LEONIDA TONELLI

Su l'esistenza delle estremanti assolute per gli integrali doppi

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 8, nº 2 (1939), p. 161-165

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1939_2_8_2_161_0>

SU L'ESISTENZA DELLE ESTREMANTI ASSOLUTE PER GLI INTEGRALI DOPPI

di LEONIDA TONELLI (Pisa).

In una Memoria pubblicata alcuni anni or sono ([1]), stabilii numerosi teoremi per l'esistenza delle estremanti assolute degli integrali doppi. Da alcuni di essi discendono immediatamente dei corollari molto notevoli, che meritano di esser messi esplicitamente in evidenza.

Di questi corollari mi occupo nella presente breve Nota.

1. - Attenendomi completamente alle definizioni ed alle notazioni della mia Memoria citata in ([1]), considererò l'integrale

$$\mathfrak{J}_D[z] \equiv \iint\limits_D F(x, y, z(x, y), p(x, y), q(x, y))dxdy,$$

dove:

a) D è un campo aperto e limitato del piano (x, y) (Vedi: *M.A.P.*, n.° 1);

b) $F(x, y, z, p, q)$ è una funzione finita e continua, insieme con le sue derivate parziali F_p, F_q, per tutti i punti (x, y) del campo D e per tutti i valori finiti di z, p, q;

c) $z(x, y)$ è una funzione assolutamente continua in D e tale che risulti finito l'integrale sopra scritto, nel quale $p(x, y)$ e $q(x, y)$ indicano rispettivamente le derivate parziali $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$, là dove queste derivate esistono finite, vale a dire quasi dappertutto in D ([2]).

L'integrale $\mathfrak{J}_D$ è detto *quasi-regolare positivo* se è sempre

$$\begin{aligned} &F(x, y, z, p, q) - F(x, y, z, p_0, q_0) \\ &\qquad - (p-p_0)F_p(x, y, z, p_0, q_0) - (q-q_0)F_q(x, y, z, p_0, q_0) \geqslant 0, \end{aligned}$$

per tutti i punti (x, y) di D e per tutti i valori finiti di z, p_0, q_0, p, q.

([1]) *L'estremo assoluto degli integrali doppi.* (Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie II, Vol. II (1933), pp. 89-103). Questa Memoria verrà indicata nel seguito con *M.A.P.*

([2]) Dove la $\frac{\partial z}{\partial x}$ non esiste finita, si porrà $p=0$; e così per q.

Considerato un insieme $\{f(x, y)\}$ di funzioni $f(x, y)$, tutte definite in D, dirò che queste funzioni sono *ugualmente limitate nell'interno di D* se, per ogni gruppo di punti E, chiuso e tutto appartenente a D, esiste un corrispondente numero positivo H tale che tutte le funzioni dell'insieme $\{f(x, y)\}$ verifichino in tutto E la disuguaglianza

$$|f(x, y)| \leq H.$$

Una funzione $\varphi(x, y)$, definita in D, la dirò *funzione di accumulazione, nell'interno di D, per l'insieme* $\{f(x, y)\}$ se, considerato un qualunque gruppo di punti E, chiuso e tutto appartenente a D, e scelto un qualsiasi $\varepsilon > 0$, esiste sempre almeno una funzione dell'insieme $\{f(x, y)\}$ soddisfacente in tutto E alla disuguaglianza

$$|\varphi(x, y) - f(x, y)| < \varepsilon.$$

Fissato un piano Π, non perpendicolare al piano (x, y), indicherò con $\mathfrak{C}_{(i,\pi)}$ una classe di funzioni $f(x, y)$, definite in D, tale che:

1°) ogni sua funzione risulti (continua e) assolutamente continua in D e renda integrabile, in D,

$$F\left(x, y, f(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right);$$

2°) considerato un qualunque campo aperto D', tutto contenuto, insieme con $\bar{D}'$ ($= D' +$ la frontiera di D'), in D, a $\mathfrak{C}_{(i,\pi)}$ appartenga ogni funzione dedotta, in $\bar{D}'$, da una qualsiasi $f(x, y)$ della classe, *per livellamento a meno di* $1:n$ (n potendo essere un qualsivoglia numero intero e positivo) *secondo la giacitura del piano* Π (3), e coincidente fuori di $\bar{D}'$ con la $f(x, y)$ presa in considerazione;

3°) la classe sia *completa, nell'interno di D, rispetto a* $\mathfrak{I}_D$, e cioè ogni sua funzione di accumulazione *nell'interno di D*, $\varphi(x, y)$, che risulti assolutamente continua in D e che renda integrabile, in D,

$$F\left(x, y, \varphi(x, y), \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right),$$

appartenga essa pure alla classe.

2. - Ciò posto, vale la seguente proposizione:

Sia $\mathfrak{I}_D[z]$ *un integrale quasi-regolare positivo e tale che esistano cinque numeri* $\bar{p}$, $\bar{q}$, m, σ_1, σ_2, *con*

$$m > 0, \quad \sigma_1 \geq 2, \quad \sigma_2 \geq 2,$$

e due funzioni $\Psi(x, y, z, p, q)$, $\Phi(x, y, z, p, q)$, *definite in tutti i punti* (x, y) *di D e per tutti i valori finiti di* z, p, q, *con*

$$\Psi(x, y, z, \bar{p}, \bar{q}) \equiv 0,$$

(3) Vedi *M.A.P.*, n.° 6.

in tutto D e per tutti gli z, e con $\Phi(x, y, z, \bar{p}, \bar{q})$, identicamente uguale ad una funzione del solo punto (x, y), inferiormente limitata in tutto D, e sempre soddisfacente alla disuguaglianza

$$\Phi(x, y, z, p, q) \geqslant \Phi(x, y, z, \bar{p}, \bar{q}) \equiv g(x, y),$$

in modo che si abbia, in tutti i punti (x, y) di D e per tutti i valori finiti di z, p, q,

$$(1) \quad m\{|p-\bar{p}|^{\sigma_1}+|q-\bar{q}|^{\sigma_2}\}+\Phi(x, y, z, p, q) \leqslant F(x, y, z, p, q) \leqslant \\ \leqslant \Psi(x, y, z, p, q)+\Phi(x, y, z, p, q).$$

Indicato con Π il piano $z=\bar{p}x+\bar{q}y$, se le funzioni di una classe $\mathfrak{C}_{(i,\pi)}$ sono tutte ugualmente limitate nell'interno di D, in $\mathfrak{C}_{(i,\pi)}$ esiste il minimo assoluto di $\mathfrak{I}_D[z]$.

Osserviamo, in primo luogo, che dalla (1), segue, facendovi $p=\bar{p}$, $q=\bar{q}$,

$$g(x, y) \leqslant F(x, y, z, \bar{p}, \bar{q}) \leqslant g(x, y)$$

e perciò

$$(2) \qquad g(x, y)=F(x, y, z, \bar{p}, \bar{q}),$$

donde risulta che la $F(x, y, z, \bar{p}, \bar{q})$ è costante al variare di z, e quindi che la derivata parziale $F_z(x, y, z, \bar{p}, \bar{q})$ esiste ed è $\equiv 0$.

Dalla (2) e dalle condizioni poste risulta, inoltre,

$$\begin{aligned} F(x, y, z, \bar{p}, \bar{q}) = g(x, y) &\leqslant \Phi(x, y, z, p, q) \\ &\leqslant m\{|p-\bar{p}|^{\sigma_1}+|q-\bar{q}|^{\sigma_2}\}+\Phi(x, y, z, p, q) \\ &\leqslant F(x, y, z, p, q). \end{aligned}$$

Infine, dalla (1) e dalle condizioni imposte alla $\Phi(x, y, z, p, q)$, segue

$$\begin{aligned} F(x, y, z, p, q) &\geqslant m\{|p-\bar{p}|^{\sigma_1}+|q-\bar{q}|^{\sigma_2}\}+\Phi(x, y, z, p, q) \\ &\geqslant m\{|p-\bar{p}|^{\sigma_1}+|q-\bar{q}|^{\sigma_2}\}+g_0, \end{aligned}$$

dove abbiamo indicato con g_0 un numero tale che sia sempre, in tutto D,

$$g(x, y) \geqslant g_0.$$

Ne viene l'esistenza di due numeri μ e N, con $\mu>0$, in modo che risulti

$$F(x, y, z, p, q) > \mu(p^2+q^2)+N$$

in tutti i punti (x, y) di D e per tutti i valori finiti di z, p e q.

Risultano così soddisfatte tutte le condizioni del teorema del n.° 21 di *M.A.P.* ([4]) e la nostra proposizione è provata.

([4]) Nel teorema citato, è posta la condizione che la $F(x, y, z, p, q)$ ammetta finita la derivata parziale F_z; però tale ipotesi è sfruttata, nella dimostrazione, *soltanto* nella forma più ristretta che esista la derivata parziale rispetto a z della $F(x, y, z, \bar{p}, \bar{q})$.

3. - Si ha un caso particolare del precedente teorema se è

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 2, \qquad \Phi(x, y, z, p, q) \equiv 0,$$
$$\Psi(x, y, z, p, q) \equiv M\{|p-\overline{p}|^{2+\alpha} + |q-\overline{q}|^{2+\beta}\},$$
$$\alpha \geqslant 0, \qquad \beta \geqslant 0;$$

allora la (1) prende la forma

$$m\{(p-\overline{p})^2 + (q-\overline{q})^2\} \leqslant F(x, y, z, p, q) \leqslant M\{|p-\overline{p}|^{2+\alpha} + |q-\overline{q}|^{2+\beta}\}.$$

Si è nelle condizioni del teorema del n.º 2 se, essendo $\varphi(x, y)$ una funzione continua in D e tale che risulti sempre, in D,

$$0 < m \leqslant \varphi(x, y) \leqslant M,$$

è

$$F(x, y, z, p, q) \equiv \varphi(x, y)(p^2 + q^2)$$

oppure

$$F(x, y, z, p, q) \equiv \varphi(x, y)(p^2 + q^4).$$

Si è ancora nelle condizioni del teorema del n.º 2 se è

$$F(x, y, z, p, q) \equiv p^2 + q^2 + (x^2 + y^2)e^{p^2+q^2},$$

anche se il campo D contiene il punto (0, 0).

4. - Fissato un piano Π, non perpendicolare al piano (x, y), indicherò con $\mathfrak{C}_{(\pi)}$ una classe di funzioni $f(x, y)$, definite e continue in tutto il campo *chiuso* $\overline{D}$ ($= D +$ la frontiera di D), tale che:

1°) ogni sua funzione risulti assolutamente continua in D e renda integrabile, in D,

$$F\left(x, y, f(x, y), \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right);$$

2°) ad essa appartenga ogni funzione dedotta, in $\overline{D}$, da una qualsiasi funzione della classe medesima, *per livellamento a meno di* $1:n$ (n potendo essere un qualunque numero intero, positivo), *secondo la giacitura del piano* Π;

3°) sia una classe *completa, in D, rispetto a* $\mathfrak{J}_D$, e cioè ogni sua funzione di accumulazione, in D, $\varphi(x, y)$, che risulti assolutamente continua in D, e che renda integrabile, in D, la

$$F\left(x, y, \varphi(x, y), \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right),$$

appartenga essa pure alla classe.

Ciò premesso, si ha:

Il campo aperto e limitato D verifichi la condizione [L] (5) *e l'inte-*

(5) Vedi *M.A.P.*, n.º 3. Qui ci limitiamo a ricordare che, se la frontiera di D fosse costituita soltanto da una o da un numero finito di curve continue (nessuna delle quali sia ridotta ad un solo punto), D verificherebbe certamente la condizione [L].

grale $\mathfrak{I}_D[z]$ soddisfi a tutte le condizioni per esso indicate nel teorema del n.º 2.

Indicato con Π il piano $z=\bar{p}x+\bar{q}y$, si supponga che le funzioni della classe $\mathfrak{C}_{(\pi)}$, se considerate soltanto sulla frontiera F di D, vi risultino tutte ugualmente continue ed ugualmente limitate.

Allora, in $\mathfrak{C}_{(\pi)}$, esiste il minimo assoluto di $\mathfrak{I}_D[z]$.

In virtù di quanto si è detto nel n.º 2, questa proposizione discende immediatamente da quella del n.º 22 di *M.A.P.*

5. - Considerando invece del livellamento secondo la giacitura di un dato piano, quello mediante le superficie della famiglia

$$z=\varphi(x, y)+c,$$

dove c è una costante arbitraria e $\varphi(x, y)$ *è una funzione data e continua, insieme con le sue derivate parziali del 1º ordine, in tutto $\bar{D}$,* si possono generalizzare notevolmente le proposizioni dei n.i 2 e 4. Si ha, ad esempio, il seguente teorema, che si deduce immediatamente da quello del n.º 23 di *M.A.P.*:

Il campo aperto e limitato D verifichi la condizione $[L]$ e l'integrale $\mathfrak{I}_D[z]$ sia quasi-regolare positivo e tale che esistano tre numeri m, σ_1, σ_2, con

$$m>0, \quad \sigma_1\geqslant 2, \quad \sigma_2\geqslant 2,$$

e due funzioni $\Psi(x, y, z, p, q)$ e $\Phi(x, y, z, p, q)$, definite in tutti i punti (x, y) di D e per tutti i valori finiti di z, p, q, con

$$\Psi\left(x, y, z, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\equiv 0$$

in tutto D e per tutti gli z, e con $\Phi\left(x, y, z, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$ identicamente uguale ad una funzione del solo punto (x, y), $g(x, y)$, inferiormente limitata in tutto D, e sempre soddisfacente alla disuguaglianza

$$\Phi(x, y, z, p, q)\geqslant\Phi\left(x, y, z, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\equiv g(x, y),$$

in modo che si abbia, in tutti i punti (x, y) di D e per tutti i valori finiti di z, p, q,

$$m\left\{\left|p-\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial x}\right|^{\sigma_1}+\left|q-\frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y}\right|^{\sigma_2}\right\}+\Phi(x, y, z, p, q)\leqslant$$
$$\leqslant F(x, y, z, p, q)\leqslant\Psi(x, y, z, p, q)+\Phi(x, y, z, p, q).$$

Allora, nella classe di tutte le funzioni $z(x, y)$ assolutamente in D, continue in tutto $\bar{D}$, assumenti sulla frontiera F di D dei valori dati, sempre gli stessi per tutte le $z(x, y)$, e tali che per esse risulti integrabile, in D, la

$$F\left(x, y, z(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

esiste il minimo assoluto di $\mathfrak{I}_D[z]$.

LEONIDA TONELLI - *Direttore responsabile.* Finito di stampare il 24 aprile 1939-XVII.