

$$\begin{aligned}&\alpha_{1,T}-\sigma_T \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_{1,T}\\&\alpha_{2,T}-\sigma_T \leqslant \alpha_2 \leqslant \alpha_{2,T}\\&\dots\dots\dots\dots\\&\alpha_{T,T}-\sigma_T \leqslant \alpha_T \leqslant \alpha_{T,T};\end{aligned}$$

perciò dalla (14) si deduce

$$\Delta(A_T, P_T) \leqslant \frac{1}{T} \leqslant \frac{1}{r_1} < \frac{\varepsilon}{2K_2}. \tag{26}$$

In definitiva, per le (19), (23), (24), ogni punto P di $\mathfrak{I}_T$ è tale che è

$$\Delta(A, P) \leqslant K_2\left[\frac{\varepsilon}{2K_2}+\frac{\varepsilon}{2K_2}\right]=\varepsilon.$$

Questa disuguaglianza esprime che i punti di $\mathfrak{I}_T$ appartengono all'intorno ε di A.

Se ad ogni ε corrisponde un insieme del tipo di $\mathfrak{I}_T$ costituito di infiniti punti, allora A è punto di accumulazione di I, ed essendo I chiuso A appartiene ad I. Se, invece, esiste un ε il cui corrispondente insieme $\mathfrak{I}_T$ consta di un numero finito di punti, A deve senz'altro appartenere a $\mathfrak{I}_T$ e quindi ad I, perchè (dovendo ogni $\mathfrak{I}_r$ con $r > T$ essere costituito tutto di punti di $\mathfrak{I}_T$) in caso contrario si potrebbe determinare un ε' (minore di ε e della minima distanza di A dai punti di $\mathfrak{I}_T$) il cui insieme corrispondente $\mathfrak{I}_{T'}$ risulterebbe vuoto.

Casi particolari notevoli del teorema generale.

Andiamo ora ad esaminare alcuni tipi particolarmente interessanti di spazi S_Δ.

Per gli insiemi chiusi di tali spazi è quindi dimostrato il principio di ZERMELO, in virtù del teorema generale dato.

1) *Spazio* (E_ω) *di* M. FRÉCHET [12].

Ogni punto P di tale spazio è definito da una successione $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ di coordinate, ed è

$$\Delta(P)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\,\frac{|a_n|}{1+|a_n|}. \tag{27}$$

Tale spazio, com'è facile verificare, è uno spazio S_Δ.

Come casi particolari di (E_ω) il FRÉCHET ha esplicitamente considerato i seguenti:

[12] M. FRÉCHET, loc. cit. pp. 76-81.

a) *Spazio R* in cui ogni punto ha un numero finito non limitato di coordinate. Un punto P ha per coordinate $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ nulle da un certo punto in poi. La distanza è definita dalla (27).

b) *Spazio polinomiale* (P) costituito da tutti i polinomi a coefficienti reali. Sia $P(x) \equiv P$ un polinomio. Indichiamo con $P_n(x)$ il massimo di $|P(x)|$ per $|x| \leq n$. Si definisce

$$\Delta(P) = \frac{P_1(x)}{1+P_1(x)} + \frac{1}{2!}\frac{P_2(x)}{1+P_2(x)} + ... + \frac{1}{n!}\frac{P_n(x)}{1+P_n(x)} + ...$$

È immediata l'estensione allo spazio delle funzioni intere.

2) *Spazio Hilbertiano* (H) (13).

È lo spazio dei punti $P \equiv (a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ tale che $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ risulti convergente. È

$$\Delta(P) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2}.$$

È noto che tale spazio è omeomorfo a quello delle funzioni sommabili su un dato insieme e a quadrato sommabile, quando come punto di tale spazio si pensi la totalità di tutte le funzioni sommabili e a quadrato sommabile in I e differenti al più in un insieme di punti di misura nulla. Se è $f(x) \equiv P$, è

$$\Delta(P) = \sqrt{\int_I f^2(x) dx}.$$

3) *Spazio* (A) *delle serie assolutamente convergenti* (14).

$P \equiv (a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ è un punto di (A) se la serie $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ è assolutamente convergente ed è

$$\Delta(P) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

4) Si è considerato anche lo *spazio Pseudo-Hilbertiano* (H) (15).

È lo spazio $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ per cui risulta finito

$$\Delta(P) = \left[\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

con $p \geq 1$, non necessariamente intero.

Anche di tale spazio è immediato il significato funzionale.

Per $p=1$ si ottiene lo spazio (A); per $p=2$ lo spazio (H).

---

(13) S. FAEDO, loc. cit.

(14) M. FRÉCHET, loc. cit. p. 84.

(15) F. HAUSDORFF, loc. cit. pp. 100-101.

Corollari.

Per gli insiemi chiusi dello spazio S_Δ si stabiliscono immediatamente le seguenti proposizioni:

I: *Se in uno spazio S_Δ compatto si ha una successione $\{I\}: I_1, I_2, I_3,..., I_n,...$ di insiemi chiusi, ognuno contenuto nel precedente, esiste almeno un punto comune a tutti gli insiemi della successione.*

Infatti, scelto un punto da ogni insieme di $\{I\}$, secondo la legge generale data, si ottiene una successione, ogni punto di accumulazione della quale appartiene agli insiemi chiusi $I_1, I_2,...., I_n,....$

II: *Se in uno spazio S_Δ compatto si ha un insieme I di insiemi chiusi, esiste almeno un punto P, tale che in ogni intorno di esso si trovano infiniti punti appartenenti a infiniti insiemi di I.*

Questo teorema è una estensione del teorema di BOLZANO-WEIERSTRASS per gli spazi compatti. La dimostrazione, come nel caso precedente, si ottiene immediatamente scegliendo da ogni insieme di I un punto Q; P non è che un punto di accumulazione dei Q.