

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

ALDO GHIZZETTI

Sui coefficienti di Eulero-Fourier di una funzione limitata

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 9,
n° 3-4 (1940), p. 215-223

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1940_2_9_3-4_215_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1940, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUI COEFFICIENTI DI EULERO-FOURIER
DI UNA FUNZIONE LIMITATA (*)

di ALDO GHIZZETTI (Torino).

Sia $f(t)$ una funzione integrabile nell'intervallo $(0, 2\pi)$ ed

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

$$(1) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos ntdt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \operatorname{sen} ntdt$$

$$(n=1, 2, \dots)$$

i suoi coefficienti di EULERO-FOURIER. Supponiamo che la funzione $f(t)$ sia *limitata* e precisamente che soddisfi alla

$$(2) \quad 0 \leq f(t) \leq 1 \quad (1).$$

In queste condizioni si possono dimostrare delle notevoli disuguaglianze relative ai coefficienti (1), le quali fissano il massimo e il minimo valore possibili per un generico coefficiente a_n o b_n in funzione dei coefficienti precedenti. Ritenendo che tali disuguaglianze non siano ancora state osservate, mi propongo in questa Nota di iniziare l'argomento indicando quelle relative ai casi $n=1$,

(*) In relazione all'argomento qui trattato, segnaliamo il lavoro di C. CARATHÉODORY ed L. FEJÉR: *Über den Zusammenhang der Extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und über den Picard-Landau'schen Satz*. (Rend. Circ. Mat. di Palermo, tomo 32, 1911, pp. 218-239) ove viene dato (p. 225) un teorema sul massimo e il minimo di una funzione continua in $(0, 2\pi)$ della quale sono noti i primi $2n+1$ coefficienti di EULERO-FOURIER.

(1) Se fosse invece

$$(2') \quad m \leq f(t) \leq M$$

basterebbe sostituire alla $f(t)$ la $\frac{f(t)-m}{M-m}$ per ridurci alla (2). Per passare dalle formule relative alla ipotesi (2) a quelle relative all'ipotesi (2') basta cambiare a_0 in $\frac{a_0-m}{M-m}$ ed a_n , b_n in $\frac{a_n}{M-m}$, $\frac{b_n}{M-m}$.

$n=2$, le quali si possono riassumere nelle due formule seguenti

$$(3) \quad \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \leq \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi a_0$$

$$(4) \quad \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \leq \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi a_0 - \frac{\pi}{2} (a_1^2 + b_1^2) \operatorname{tg} \frac{\pi a_0}{2}.$$

La (3) sarà dimostrata come caso particolare della

$$(3') \quad \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \leq \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi a_0, \quad (n=1, 2, \dots)$$

a proposito della quale non deve stupire il fatto che il secondo membro non dipende da n perchè, per ogni valore di n , esistono delle $f(t)$ per cui vale il segno di uguaglianza.

Il metodo usato per stabilire le (3), (4) vale però in generale e può servire anche per altri sistemi di funzioni ortogonali; di tutto ciò mi occuperò in lavori successivi.

1. - Nelle condizioni suddette si ha per il coefficiente a_0 la limitazione ovvia

$$(4) \quad 0 \leq a_0 \leq 1.$$

Fissato a_0 soddisfacente a quest'ultima, vediamo quali siano il massimo e il minimo valore possibili per il coefficiente a_n . Dico che si ha

$$(5) \quad \boxed{-\frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi a_0 \leq a_n \leq \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi a_0}, \quad (n=1, 2, \dots)$$

ciascuno dei segni di uguaglianza potendo effettivamente sussistere, per ogni valore di n , solo per certe determinate forme della $f(t)$.

Fissato $n \geq 1$, consideriamo infatti la funzione $\varphi_n(t; a_0)$ così definita

$$\varphi_n(t; a_0) = \begin{cases} 1 & \text{ove } \cos nt + \cos \pi a_0 < 0 \\ 0 & \text{ove } \cos nt + \cos \pi a_0 > 0 \end{cases}$$

ed osserviamo subito che, in virtù della (2), si ha

$$(6) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\varphi_n(t; a_0) - f(t)] (\cos nt + \cos \pi a_0) dt \leq 0.$$

Inoltre si trova immediatamente

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_n(t; a_0) dt = a_0, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_n(t; a_0) \cos ntdt = -\frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi a_0.$$

Tenuto conto di ciò e delle (1), la (6) si riduce subito alla

$$-\frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi a_0 - a_n \leq 0$$

ossia alla prima delle disuguaglianze (5).

Dal ragionamento fatto risulta poi che l'uguaglianza $a_n = -\frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi a_0$ può sussistere solo se vale il segno di uguaglianza nella (6), e questo può evidentemente accadere solo se in quasi-tutto l'intervallo $(0, 2\pi)$ si ha $f(t) = \varphi_n(t; a_0)$.

L'altra disuguaglianza (5) risulta poi subito applicando quella già dimostrata alla funzione $f^*(t) = 1 - f(t)$ per la quale $a_0^* = 1 - a_0$, $a_n^* = -a_n$; infatti la $-\frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi a_0^* \leq a_n^*$ diventa $-\frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi(1 - a_0) \leq -a_n$ ossia proprio $a_n \leq \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi a_0$, potendo valere l'uguaglianza solo se $f^*(t) = \varphi_n(t; 1 - a_0)$ ossia se $f(t) = 1 - \varphi_n(t; 1 - a_0) = \varphi_n(t + \frac{\pi}{n}; a_0)$ in quasi-tutto l'intervallo $(0, 2\pi)$ ⁽²⁾.

Per i coefficienti b_n vale pure la limitazione

$$(5') \quad \boxed{-\frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi a_0 \leq b_n \leq \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi a_0}, \quad (n=1, 2, \dots);$$

basta applicare la (5) alla funzione $\bar{f}(t) = f(t + \frac{\pi}{2n})$ ⁽³⁾ per la quale $\bar{a}_0 = a_0$, $\bar{a}_n = b_n$, $\bar{b}_n = -a_n$. E si vede subito che i due segni di uguaglianza valgono rispettivamente per $f(t) = \varphi_n(t - \frac{\pi}{2n}; a_0)$ e per $f(t) = \varphi_n(t + \frac{\pi}{2n}; a_0)$.

Anzi la (5) ha un significato più generale: essa costituisce una limitazione per l'ampiezza $r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ dell' n -esima armonica della $f(t)$. Infatti, applicando la (5) alla funzione $f(t+k)$ si ha che, qualunque sia k , deve essere

$$-\frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi a_0 \leq a_n \cos nk + b_n \operatorname{sen} nk \leq \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi a_0;$$

ne segue facilmente

$$\boxed{r_n \leq \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi a_0}, \quad (n=1, 2, \dots)$$

cioè proprio la (3'). In quest'ultima il segno di uguaglianza vale solo se $f(t)$ coincide con una qualunque delle funzioni $\varphi_n(t+k; a_0)$.

⁽²⁾ D'ora innanzi quando diremo $f(t) = \varphi(t)$ sarà sempre sottintesa la frase « in quasi-tutto l'intervallo $(0, 2\pi)$ ».

⁽³⁾ È sottinteso che pensiamo la $f(t)$ come elemento di una funzione periodica con periodo 2π .

2. - Il problema del n.º 1 si può generalizzare proponendoci la determinazione del massimo e del minimo del coefficiente a_n della $f(t)$ (soddisfacente alla (2)) quando già si conoscono tutti i coefficienti precedenti $a_0, a_1, b_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}$ (e non soltanto a_0 come nel caso già trattato).

Per risolverlo si può seguire una via analoga a quella tenuta al n.º 1. Consideriamo una successione di $2n$ punti $t_0, t_1, \dots, t_{2n-1}$ tali da aversi

$$t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{2n-1} \leq t_0 + 2\pi$$

$$(7) \quad t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_{2n-1} = 0;$$

in virtù di quest'ultima condizione esiste un polinomio trigonometrico di ordine n del tipo

$$Q(t) = \sum_{r=0}^{n-1} (p_r \cos rt + q_r \sin rt) + \cos nt$$

avente per radici $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{2n-1}$.

Consideriamo ora la funzione $\varphi(t)$ che vale 1 ove $Q(t) < 0$ e vale 0 ove $Q(t) > 0$. Sarà (4)

$$\frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{t_0+2\pi} [\varphi(t) - f(t)] Q(t) dt \leq 0$$

ossia

$$(8) \quad \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{t_0+2\pi} [\varphi(t) - f(t)] \cos ntdt + \frac{1}{\pi} \sum_{r=0}^{n-1} \left\{ p_r \int_{t_0}^{t_0+2\pi} [\varphi(t) - f(t)] \cos rtdt + q_r \int_{t_0}^{t_0+2\pi} [\varphi(t) - f(t)] \sin rtdt \right\} \leq 0.$$

Finora ai punti $t_0, t_1, \dots, t_{2n-1}$ abbiamo imposto una sola condizione (la (7)); restano quindi $2n-1$ arbitrarietà e sarà generalmente possibile (salvo accurato esame della cosa) approfittarne per far sì che la funzione $\varphi(t)$ abbia i suoi primi $2n-1$ coefficienti di EULERO-FOURIER $a_0, a_1, \beta_1, \dots, a_{n-1}, \beta_{n-1}$ rispettivamente uguali ai coefficienti $a_0, a_1, b_1, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}$ della data $f(t)$.

Allora nella (8) tutti i termini della Σ risultano nulli, ed essa diventa

$$a_n - a_n \leq 0,$$

mostrando che il minimo valore possibile per il coefficiente a_n è dato da a_n e che tale minimo si raggiunge solo per $f(t) = \varphi(t)$.

(4) Per comodità, approfittando dell'osservazione fatta in nota (3), ci riferiremo d'ora in poi ad un intervallo $(t_0, t_0 + 2\pi)$, anziché all'intervallo $(0, 2\pi)$.

Con considerazioni analoghe a quelle del n.º 1 si studiano poi il massimo di a_n , il minimo e il massimo di b_n , nonchè il massimo di $r_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

L'unica difficoltà sono i dettagli di calcolo nella determinazione della $\varphi(t)$; mi limiterò per ora a svilupparli nel caso $n=2$.

3. - Per studiare il caso $n=2$ occorrerà determinare quattro numeri

$$(9) \quad t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_0 + 2\pi$$

soggetti alla condizione

$$t_3 + t_2 + t_1 + t_0 = 0$$

in modo tale che i coefficienti a_0, a_1, b_1 della funzione

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{in } (t_0, t_1) \\ 0 & \text{in } (t_1, t_2) \\ 1 & \text{in } (t_2, t_3) \\ 0 & \text{in } (t_3, t_0 + 2\pi) \end{cases}$$

risultino rispettivamente uguali ai coefficienti a_0, a_1, b_1 della $f(t)$. Si trova così il sistema

$$(10) \quad \begin{cases} t_3 + t_2 + t_1 + t_0 = 0 \\ t_3 - t_2 + t_1 - t_0 = 2\pi a_0 \\ \text{sen } t_3 - \text{sen } t_2 + \text{sen } t_1 - \text{sen } t_0 = \pi a_1 \\ \cos t_3 - \cos t_2 + \cos t_1 - \cos t_0 = -\pi b_1 \end{cases}$$

ove a_0, a_1, b_1 sono numeri noti soddisfacenti (n.º 1) alle

$$(11) \quad \begin{cases} 0 < a_0 < 1 & (5) \\ a_1^2 + b_1^2 \leq \frac{4}{\pi^2} \text{sen}^2 \pi a_0. \end{cases}$$

Il sistema (10) si risolve elementarmente, e si trova

$$(12) \quad t_0 = -\frac{\pi a_0}{2} - \mu, \quad t_1 = \frac{\pi a_0}{2} - \lambda, \quad t_2 = -\frac{\pi a_0}{2} + \mu, \quad t_3 = \frac{\pi a_0}{2} + \lambda$$

(5) Escludiamo i casi $a_0=0, a_0=1$, in cui tutti i coefficienti a_n, b_n (con $n > 0$) sono nulli. In tali casi i calcoli che seguono presentano delle impossibilità o delle indeterminazioni; delle ovvie modificazioni portano a confermare che $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$.

ove λ, μ sono determinati dalle ⁽⁶⁾

$$(13) \quad \cos \lambda = \frac{\pi}{4} \left(\frac{a_1}{\operatorname{sen} \frac{\pi a_0}{2}} - \frac{b_1}{\operatorname{cos} \frac{\pi a_0}{2}} \right), \quad \cos \mu = \frac{\pi}{4} \left(\frac{a_1}{\operatorname{sen} \frac{\pi a_0}{2}} + \frac{b_1}{\operatorname{cos} \frac{\pi a_0}{2}} \right)$$

$$(13') \quad 0 \leq \lambda \leq \pi, \quad 0 \leq \mu \leq \pi.$$

Costruiamo ora il polinomio trigonometrico

$$Q(t) = p_0 + p_1 \cos t + q_1 \operatorname{sen} t + \cos 2t$$

che ha le radici (12). Lo si ottiene subito osservando che i numeri (12) sono radici di

$$(14) \quad \left[\cos \left(t - \frac{\pi a_0}{2} \right) - \cos \lambda \right] \left[\cos \left(t + \frac{\pi a_0}{2} \right) - \cos \mu \right] = 0$$

e questa, sviluppata e moltiplicata per 2, porge, tenendo conto delle (13)

$$(14') \quad Q(t) = \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{a_1^2}{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi a_0}{2}} - \frac{b_1^2}{\operatorname{cos}^2 \frac{\pi a_0}{2}} \right) + \cos \pi a_0 - \\ - \pi a_1 \operatorname{cotg} \frac{\pi a_0}{2} \cdot \cos t - \pi b_1 \operatorname{tg} \frac{\pi a_0}{2} \cdot \operatorname{sen} t + \cos 2t,$$

ed è facile controllare che questo polinomio $Q(t)$ è effettivamente negativo ove

⁽⁶⁾ I numeri λ, μ esistono certamente perchè

$$\left| \frac{\pi}{4} \left(\frac{a_1}{\operatorname{sen} \frac{\pi a_0}{2}} \mp \frac{b_1}{\operatorname{cos} \frac{\pi a_0}{2}} \right) \right| \leq \frac{\pi \sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{2 \operatorname{sen} \pi a_0} \leq 1$$

in virtù di (11).

Occorre inoltre controllare che i numeri (12) soddisfano effettivamente alle limitazioni (9). Si vede subito che queste equivalgono alle

$$(*) \quad -\pi a_0 \leq \lambda - \mu \leq \pi a_0, \quad \pi a_0 \leq \lambda + \mu \leq 2\pi - \pi a_0$$

le quali sono certe verificate perchè dalle (13) segue

$$a_1^2 + b_1^2 = \frac{4}{\pi^2} (\cos^2 \lambda - 2 \cos \lambda \cos \mu \cos \pi a_0 + \cos^2 \mu)$$

e quindi per (11)

$$\cos^2 \lambda - 2 \cos \lambda \cos \mu \cos \pi a_0 + \cos^2 \mu - \operatorname{sen}^2 \pi a_0 \leq 0$$

ossia

$$[\cos(\lambda + \mu) - \cos \pi a_0] [\cos(\lambda - \mu) - \cos \pi a_0] \leq 0;$$

quest'ultima, unitamente alle (13'), garantisce precisamente le (*).

$\varphi(t)=1$ (cioè in (t_0, t_1) e in (t_2, t_3)) e positivo ove $\varphi(t)=0$ (ossia in (t_1, t_2) e in $(t_3, t_0+2\pi)$) (7).

Allora, per quanto si è detto al n.° 2, si avrà

$$a_2 \leq a_2$$

ove a_2 denota il terzo coefficiente della funzione $\varphi(t)$ dianzi costruita (8):

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{t_0+2\pi} \varphi(t) \cos 2tdt = \frac{1}{2\pi} (\text{sen } 2t_3 - \text{sen } 2t_2 + \text{sen } 2t_1 - \text{sen } 2t_0) = \\ &= \frac{1}{\pi} \text{sen } \pi a_0 (\cos 2\lambda + \cos 2\mu) = \\ &= -\frac{2}{\pi} \text{sen } \pi a_0 + \frac{\pi}{2 \text{sen } \pi a_0} (a_1^2 + b_1^2) + \frac{\pi}{2} (a_1^2 - b_1^2) \text{cotg } \pi a_0. \end{aligned}$$

Applicando poi per il risultato trovato alla funzione $f^*(t)=1-f(t)$ (cfr. n.° 1) e riunendolo al precedente si ha finalmente:

$$(15) \quad \begin{array}{c} -\frac{2}{\pi} \text{sen } \pi a_0 + \frac{\pi}{2 \text{sen } \pi a_0} (a_1^2 + b_1^2) + \frac{\pi}{2} (a_1^2 - b_1^2) \text{cotg } \pi a_0 \leq \\ \leq a_2 \leq \\ \leq \frac{2}{\pi} \text{sen } \pi a_0 - \frac{\pi}{2 \text{sen } \pi a_0} (a_1^2 + b_1^2) + \frac{\pi}{2} (a_1^2 - b_1^2) \text{cotg } \pi a_0 \end{array}$$

il segno di uguaglianza a sinistra potendo valere solo per $f(t)=\varphi(t; a_0, a_1, b_1)$ e quello di destra solo per $f(t)=1-\varphi(t; 1-a_0, -a_1, -b_1)=\varphi(t-\frac{\pi}{2}; a_0, b_1, -a_1)$.

Applicando poi le (15) alla $\bar{f}(t)=f(t+\frac{\pi}{4})$ si deduce

$$(15') \quad \begin{array}{c} -\frac{2}{\pi} \text{sen } \pi a_0 + \frac{\pi}{2 \text{sen } \pi a_0} (a_1^2 + b_1^2) + \frac{\pi}{2} 2a_1 b_1 \text{cotg } \pi a_0 \leq \\ \leq b_2 \leq \\ \leq \frac{2}{\pi} \text{sen } \pi a_0 - \frac{\pi}{2 \text{sen } \pi a_0} (a_1^2 + b_1^2) + \frac{\pi}{2} 2a_1 b_1 \text{cotg } \pi a_0 \end{array}$$

(7) Basta far vedere che $Q(t)$ è non crescente nel punto t_0 , non decrescente nel punto t_1 , ecc. ossia che $Q'(t_0) \leq 0$, $Q'(t_1) \geq 0, \dots$. E ciò segue subito assumendo per $\frac{1}{2} Q(t)$ l'espressione (14); si ha per esempio

$$\frac{1}{2} Q'(t_0) = \frac{1}{2} Q' \left(-\frac{\pi a_0}{2} - \mu \right) = 2 \text{sen } \mu \text{sen } \frac{\lambda + \mu + \pi a_0}{2} \text{sen } \frac{\lambda - \mu - \pi a_0}{2}$$

e, ricordando le (13') e la (*) di nota (6), si vede subito che l'ultimo membro è non positivo.

(8) Questa funzione $\varphi(t)$ sarà indicata nel seguito con $\varphi(t; a_0, a_1, b_1)$ per mettere in evidenza la sua dipendenza dai parametri a_0, a_1, b_1 .

i segni di uguaglianza valendo rispettivamente per $f(t) = \varphi\left(t - \frac{\pi}{4}; a_0, \frac{a_1 + b_1}{\sqrt{2}}, -\frac{a_1 - b_1}{\sqrt{2}}\right)$ e per $f(t) = \varphi\left(t + \frac{\pi}{4}; a_0, \frac{a_1 - b_1}{\sqrt{2}}, \frac{a_1 + b_1}{\sqrt{2}}\right)$.

Più generalmente, ragionando sulla $f(t+k)$, si deduce che, qualunque sia k , vale la

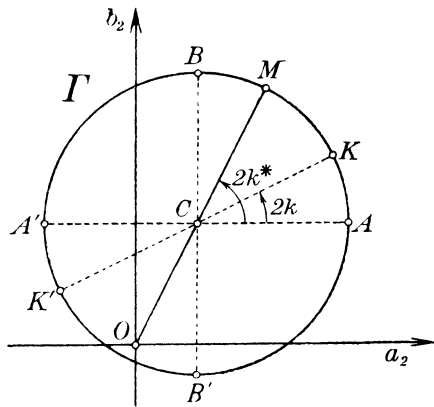
$$\begin{aligned} -\frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi a_0 + \frac{\pi}{2 \operatorname{sen} \pi a_0} (a_1^2 + b_1^2) + \frac{\pi}{2} [(a_1^2 - b_1^2) \cos 2k + 2a_1 b_1 \operatorname{sen} 2k] \operatorname{cotg} \pi a_0 &\leq \\ &\leq a_2 \cos 2k + b_2 \operatorname{sen} 2k \leq \\ &\leq \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi a_0 - \frac{\pi}{2 \operatorname{sen} \pi a_0} (a_1^2 + b_1^2) + \frac{\pi}{2} [(a_1^2 - b_1^2) \cos 2k + 2a_1 b_1 \operatorname{sen} 2k] \operatorname{cotg} \pi a_0 \end{aligned}$$

che si può anche scrivere

$$\begin{aligned} -\frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi a_0 + \frac{\pi}{2 \operatorname{sen} \pi a_0} (a_1^2 + b_1^2) &\leq \\ &\leq \left[a_2 - \frac{\pi}{2} (a_1^2 - b_1^2) \operatorname{cotg} \pi a_0 \right] \cos 2k + \left[b_2 - \frac{\pi}{2} 2a_1 b_1 \operatorname{cotg} \pi a_0 \right] \operatorname{sen} 2k \leq \\ &\leq \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi a_0 - \frac{\pi}{2 \operatorname{sen} \pi a_0} (a_1^2 + b_1^2). \end{aligned}$$

Dovendo quest'ultima valere qualunque sia k , si deduce

$$(16) \quad \boxed{\left[a_2 - \frac{\pi}{2} (a_1^2 - b_1^2) \operatorname{cotg} \pi a_0 \right]^2 + \left[b_2 - \frac{\pi}{2} 2a_1 b_1 \operatorname{cotg} \pi a_0 \right]^2 \leq \left[\frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi a_0 - \frac{\pi}{2 \operatorname{sen} \pi a_0} (a_1^2 + b_1^2) \right]^2}$$



Usando un piano cartesiano (a_2, b_2) , si ha dunque che, una volta fissati a_0, a_1, b_1 , il punto $P(a_2, b_2)$ non può essere esterno al cerchio Γ avente il centro nel punto

$$\begin{aligned} C \left[a = \frac{\pi}{2} (a_1^2 - b_1^2) \operatorname{cotg} \pi a_0, \right. \\ \left. \beta = \frac{\pi}{2} 2a_1 b_1 \operatorname{cotg} \pi a_0 \right] \end{aligned}$$

e raggio

$$R = \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi a_0 - \frac{\pi}{2 \operatorname{sen} \pi a_0} (a_1^2 + b_1^2) \quad (9).$$

(9) Tenendo conto di (11), si vede che $\sqrt{a^2 + \beta^2} \leq R \leq \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi a_0 - \sqrt{a^2 + \beta^2}$; il cerchio Γ non lascia quindi fuori l'origine O , mentre non esce dal cerchio col centro nell'origine e raggio $\frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi a_0$ dentro il quale deve pur cadere il punto $P(a_2, b_2)$, in base al risultato del n.º 1.

Il punto P cade sul contorno di Γ solo se $f(t)$ coincide con una funzione $\varphi(t-k; a_0, a_1 \cos k + b_1 \sin k, -a_1 \sin k + b_1 \cos k)$ oppure $\varphi(t-k - \frac{\pi}{2}; a_0, -a_1 \sin k + b_1 \cos k, -a_1 \cos k - b_1 \sin k)$ i cui coefficienti di EULERO-FOURIER valgono rispettivamente

$$\begin{aligned} a_0, a_1, b_1, a - R \cos 2k, \beta - R \sin 2k, \dots \\ a_0, a_1, b_1, a + R \cos 2k, \beta + R \sin 2k, \dots; \end{aligned}$$

in tal caso il punto P si porta in K' oppure in K , estremi del diametro di Γ che forma l'angolo $2k$ coll'asse a_2 ⁽¹⁰⁾.

Appare quindi evidente che il massimo dell'ampiezza $r_2 = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$ della seconda armonica è data

$$\sqrt{a^2 + \beta^2} + R = \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi a_0 - \frac{\pi}{2} (a_1^2 + b_1^2) \operatorname{tg} \frac{\pi a_0}{2}$$

in corrispondenza all'estremo M di quel diametro di Γ che passa per l'origine.

Si ha cioè

$$(17) \quad r_2 \leq \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \pi a_0 - \frac{\pi}{2} r_1^2 \operatorname{tg} \frac{\pi a_0}{2}$$

vale a dire la (4), il segno = potendo sussistere solo per $P \equiv M$ ossia (introducendo l'angolo $2k^*$ per cui $\cos 2k^* = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \beta^2}}$, $\operatorname{sen} 2k^* = \frac{\beta}{\sqrt{a^2 + \beta^2}}$ e quindi p. es. $\cos k^* = \frac{a_1}{r_1}$, $\operatorname{sen} k^* = \frac{b_1}{r_1}$) per $f(t)$ coincidente con $\varphi(t - k^* - \frac{\pi}{2}; a_0, 0, -r_1) = \varphi(t - k^* + \frac{\pi}{2}; a_0, 0, r_1)$.

Supposto ora di non prefissare per la $f(t)$ i valori di a_0, a_1, b_1 , ma soltanto il valore a_0 e quello di $r_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$, in corrispondenza alle ∞^1 coppie di valori di a_1, b_1 soddisfacenti alla $a_1^2 + b_1^2 = r_1^2$ ($a_1 = -r_1 \operatorname{sen} \lambda$, $b_1 = r_1 \cos \lambda$) avremo ∞^1 cerchi Γ , di raggio costante R , il cui centro C si sposta sul cerchio di centro O e raggio $\sqrt{a^2 + \beta^2}$ (pure costante). Tali cerchi ricoprono perciò un cerchio Γ_0 di centro O e raggio $R_0 = \sqrt{a^2 + \beta^2} + R$, il cui contorno è il luogo del punto M . Il punto $P(a_2, b_2)$ non può cadere fuori di Γ_0 ; vale cioè la (17), nella quale può sussistere il segno di eguaglianza solo se P cade sul contorno di Γ_0 cioè per $f(t) = \varphi(t - \lambda; a_0, 0, r_1)$.

⁽¹⁰⁾ Per $k=0$ ritroviamo le (15), che si possono anche scrivere $a - R \leq a_2 \leq a + R$, in corrispondenza al diametro AA' ; per $k = \frac{\pi}{4}$ ritroviamo le (15') ($\beta - R \leq b_2 \leq \beta + R$) in corrispondenza a BB' .