ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ZYGMUNT BUTLEWSKI

Sur les intégrales oscillantes et bornées d'une équation différentielle du second ordre

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 9, nº 3-4 (1940), p. 187-200
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1940_2_9_3-4_187_0>

SUR LES INTÉGRALES OSCILLANTES ET BORNÉES D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU SECOND ORDRE

par ZYGMUNT BUTLEWSKI (Posen).

§ 1. - Dans cet article je vais étudier l'allure des intégrales réelles de l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d}{dt}\left[\theta(t)\frac{dx}{dt}\right]+f(t,x)=0 \tag{1}$$

pour les grandes valeurs positives de la variable t.

Le coefficient $\theta(t)$ *est une fonction continue, dérivable et positive de la variable réelle* t *pour* $t \geqslant t_0 > 0$. *La fonction* $f(t, x)$ *est une fonction continue des variables* t *et* x *pour* $t \geqslant t_0 > 0$ *et pour* x *quelconque.*

Dans le § 2 j'établis une *condition suffisante* pour que toute intégrale de l'équation (1) soit *oscillante* pour les grandes valeurs positives de la variable t.

Nous dirons qu'une intégrale de (1) est *oscillante* si elle possède une infinité de zèros positifs.

Dans le § 3 nous obtenons des conditions *suffisantes* pour que l'équation (1) n'ait pas d'intégrales oscillantes pour $t \geqslant t_0 > 0$.

Les résultats du § 1 et § 2 sont des généralisations des quelques résultats de A. KNESER [1], qui avait déjà prévu la possibilité de généraliser d'une façon assez poussée ses propres théorèmes dans le sens que nous avons envisagé. Cet Auteur a étudié l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2}+A(t)x=0. \tag{2}$$

Dans le cas que $A(t)$ est une fonction continue pour des grandes valeurs positives de la variable t, A. KNESER a obtenu en particulier le résultat suivant: Si $\lim\limits_{t=+\infty} A(t) > 0$, toute intégrale de l'équation (2) est oscillante pour les grandes valeurs positives de t. Si $A(t) < 0$ pour $t \geqslant t_0 > 0$, l'équation (2) n'a pas des intégrales oscillantes.

---

[1] A. KNESER: *Untersuchungen über die reellen Nullstellen der Integrale linearer Differentialgleichungen.* Mathematische Annalen, t. 42, 1893, pp. 409-435.

La méthode, que nous appliquons pour démontrer nos théorèmes I et II, ne diffère pas de celle employée par A. KNESER dans l'article cité ([2]).

Dans mes articles ([3]) j'ai demontré que: 1) si $A>0$, $\theta>0$, $(A\theta)'>0$ pour $t \geqslant t_0>0$, toute intégrale $x(t)$ de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}\left[\theta(t)\frac{dx}{dt}\right]+A(t)x=0 \tag{3}$$

est bornée lorsque $t \to +\infty$; 2) si $\theta>0$, $A_{2i+1}>0$, $(A_{2i+1}\theta)'>0$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$ pour $t \geqslant t_0>0$, toute intégrale $x(t)$ de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}\left[\theta(t)\frac{dx}{dt}\right]+\sum_{i=0}^{n}A_{2i+1}(t)x^{2i+1}=0 \tag{4}$$

est bornée lorsque $t \to +\infty$.

Au § 4 j'étend ces résultats à l'équation différentielle (1). Nous obtenons le résultat suivant (théorème III): si $f(t, x)>0$ pour $t \geqslant t_0$, $x>0$ et si $f(t, -x)=-f(t, x)$ et $\frac{\partial \theta(t) f(t, x)}{\partial t}>0$ pour $t \geqslant t_0>0$, $x>0$, si $\theta(t)>0$ pour $t \geqslant t_0>0$, alors toute intégrale $x(t)$ est bornée lorsque $t \to +\infty$.

Enfin nous appliquons ce résultat à l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}\left[\theta(t)\frac{dx}{dt}\right]+A(t)f(x)=0. \tag{5}$$

§ 2. - Considérons l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d}{dt}\left[\theta(t)\frac{dx}{dt}\right]+f(t, x)=0, \tag{1}$$

où $\theta(t)$ est une fonction continue, dérivable et positive de la variable réelle t pour $t \geqslant t_0>0$ et $f(t, x)$ est fonction continue des variables t et x pour $t \geqslant t_0>0$, qui satisfait à la condition de LIPSCHITZ par rapport à x et en autre $f(t, x)>0$ pour $t \geqslant t_0>0$ et $x>0$, $f(t, x)<0$ pour $t \geqslant t_0>0$ et $x<0$.

Une intégrale $x(t)$ de l'équation (1) ou bien n'a pas de zéros pour les grandes valeurs positives de la variable t, ou bien possède une infinité de zéros positifs pour les grandes valeurs positives de la variable t.

Dans le second cas nous appellons l'intégrale $x(t)$ *oscillante*.

([2]) Voir la note ([1]).

([3]) L. BUTLEWSKI: *Sur les intégrales d'une équation différentielle du second ordre.* Mathematica, vol. XII, 1936, Cluj, pp. 36-48; *Sur les intégrales bornées des équations différentielles.* Annales de la société polonaise de mathématique, Krakow, 1939.

Supposons que

$$(\mathrm{Z})\qquad \begin{cases} 1)\ \text{si } \lim\limits_{t=+\infty} x(t)=g>0, \text{ alors } \lim\limits_{t=+\infty} f[t, x(t)]>0, \\ 2)\ \text{si } \lim\limits_{t=+\infty} x(t)=g_1<0, \text{ alors } \lim\limits_{t=+\infty} f[t, x(t)]<0, \\ 3)\ \lim\limits_{t=+\infty} \theta(t)^{-1}>0\ \text{(4)}. \end{cases}$$

Si l'intégrale $x(t)$ de l'équation (1) n'était pas oscillante pour les grandes valeurs de la variable t, elle aurait un signe constant. Supposons par exemple que $x(t)>0$.

D'après l'équation (1) on a

$$\frac{d}{dt}\left[\theta(t)\frac{dx}{dt}\right]<0. \tag{6}$$

D'après (6) on voit que la fonction $\theta(t)\frac{dx}{dt}$ est décroissante pour les valeurs suffissamment grandes de t.

Alors nous avons deux cas:

a) $\theta(t)\frac{dx}{dt}<0$ pour les valeurs suffissamment grandes de t,

b) $\theta(t)\frac{dx}{dt}>0$ pour les grandes valeurs de t.

Dans le cas *a*) on voit d'après (6) que la fonction $\theta(t)\frac{dx}{dt}$ est décroissante, elle est donc négative et plus petite qu'une constante négative, on a ainsi

$$\lim_{t=+\infty}\left[\theta(t)\frac{dx}{dt}\right]<0.$$

D'après les hypothèses (Z) nous avons

$$\lim_{t=+\infty}\theta(t)^{-1}\lim_{t=+\infty}\left[\theta(t)\frac{dx}{dt}\right]<0.$$

Donc on obtient

$$\lim_{t=+\infty}\frac{dx}{dt}<0$$

et

$$\lim_{t=+\infty}x(t)=-\infty.$$

Nous aboutissons à une contradiction.

Si nous avons

$$\theta(t)\frac{dx}{dt}>0$$

---

(4) Ces limites ainsi que celles qui vont suivre peuvent être infinies.

pour les grandes valeurs de t, on a aussi

$$\frac{dx}{dt} > 0$$

pour les grandes valeurs de t. Alors on obtient

$$g = \lim_{t=+\infty} x(t) > 0.$$

D'après les hypothèses (Z) et l'équation (1) nous avons

$$\lim_{t=+\infty} \frac{d}{dt}\left[\theta(t)\,\frac{dx}{dt}\right] = -\lim f[t, x(t)] < 0, \tag{7}$$

et donc

$$\lim_{t=+\infty} \theta(t)\,\frac{dx}{dt} = -\infty.$$

Alors

$$\lim_{t=+\infty} \theta(t)^{-1} \lim_{t=+\infty} \theta(t)\,\frac{dx}{dt} = -\infty,$$

ou bien

$$\lim_{t=+\infty} \frac{dx}{dt} = -\infty,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{t=+\infty} x(t) = -\infty.$$

Nous aboutissons à une contradiction.

En résumé nous pouvons énoncer le

THÉORÈME I. - *Supposons que la fonction $\theta(t)$ soit continue, dérivable et positive pour $t \geqslant t_0 > 0$, que $\lim\limits_{t=+\infty} \theta(t)^{-1} > 0$ et que la fonction $f(t, x)$ possède les propriétés suivantes*: 1) *$f(t, x)$ est une fonction continue des variables t et x pour $t \geqslant t_0 > 0$*; 2) *$f(t, x)$ satisfait à la condition de Lipschitz par rapport à x*; 3) *$f(t, x) > 0$ pour $t \geqslant t_0 > 0$ et $x > 0$*; 4) *$f(t, x) < 0$ pour $t \geqslant t_0 > 0$ et $x < 0$*; 5) *si $\lim\limits_{t=+\infty} x(t) = g > 0$, alors $\lim\limits_{t=+\infty} f[t, x(t)] > 0$*; 6) *si $\lim\limits_{t=+\infty} x(t) = g_1 < 0$, alors $\lim\limits_{t=+\infty} f[t, x(t)] < 0$. Dans ces conditions toute intégrale $x(t)$ de l'équation* (1) *est oscillante pour les grandes valeurs de la variable t* (5).

(5) E. PICARD a obtenu des conditions suffisantes, pour que tous les intégrales de l'équation (1) soient oscillantes; ces conditions sont les suivantes: 1) $\theta(t) \equiv 1$; 2) la fonction $f(t, x)$ croit constamment avec x, $(x > 0)$; 3) $f(t, 0) = 0$; 4) la dérivée $\dfrac{\partial f(t, x)}{\partial x}$ est toujours positive et décroit quand x augmente $(x \geqslant 0)$; 4) la fonction $-f(t, -x)$ possède les mémes propriétés que la fonction $f(t, x)$. *Traité d'analyse*, t. III, chapitre VII, 1908.

REMARQUE 1. - On peut faire des considérations analogues, pour l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}\left\{\theta_{n-1}\frac{d}{dt}\left[\theta_{n-2}\dots\frac{d}{dt}\left(\theta,\frac{dx}{dt}\right)\right]\right\}+f(t,x)=0, \tag{8}$$

où les fonctions $\theta_i(t)$ $(i=1, 2,\dots, n-1)$ sont continues, dérivables et positives pour $t \geqslant t_0 > 0$ avec $\lim\limits_{t=+\infty} \theta_i(t)^{-1} > 0$ $(i=1, 2,\dots, n)$, et la fonction $f(t, x)$ possède les mêmes propriétés que dans le théorème I.

Si n est pair, toute intégrale $x(t)$ de l'équation (8) est oscillante pour les grandes valeurs de la variable t.

REMARQUE 2. - On peut appliquer le théorème I en particulier à l'équation différentielle (6)

$$\frac{d}{dt}\left[\theta(t)\frac{dx}{dt}\right]+\sum_{i=0}^{n} A_{2i+1}(t)x^{2i+1}=0, \tag{4}$$

où les coefficients $\theta(t)$ et $A_{2i+1}(t)$ $(i=0, 1,\dots, n)$ sont des fonctions continues et positives et $\theta(t)$ est dérivable pour $t \geqslant t_0 > 0$. Si $\lim\limits_{t=+\infty} \theta(t)^{-1} > 0$, $\lim\limits_{t=+\infty} A(t)_{2i+1} > 0$ $(i=0, 1,\dots, n)$, toute l'intégrale $x(t)$ de l'équation (4) est oscillante pour les grandes valeurs de t.

REMARQUE 3. - En appliquant le théorème I à l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}\left[\theta(t)\frac{dx}{dt}\right]+A(t)f(x)=0, \tag{5}$$

où les coefficients $A(t)$ et $\theta(t)$ sont des fonctions continues et positives et $\theta(t)$ est dérivable pour $t \geqslant t_0 > 0$, $f(x)$ est continue, satisfaisante à la condition de LIPSCHITZ par rapport à x et $f(x) > 0$ pour $x > 0$, $f(x) < 0$ pour $x < 0$, nous obtenons: si $\lim\limits_{t=+\infty} \theta(t)^{-1} > 0$, $\lim\limits_{t=+\infty} A(t) > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) > 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) < 0$, toute intégrale $x(t)$ de l'équation (9) est oscillante pour les grandes valeurs de t (7).

---

(6) Comparer l'article cité sous (1) p. 423. Voir aussi (9).

(7) W. E. MILNE a démontré le théorème suivant: Considérons l'équation différentielle (5), où $\theta(t) \equiv 1$ et où le coefficient $A(t)$ est une fonction continue, positive et croissante dans l'intervalle $t_0 \leqslant t < +\infty$ et où $m < A(t) < M$ pour $t > t_0$ (m et M sont des constantes). Supposons que $f(x)$ soit une fonction impaire, croissante et satisfaisante à la condition de LIPSCHITZ dans l'intervalle $-a \leqslant x \leqslant +a$, $(a > 0)$. Alors l'intégrale $x(t)$ de l'équation (5) qui satisfait aux conditiones initiales:

$$y(t_1)=y_1, \qquad |y_1|<a, \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=t_1}=0, \qquad f(y_1)\neq 0$$

pour $t=t_1>t_0$ est oscillante dans l'intervalle $t_1<t<+\infty$ et les amplitudes forment une suite décroissante, mais qui ne tend pas vers zéro. Bulletin of the American Math. Soc., t. 28, 1922, pp. 102-104.

§ 3. - THÉORÈME II. — *Si $f(t, x)$ est une fonction continue des variables t et x pour $t \geqslant t_0 > 0$, satisfaisante à la condition de Lipschitz par rapport à x, si $f(t, x) < 0$ pour $t \geqslant t_0$ et $x > 0$, $f(t, x) > 0$ pour $t \geqslant t_0$ et $x < 0$ et si $\theta(t)$ est continue, dérivable et positive pour $t \geqslant t_0 > 0$, l'équation différentielle* (1) *n'a pas d'intégrales oscillantes pour les grandes valeurs de la variable t.*

DÉMONSTRATION. - D'après les hypothèses du théorème II, l'équation

$$\frac{d}{dt}\left[\theta(t)\,\frac{dx}{dt}\right] + f(t, x) = 0$$

montre que les fonctions

$$x \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\left[\theta(t)\,\frac{dx}{dt}\right]$$

sont du même signe.

Supposons que pour $t = \tau$ (τ suffisamment grand) on a

$$(9) \qquad x > 0, \qquad \frac{d}{dt}\left[\theta(t)\,\frac{dx}{dt}\right] > 0.$$

Nous distinguons deux cas suivant le signe de $\frac{dx}{dt}$.

A) Supposons que $\frac{dx}{dt} > 0$ pour $t = \tau$ et que, en conséquence $\theta(t)\,\frac{dx}{dt} > 0$ Je dis qu'il sera pour $t \geqslant \tau$, $\frac{dx}{dt} > 0$.

En effet si au contraire il y avait un premier point T ($T > \tau$) où $\frac{dx}{dt} = 0$, on aurait pour tout t tel que $\tau \leqslant t \leqslant T$, $x > 0$, $\frac{d}{dt}\left[\theta(t)\,\frac{dx}{dt}\right] > 0$, et alors $\theta(t)\,\frac{dx}{dt}$ serait toujours croissant dans (τ, T) et en conséquence $\theta(t)\,\frac{dx}{dt} > 0$ et finalment $\frac{dx}{dt} > 0$ aussi pour $t = T$, ce qui est en contradiction avec la définition du nombre T [8].

B) Supposons maintenant que pour $t = \tau$ on ait $\frac{dx}{dt} < 0$ et par conséquant $\theta(t)\,\frac{dx}{dt} < 0$.

Supposons que les fonctions x ou $\frac{dx}{dt}$ peuvent s'annuler pour $t > \tau$. Soit τ_0 ($\tau_0 < \tau$) le premier point où *une* des fonctions x et $\frac{dx}{dt}$ est égale à zero.

a) Si $\frac{dx}{dt} < 0$ et $x(t) > 0$ pour $\tau \leqslant t < \tau_0$ et $x(\tau_0) = 0$, alors $x(t) < 0$ pour $t > \tau_0$ et suffisamment voisin de τ_0. Dans le cas contraire on aurait $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=\tau_0} = 0$, ce qui est impossible.

---

[8] La partie *A*) de la démonstration est due à M. L. CESARI. Notre démonstration primitive (non publiée) ainsi que la démonstration de A. KNESER (cf. 1) étaient plus longues.

β) Si $x(t)>0$ et $\frac{dx}{dt}<0$ pour $\tau\leqslant t<\tau_0$ et $x(\tau_0)>0$, $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=\tau_0}=0$, alors $\frac{dx}{dt}>0$ pour $t>\tau_0$ et suffisamment voisin de τ_0.

En effet, d'après l'équation (1) et les hypothèses du théorème II on a

$$\frac{d}{dt}\left[\theta(t)\,\frac{dx}{dt}\right]>0$$

pour ces valeurs de t.

Pour les valeurs de t plus grandes que τ_0 et suffisamment voisines de τ_0 nous obtenons dans le cas α) et β) respectivement les inégalités:

$$(a)\qquad x<0,\qquad \theta\,\frac{dx}{dt}<0,\qquad \frac{d}{dt}\left(\theta\,\frac{dx}{dt}\right)<0\,;$$

$$(b)\qquad x>0,\qquad \theta\,\frac{dx}{dt}>0,\qquad \frac{d}{dt}\left(\theta\,\frac{dx}{dt}\right)>0.$$

Dans le cas (b) nous pouvons appliquer les mêmes considérations que dans le cas A). Dans le cas (a) nous pouvons appliquer aussi les mêmes considérations que dans le cas A) en changeant les sens des inégalités.

Le théorème II est donc démontré ([9]).

§ 4. - Considérons l'équation différentielle du second ordre

$$(1)\qquad \frac{d}{dt}\left[\theta(t)\,\frac{dx}{dt}\right]+f(t,\,x)=0,$$

où *le coefficient $\theta(t)$ est une fonction continue, dérivable et positive* pour

---

([9]) Les théorèmes I, II sont vrais aussi alors que $f(t, x)$ ne remplit pas la condition de LIPSCHITZ, pourvu qu'on se borne à considérer les seules intégrales $x(t)$ de l'équation (1) qui existent pour tout $t\geqslant t_0$. En effet on ne fait pas usage de cette condition dans les démonstrations.

À propos de la démonstration du théorème II il faut observer que pendant le raisonnement nous avons esclu qu'il puisse arriver pour un $t=\tau_0\geqslant t_0$ que $x(\tau_0)=\left(\frac{dx}{dt}\right)_{x=\tau_0}=0$, $x(t)\not\equiv 0$ pour tout $t\geqslant t_0$. Mais ce fait peut bien se présenter si la condition de LIPSCHITZ n'est pas remplie. On peut faire en ce cas le raisonnement suivant:

Supposons que les fonctions x et $\frac{dx}{dt}$ soient égales a zéro pour $t=\tau_0$ $(\tau_0>\tau)$ et que $x(t)$ ne soit pas identiquement nul pour $t\geqslant\tau_0$. Il y aura un point τ_1, $(\tau_1>\tau_0)$ et un premier point τ_0', $(\tau_0'\geqslant\tau_0)$ à gauche de τ_1 pour les quels $x(\tau_1)\neq 0$, $x(\tau_0')=0$, $x(t)$ du même signe que $x(\tau_1)$ pour tout $\tau_0'<t\leqslant\tau_1$. On aura donc

$$x(t)=\int_{\tau_0'}^{t}\frac{dx}{dt}\,dt$$

et en conséquence il y aura dans (τ_0', τ_1) un point τ_2 où $x(\tau_2)$ et $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{x=\tau_2}$ sont différents de zéro et du même signe. On peut pour $t=\tau_2$ appliquer le raisonnement A. (Cette partie de la démonstration est due à M. L. CESARI).

les grandes valeurs de la variable t, $(t \geqslant t_0 > 0)$. La fonction $f(t, x)$ possède les propriétés suivantes:

$$(\mathrm{W}_1) \left\{ \begin{array}{l} a) \ \textit{la fonction } f(t,x) \textit{ est continue et dérivable par rapport à } t \textit{ pour} \\ \qquad t \geqslant t_0 > 0 \textit{ et pour tout } x; \\ b) \ f(t, x) > 0 \textit{ pour } t \geqslant t_0 \textit{ et } x > 0; \\ c) \ f(t, x) < 0 \textit{ pour } t \geqslant t_0 \textit{ et } x < 0; \\ d) \ f(t, -x) = -f(t, x); \\ e) \ f(t, x) \textit{ satisfait à la condition de Lipschitz par rapport à } x. \end{array} \right.$$

Nous supposons dans la suite, que *les intégrales de l'équation* (1) *sont toutes oscillantes* (c. f. § 2) pour $t \geqslant t_0$.

Désignons par $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ les zéros plus grands que t_0 d'une intégrale $x(t)$ de l'équation différentielle (1) $(t_0 < t_1 < t_2 < \ldots)$.

Si $\theta(t) > 0$ et si la fonction $f(t, x)$ possède les propriétés (W_1), tout intervalle (t_n, t_{n+1}) contient un zéro et un seul de la dérivée $x'(t)$.

En effet, il résulte du théorème de ROLLE que l'intervalle (t_n, t_{n+1}) contient au moins un zéro de la dérivé $x'(t)$.

Si cet intervalle contenait deux zéros τ_n, τ_{n+1}, on aurait

$$\left(\theta \frac{dx}{dt}\right)_{t=\tau_n} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\theta \frac{dx}{dt}\right)_{t=\tau_{n+1}} = 0, \qquad (t_n < \tau_n < \tau_{n+1} < t_{n+1}).$$

D'après le théorème de ROLLE on aurait en un point T_n $(t_n < T_n < t_{n+1})$

$$\frac{d}{dt}\left[\theta \frac{dx}{dt}\right]_{t=T_n} = 0.$$

D'après (1) nous aurons la relation

$$f[T_n, x(T_n)] = 0,$$

qui n'est satisfaite que si $x(T_n) = 0$, or ceci est impossible, car les zéros (t_n, t_{n+1}) sont consécutifs.

En désignant ce zéro de la dérivée $x'(t)$ par z_n $(t_n < z_n < t_{n+1})$, posons pour abréger

$$U_n = \frac{z_n - \dfrac{t_n + t_{n+1}}{2}}{t_{n+1} - t_n}.$$

En multipliant l'équation différentielle (1) par $2\theta x'$ et en intégrant l'égalité obtenue entre les limites a et b on obtient l'équation

$$\theta^2(b) x'^2(b) - \theta^2(a) x'^2(a) + 2 \int_a^b \theta(t) f[t, x(t)] \frac{dx}{dt} dt = 0. \tag{12}$$

Posons

$$F(t, x)=\int_0^x \theta(t)f(t, x)dx.$$

D'après les propriétés (W_1) nous obtenons les propriétés suivantes de la fonction $F(t, x)$:

$$(W_2)\quad \left\{\begin{array}{ll} a) & F(t, x)\geqslant 0 \text{ pour } t\geqslant t_0 \text{ et pour tout } x; \\ b) & \dfrac{\partial F}{\partial x}>0 \text{ pour } t\geqslant t_0 \text{ et } x>0; \\ c) & \dfrac{\partial F}{\partial x}<0 \text{ pour } t\geqslant t_0 \text{ et } x>0; \\ d) & \text{si } |x_1|>|x_2|, \text{ alors } F(t, x_1)>F(t, x_2); \\ e) & F(t, -x)=F(t, x). \end{array}\right.$$

En dérivant la fonction $F(t, x)$ nous obtenons

$$\frac{dF[t, x(t)]}{dt}=\int_0^{x(t)}\left\{\frac{\partial}{\partial t}[\theta(t)f(t, x)]\right\}dx+\theta(t)f[t, x(t)]\frac{dx}{dt}. \tag{13}$$

D'après les relations (12) et (13) on obtient

$$\theta^2(b)x'^2(b)-\theta^2(a)x'^2(a)+2F[b, x(b)]-2F[a, x(a)]- \\ -2\int_a^b\left[\int_0^{x(t)}\frac{\partial\theta(t)f(t, x)}{\partial t}dx\right]dt=0, \tag{14}$$

où

$$F[b, x(b)]=\int_0^{x(b)}\theta(b)f(b, x)dx,$$

$$F[a, x(a)]=\int_0^{x(a)}\theta(a)f(a, x)dx.$$

Posons

$$\Phi[t, x]=\int_0^x\frac{\partial\theta(t)f(t, x)}{\partial t}dx. \tag{15}$$

En dérivant la relation (15) on a

$$\frac{\partial\Phi[t, x]}{\partial x}=\frac{\partial\theta(t)f(t, x)}{\partial t}$$

et donc d'après les propriétés (W_1) on obtient: si $\dfrac{\partial\theta(t)f(t, x)}{\partial t}>0$ pour $t\geqslant t_0$ et $x>0$, alors $\dfrac{\partial\theta(t)f(t, x)}{\partial t}<0$ pour $t\geqslant t_0$ et $x<0$; si $\dfrac{\partial\theta(t)f(t, x)}{\partial t}<0$ pour $t\geqslant t_0$ et $x>0$, alors $\dfrac{\partial\theta(t)f(t, x)}{\partial t}>0$ pour $t\geqslant t_0$ et $x<0$.

Les propriétés de la fonction $\Phi[t, x(t)]$ sont les suivantes:

$$(W_3)\begin{cases} a) \text{ si } \dfrac{\partial\theta(t) f(t, x)}{\partial t} > 0 \text{ pour } x>0 \text{ et } t \geqslant t_0, \text{ alors la fonction } \Phi[t, x)] \geqslant 0 \\ \quad \text{pour } t \geqslant t_0 \text{ et pour tout } x, \text{ et en outre} \\ \quad \dfrac{\partial \Phi[t, x]}{\partial x} > 0 \text{ pour } t \geqslant t_0 \text{ et } x > 0, \ \dfrac{\partial \Phi[t, x]}{\partial x} < 0 \text{ pour } t \geqslant t_0 \text{ et } x < 0; \\ b) \text{ si } \dfrac{\partial\theta(t) f(t, x)}{\partial t} < 0 \text{ pour } x>0 \text{ et } t \geqslant t_0, \text{ alors la fonction } \Phi[t, x] \leqslant 0 \\ \quad \text{pour } t \geqslant t_0 \text{ et pour tout } x, \text{ et en outre} \\ \quad \dfrac{\partial \Phi[t, x]}{\partial x} < 0 \text{ pour } t \geqslant t_0 \text{ et } x > 0, \ \dfrac{\partial \Phi[t, x]}{\partial x} > 0 \text{ pour } t \geqslant t_0 \text{ et } x < 0; \\ c) \ \Phi[t, -x] = \Phi[t, x] \text{ pour } t \geqslant t_0 \text{ et pour tout } x; \\ d) \text{ si } \dfrac{\partial\theta(t) f(t, x)}{\partial t} > 0 \text{ pour } t \geqslant t_0 \text{ et } x > 0 \text{ et si } |x_1| > |x_2|, \text{ on a} \\ \quad \Phi(t, x_1) > \Phi(t, x_2); \\ \quad \text{si } \dfrac{\partial\theta(t) f(t, x)}{\partial t} < 0 \text{ pour } t \geqslant t_0 \text{ et } x > 0 \text{ et si } |x_1| > |x_2|, \text{ on a} \\ \quad \Phi(t, x_1) < \Phi(t, x_2). \end{cases}$$

Si $x(b) = x(a)$ on aura

$$\theta^2(b)x'^2(b) - \theta^2(a)x'^2(a) = 2\int_a^b (\Phi[t, x(t)] - \Phi[t, x(a)])\, dt. \tag{16}$$

Supposons que $\dfrac{\partial\theta(t) f(t, x)}{\partial t} > 0$ pour $x > 0$ et $t \geqslant t_0$.

Si a est un point de l'intervalle (t_n, z_n) et b un point de l'intervalle (z_n, t_{n+1}), et d'après une propriété (W_3) de la fonction $\Phi[t, x(t)]$ dans l'intervalle (t_n, t_{n+1}) la second membre de l'égalité (16) est manifestement positif; il en résulte que

$$|\theta(b)x'(b)| > |\theta(a)x'(a)|. \tag{17}$$

Si de plus $\theta' \leqslant 0$ on aura $|x'(b)| > |x'(a)|$ et en particulier

$$|x'(t_{n+1})| > |x'(t_n)|. \tag{18}$$

Il est donc évident que

$$U_n = \frac{z_n - \dfrac{t_n + t_{n+1}}{2}}{t_{n+1} - t_n} > 0. \tag{19}$$

Si $\dfrac{\partial\theta(t) f(t, x)}{\partial t} < 0$ pour $x > 0$ et $t \geqslant t_0$ et $\theta' \geqslant 0$, les inégalités (17), (18) et (19) sont remplacées par des inégalités contraires.

Posons maintenant dans (14) $a = z_n$, $b = z_{n+1}$, nous aurons

$$F(z_{n+1}, x_{n+1}) - F(z_n, x_n) = \int_{z_n}^{z_{n+1}} \Phi[t, x(t)]\, dt, \tag{20}$$

où $x(z_n) = x_n$, $x(z_{n+1}) = x_{n+1}$.

Ajoutons aux deux membres de l'égalité (20) la quantité

$$F(z_n, x_{n+1}) = \int_0^{x_{n+1}} \theta(z_n) f(z_n, x) dx ;$$

le résultat peut s'écrire

$$F(z_n, x_{n+1}) - F(z_n, x_n) + \int_{z_n}^{z_{n+1}} \{ \Phi(t, x_{n+1}) - \Phi[t, x(t)] \} dt = 0 \tag{21}$$

D'après les propriétées (W_2) et (W_3) des fonctions F et Φ l'égalité (21) est impossible si $\frac{\partial \theta(t) f(t, x)}{\partial t} > 0$ pour $x > 0$ dans l'intervalle (z_n, z_{n+1}) et si $|x_{n+1}| > |x_n|$.

Soustrayons maintenant des deux membres de l'égalité (20) la quantité

$$F(z_{n+1}, x_n) = \int_0^{z_n} \theta(z_{n+1}) f(z_{n+1}, x) dx,$$

il vient

$$F(z_{n+1}, x_{n+1}) - F(z_{n+1}, x_n) + \int_{z_n}^{z_{n+1}} \{ \Phi(t, x_n) - \Phi[t, x(t)] \} dt = 0, \tag{22}$$

égalité impossible si $\frac{\partial \theta(t) f(t, x)}{\partial t} < 0$ pour $x > 0$ dans l'intervalle (z_n, z_{n+1}) et si $|x_{n+1}| < |x_n|$.

En résumé nous pouvons énoncer la proposition suivante:

THÉORÈME III. - *Si dans l'equation* (1) $\theta(t)$ *est une fonction continue et dérivable pour* $t \geqslant t_0 > 0$, *si* $f(t, x)$ *est une fonction continue et dérivable par rapport à* t *pour* $t \geqslant t_0 > 0$ *et pour tout* x, *si* $f(t, x)$ *satisfait à la condition de Lipschitz par rapport à* x *et si toutes les intégrales de l'équation* (1) *sont oscillantes pour* $t \geqslant t_0$, *alors*

α) *si* $f(t, x) > 0$ *pour* $t \geqslant t_0 > 0$ *et* $x > 0$, $f(t, -x) = -f(t, x)$, $\frac{\partial \theta(t) f(t, x)}{\partial t} < 0$ *pour* $t \geqslant t_0 > 0$ *et* $x > 0$ *et si* $\theta(t) > 0$ *pour* $t \geqslant t_0 > 0$, *les suites*

$$\left\{ \sqrt{\int_0^{x_n} \theta(z_n) f(z_n, x) dx} \right\} \quad et \quad \{ |\theta(t_n) x'(t_n)| \}$$

sont décroissantes, tandis que la suite $\{|x_n|\}$ *est croissante*; *si de plus* $\theta' \geqslant 0$ *la suite* $\{|x'(t_n)|\}$ *est décroissante et* $U_n < 0$;

β) *si* $f(t, x) > 0$ *pour* $t \geqslant t_0 > 0$ *et* $x > 0$, $f(t, -x) = -f(t, x)$, $\frac{\partial \theta(t) f(t, x)}{\partial t} > 0$ *pour* $t \geqslant t_0 > 0$ *et* $x > 0$ *et si* $\theta(t) > 0$ *pour* $t \geqslant t_0 > 0$, *les suites*

$$\left\{ \sqrt{\int_0^{x_n} \theta(z_n) f(z_n, x) dx} \right\} \quad et \quad \{ |\theta(t_n) x'(t_n)| \}$$

sont croissantes, tandis que la suite $\{|x_n|\}$ *est décroissante,* $x(t)$ *est donc bornée lorsque* $t \to +\infty$; *si de plus* $\theta' \leqslant 0$ *la suite* $\{|x'(t_n)|\}$ *est croissante et* $U_n > 0$.

COROLLAIRE. - 1) Si les hypothèses du théorème III, α) sont remplies et si de plus

$$\frac{\partial \theta(t) f(t, x)}{\partial x} > m > 0, \qquad (m = \text{Const.})$$

pour $t \geqslant t_0$ et pour tout x, nous avons l'inégalité

$$\int_0^{x_1} \theta(z_1) f(z_1, x)\, dx \geqslant \int_0^{x_n} \theta(z_n) f(z_n, x)\, dx \geqslant \frac{m x_n^2}{2};$$

donc *la suite* $\{|x_n|\}$ *est croissante mais ne tend pas vers l'infini.*

2) si les hypothèses du théorème III, β) sont remplies et si de plus

$$0 < \frac{\partial \theta(t) f(t, x)}{\partial x} < M, \qquad (M = \text{Const})$$

pour $t \geqslant t_0$ et pour tout x, nous obtenons l'inégalité

$$\int_0^{x_1} \theta(z_1) f(z_1, x) dx \leqslant \int_0^{x_n} \theta(z_n) f(z_n, x) dx \leqslant \frac{M x_n^2}{2};$$

dans ce cas *l'intégrale* $x(t)$ *est bornée mais ne tend pas vers zéro lorsque* $t \to +\infty$.

Considérons l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d}{dt}\left[\theta(t) \frac{dx}{dt}\right] + \sum_{i=0}^{m} A_{2i+1}(t) x^{2i+1} = 0, \tag{4}$$

où *les coefficients* $A_{2i+1}(t)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, m)$, $\theta(t)$ *sont des fonctions continues, dérivables et positives* de la variable réelle t pour $t \geqslant t_0 > 0$.

En appliquant à l'équation (4) le théorème III nous obtenons le

THÉORÈME IV [10]. - α) *si* $A_{2i+1} > 0$, $(\theta A_{2i+1})' < 0$, $(i = 0, 1, \ldots, m)$, $\theta > 0$ *pour* $t \geqslant t_0$, *les suites*

$$\left\{ \sqrt{\sum_{i=0}^{m} \theta(z_n) A_{2i+1}(z_n) \frac{x_n^{2i+2}}{i+1}} \right\} \quad \text{et} \quad \{|\theta(t_n) x'(t_n)|\}$$

sont décroissantes, tandis que la suite $\{|x_n|\}$ *est croissante*; *si de plus* $\theta' \geqslant 0$ *la suite* $\{|x'(t_n)|\}$ *est décroissante et* $U_n < 0$.

β) *si* $A_{2i+1} > 0$, $(\theta A_{2i+1})' > 0$, $(i = 0, 1, 2, \ldots, m)$, $\theta > 0$ *pour* $t \geqslant t_0$ *les suites*

$$\left\{ \sqrt{\sum_{i=0}^{m} \theta(z_n) A_{2i+1}(z_n) \frac{x_n^{2i+2}}{i+1}} \right\} \quad \text{et} \quad \{|\theta(t_n) x'(t_n)|\}$$

---

[10] Voir 2.

sont croissantes, tandis que la suite $\{|x_n|\}$ *est décroissante,* $x(t)$ *est donc bornée lorsque* $t \to +\infty$; *si de plus* $\theta' \leqslant 0$ *la suite* $\{|x'(t_n)|\}$ *est croissante et* $U_n > 0$.

COROLLAIRE. - 1) D'après le théorème IV, α) et l'hypothèse

$$\text{(H)} \qquad 0 < k < A_{2i+1}\theta < K, \qquad (i=0, 1, \ldots, m),$$

(k et K sont des constantes) pour $t \geqslant t_0$ nous avons les inégalités

$$K \sum_{i=0}^{m} \frac{x_1^{2i+2}}{i+1} \geqslant \sum_{i=0}^{m} \theta(z_n) A_{2i+1}(z_n) \frac{x_n^{2i+2}}{i+1} \geqslant k \sum_{i=0}^{m} \frac{x_n^{2i+2}}{i+1}.$$

Donc *la suite* $|x_n|$ *est croissante mais ne tend pas vers l'infini.*

2) D'après le théorème IV, β) et l'hypothèse (H) nous obtenons les inégalités

$$k \sum_{i=0}^{m} \frac{x_1^{2i+2}}{i+1} \leqslant \sum_{i=0}^{m} \theta(z_n) A_{2i+1}(z_n) \frac{x_n^{2i+2}}{i+1} \leqslant K \sum_{i=0}^{m} \frac{x_n^{2i+2}}{i+1}.$$

Donc *l'intégrale* $x(t)$ *est bornée mais ne tend pas vers zéro lorsque* $t \to +\infty$.

Considérons maintenant l'équation différentielle

$$\text{(5)} \qquad \frac{d}{dt}\left[\theta(t)\frac{dx}{dt}\right] + A(t) f(x) = 0,$$

où les coefficients $A(t)$ et $\theta(t)$ sont des fonctions continues, dérivables et positives pour $t \geqslant t_0 > 0$ et où la fonction $f(x)$ est positive pour $x > 0$, $f(-x) = -f(x)$ et satisfait à la condition de LIPSCHITZ par rapport à x.

En appliquant le théorème III à l'équation (5) nous obtenons le

THÉORÈME V. - α) *si* $f(x) > 0$ *pour* $x > 0$, $f(-x) = -f(x)$, *si* $A > 0$, $\theta > 0$ *et* $(A\theta)' < 0$ *pour* $t \geqslant t_0 > 0$, *les suites*

$$\left\{ \sqrt{A(z_n)\theta(z_n) \int_0^{x_n} f(x)\,dx} \right\} \quad et \quad \{|\theta(t_n) x'(t_n)|\}$$

sont décroissantes, tandis que la suite $\{|x_n|\}$ *est croissante; si de plus* $\theta' \geqslant 0$, *la suite* $\{|x'(t_n)|\}$ *est décroissante et* $U_n < 0$.

β) *si* $f(x) > 0$ *pour* $x > 0$, $f(-x) = -f(x)$, *si* $A > 0$, $\theta > 0$ *et* $(A\theta)' > 0$ *pour* $t \geqslant t_0 > 0$, *les suites*

$$\left\{ \sqrt{A(z_n)\theta(z_n) \int_0^{x_n} f(x)\,dx} \right\} \quad et \quad \{|\theta(t_n) x'(t_n)|\}$$

sont croissantes, tandis que la suite $\{|x_n|\}$ *est décroissante,* $x(t)$ *est donc bornée lorsque* $t \to +\infty$; *si de plus* $\theta' \leqslant 0$ *la suite* $\{|x'(t_n)|\}$ *est croissante et* $U_n > 0$.

COROLLAIRE. - 1) D'après le théorème V, α) et l'hypothèse

$$(\mathrm{H}_1) \qquad 0<m<A\theta<M$$

(m et M sont des constantes) pour $t \geqslant t_0$ nous obtenons les inégalités

$$M\int_0^{x_1} f(x)\,dx \geqslant A(z_n)\,\theta(z_n)\int_0^{x_n} f(x)dx \geqslant m\int_0^{x_n} f(x)\,dx.$$

La fonction

$$F(x)=\int_0^x f(x)dx$$

possède les propriétés suivantes: 1) $F(x)\geqslant 0$ pour tout x; 2) $F(x)=F(-x)$; 3) $F'(x)>0$ pour $x>0$; 4) $F'(x)<0$ pour $x<0$.

Alors si $f(x)$ n'est pas sommable dans l'intervalle infini $(0, \infty)$ *la suite* $\{|x_n|\}$ *est croissante mais ne tend pas vers l'infini.*

2) D'après le théorème V, β) et l'hypothèse (H_1) nous obtenons les inégalités

$$m\int_0^{x_1} f(x)dx \leqslant A(z_n)\theta(z_n)\int_0^{x_n} f(x)dx \leqslant M\int_0^{x_n} f(x)dx\,;$$

donc *l'intégrale* $x(t)$ *est bornée mais ne tend pas vers zéro lorsque* $t \to +\infty$ ([11]).

([11]) W. E. MILNE a obtenu le même résultat pour l'équation (5) sous les hypothéses citées sous (5). Cf. l'article cité sous (5).