Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Joseph Marcinkiewicz

Sur une méthode remarquable de sommation des séries doubles de Fourier

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 8, nº 2 (1939), p. 149-160

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1939_2_8_2_149_0>

SUR UNE MÉTHODE REMARQUABLE DE SOMMATION DES SÉRIES DOUBLES DE FOURIER

par JOSEPH MARCINKIEWICZ (Paris).

1. - Dans tout ce qui suit nous allons désigner par $f(x, y)$ une fonction de période 2π. Nous dirons qu'elle appartient à la classe L^p et nous écrirons $f \varepsilon L^p$ si

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x, y)|^p dxdy < \infty. \tag{1.1}$$

D'une manière analogue nous dirons que $f \varepsilon L^*$ si

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x, y)| \lg \{1 + f^2\} dxdy < \infty. \tag{1.2}$$

La série de FOURIER d'une fonction $f(x, y)$ sera désignée par $\sigma\{f\}$ et ses sommes partielles par $s_{m,n}(f, x, y)$ ou tout simplement par $s_{m,n}(x, y)$.

On dit qu'une suite

$$s_0, \quad s_1, \quad s_2, \ldots.$$

converge par la méthode de CESARO d'ordre k (k entier) ou plus simplement converge (C, k) lorsque la suite

$$\sigma_n^{(k)} = \frac{s_n^{(k)}}{A_n^{(k)}},$$

où

$$s_n^{(0)} = s_n, \qquad s_n^{(k)} = s_0^{(k-1)} + s_1^{(k-1)} + \ldots + s_n^{(k-1)} \tag{1.3}$$

$$A_n^{(0)} = 1, \qquad A_n^{(k)} = A_0^{(k-1)} + A_1^{(k-1)} + \ldots + A_n^{(k-1)} \tag{1.4}$$

converge au sens ordinaire.

2. - Les difficultés des recherches concernant le comportement des séries $\sigma(f, x, y)$ dépendent d'une façon extremement étroite des propriétés intégrales des fonctions f. Ainsi par exemple, lorsque la fonction f est continue, il est facile de modifier les nombreux théorèmes valables dans le cas des séries de Fourier d'une variable réelle de manière à obtenir les théorèmes correspondants pour les séries $\sigma\{f, x, y\}$.

On peut par exemple facilement démontrer sous l'hypothèse de la continuité de la fonction $f(x, y)$ que les expressions

$$\sigma_{m,n} = (m+1)^{-1}(n+1)^{-1} \sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} s_{\mu,\nu}(x, y) \tag{2.1}$$

convergent uniformement vers $f(x, y)$.

Au contraire, si l'on ne suppose que $f \varepsilon L^p (p > 1)$, l'étude des expressions (2.1) devient difficile. On démontre dans ce cas que les expressions (2.1) convergent presque partout vers f. Cette dernière proposition tombe en défaut pour les fonctions f de la classe L. Dès qu'on a remarqué ce fait, on a essayé de donner d'autres méthodes de sommation valables pour $f \varepsilon L$. Le premier qui résolut ce problème important fut M. S. BOCHNER [1]. Il a démontré que si $f \varepsilon L$ les expressions

$$\frac{4}{\pi R^2} \sum_{m^2+n^2 \leqslant R^2} s_{m,n} \tag{2.2}$$

convergent presque partout vers f.

Tout récemment [2] on a démontré que les expressions

$$(n+1)^{-2} \sum_{\mu,\nu=0}^{n} s_{\mu,\nu} \tag{2.3}$$

jouissent de la même propriété. Ces sont les seules méthodes connues qu'on peut appliquer avec succès à la sommation des séries $\sigma\{f, x, y\}$. Le but de cette note est de donner une troisième méthode de ce genre. Cette nouvelle méthode consiste dans l'application des méthodes (C, k) à la suite $\{s_{n,n}(f, x, y)\}$.

Nous allons établir les théorèmes suivants.

THÉORÈME 1. - *Si $f(x, y)$ est continu la suite $\{s_{n,n}\}$ converge uniformément $(C, 1)$.*

THÉORÈME 2. - *Soit $f \varepsilon L^p (p > 1)$.*

Posons

$$H_n^2 = (n+1)^{-1} \sum_{0}^{n} \{s_{n,n} - f\}^2 \tag{2.4}$$

$$H = \underset{n}{\text{borne sup.}}\, H_n(x, y). \tag{2.5}$$

La suite $\{H_n\}$ converge presque partout vers zéro et on a

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2n} H^p(x, y)\,dxdy \leqslant A_p \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x, y)|^p dxdy \tag{2.6}$$

où A_p ne dépend que de p.

---

[1] S. BOCHNER: *Summation of multiple Fourier series by spherical means.* Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), pp. 175-207.

[2] J. MARCINKIEWICZ et A. ZYGMUND: *Sur la sommabilité des séries doubles de Fourier.* Va paraître dans le t. 32 de Fund. Math.

THÉORÈME 3. - *Soit $f \varepsilon L^*$. Posons*

$$U_n(x, y) = (n+1)^{-1} \sum_0^n s_{m,m} \tag{2.7}$$

$$U = \text{borne sup.}_n \, |U_n|. \tag{2.8}$$

La suite $\{U_n\}$ converge presque partout vers f et on a

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} U dx dy \leq A \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f| \lg \{1+f^2\} dx dy + B \tag{2.9}$$

où A et B désignent deux constantes.

THÉORÈME 4. - *Soit $f \varepsilon L$. La suite $\{s_{n,n}\}$ converge presque partout $(C, 2)$ vers f.*

3. - Nous commençons par la démonstration du théorème 1. Elle sera basée sur plusieurs lemmes.

LEMME 1. - *Posons*

$$D_\nu = \frac{\sin (2\nu+1) \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}. \tag{3.1}$$

On a

$$\sum_0^{n-1} D_\nu(x) D_\nu(y) = \frac{\sin nx \cos \frac{x}{2} \cos ny \sin \frac{y}{2} - \cos nx \sin \frac{x}{2} \sin ny \cos \frac{y}{2}}{8 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \sin \frac{x-y}{2}} \tag{3.2}$$

$$\sum_0^{n-1} D_\nu(x) D_\nu(y) = \frac{\sin n(x-y) \sin \frac{x+y}{2} - \sin n(x+y) \sin \frac{x-y}{2}}{16 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x+y}{2}}. \tag{3.3}$$

On a

$$\sum_0^{n-1} z^{2\nu+1} = z \frac{1-z^{2n}}{1-z^2}$$

d'où l'on obtient, en posant $z = e^{i\theta/2}$ et en égalant les parties réelles des deux cotés,

$$\sum_0^{n-1} \cos (2\nu+1) \frac{\theta}{2} = \frac{\sin n\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}}.$$

En y posant successivement $\theta = x-y$ et $\theta = x+y$ et en prenant la différence on obtient (3.3). La formula (3.2) est une conséquence immédiate de (3.3).

LEMME 2. - *Posons*

$$K_n(x, y) = n^{-1} \sum_0^{n-1} D_\nu(x) D_\nu(y). \tag{3.4}$$

On a pour $|x|+|y|\leqslant\frac{3}{2}\pi$.

(3.5) $$|K_n(x,y)|\leqslant n^2$$

(3.6) $$|K_n(x,y)|\leqslant\frac{K}{|x-y|\cdot|x+y|}$$

(3.7) $$|K_n(x,y)|\leqslant\frac{K}{|xy|}$$

(3.8) $$|K_n(x,y)|\leqslant\frac{K}{n|x|\cdot|x-y|\cdot|x+y|}+\frac{K}{n|y|\cdot|x-y|\cdot|x+y|}$$

(3.9) $$|K_n(x,y)|\leqslant\frac{K}{n|yx|\cdot|x-y|}+\frac{K}{n|xy|\cdot|x+y|}$$

où K *désigne une constante absolue.*

La formule (3.4) résulte de l'inégalité évidente $|D_\nu|\leqslant\nu+\frac{1}{2}$.

Les inégalités (3.6)-(3.9) sont des conséquences de (3.2) et (3.3).

LEMME 3. - *On a*

(3.10) $$\iint_{D^*}|K_n(u,v)|\,dudv\leqslant K^* \quad (^3)$$

où D^* *est le domaine défini par l'inégalité*

(3.11) $$|u|+|v|\leqslant\frac{3}{2}\pi$$

et où K *désigne une constante absolue.*

Soit D la partie D^* définie par les relations $u\geqslant 0$, $v\geqslant 0$.

On a évidement
$$\iint_{D^*}|K_n|\,dudv=4\iint_{D}|K_n|\,dudv.$$

Désignons par D_1 la partie de D dans laquelle $u\leqslant 2/n$, $v\leqslant 2/n$, par D_2 celle composée de points n'appartenant pas à D_1 et tels que $v\geqslant\frac{1}{n}$, $v\leqslant u-\frac{1}{n}$, par D_3 celle où $v\leqslant 1/n$, $n\geqslant 2/n$, par D_4 et D_5 les domaines symétriques à D_2 et à D_3 par rapport à la droite $u=v$ et enfin par D_6 la partie restant de D.

Nous allons évaluer séparément les intégrales
$$A_k=\iint_{D_h}|K_n(u,v)|\,dudv, \qquad (k=1,2,\ldots,6).$$

D'après (3.5) on a

(3.12) $$A_1\leqslant 4.$$

La formule (3.6) donne

(3.13) $$A_3\leqslant 2\int_{1/n}^{\pi}du\int_0^{1/n}\frac{K}{u^2}\,dv\leqslant 2K$$

(^{3}) Les constantes K dans les différents contextes sont différentes.

et à cause de la symétrie

$$A_5 \leqslant 2K. \tag{3.14}$$

La formule (3.7) donne d'une façon analogue

$$A_6 \leqslant 2K. \tag{3.15}$$

Il nous reste à évaluer A_2 et A_4. On a d'après (3.9)

$$|K_n(x, y)| \leqslant \frac{K}{nx^2y} + \frac{K}{nx^2|x-y|} \qquad (xy \,\varepsilon\, D_2),$$

ce qui donne

$$A_2 \leqslant \iint\limits_{D_2} \frac{K}{nx^2y}\, dxdy + \iint\limits_{D_2} \frac{K}{nx^2|x-y|}\, dxdy \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{1/n}^{\pi} \frac{Kdy}{ny} \int\limits_{y+1/n}^{\pi} \frac{dx}{x^2} + 4 \iint\limits_{D_2} \frac{Kdxdy}{n(x+y)^2|x-y|} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{1/n}^{\pi} \frac{Kdy}{ny^2} + 16 \iint\limits_{D_2'} \frac{Kdudv}{nu^2v}$$

où D_2' est défini par les inégalités $v \geqslant 1/n$, $u \geqslant v$.

Il en résulte que

$$A_2 \leqslant K + 16 \int\limits_{1/n}^{\pi} \frac{Kdv}{nv^2} \leqslant K. \tag{3.16}$$

On trouve d'une façon analogue

$$A_4 \leqslant K. \tag{3.17}$$

Les évaluations pour A_k donnent (3.10).

LEMME 4. - *Soit $f(x, y)$ une fonction égale à zéro pour $|x| \leqslant 2\Delta$ et pour $|y| \leqslant 2\Delta$. La suite $\{s_{n,n}\}$ converge $(C, 1)$ uniformément vers zéro dans le carré $|x| \leqslant \Delta$, $|y| \leqslant \Delta$.*

C'est le principe bien connu de la localisation.

Le théorème 1 est une conséquence immédiate des lemmes 3 et 4. Les calculs à faire sont si familiers que nous ne croyons pas utile de les reproduire.

4. - Nous allons maintenant démontrer le théorème 3.

LEMME 5. - *Soit*

$$f^*(x, y) = \text{borne sup.}\, \frac{1}{hk} \int\limits_{-h}^{+h} \int\limits_{-k}^{+k} |f(x+u, y+v)|\, dudv \tag{4.1}$$

$$f_*(x, y) = \text{borne sup.}\, \frac{1}{hk} \iint\limits_{D_{hk}} |f(x+u, y+v)|\, dudv \tag{4.2}$$

où D_{hk} est défini par les relations $|u-v| \leqslant h$, $|u+v| \leqslant k$.

On a

$$(4.3)\qquad |U_n(x, y)| \leqslant K(f^*(x, y) + f_*(x, y)).$$

Sans borner la généralité des résultats nous pouvons supposer $x=y=0$. Nous pouvons aussi admettre que $f(x, y) \geqslant 0$ et $f=0$ en dehors du domaine D^*. En effet posons $f=f_1+f_2$ où $f=f_1$ dans D^* et $f=f_2$ en dehors de D^*. On a

$$|s_{n,n}(f_2, 0, 0)| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_2(u, v)| \frac{dudv}{|uv|} \leqslant \frac{4}{\pi^3}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(u, v)|\, dudv \leqslant 16 f^*(0, 0)$$

ce qui donne aussi

$$|U_n(f_2, 0, 0)| \leqslant 6f^*(0, 0).$$

On a

$$(4.4)\qquad |U_n(0, 0)| \leqslant \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u, v)\, |K_n(u, v)|\, dudv.$$

Soient $D_k (k=1, 2, \ldots, 6)$ les domaines envisagés dans la démonstration du lemme 3 et A_k les parties de l'intégrale (4.4) prises sur ces domaines. On a d'après (3.5)

$$(4.5)\qquad A_1 \leqslant Kf^*(0, 0).$$

Divisons D_3 en parties D_3^k par les droites $u=2^k/n$.
En tenant compte de (3.6) on obtient

$$\iint_{D_3^k} f(u, v)\, |K_n(u, v)|\, dudv \leqslant 2 \iint_{D_3^k} f(u, v) \frac{K}{u^2}\, du \leqslant$$
$$\leqslant 2K\left(\frac{2^{+k}}{n}\right)^{-2} n^{-2} 2^{k-1} f^*(0, 0) \leqslant K 2^{-k} f^*(0, 0)$$

ce qui donne

$$(4.6)\qquad A_3 \leqslant Kf^*(0, 0).$$

En raison de la symétrie on trouve aussi

$$(4.7)\qquad A_5 \leqslant Kf^*(0, 0).$$

Un raisonnement analogue fournit la formule

$$(4.8)\qquad A_6 \leqslant Kf_*(0, 0).$$

D'autre part on a dans D_2

$$|K_n(u, v)| \leqslant \frac{K}{nu^2 v} + \frac{K}{nu^2 |u-v|}$$

et il en résulte que

$$A_2 \leqslant \iint_{D_2} f(u,v) \frac{K}{nu^2v}\, dudv + \iint_{D_2} f(u,v) \frac{K}{nu^2|u-v|}\, dudv = A_2' + A_2''.$$

Divisons le domaine D_2 en sous-domaines D^{ij} $(j \leqslant i-1)$ par les droites $u = 2^{i-1}/n$ et $v = 2^j/n$.

On a

$$\iint_{D^{ij}} f(u,v) \frac{Kdudv}{nu^2v} \leqslant 2^{-2(i-1)-j}n^2 \iint_{D^{ij}} Kf(u,v)dudv \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-(i+1)}Kf^*(0,0) \leqslant K2^{-\frac{i+j}{2}} f^*(0,0).$$

On en obtient $A_2' \leqslant Kf^*(0,0)$ et d'une manière analogue $A_2'' \leqslant Kf_*(0,0)$ ou bien

$$A_2 \leqslant K\{f^*(0,0) + f_*(0,0)\}. \tag{4.9}$$

Les évaluations pour A_k donnent

$$\int_0^\pi\int_0^\pi f(u,v)\,|K_n(u,v)|\,dudv \leqslant K\{f^*(0,0) + f_*(0,0)\}.$$

De même on trouve les évaluations pour les autres parties de l'intégrale (4.4) ce qui achève la démonstration du lemme.

Lemme 5*. - *Soit $f \varepsilon L^*$. On a*

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*(x,y)dxdy \leqslant A\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f| \lg\,(1+f^2)dxdy + B \tag{4.10}$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_*(x,y)dxdy \leqslant A\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f| \lg\,(1+f^2)dxdy + B \tag{4.11}$$

où A et B désignent deux constantes absolues.

La formule (4.10) est connue ([4]), la formule (4.11) résulte de (4.10). Pour démontrer ceci il suffit de changer les axes des coordonnées.

Les lemmes 5 et 5* donnent (2.9).

En posant dans (2.9) Mf au lieu de f on obtient

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} U(x,y)dxdy \leqslant A\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x,y)| \lg\,(1+M^2f^2)dxdy + \frac{B}{M}. \tag{4.12}$$

([4]) B. Jessen, J. Marcinkiewicz et A. Zygmund: *Note on the differentiability of multiple integrals*. Fund. Math. 25 (1935), pp. 217-239.

Soit $f = f_1 + f_2$ où f_1 est une fonction continue et

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_2| \lg(1 + M^2 f_2^2) dx dy \leq \frac{1}{M}. \tag{4.13}$$

On obtient d'après (4.12)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} U(f_2, x, y) dx dy \leq \frac{A+B}{M}. \tag{4.14}$$

En y posant $M = (A+B)\varepsilon^{-2}$ on conclut que

$$\text{mes } E\{U(f_2, x, y) > \varepsilon\} \leq \varepsilon.$$

Il en résulte, d'après le théorème 1, que

$$\text{mes } E\{\limsup_{n\to\infty} |U_n(f, x, y) - f(x, y)| \geq \varepsilon\} \leq \varepsilon.$$

Or, ε étant arbitraire, la dernière relation achève la démonstration du théorème 3.

5. - LEMME 6. — *Soient $\{f_\nu(x)\}$ une suite de fonctions et $\{n_\nu\}$ une suite de nombres naturels. En désignant par $s_n(f) = s_n(f, x, y)$ les sommes partielles de la serie de Fourier d'une fonction f on a*

$$\int_0^{2\pi} \Big(\sum_\nu s_{n_\nu}^2(f_\nu)\Big)^{p/2} dx \leq A_p \int_0^{2\pi} \Big(\sum f_\nu^2\Big)^{p/2} dx, \qquad (p > 1) \tag{5.1}$$

où A_p ne dépend que de p.

Ce lemme est connu ([5]).

LEMME 7. - *Soient $\{f_\nu\}$ une suite de fonctions et $\{n_i\}$ une suite de nombres naturels.*

On a

$$\int_0^{2\pi} \Big(\sum \sigma_{n_i}^2(f_i, x)\Big)^{p/2} dx \leq A_p \int_0^{2\pi} \Big(\sum f_\nu^2\Big)^{p/2} dx, \qquad (p > 1) \tag{5.2}$$

où

$$\sigma_{n_i}(f, x) = (n+1)^{-1} \sum_0^n s_\nu(f, x).$$

Pour démontrer cette inégalité, il suffit de remarquer que

$$\sigma_{n_i}^2(f_i, x) \leq (n_i + 1)^{-1} \sum_{k=0}^{n_i} s_\nu^2(f_i, x)$$

et d'appliquer le lemme 6.

([5]) A. ZYGMUND: *On the convergence and summability of power series on the circle of convergence.* I. Fund. Math. 30 (1938), pp. 170-196.

LEMME 8. - *Soient $f(x)$ une fonction, $s_n(f, x) = s_n$ les sommes partielles et $\sigma_n(f, x) = \sigma_n$ les moyennes de Fejér de sa série de Fourier. On a*

$$(5.3) \qquad \int_0^{2\pi} \Big(\sum \frac{(s_n - \sigma_n)^2}{n}\Big)^{p/2} dx \leq A_p \int_0^{2\pi} |f|^p dx, \qquad (p > 1)$$

où A_p ne dépend que de p.

Ce lemme est aussi connu ([6]).

LEMME 9. - *Soient $f(x, y) \varepsilon L^p (p > 1)$, les expressions $s_{m,n}(f, x, y)$ les sommes partielles de sa série de Fourier et $\sigma_{m,n}$ définies par la formule* (2.1). *On a*

$$(5.4) \qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(\sum n^{-1}(s_{n,n} - \sigma_{n,n})^2\Big)^{p/2} dxdy \leq A_p \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^p dxdy.$$

Pour toute fonction $h(x, y)$ nous écrirons $h^{(1)}(x, y)$ pour mettre en évidence que nous la considérons comme une fonction de x et par $h^{(2)}(x, y)$ si nous la considérons comme une fonction de y. On a

$$s_{n,n} - \sigma_{n,n} = s_n \{ s_n(f^{(2)}) - \sigma_n(f^2) \}^{(1)} + \sigma_n \{ s_n(f^{(1)}) - \sigma_n(f^{(1)}) \}^{(2)} = P_n + Q_n.$$

On trouve d'après le lemme 6

$$\int_0^{2\pi} \Big(\sum n^{-1} P_n^2\Big)^{p/2} dx \leq A_p \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(\sum n^{-1} [s_n(f^{(2)}) - \sigma_n(f^2)]^2\Big)^{p/2} dx.$$

En intégrant cette inégalité par rapport à y et en appliquant le lemme 8 on obtient

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \Big(\sum n^{-1} P_n^2\Big)^{p/2} dxdy \leq A_p \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^p dxdy.$$

Une évaluation analogue subsiste aussi pour le Q_n, il en résulte (5.4).

LEMME 10. - *Posons*

$$h^2 = \max_n n^{-1} \sum_0^{n-1} (s_{\nu\nu} - \sigma_{\nu\nu})^2.$$

On a

$$(5.5) \qquad \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} h^p dxdy \leq A_p \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^p dxdy, \qquad (p > 1).$$

([6]) Ibid. voir aussi A. ZYGMUND: *Proof of a theorem of Paley.* Proc. Cambridge Philos. Soc. 37 (1938), pp. 125-133.

C'est une conséquence immédiate du lemme 9.

L'inégalité (2.5) résulte de (5.5) et du lemme suivant.

LEMME 11. - *Soit*

$$\sigma(x, y) = \underset{n,m}{\text{borne sup.}} \, |\sigma_{n,m}(x, y)|.$$

On a

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sigma^p(x, y)\,dxdy \leq A_p \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f|^p dxdy.$$

Ce lemme est connu ([6]).

L'inégalité (2.5) donne aussi la convergence presque partout vers zéro de la suite H_n. L'idée du raisonnement est la même que dans le théorème 3.

6. - LEMME 12. — *On a*

$$\sum_1^n \sin \nu\theta = \frac{\cos\frac{\theta}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}. \tag{6.1}$$

Cette formule est bien connue.

LEMME 13. - *Soit*

$$D_\nu(x) = \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}, \quad \overline{K}_n(x, y) = \sum_0^{n-1} D_\nu(x)D_\nu(y), \quad P_n = \sum_1^n K_\nu(x, y).$$

On a

$$P_n(x, y) = \tag{6.2}$$

$$+\frac{1}{32}\,\frac{\sin^2\frac{(x+y)}{2}\left[\cos\frac{(x-y)}{2} - \cos(2n+1)\frac{(x-y)}{2}\right] - \sin^2\frac{(x-y)}{2}\left[\cos\frac{(x+y)}{2} - \cos(2n+1)\frac{(x+y)}{2}\right]}{\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin^2\frac{x+y}{2}\sin^2\frac{x-y}{2}}.$$

C'est la conséquence immédiate du lemme 12 et de la formule (3.3).

LEMME 14. - *Les expressions P_n étant définies comme dans le lemme* 13, *on a pour* $|u|+|v| \leq \frac{3}{2}\pi$

$$|P_n| \leq n^4, \tag{6.3}$$

$$|P_n| \leq \frac{K}{|xy|(x-y)^2} + \frac{K}{|xy|(x+y)^2}, \tag{6.4}$$

([6]) Voir p. ex. A. ZYGMUND: *Trigonometrical series* (*Warszawa-Lwów* 1935), p. 278 et la note citée sous ([4]).

$$(6.5) \qquad |P_n| \leqslant \frac{Kn^2}{|xy|},$$

$$(6.6) \qquad |P_n| \leqslant \frac{Kn^2}{|x-y||x+y|}.$$

La formule (6.3) résulte de (3.5), la formule (6.4) de (6.2).

La formule (3.6) donne

$$|K_n| \leqslant \frac{Kn}{|x-y| \cdot |x+y|}$$

ce qui entraîne (6.6). D'une façon analogue (3.7) fournit (6.5).

LEMME 15. - *On a pour* $|x|+|y| \leqslant \frac{3}{2}\pi$

$$(6.7) \qquad \left|\frac{P_n}{n^2}\right| \leqslant \frac{Kn^2}{(1+n^2x^2)(1+n^2y^2)} + \frac{Kn^2}{[1+n^2(x-y)^2][1+n^2(x+y)^2]}.$$

Il suffit de démontrer cette inégalité pour $x \geqslant 0, y \geqslant 0$. Soient D_k ($k=1, 2,...., 6$) les mêmes que dans le lemme 3. Pour $(x, y) \varepsilon D_1$ (6.7) est une conséquence immediate de (6.3) de même l'inégalité (6.6) donne (6.7) dans D_3 et D_5 et (6.5) dans D_6. Pour démontrer (6.7) dans D_2 il suffit de diviser ce domaine en deux parties par la droite $y=\frac{1}{2}y$.

Soient D' et D'' la partie inférieure et supérieure de D_2.

On a dans D'

$$y<x, \qquad x-y>\frac{1}{2}x, \qquad x>2/n, \qquad y>1/n$$

ce qui donne d'apres (6.4)

$$\frac{|P_n|}{n^2} \leqslant \frac{K}{n^2x^3y} + \frac{K}{p^2x^2y^2} \leqslant \frac{K}{n^2x^2y^2} \leqslant \frac{Kn^2}{(1+n^2x^2)(1+n^2y^2)}.$$

D'une manière analogue on trouve dans D''

$$\frac{|P_n|}{n^2} \leqslant \frac{Kn^2}{[1+n^2(x-y)^2][1+n^2(x+y)^2]}.$$

Il en résulte que (6.7) subsiste dans D_2 et par conséquent aussi dans D_4. La formule (6.7) se trouve ainsi entièrement établie.

LEMME 16. *Posons*

$$h_1 = \text{borne sup.}_n \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+u, y+v)| \frac{n^2 du dv}{(1+n^2u^2)(1+n^2v^2)}$$

$$h_2 = \text{borne sup.}_n \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+u, y+u)| \frac{n^2 du dv}{[1+n^2(u-v)^2][1+n^2(u+v)^2]}.$$

On a pour tout $A > 0$

$$\text{mes}\, E(h_1(x, y) > A) \leq \frac{K}{A} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x, y)|\, dxdy \tag{6.8}$$

$$\text{mes}\, E(h_2(x, y) > A) \leq \frac{K}{A} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x, y)|\, dxdy \tag{6.9}$$

où K désigne une constante absolue.

La formule (6.8) est connue (7), la formule (6.9) résulte de (6.8).

Pour démontrer le théorème 4 remarquons qu'on a

$$V_n(x, y) = \frac{2}{\pi^2 n(n+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u-x, v-y) P_n(u, v)\, dudv$$

$$V_n(x, y) = s_n^{(2)}/A_n^{(2)}, \qquad s_n^{(0)} = s_{n,n}(f).$$

En tenant compte des lemmes 4, 15 et 16 on obtient facilement

$$\text{mes}\, E\{\limsup |V_n(x, y)| > A\} \leq \frac{K}{A} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x, y)|\, dxdy.$$

Pour en tirer le théorème il suffit de poser $f = f_1 + f_2$ où f_1 soit continue et l'intégrale de $|f_2|$ très petite.

---

(7) Citée sous (2).