Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Ladislas Fejes

Sur un théorème concernant l'approximation des courbes par des suites de polygones

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 9, nº 2 (1940), p. 143-145

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1940_2_9_2_143_0>

SUR UN THÉORÈME CONCERNANT L'APPROXIMATION DES COURBES PAR DES SUITES DE POLYGONES

par LADISLAS FEJES (Budapest).

Soient K une courbe convexe fermée et P un polygone quelconque situés dans le même plan. Considérons l'ensemble des points situés dans l'une quelconque des deux régions limitées par P et K sans appartenir à l'autre (1). Cet ensemble possède certainement une aire que nous appellerons *déviation* (2) entre P et K. Remarquons tout d'abord que celleci ne peut s'annuler que dans le cas où P et K coïncident.

Nous allons démontrer le

THÉORÈME: *On peut construire pour chaque courbe convexe fermée K ayant l'aire T une suite de polygones P_3, P_4,...., P_n,.... de 3, 4,...., n,.... côtés telle que*

$$\lim_{n\to\infty} n^2\tau_n \leq \frac{\pi^2}{4} T$$

τ_n étant la déviation entre P_n et K.

L'égalité sera atteinte dans le cas d'une ellipse quelconque.

Faisons tout d'abord une remarque qui nous sera utile dans la démonstration. Soient $y=f(x)$ un arc de courbe convexe défini dans l'intervalle (a, b) et $y=P(x)$ une ligne droite quelconque. Il est aisé de voir que l'intégrale $\int_a^b |f(x)-P(x)|\,dx$ qui peut être considéré comme la déviation entre $f(x)$ et $P(x)$ atteindra son minimum pour la ligne $y=\overline{P}(x)$ qui coïncide avec $y=f(x)$ dans les points dont les absisses ξ', ξ'' sont telles que $(\xi'-a)=\frac{1}{2}(\xi''-\xi')=(b-\xi'')$ et on aura pour un

---

(1) L'ensemble considéré peut être représenté par la somme: $\mathfrak{P}\overline{\mathfrak{K}}+\overline{\mathfrak{P}}\mathfrak{K}$ en désignant par $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{K}$ et $\overline{\mathfrak{P}}$, $\overline{\mathfrak{K}}$ l'ensemble des points situés dans P et K respectivement les complémentaires de celles-ci. C'est M. D. KŐNIG qui m'a donné l'éveil de la définition simple donnée dans le texte.

(2) L. FEJES: *Poliéderekre vonatkozó szélsőérték-feladatok.* (Matematikai és Fizikai Lapok, XLV (1938), 191-199). Voir l'extrait allemand.

arc de courbe $y=f(x)$ situé au dessus de l'intervalle (a, b)

$$\int_a^b |f(x)-\overline{P}(x)|\,dx=\int_{\xi'}^{\xi''} f(x)dx-\int_a^{\xi'} f(x)dx-\int_{\xi''}^{b} f(x)dx=2\int_{\xi'}^{\xi''} f(x)dx-\int_a^b f(x)dx.$$

Posons maintenant $a=x_0<x_1<x_2< \dots <x_{n-1}<x_n=b$ et considérons les valeurs ξ_i', ξ_i'' satisfaisant aux égalités $(\xi_i'-x_i)=\frac{1}{2}(\xi_i''-\xi_i')=(x_{i+1}-\xi_i')$. La ligne brisée de n côtes $P_n(x)$ qui coïncide avec $f(x)$ dans les points ayant pour abscisses ξ_i', ξ_i'' $(i=1, 2, \dots, n)$ possède une déviation par rapport à $f(x)$ telle que

$$\int_a^b |f(x)-P_n(x)|\,dx \leqslant 2\sum_{i=1}^{n}\int_{\xi_i'}^{\xi_i''} f(x)dx-\int_a^b f(x)dx.$$

Considérons d'ailleurs parmi tous les polygones de n côtés celui qui a la plus petite déviation par rapport à un cercle C donné. Il est aisé de voir que c'est un polygone régulier concentrique au cercle C la portion de son perimètre extérieure a C ayant même longueur que la portion intérieure.

La démonstration de notre théorème ne fera après ces remarques préliminaires aucune difficulté ([3]). Désignons par MN la plus grande corde de la courbe K et décrivons autour de MN comme diamètre un cercle C ayant pour centre O. Construisons le polygone $Q_1 Q_2 \dots Q_n$ ci-dessus considéré qui a la plus petite déviation par rapport a C et menons les perpendiculaires sur MN des points A_1, B_1, A_2, $B_2, \dots, A_n$, B_n en désignant par A_i et B_i les points d'intersection de $Q_i Q_{i+1}$ et C. Soient A_i' et B_i' les pieds de ces perpendiculaires qui coupent la courbe K en A_i'', B_i'' et soient m et n les deux droites perpendiculaires à MN, situées de part et d'autre du polygone $Q_1 Q_2 \dots Q_n$ et ayant la plus petite distance entre elles.

Considérons maintenant le polygone dont les côtés coïncident avec les droites $A_i''B_i''$ et particulierement la partie P de ce polygone comprise entre les paralleles m et n. C'est un polygone ayant au plus $n+2$ côtés. Or une considération simple nous assure — tenant compt de la remarque faite ci-dessus — que la déviation entre P e K ne peut être plus grande que $2\sum_{i=1}^{n} T(A_iB_i)-T$, en désignant par $T(A_iB_i)$ l'aire de la région bornée par $\overline{A_i'A_i''}\ \widehat{A_i''B_i''}\ \overline{B_i''B_i'}\ \overline{B_i'A_i'}$.

([3]) Les raisonnements suivants ont été empruntés a un travail de M. E. SAS: *Über eine Extremumeigenschaft der Ellipsen* (Compositio Mathematica, 6 (1939), 468) où il démontre qu'on peut inscrire dans chaque courbe convexe fermée ayant l'aire T un polygone de n côtés dont l'aire t_n est $t_n \geqslant \frac{n}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{n}T$. On peut déduire avec un raisonnement analogue l'inégalité $T_n \leqslant \frac{n-2}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n-2}T$ se comportant au polygone circonscrit. (L. FEJES: *Eine Bemerkung zur Approximation durch n-Eckringe.* Compositio Mathematica 7 (1940)).

Soient α_i et β_i les angles comptés avec un signe à partir de OM jusqu'aux demi-droites OA_i respectivement OB_i et posons $\beta_i - \alpha_i = \varphi_n$, $\alpha_i = \alpha + (i-1)\frac{2\pi}{n}$; cela met en évidence que $\sum_{i=1}^{n} T(A_i B_i) = T(\alpha)$ ne dépend que de α. Attribuons à α diverses valeurs et considérons la moyenne $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T(\alpha)d\alpha$ de $T(\alpha)$. On a $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T(\alpha)d\alpha = \frac{n\varphi_n}{2\pi} T$, ce qui montre que parmi les polygones P ci-dessus considérés il y a certainemant un dont la déviation τ_{n+2} par rapport à K est telle que $\tau_{n+2} \leqslant \frac{n\varphi_n - \pi}{\pi} T$, dont il résulte immédiatement ([4]) notre théoreme.

On en tire en appliquant l'inégalité isopérimétrique le

COROLLAIRE 1. - *Étant donnée une courbe convexe fermée dont le périmetre est L, il existe une suite de polygones de n côtés avec des déviations τ_n telles que*

$$\lim_{n \to \infty} n^2 \tau_n \leqslant \frac{\pi}{16} L^2$$

et l'égalité ne peut être atteinte que dans le cas d'un cercle.

On arrivera enfin d'après ce que précède sans difficulté au

COROLLAIRE 2. - *On peut construire pour chaque arc de courbe convexe (ou concave) $y = f(x)$, défini dans l'intervalle (a, b) et ayant la longueur L, une suite de lignes brisées de* 1, 2,...., n,.... *côtés et ayant pour équations* $y = P_1(x)$, $y = P_2(x)$,...., $y = P_n(x)$,.... *telles que*

$$\lim_{n \to \infty} n^2 \int_a^b |f(x) - P_n(x)|\, dx \leqslant \frac{\pi}{32} L^2$$

l'égalité n'étant atteinte que pour un demi-cercle.

([4]) On a $2 \operatorname{tg} \frac{\varphi_n}{2} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$ et par consequent $\varphi_n = 2 \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}\right) = \frac{\pi}{n} + \frac{1}{4}\frac{\pi^3}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^5}\right)$.