Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Luigi Amerio

Un metodo di sommazione per le serie di potenze e sua applicazione alla trasformazione di Laplace

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 8, nº 3-4 (1939), p. 167-180

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1939_2_8_3-4_167_0>

UN METODO DI SOMMAZIONE PER LE SERIE DI POTENZE E SUA APPLICAZIONE ALLA TRASFORMAZIONE DI LAPLACE

di LUIGI AMERIO (Pisa).

Nella presente Memoria viene indicato anzitutto un metodo di sommazione che permette di prolungare analiticamente una serie di potenze oltre il suo cerchio di convergenza e se ne determina il campo di validità; si può così enunciare un criterio che dà la possibilità di stabilire se un punto del cerchio è o non è un punto singolare per la somma delle serie stessa.

Successivamente si applica il metodo alla teoria della trasformazione di LAPLACE, nella quale esso si presenta come del tutto naturale; si ottengono così due generalizzazioni della definizione usuale della trasformata nel semipiano di convergenza:

$$f(p)=\int_0^\infty e^{-pt}F(t)\,dt,$$

mostrando che le espressioni

$$f_n(p,\,\lambda)=\int_0^\infty e^{-(p+\lambda)t}\left(1+\frac{\lambda t}{n}\right)^n F(t)\,dt, \qquad 0<R(\lambda)\geqslant|I(\lambda)|$$

$$g_n(p,\,\lambda)=\int_0^{\frac{n}{\lambda}} e^{-(p+\lambda)t}\left(1+\frac{\lambda t}{n}\right)^n F(t)\,dt, \qquad (\lambda>0)$$

tendono alla $f(p)$, al crescere indefinitamente di n, oltre che nel semipiano di convergenza, anche nei punti di analiticità della trasformata situati sulla retta di convergenza e in due insiemi di punti (quello corrispondente alle $f_n(p)$ più ampio di quello relativo alle $g_n(p)$), sempre di analiticità, a sinistra della retta stessa.

Il metodo di sommazione studiato consente poi di enunciare due criteri, in corrispondenza alle due generalizzazioni sopra indicate, contenenti condizioni necessarie e sufficienti perchè la $f(p)$ sia analitica in un punto della retta di convergenza.

1. - Sia $k\geqslant 0$ e $\lambda\neq 0$ una costante complessa; per quello che seguirà è opportuno esporre alcune proprietà della famiglia di curve definita nel piano della variabile

complessa $z=x+iy=\varrho e^{i\vartheta}$ dall'equazione

$$\left|\frac{z}{\lambda}e^{1-\frac{z}{\lambda}}\right|=k \tag{1}$$

al variare del parametro k.

Supponiamo dapprima $k=\lambda=1$. Si constata allora che la curva, simmetrica rispetto all'asse x, consta di due parti, l_1 e s_1, che si raccordano nel punto doppio $z=1$, nel quale le due tangenti hanno equazione

$$y=\pm(x-1).$$

La parte l_1 è una linea chiusa, semplice, che gira intorno all'origine. Su di essa il raggio vettore ϱ va decrescendo mentre ϑ cresce da 0 a π e, per $\vartheta=0, \frac{\pi}{2}, \pi$ assume rispettivamente i valori $1, \frac{1}{e}, \varrho_0$, dove ϱ_0 è la radice dell'equazione trascendente

$$\varrho=e^{-\varrho-1}.$$

Siccome il punto $z=0$ è interno a l_1 e inoltre il punto $z=1$ è l'unico suo punto angoloso (in esso le due tangenti fanno tra di loro un angolo di $\frac{\pi}{2}$), chiameremo i due punti rispettivamente polo e punto angoloso della curva.

La parte s_1 ha inizio nel punto $z=1$ e si estende nel semipiano $x>1$; lungo di essa ϱ cresce all'infinito mentre ϑ passa dal valore 0 al valore $\frac{\pi}{2}$.

Supposto ora nella (1) $\lambda=1$, $k\neq 1$, si constata facilmente che per $k<1$ si hanno due rami: uno, ${}_kl_1$, costituito da una curva chiusa, semplice, che gira attorno all'origine ed è interna alla l_1; l'altro, ${}_ks_1$, estendentesi all'infinito alla destra di s_1; per $k>1$ si ha invece un sol ramo, ${}_ka_1$, esterno a l_1 ed estendentesi all'infinito alla sinistra di s_1.

Inoltre se è $k_1<k_2$, per $k_2<1$ la linea ${}_{k_1}l_1$ risulta interna alla ${}_{k_2}l_1$ e la ${}_{k_1}s_1$ è situata a destra della ${}_{k_2}s_1$; per $k_1>1$ la ${}_{k_2}a_1$ è a sinistra della ${}_{k_1}a_1$.

Supposto poi $\lambda=ae^{i\beta}\neq 1$, è chiaro che le curve corrispondenti si ottengono da quelle relative al caso $\lambda=1$ mediante una dilatazione di valore a e una rotazione β; in particolare, per $k=1$, la linea l_λ (corrispondente alla l_1), avrà l'origine come polo e il punto $z=\lambda$ come punto angoloso.

Indicheremo infine con l_{λ, z_0} la curva ottenuta dalla l_λ mediante una traslazione z_0, avente cioè il polo in z_0 e il punto angoloso in $z_0+\lambda$. Con ovvio simbolismo si potrebbe scrivere:

$$l_{\lambda, z_0}=\lambda l_1+z_0.$$

2. - Data nel piano z la serie di potenze a raggio di convergenza $\neq 0$

$$f(z)=\sum_{0}^{\infty}{}_m a_m z^m, \tag{2}$$

diremo che è sommabile (S), se la successione di polinomi

$$k_n(z) = \sum_0^n {}_m \frac{\binom{n}{m} m!}{n^m} a_m z^m \tag{3}$$

tende a un valore finito quando n aumenta indefinitamente.

Indicando con $\lambda \neq 0$ una costante complessa e tracciata nel piano z la linea l_λ, il campo di validità del metodo di sommazione definito dalla (3) è perfettamente determinato dal seguente

TEOREMA I. - *Se la funzione $f(z)$ è analitica nei punti non esterni al contorno l_λ si ha*

$$\lim_{n \to \infty} k_n(\lambda) = f(\lambda).$$

Se internamente a l_λ vi sono punti singolari (1) *della $f(z)$ il*

$$\lim_{n \to \infty} k_n(\lambda)$$

non esiste finito.

Se la $f(z)$ è analitica internamente a l_λ ma ha qualche singolarità sul contorno, il limite stesso può esistere e può non esistere.

DIMOSTRAZIONE. - Mediante la sostituzione $z = \lambda\tau$, con $\tau = \xi + i\eta$, la linea l_λ del piano z si trasforma nella l_1 del piano τ.

Posto poi

$$f(z) = \sum_0^\infty {}_m a_m \lambda^m \tau^m = \varphi(\tau), \tag{4}$$

si ricava

$$m!\, a_m \lambda^m = \varphi^m(0) \tag{5}$$

e quindi, per la (3),

$$\begin{aligned} k_n(\lambda) &= \sum_0^n {}_m \frac{\binom{n}{m}}{n^m} \varphi^{(m)}(0) = \frac{1}{n^n} \sum_0^n {}_m \binom{n}{m} \varphi^{(m)}(0) n^{n-m} \\ &= \frac{1}{n^n} \left(\frac{d^n}{d\tau^n} \varphi(\tau) e^{n\tau} \right)_{\tau=0} \\ &= \frac{n!}{n^n} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi(\tau) e^{n\tau}}{\tau^{n+1}} d\tau \end{aligned} \tag{6}$$

dove γ è una linea chiusa, semplice, rettificabile, contenente all'interno l'origine e inoltre tale che i suoi punti e quelli interni siano di analiticità per la $\varphi(\tau)$.

(1) Si allude qui ai punti singolari che si incontrano nel prolungamento analitico della serie data a partire dall'origine, ossia a quelli che costituiscono i vertici della stella di MITTAG-LEFFLER.

Dalla (6), tenendo conto della formula di STIRLING e supposto $n \geqslant 1$ si ricava

$$k_n(\lambda) = \frac{e^{\frac{\vartheta}{12n}}}{i} \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_\gamma \frac{\varphi(\tau) e^{1-\tau}}{(\tau e^{1-\tau})^{n+1}} d\tau \tag{7}$$

dove è $0 < \vartheta < 1$.

Ne segue, per $\varphi(\tau) \equiv 1$,

$$1 = \frac{e^{\frac{\vartheta}{12n}}}{i} \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_\gamma \frac{e^{1-\tau}}{(\tau e^{1-\tau})^{n+1}} d\tau. \tag{8}$$

Ora se la $f(z)$ è analitica sul contorno l_λ del piano z e internamente, la $\varphi(\tau)$ lo sarà per τ non esterno al contorno l_1 del piano τ. Essendo inoltre $f(\lambda) = \varphi(1)$, basterà provare, per dimostrare la prima parte del teorema, che è

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_\gamma \frac{(\varphi(\tau) - \varphi(1)) e^{1-\tau}}{(\tau e^{1-\tau})^{n+1}} d\tau = 0. \tag{9}$$

Sia $\delta > 0$ la minima distanza dei punti singolari della $\varphi(\tau)$ dalla linea l_1, oppure una costante positiva se la $\varphi(\tau)$ è una trascendente intera. Fissato $\varepsilon > 0$ formiamo il contorno γ di due parti: una costituita dal segmento $1 - ih \vdash\!\dashv 1 + ih$, dove $0 < h < \delta$ è scelto in modo che per $|\eta| \leqslant h$ sia $|\varphi(1 + i\eta) - \varphi(1)| < \frac{\varepsilon}{3}$; l'altra costituita da una linea σ, rettificabile e di lunghezza ν, che congiunge il punto $1 + ih$ al punto $1 - ih$ girando attorno all'origine esternamente al contorno l_1, mantenendosi da questo a una distanza minore di δ, e situata inoltre interamente nel semipiano $R(\tau) \leqslant 1$ (²).

Se M è il massimo di $|(\varphi(\tau) - \varphi(1)) e^{1-\tau}|$ e $\mu < 1$ quello di $\frac{1}{|\tau e^{1-\tau}|}$ su σ, si ricava

$$\left| \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_\sigma \frac{(\varphi(\tau) - \varphi(1)) e^{1-\tau}}{(\tau e^{1-\tau})^{n+1}} d\tau \right| \leqslant \sqrt{\frac{n}{2\pi}} M \nu \mu^{n+1} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{10}$$

per $n > n_1$ sufficientemente grande.

Si ha poi, essendo sulla rimanente parte del contorno $|e^{1-\tau}| = 1$,

$$\left| \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_{1-ih}^{1+ih} \frac{(\varphi(\tau) - \varphi(1)) e^{1-\tau}}{(\tau e^{1-\tau})^{n+1}} d\tau \right| < \frac{\varepsilon}{3} \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_{-h}^{h} \frac{d\eta}{(1 + \eta^2)^{\frac{n+1}{2}}} < \frac{\varepsilon}{3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}. \tag{11}$$

(²) Nella scelta di questa contorno si può riconoscere l'applicazione del principio su cui si fonda il « metodo del punto di sella », metodo che è effettivamente applicabile alla dimostrazione della (9). Si noti infatti che per $\tau = 1$ si annulla la derivata di $\tau e^{1-\tau}$ e che la retta da 1 a $1 + ih$ è tangente nel punto 1 alla curva $I(\tau e^{1-\tau}) = 0$.

Ora è [3]

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\sqrt{2\pi}$$

e quindi è possibile determinare n_2 in modo che per $n>n_2$ sia

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}<\frac{3}{2}\sqrt{2\pi}$$

da cui, per la (11)

$$(12)\qquad \left|\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_{1-ih}^{1+ih}\frac{(\varphi(\tau)-\varphi(1))e^{1-\tau}}{(\tau e^{1-\tau})^{n+1}}d\tau\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Per n maggiore del più grande tra i due numeri n_1 e n_2, si ha allora

$$(13)\qquad \left|\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_{\gamma}\frac{(\varphi(\tau)-\varphi(1))e^{1-\tau}}{(\tau e^{1-\tau})^{n+1}}d\tau\right|\leqslant\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\left|\int_{\sigma}\frac{(\varphi(\tau)-\varphi(1))e^{1-\tau}}{(\tau e^{1-\tau})^{n+1}}d\tau\right|+$$
$$+\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\left|\int_{1-ih}^{1+ih}\frac{(\varphi(\tau)-\varphi(1))e^{1-\tau}}{(\tau e^{1-\tau})^{n+1}}d\tau\right|<\varepsilon$$

che dimostra la prima parte del teorema.

Supponiamo ora che internamente alla linea l_λ del piano z esistano singolarità della $f(z)$, e quindi della $\varphi(\tau)$ internamente alla l_1 del piano τ.

Considerando allora in quest'ultimo le linee ${}_kl_1$, con $k<1$, abbiamo che esisterà un $k_0<1$ tale che la $\varphi(\tau)$ sia analitica su ${}_kl_1$ per $k<k_0$, mentre ammetterà qualche singolarità sulla ${}_{k_0}l_1$.

Prendiamo come linea γ una linea ${}_kl_1$, con $k<k_0$, e osserviamo che posto $w=\tau e^{1-\tau}$, siccome è $\frac{dw}{d\tau}=0$ solo per $\tau=1$, si stabilisce tra i piani τ e w una corrispondenza biunivoca e conforme che porta i punti interni al contorno l_1 nei punti interni al cerchio $|w|=1$ in modo che $z=0$ corrisponda a $w=0$ e $z=1$ a $w=1$. Inoltre, per $|w|<1$, resta definita la τ come funzione analitica di w [4].

---

[3] La dimostrazione è immediata quando si osservi che è $\frac{d}{dn}\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\geqslant 0$.

[4] Una forma esplicita di τ si può avere dalla formula di LAGRANGE; si ottiene

$$\tau=\sum_1^\infty\frac{n^{n-1}}{n!}\left(\frac{w}{e}\right)^n.$$

Si ha allora

$$k_n(\lambda)=e^{\frac{\vartheta}{12n}}\sqrt{2\pi n}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{{}_k l_1}\frac{\varphi(\tau)e^{1-\tau}}{(\tau e^{1-\tau})^{n+1}}\,d\tau \tag{14}$$

$$=e^{\frac{\vartheta}{12n}}\sqrt{2\pi n}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=k}\frac{\varphi(\tau(w))e^{1-\tau(w)}}{w^{n+1}}\,\frac{d\tau(w)}{dw}\,dw.$$

Ora, posto

$$F(w)=\varphi(\tau(w))e^{1-\tau(w)}\,\frac{d\tau(w)}{dw}=\frac{\varphi(\tau(w))}{1-\tau(w)} \tag{15}$$

la funzione $F(w)$ risulta analitica internamente al cerchio $|w|=k_0$, sul contorno del quale è singolare nei punti di singolarità della $\varphi(\tau(w))$.

Ne segue

$$k_n(\lambda)=e^{\frac{\vartheta}{12n}}\sqrt{2\pi n}\,\frac{F^{(n)}(0)}{n!} \tag{16}$$

e siccome la serie

$$F(w)=\sum_0^{\infty}{}_n\,\frac{F^{(n)}(0)}{n!}\,w^n \tag{17}$$

ha raggio di convergenza $k_0<1$, non può essere

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F^{(n)}(0)}{n!}=0$$

e quindi, per la (16), non esiste finito il

$$\lim_{n\to\infty}k_n(\lambda).$$

Supponiamo ora $k_0=1$, cioè che la $\varphi(\tau)$ sia analitica internamente alla linea l_1, ma abbia qualche singolarità su di questa.

In un tal caso la serie (17) avrà raggio di convergenza $r\geqslant 1$ (il primo caso potrà presentarsi solo per $\varphi(\tau(w))=(1-\tau(w))\sum_0^{\infty}{}_n c_n w^n$, quando la serie $\sum_0^{\infty}{}_n c_n w^n$ abbia raggio di convergenza >1); ne segue che il

$$\lim_{n\to\infty}k_n(\lambda)$$

potrà esistere e potrà non esistere ([5]).

Il teorema è così completamente dimostrato.

([5]) Più precisamente, si osservi che presa a piacere la $F(w)=\sum A_n w^n$ la corrispondente $\varphi(\tau)$ è data da

$$\varphi(\tau)=(1-\tau)F(\tau e^{1-\tau})$$

e questa riuscirà regolare entro l_1 e in generale singolare in qualche punto di l_1, se $F(w)$ ha raggio di convergenza 1. La singolarità su l_1 sarà anzi certa se $F(w)$ è regolare per $w=1$, perchè $1-\tau(w)$ è singolare solo per $w=1$. Formando allora delle tali $F(w)$ in cui $A_n\sqrt{n}$

3\. - Osserviamo ora che, preso $\lambda = ae^{i\beta}$ e $\lambda_0 = a_0 e^{i\beta}$ con $a_0 > a$, la linea l_λ è interna alla l_{λ_0}; dal teorema I segue allora che, se la $f(z)$ è analitica internamente alla linea l_{λ_0} di equazione

$$\left| \frac{z}{\lambda_0} e^{1-\frac{z}{\lambda_0}} \right| = 1,$$

si ha $\lim\limits_{n\to\infty} k_n(\lambda) = f(\lambda)$, cioè la $\sum_0^\infty {}_m\, a_m \lambda^m$ è sommabile (S).

Se allora la $f(z)$ ha, al finito, il solo punto singolare $\bar{z}$, si deduce che la serie $\sum_0^\infty {}_m\, a_m z^m$ è sommabile (S) per z interno alla linea soddisfacente all'equazione

$$\left| \frac{\bar{z}}{\lambda_0} e^{1-\frac{\bar{z}}{\lambda_0}} \right| = 1 \tag{18}$$

in cui però si assume come variabile indipendente λ_0, cioè alla curva $\omega_{\bar{z}}$, trasformata per reciprocità della $l_{\bar{z}}$. Inoltre per z esterno alla $\omega_{\bar{z}}$ il $\lim\limits_{n\to\infty} k_n(z)$ non esiste finito, mentre può esistere e può non esistere quando z appartenga a $\omega_{\bar{z}}$.

Nel caso più generale, indicando con z_r un generico punto singolare della $f(z)$, sia I_r l'insieme dei punti non esterni alla linea ω_{z_r} e I_0 l'insieme, manifestamente chiuso, formato dai punti comuni a tutti gli I_r.

Se $\lambda = ae^{i\beta}$ è un punto di I_0, può darsi che sia interno a tutte le linee ω_{z_r} oppure appartenga a qualcuna di esse, senza però essere esterno a nessuna. Nel primo caso la $f(z)$ è analitica nel campo chiuso delimitato dalla l_λ e quindi anche in quello delimitato dalla l_{λ_1}, con $\lambda_1 = a_1 e^{i\beta}$, $a_1 > a$, purchè la differenza $a_1 - a$ sia sufficientemente piccola.

Si può allora determinare $\sigma > 0$ in modo che per $|\lambda' - \lambda| \leq \sigma$ la linea $l_{\lambda'}$ sia interna alla l_{λ_1} e quindi la $f(z)$ sia analitica sulla $l_{\lambda'}$ e internamente; λ' perciò appartiene ad I_0 e λ è un « punto interno » dell'insieme.

Lo stesso può manifestamente provarsi per λ'.

Nel secondo caso la $f(z)$ è analitica internamente alla l_λ e quindi lo è nel campo chiuso delimitato dalla $l_{\lambda'}$, con $\lambda' = a' e^{i\beta}$, $a' < a$ (λ' è perciò un punto interno dell'insieme).

Possiamo quindi affermare che ogni punto di I_0 è punto di accumulazione di punti interni.

Siccome l'insieme stesso è chiuso, si ricava allora che è anche perfetto e che i suoi punti costituiscono un « campo chiuso » che risulta inoltre semplicemente connesso, come facilmente si dimostra.

---

presenti casi di convergenza, divergenza, indeterminazione (ciò che è immediato) si hanno altrettanti esempi per la nostra tesi. Si trova così, per esempio, che per

$$\varphi(\tau) = \frac{1-\tau}{1+\tau e^{1-\tau}}, \qquad \varphi(\tau) = (1-\tau)\log(1+\tau e^{1-\tau})$$

k_n diverge, oppure converge a zero, rispettivamente.

Sia A il campo aperto costituito dai punti interni di I_0 e ω_0 il suo contorno (formato dai punti di I_0 non appartenenti ad A, perchè situati su qualche linea ω_{z_r}); pel teorema I si può asserire che, se z appartiene ad A, si ha $\lim\limits_{n\to\infty} k_n(z)=f(z)$; se z è su ω_0 il $\lim\limits_{n\to\infty} k_n(z)$ può esistere e può non esistere; se z è esterno ad A il limite stesso non esiste finito.

In particolare appartengono ad A i punti del cerchio di convergenza nei quali la $f(z)$ è analitica.

Si può poi, tenuto conto del teorema I, enunciare il seguente

CRITERIO I. - *Condizione necessaria e sufficiente perchè un punto $\lambda=Re^{i\beta}$ del cerchio di convergenza della $f(z)$ sia di analiticità per la funzione stessa, è che esista un valore $\lambda_0=a_0e^{i\beta}$, con $a_0>R$, per cui il $\lim\limits_{n\to\infty} k_n(\lambda_0)$ esista finito. In tal caso la $f(z)$ è analitica in tutti i punti interni alla l_{λ_0}.*

DIMOSTRAZIONE. - Che la condizione sia sufficiente e così pure l'ultima parte del teorema sono ovvie conseguenze del teorema I.

Proviamo ora che la condizione è necessaria.

Per questo osserviamo che se la $f(z)$ è analitica in λ, essa è analitica nel campo chiuso delimitato dalla l_λ e quindi anche in quello delimitato dalla linea l_{λ_0}, con $\lambda_0=a_0e^{i\beta}$, $a_0>R$, purchè la differenza a_0-R sia sufficientemente piccola.

Ne segue, pel teorema I,

$$\lim_{n\to\infty} k_n(\lambda_0)=f(\lambda_0).$$

4. - Il metodo di sommazione ora studiato si presenta in modo naturale nella teoria della trasformazione di LAPLACE. (6).

Supponiamo che la funzione $F(t)$, definita nell'intervallo $0\leq t<\infty$, sia trasformabile e l'integrale

$$f(p)=\int_0^\infty e^{-pt}F(t)\,dt,$$

dove è $p=u+iv$, abbia il semipiano $R(p)>0$ come semipiano di convergenza.

Preso un numero λ, con $R(\lambda)>0$, indichiamo con p_r i punti singolari (7) della $f(p)$ e tracciamo nel piano della variabile complessa p le linee $l_{\lambda,p_r-\lambda}$, aventi cioè il polo in $p_r-\lambda$ e il punto angoloso in p_r.

---

(6) Per le definizioni e per le poche proprietà di questa trasformazione qui applicate rimandiamo al recente volume di G. DOETSCH: *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation.* (Springer, Berlin, 1937).

(7) Nel caso in cui la $f(p)$ non sia uniforme, si prenda $\lambda>0$; i punti p_r sono quelli che si incontrano prolungando analiticamente la $f(p)$, a partire dal semipiano $R(p)>0$, lungo le parallele all'asse reale; inoltre preso q, con $R(q)<R(p_r)$ e $I(q)=I(p_r)$, la parte di $l_{\lambda,q-\lambda}$ che appartiene al semipiano $R(p)>-R(\lambda)$, risulta interna alla $l_{\lambda,p_r-\lambda}$.

L'insieme dei punti p esterni alle curve $l_{\lambda, p_r - \lambda}$ ed appartenenti al semipiano $R(p) > -R(\lambda)$ costituisce un campo aperto semplicemente connesso, come si potrebbe facilmente provare.

Indicandolo con B, enunciamo il seguente

TEOREMA II. - *Se p appartiene al campo B, si ha*

$$f(p) = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-(p+\lambda)t}\left(1+\frac{\lambda t}{n}\right)^n F(t)dt.$$

Se p è esterno a B il limite stesso non esiste finito, mentre può esistere e può non esistere se p appartiene al contorno di B.

DIMOSTRAZIONE. - Essendo $R(p) > -R(\lambda)$, l'integrale

$$f_n(p, \lambda) = \int_0^\infty e^{-(p+\lambda)t}\left(1+\frac{\lambda t}{n}\right)^n F(t)dt \tag{19}$$

converge e si ha

$$\begin{aligned} f_n(p, \lambda) &= \sum_0^n {}_m \frac{\binom{n}{m}}{n^m} \lambda^m \int_0^\infty e^{-(p+\lambda)t} t^m F(t)dt \\ &= \sum_0^n {}_m \frac{\binom{n}{m}}{n^m} (-\lambda)^m f^{(m)}(p+\lambda). \end{aligned} \tag{20}$$

Ora la serie

$$\sum_0^\infty {}_m z^m \frac{f^{(m)}(p+\lambda)}{m!} \tag{21}$$

(la quale è certamente convergente per $|z| < R(p+\lambda)$ e vale $f(p+\lambda+z)$), è sommabile (S) per $z = -\lambda$ quando la $f(p)$ sia analitica nei punti non esterni alla linea $l_{-\lambda, p+\lambda}$, col polo cioè in $p+\lambda$ e il punto angoloso in p.

In questa ipotesi si ha, per le (20) e (21),

$$\lim_{n\to\infty} f_n(p, \lambda) = f((p+\lambda)-\lambda) = f(p). \tag{22}$$

Per determinare ora il campo in cui vale la (22) cominciamo col supporre che la $f(p)$ abbia, al finito, il solo punto singolare $p = \bar{p}$.

Poichè allora, detto τ un punto qualunque del campo chiuso da l_1, la linea $l_{-\lambda, p+\lambda} = -\lambda l_1 + p + \lambda$ racchiude i punti $-\lambda\tau + (p+\lambda)$, la (22) varrà certamente se, oltre essere $R(p) > -R(\lambda)$, il punto $\bar{p}$ è distinto dai detti punti, cioè p distinto dai punti $\lambda\tau + \bar{p} - \lambda$, ossia esterno alla curva $l_{\lambda, \bar{p}-\lambda}$; e queste condizioni definiscono appunto il campo B. Se p è esterno a B si vede subito che o l'integrale che dà $f_n(p, \lambda)$ non converge, o converge, ma il $\lim_{n\to\infty} f_n(p, \lambda)$ non esiste finito. Se p cade sul contorno di B, il limite stesso potrà esistere oppure non esistere.

È ovvio di qui il passaggio al caso generale e quindi la dimostrazione completa del teorema.

5. - Osserviamo ora che, indicato con p_r un punto singolare della $f(p)$, le tangenti alla $l_{\lambda, p_r-\lambda}$ nel punto angoloso p_r fanno tra di loro un angolo di $\frac{\pi}{2}$. Ne segue che, posto $\lambda = ae^{i\beta}$, appartengono certamente all'insieme B i punti di analiticità della $f(p)$ situati sulla retta di convergenza, quando sia $-\frac{\pi}{4} \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{4}$.

Per essi verrà perciò la (22).

Si può poi, analogamente a quanto si è fatto per la serie di potenze, enunciare il seguente

CRITERIO II. - *Condizione necessaria e sufficiente perchè il punto $p = iv_0$ della retta di convergenza sia un punto di analiticità per la $f(p)$ è che, preso $\lambda = ae^{i\beta}$, con $-\frac{\pi}{4} \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{4}$, si possa determinare un numero σ, con $0 < \sigma < 1$, in modo che il $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(p, \lambda)$ esista finito per $p = iv_0 - \sigma\lambda$. In un tal caso la $f(p)$ è analitica internamente alla linea $l_{-\lambda, p+\lambda}$.*

DIMOSTRAZIONE. - La condizione è necessaria. Infatti se la $f(p)$ è analitica in iv_0 ed è inoltre $-\frac{\pi}{4} \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{4}$, il punto $p = iv_0$ appartiene al campo aperto B. Esiste allora certamente un numero $0 < \sigma < 1$ tale che la funzione stessa sia analitica all'interno e sul contorno della linea $l_{-\lambda, iv_0+(1-\sigma)\lambda}$, col polo in $iv_0 + (1-\sigma)\lambda$ e il punto angoloso in $iv_0 - \sigma\lambda$. Ne segue, pel teorema I, l'esistenza del $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(p, \lambda)$, per $p = iv_0 - \sigma\lambda$.

La condizione è sufficiente. Infatti se esiste finito il $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(iv_0 - \sigma\lambda, \lambda)$, la $f(p)$ è analitica internamente alla linea $l_{-\lambda, iv_0+(1-\sigma)\lambda}$ e quindi, in particolare, nel punto $p = iv_0$.

L'ultima parte del teorema è evidente.

6. - Supposto $\lambda > 0$, indichiamo con $g_n(p, \lambda)$ l'integrale

$$\int_0^{\frac{n}{\lambda}} e^{-(p+\lambda)t}\left(1 + \frac{\lambda t}{n}\right)^n F(t)\,dt. \tag{23}$$

Come conseguenza del teorema II possiamo allora dimostrare il seguente

TEOREMA III. - *Se è $\lambda > 0$ si ha*

$$\lim_{n\to\infty} g_n(p, \lambda) = f(p)$$

per p esterno a tutte le linee $l_{\lambda, p_r-\lambda}$ e per $R(p) > \left(\frac{2}{e} - 1\right)\lambda$.

DIMOSTRAZIONE. - Basterà, pel teorema II, provare che, se p soddisfa alla condizione $R(p) > \left(\frac{2}{e} - 1\right)\lambda$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{n}{\lambda}}^{\infty} e^{-(p+\lambda)t}\left(1+\frac{\lambda t}{n}\right)^n F(t)\,dt = 0. \tag{24}$$

Per questo osserviamo che posto $\sigma = u + \lambda > \frac{2\lambda}{e}$, $e^{ivt}F(t) = \varphi_1(t) + i\varphi_2(t)$, le funzioni reali $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ sono tali (per la trasformabilità nel semipiano $R(p) > 0$) che, preso $\alpha > 0$, sia, per $t \geqslant 0$ e per un dato v,

$$\left|\int_0^t e^{-\alpha\tau}\varphi_1(\tau)\,d\tau\right| < k_\alpha \tag{25}$$

$$\left|\int_0^t e^{-\alpha\tau}\varphi_2(\tau)\,d\tau\right| < k_\alpha$$

dove k_α è una costante dipendente da α.

Dimostriamo ora che si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{n}{\lambda}}^{\infty} e^{-\sigma t}\left(1+\frac{\lambda t}{n}\right)^n \varphi_1(t)\,dt = 0. \tag{26}$$

Per $u > 0$ osserviamo che è

$$\frac{e^{-\lambda t}}{n^n}(n+\lambda t)^n = e^{-(n+\lambda t)}(n+\lambda t)^n \frac{e^n}{n^n} \leqslant 1$$

il massimo avendo luogo per $n + \lambda t = n$, cioè $t = 0$.

Preso $\xi > \frac{n}{\lambda}$ si ricava allora pel secondo teorema della media

$$\left|\int_{\frac{n}{\lambda}}^{\xi} e^{-\lambda t}\left(1+\frac{\lambda t}{n}\right)^n e^{-ut}\varphi_1(t)\,dt\right| =$$

$$\left|e^{-n}2^n \int_{\frac{n}{\lambda}}^{\xi'} e^{-ut}\varphi_1(t)\,dt\right| < \left(\frac{2}{e}\right)^n 2k_u$$

dove è $\frac{n}{\lambda} < \xi' < \xi$.

Ne segue

$$\left|\int_{\frac{n}{\lambda}}^{\infty} e^{-\sigma t}\left(1+\frac{\lambda t}{n}\right)^n \varphi_1(t)\,dt\right| \leqslant \left(\frac{2}{e}\right)^n 2k_u$$

cioè per $u > 0$ la (26) è verificata.

Supposto ora $u \leqslant 0$, preso $\xi > \frac{n}{\lambda}$, consideriamo l'integrale

$$\frac{1}{n^n}\int_{\frac{n}{\lambda}}^{\xi} e^{-\frac{\sigma}{2}t}(n+\lambda t)^n e^{-\frac{\sigma}{2}t}\varphi_1(t)dt \tag{27}$$

e osserviamo che si ha

$$\frac{e^{-\frac{\sigma}{2}t}}{n^n}(n+\lambda t)^n = \frac{e^{-\frac{\sigma}{2\lambda}(n+\lambda t)}}{n^n}\left(\frac{\sigma}{2\lambda}(n+\lambda t)\right)^n\left(\frac{2\lambda}{\sigma}e^{\frac{\sigma}{2\lambda}}\right)^n \leqslant \left(\frac{2\lambda}{\sigma}e^{-\left(1-\frac{\sigma}{2\lambda}\right)}\right)^n$$

il massimo avendosi per $\frac{\sigma}{2\lambda}(n+\lambda t_0)=n$, $t_0=\frac{n}{\lambda}\left(\frac{2\lambda}{\sigma}-1\right)$ e sarà $t_0 \gtreqless \frac{n}{\lambda}$ a seconda che sarà $\frac{2\lambda}{\sigma}\gtreqless 2$, $\lambda \gtreqless \sigma$, cioè $u \lesseqgtr 0$.

Nel nostro caso sarà perciò $t_0 \geqslant \frac{n}{\lambda}$ e quindi, pel secondo teorema della media, la (27) diventa, per $\xi > t_0$,

$$\frac{1}{n^n}\int_{\frac{n}{\lambda}}^{\xi} e^{-\frac{\sigma}{2}t}(n+\lambda t)^n e^{-\frac{\sigma}{2}t}\varphi_1(t)dt = \left(\frac{2\lambda}{\sigma}e^{-\left(1-\frac{\sigma}{2\lambda}\right)}\right)^n\int_{\xi_1}^{\xi_2} e^{-\frac{\sigma}{2}t}\varphi_1(t)dt \tag{28}$$

dove è $\frac{n}{\lambda}\leqslant \xi_1 < \xi_2 < \xi$.

Preso poi $0<\delta<1$ si ha, pel secondo teorema della media,

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} e^{-\frac{\sigma}{2}t}\varphi_1(t)dt = \int_{\xi_1}^{\xi_2} e^{-(1-\delta)\frac{\sigma}{2}t}e^{-\frac{\delta\sigma}{2}t}\varphi_1(t)dt =$$

$$= e^{-(1-\delta)\frac{\sigma}{2}\xi_1}\int_{\xi_1}^{\xi_3} e^{-\delta\frac{\sigma}{2}t}\varphi_1(t)dt$$

con $\xi_1 < \xi_3 < \xi_2$.

Ne segue

$$\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} e^{-\frac{\sigma}{2}t}\varphi_1(t)dt\right| < e^{-(1-\delta)\frac{\sigma n}{2\lambda}}2k_{\frac{\delta\sigma}{2}} \tag{29}$$

e quindi, tenuto conto della (28),

$$\left|\int_{\frac{n}{\lambda}}^{\infty} e^{-\sigma t}\left(1+\frac{\lambda t}{n}\right)^n\varphi_1(t)dt\right| \leqslant \left(\frac{2\lambda}{\sigma}e^{-\left(1-\frac{\delta\sigma}{2\lambda}\right)}\right)^n 2k_{\frac{\delta\sigma}{2}}. \tag{30}$$

Ora è, per ipotesi, $\sigma = u+\lambda > \frac{2\lambda}{e}$ e quindi $\frac{2\lambda}{\sigma e} < 1$.

Possiamo poi prendere $\delta > 0$ così piccolo che sia anche

$$\frac{2\lambda}{\sigma} e^{-\left(1-\frac{\delta\sigma}{2\lambda}\right)} < 1$$

e perciò anche per $\left(\frac{2}{e}-1\right)\lambda < u \leq 0$, la (26) è provata.

Allo stesso modo si procede per la $\varphi_2(t)$ e quindi il teorema è completamente dimostrato.

Osserviamo ora che, per essere $\lambda > 0$, i punti di analiticità della $f(p)$ situati sulla retta di convergenza sono manifestamente esterni a tutte le linee $l_{\lambda, p_r - \lambda}$; per essi sarà perciò

$$\lim_{n\to\infty} g_n(p, \lambda) = f(p).$$

Si può infine enunciare il seguente

CRITERIO III. - *Condizione necessaria e sufficiente perchè la $f(p)$ sia analitica nel punto $p = iv_0$ della retta di convergenza è che, preso $\lambda > 0$, esista un numero σ, con $0 < \sigma < 1 - \frac{2}{e}$ in modo che il $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(p, \lambda)$ esista finito per $p = iv_0 - \sigma\lambda$. In un tal caso la $f(p)$ è analitica internamente alla linea $l_{-\lambda, p+\lambda}$.*

La dimostrazione scende senz'altro dal criterio II quando si osservi che, essendo $0 < \sigma < 1 - \frac{2}{e}$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\frac{n}{\lambda}}^{\infty} e^{-(p+\lambda)} \left(1 + \frac{\lambda t}{n}\right)^n F(t) dt = 0$$

per $p = iv_0 - \sigma\lambda$ e perciò i due limiti

$$\lim_{n\to\infty} g_n(p, \lambda)$$
$$\lim_{n\to\infty} f_n(p, \lambda)$$

o non esistono finiti, oppure, se esistono, hanno lo stesso valore.

OSSERVAZIONE. - Per le finalità della ricerca ci siamo limitati nel n.° 2 allo studio della sommazione (S) della serie di potenze nei punti di analiticità; ma si potrebbe considerare più in generale un metodo (S) per le serie numeriche $\sum_0^{\infty} {}_m a_m$, definito da $\lim\limits_{n\to\infty} k_n(1)$. Per esso si verifica la consueta proprietà della « permanenza », che non risulta completamente dalla nostra trattazione.

È poi notevole il fatto che il metodo considerato rientra nei metodi generali definiti da T. H. GRONWALL (8) e recentemente ripresi e accuratamente studiati da C. BIRINDELLI (9). Si dimostra infatti che il metodo (S) equivale al metodo (f, g) di GRONWALL dove la $z=f(w)$ è quel ramo della funzione di w definita da $w=ze^{1-z}$ che si riduce a 0 per $w=0$, ed è $g(w)=\frac{1}{1-z}$.

Valendosi dei risultati del BIRINDELLI si potrebbe ritrovare il teorema I, però limitatamente alla sua prima parte.

(8) T. H. GRONWALL: *Summation of series and conformal mapping.* (Annals of Mathematics, 2d series, vol. 33, 1932).

(9) C. BIRINDELLI: *Contributo all'analisi dei metodi di sommazione di Gronwall.* (Rend. Circolo Mat. di Palermo, t. LXI, (1937), pp. 157, 176).