ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LANDOLINO GIULIANO

Sulla differenziabilità asintotica delle funzioni di due variabili a variazione limitata

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e^ série, tome 8, n° 1 (1939), p. 41-50

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1939_2_8_1_41_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1939, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SULLA DIFFERENZIABILITÀ ASINTOTICA DELLE FUNZIONI DI DUE VARIABILI A VARIAZIONE LIMITATA (*)

di LANDOLINO GIULIANO (Pisa).

1. - Riprendendo i lavori di RADEMACHER (1) sulla differenziabilità totale (nel senso di STOLZ) di una funzione di due variabili reali, allargando le ipotesi enunciate da questo Autore, e dopo una approfondita analisi sulle condizioni di esistenza del differenziale totale, W. STEPANOFF (2) fu portato a porre il seguente concetto di differenziabilità totale *asintotica*, più largo di quello posto dallo STOLZ:

« *Diremo che una funzione* $f(x, y)$ *definita in un insieme misurabile* E, *è asintoticamente differenziabile nel punto* (x, y) *di* E, *se esiste un insieme misurabile* E_{xy} *appartenente ad* E, *avente in tale punto densità* 1, *in modo che se* $(x+h, y+k)$ *appartiene ad* E_{xy}, *l'incremento corrispondente della funzione si possa esprimere come segue*:

$$f(x+h, y+k)-f(x, y)=A(x, y)\cdot h+B(x, y)\cdot k+\sqrt{h^2+k^2}\cdot R(x, y;\ h, k)$$

con $R(x, y;\ h, k)\to 0$ *quando* $\sqrt{h^2+k^2}\to 0$, *il limite essendo calcolato per i punti* $(x+h, y+k)$ *di* E_{xy} ».

Intorno ai concetti introdotti da RADEMACHER e da STEPANOFF hanno lavorato U. S. HASLAM-JONES (3) e J. C. BURKILL (4), estendendo le considerazioni di quegli Autori ed enunciando alcune notevoli proprietà per particolari classi di funzioni. Essi fra l'altro hanno dimostrato che ogni funzione a variazione limitata secondo ARZELÀ è totalmente differenziabile (nel senso di STOLZ), quasi dappertutto. Un tale risultato non è valido però per la classe di funzioni, più larga, a variazione limitata secondo TONELLI, neanche, come è noto (5), se si ammette l'ipotesi della assoluta continuità. Nel lavoro citato in (4) viene però dimostrato

(*) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(1) H. RADEMACHER: *Ueber partielle und totale Differenzierbarkeit,* I e II. Mathematische Annalen, 79 (1919), pp. 340-359 e 81 (1923), pp. 52-63.

(2) W. STEPANOFF: *Sur les conditions de l'existence de la differentielle totale.* Recueil de la Soc. Math. de Moscou, 32 (1924), pp. 511-526.

(3) U. S. HASLAM-JONES: *Derivate planes and tangent planes of a measurable function.* Quarterly Journal of Math. Oxford, 3 (1932), pp. 120-132.

(4) J. C. BURKILL and U. S. HASLAM-JONES: *Note on the differentiability of functions of two variables.* Journal of the London Math. Society, vol. VII (1932), pp. 297-305.

(5) Cfr. loc. cit. in (2) pp. 515-516; SAKS: *On the surfaces without tangent planes.* Annals of Mathematics (1933-1934), pp. 114-124.

che le funzioni quasi continue che sono a variazione limitata secondo TONELLI e che soddisfano ad un'ulteriore condizione (che indicherò più oltre), godono della differenziabilità totale asintotica, quasi dappertutto.

Uno degli scopi della presente breve Nota è di provare come si possa fare a meno di porre tale ulteriore condizione ed inoltre che il risultato rimane valido anche per quelle funzioni più generali che il TONELLI ha chiamato generalmente a variazione limitata ([6]), e che qui vanno supposte anche quasi continue. Ma, mentre questo risultato potremmo ottenerlo molto rapidamente sfruttando una proposizione dovuta allo STEPANOFF, noi preferiamo di dedurlo da alcune considerazioni e da un teorema, che qui proveremo e che ne estende un altro dovuto a BURKILL e HASHAM-JONES, considerazioni e teorema che sono molto utili anche per altre ricerche.

2. - La funzione $f(x, y)$ che supporrò definita nel quadrato

$$Q: \quad 0 \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq y \leq 1 \quad ([7]),$$

è ivi a variazione limitata ([8]) se, indicata con $V_y(\bar{x}, y_0)$ $(0 \leq \bar{x} \leq 1, 0 \leq y_0 \leq 1)$ la variazione totale della funzione della sola y, $f(\bar{x}, y)$ per y variabile in $(0, y_0)$ e con $V_x(x_0, \bar{y})$ $(0 \leq x_0 \leq 1, 0 \leq \bar{y} \leq 1)$ quella della $f(x, \bar{y})$ per x variabile in $(0, x_0)$, le due funzioni $V_y(x, 1)$, $V_x(1, y)$, rispettivamente della x e della y, sono finite in quasi tutto $(0, 1)$, quasi continue e integrabili (nel senso del LEBESGUE).

Ad ogni funzione $f(x, y)$ a variazione limitata vengono così a corrispondere due funzioni $V_x(x, y)$ e $V_y(x, y)$ definite in Q e se la $f(x, y)$ è in Q continua, le $V_x(x, y)$ e $V_y(x, y)$ risultano quasi continue; ciò non è però più vero se la $f(x, y)$ è in Q soltanto quasi continua; è precisamente, in questo caso generale, l'ipotesi della quasi continuità superficiale delle $V_x(x, y)$ e $V_y(x, y)$ che BURKILL E HASLAM-JONES hanno aggiunto per dimostrare la differenziabilità totale asintotica quasi dappertutto della $f(x, y)$.

Come ho già detto, prenderò senz'altro in esame *le funzioni quasi continue* $f(x,y)$ *generalmente a variazione limitata*, e richiamo la loro definizione ([9]): « Una funzione $f(x, y)$ è, nel quadrato fondamentale Q di vertici opposti (0, 0), (1, 1), *generalmente a variazione limitata*, se esiste un insieme E di punti di Q di misura superficiale nulla, tale che, indicate con $V_x(x_0, y)$, $V_y(x, y_0)$ $(0 \leq x_0 \leq 1, 0 \leq y_0 \leq 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)$ le variazioni totali della $f(x, y)$ considerata rispet-

([6]) L. TONELLI: *Sulle funzioni generalmente a variazione limitata.* Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa (1936), pp. 315-320.

([7]) Ciò solo per semplicità, valendo, tutto quel che dirò, per funzioni $f(x, y)$ definite in un *campo* (insieme misurabile) qualunque A del piano (x, y).

([8]) Intenderò sempre, d'ora in poi, a variazione limitata, secondo TONELLI.

([9]) Cfr. L. TONELLI, loc. cit. in ([6]) e L. CESARI: *Sulle funzioni a variazione limitata.* Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, 1936, pp. 299-313.

tivamente come funzione della sola x in $(0, x_0)$ e della sola y in $(0, y_0)$ — variazioni calcolate senza tenere alcun conto dei valori assunti dalla $f(x, y)$ nei punti di E — le $V_x(1, y)$ e $V_y(x, 1)$ risultino, come funzioni rispettivamente di y e di x nell'intervallo $(0, 1)$, quasi ovunque finite, quasi continue e integrabili (nel senso del LEBESGUE) ».

3. - L. CESARI (loc. cit. in (9)), sviluppando, fra l'altro, per altre ricerche, un'osservazione del TONELLI (10), e partendo dalla funzione $f(x, y)$ quasi continua e generalmente a variazione limitata in Q, costruisce (11) una funzione quasi continua in Q, $\bar{f}(x, y)$, la quale è quasi dappertutto in Q uguale alla $f(x, y)$ e gode inoltre della proprietà che, se $\bar{x}$ è un punto non appartenente ad un opportuno insieme a_x di $(0, 1)$ di misura lineare nulla, la $\bar{f}(\bar{x}, y)$ considerata come funzione soltanto della y è a variazione limitata, ha sole discontinuità a destra ed è continua per $y=0$. Per questa $\bar{f}(\bar{x}, y)$ vale perciò il noto teorema (12) secondo il quale le somme $\sum_1^n |\bar{f}(\bar{x}, y_{i+1})-\bar{f}(\bar{x}, y_i)|$ $(0=y_1<y_2<\ldots<y_n=1)$ tendono uniformemente alla variazione totale della $\bar{f}(\bar{x}, y)$ in $(0, 1)$ quando tende a zero la massima parte in cui i punti y_i dividono l'intervallo $(0, 1)$. Indico con $\bar{V}_y(x, y)$ la variazione totale della $\bar{f}(x, y)$, considerata come funzione della sola y sull'intervallo $(0, y)$, dove è $0 \leq y \leq 1$ (variazione totale che è calcolata tenendo conto di *tutti* i valori assunti dalla $\bar{f}(x, y)$). È allora facile dedurre, col solito ragionamento che si fa per le funzioni continue (13), che per ogni $\bar{x}$ non appartenente ad a_x, la $\bar{V}_y(\bar{x}, y)$ è funzione di y continua a sinistra. Inoltre, come ha mostrato il CESARI (14), per ogni $\bar{y}$ di $(0, 1)$ la $\bar{V}_y(x, \bar{y})$ è funzione quasi continua di x in $(0, 1)$.

4. - Mi propongo ora di dimostrare che *la* $\bar{V}_y(x, y)$ *è funzione quasi continua, come funzione di* (x, y), *in tutto* Q. Per questo, osservo anzitutto che, essendo l'insieme a_x di misura lineare nulla, sul segmento $(0, 1)$ dell'asse delle x è possibile costruire un plurintervallo aperto $\Delta_{a_x} < \frac{1}{2n}$, con n intero positivo, che racchiuda tutti i punti di a_x. Chiamo poi A_x l'insieme, di misura superficiale nulla, dei punti (x, y) di Q in cui x appartiene ad a_x ed è $0 \leq y \leq 1$, e scelgo un insieme

---

(10) L. TONELLI: *Serie Trigonometriche*. Bologna, Zanichelli, 1928, pag. 449, nota 1.

(11) Cfr. loc. cit. in (9), pp. 303-305.

(12) Il teorema nella forma più generale trovasi in L. TONELLI: *Sopra alcuni polinomi di approssimazione*. Annali di Matematica, t. XXV, s. III, 1916, pp. 275-316, n.° 14. Per le funzioni continue verso destra tale teorema fu ritrovato recentemente da T. VIOLA: *Funzioni a variazione limitata continue verso destra*. Rendiconti Accademia dei Lincei, 1932, vol. XV, pp. 626-629.

(13) L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*. Vol. I, pag. 43. Zanichelli, Bologna, 1921.

(14) Cfr. loc. cit. in (9), pag. 305.

numerabile uniformemente denso di punti y_i di (0, 1) (per esempio l'insieme dei punti di ordinata razionale di (0, 1) dell'asse delle y). Per la quasi continuità in (0, 1) della funzione della sola x, $\overline{V}_y(x, y_1)$, è possibile costruire sul segmento (0, 1) dell'asse delle x un plurintervallo aperto $\varDelta_1 < \frac{1}{n \cdot 2^2}$ a prescindere dal quale la $\overline{V}_y(x, y_1)$ è funzione, della sola x, continua; analogamente è possibile costruire un plurintervallo aperto $\varDelta_2 < \frac{1}{n \cdot 2^3}$ sul segmento (0, 1) dell'asse delle x, a prescindere dal quale la $\overline{V}_y(x, y_2)$ è funzione, della sola x, continua; e così, in generale, è possibile costruire un plurintervallo aperto $\varDelta_m < \frac{1}{n \cdot 2^{m+1}}$ sul segmento (0, 1) dell'asse delle x a prescindere dal quale la $\overline{V}_y(x, y_m)$ è funzione, della sola x, continua. Costruisco ora un plurintervallo aperto $\varDelta$ tale che sia

$$\varDelta \leqslant \varDelta_{a_x} + \Sigma \varDelta_m < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2^2 \cdot n}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^m} + \dots\right) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}$$

e che contenga tutti gli intervalli di $\varDelta_{a_x}$, $\varDelta_1, \dots, \varDelta_m, \dots$ L'insieme $\overline{\varDelta}$ dei punti (x, y) tali che x appartenga a $\varDelta$, e $0 \leqslant y \leqslant 1$, che è quindi formato da un numero finito o da una infinità numerabile di rettangoli non sovrapponentisi, coi lati paralleli all'asse delle y di lunghezza uguale all'unità, ha misura superficiale $< \frac{1}{n}$. $\overline{\varDelta}$ contiene inoltre tutti i punti di A_x. Chiamando Q' l'insieme $Q - \overline{\varDelta}$, per ogni punto $(\bar{x}, \bar{y})$ di Q' e di continuità per la $\bar{f}(\bar{x}, y)$ come funzione della sola y, e quindi di continuità per la $\overline{V}_y(\bar{x}, y)$ considerata come funzione della sola y, è possibile, in corrispondenza a un numero positivo arbitrario ε, determinare due numeri $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tali che si abbia

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \overline{V}_y(\bar{x}, \bar{y} + \delta_2) - \overline{V}_y(\bar{x}, \bar{y}) < \frac{\varepsilon}{2}, \\ \overline{V}_y(\bar{x}, \bar{y}) - \overline{V}_y(\bar{x}, \bar{y} - \delta_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \end{cases}$$

e si può sempre fare in modo che i punti $(\bar{x}, \bar{y} + \delta_2)$, $(\bar{x}, \bar{y} - \delta_1)$ cadano su due rette del sistema $y = y_i$. Si può poi trovare un numero $\delta^* > 0$ tale che, per tutti gli x soddisfacenti alla $|x - \bar{x}| \leqslant \delta^*$ e se i punti $(x, \bar{y} + \delta_2)$ $(x, \bar{y} - \delta_1)$ appartengono a Q', si abbia

$$\text{(2)} \qquad \begin{cases} |\overline{V}_y(x, \bar{y} + \delta_2) - \overline{V}_y(\bar{x}, \bar{y} + \delta_2)| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ |\overline{V}_y(x, \bar{y} - \delta_1) - \overline{V}_y(\bar{x}, \bar{y} - \delta_1)| < \frac{\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

Se (x, y) è un punto qualunque di Q' con $|x - \bar{x}| \leqslant \delta^*$, $\bar{y} - \delta_1 \leqslant y \leqslant \bar{y} + \delta_2$, essendo la $\overline{V}_y(x, y)$ funzione non decrescente di y per ogni x fissato e osservando che i punti $(x, \bar{y} + \delta_2)$ $(x, \bar{y} - \delta_1)$ appartengono necessariamente a Q', dalle (1) e (2) si deduce

$$|\overline{V}_y(x, y) - \overline{V}_y(\bar{x}, \bar{y})| < \varepsilon.$$

La $\overline{V}_y(x, y)$ è così continua in $(\bar{x}, \bar{y})$ a prescindere dai punti di $\overline{\varDelta}$. Si osservi ora che essendo su ogni parallela all'asse delle y, tranne quelle appartenenti a $\bar{\Delta}$, la $\bar{f}(x, y)$ a variazione limitata, su ognuna di tali parallele esistono al più un'infinità numerabile di punti di discontinuità per la $\bar{f}(x, y)$. Essi complessivamente costituiscono quindi (come facilmente si vede) un insieme di misura superficiale nulla, e per quanto sopra si è notato, si può dire che quasi dappertutto in Q' la $\bar{V}_y(x, y)$ è funzione continua, e, pertanto, che essa è quasi continua in Q, essendo la misura di $Q - Q'$ uguale a quella di $\bar{\Delta}$ e perciò $< \frac{1}{n}$, con n intero positivo arbitrario.

5. - Di quanto si è stabilito al numero precedente darò una seconda dimostrazione. Osservo subito che, per il nostro scopo, si può senz'altro trascurare l'insieme A_x definito al n.° 4. Scelto anche qui un insieme numerabile uniformemente denso di punti y_i di $0 \leqslant y \leqslant 1$, dico Λ l'insieme dei punti di $Q - A_x$ per cui è $\bar{V}_y(x, y) > m$, m essendo un numero fissato arbitrariamente. Essendo misurabile linearmente (n.° 3) la funzione di x, $\bar{V}_y(x, y_i)$ (in cui suppongo fissato y_i), è misurabile linearmente l'insieme dei punti λ_{y_i} di $Q - A_x$ che cadono sulla retta $y = y_i$ e per cui è $\bar{V}_y(x, y_i) > m$. Chiamo Λ_{y_i} l'insieme di tutti i punti (x, y) di Q tali che x sia l'ascissa di un punto di λ_{y_i} e $y_i \leqslant y \leqslant 1$. Come è noto, Λ_{y_i} risulta superficialmente misurabile (è anzi la misura di Λ_{y_i} uguale a quella di λ_{y_i} moltiplicata per $(1 - y_i)$). Poichè $\bar{V}_y(x, y)$ è funzione non decrescente di y per ogni x fissato, Λ_{y_i} fa parte di Λ. Se poi (x_0, y_0) è un punto di $Q - A_x$ per cui è $\bar{V}_y(x_0, y_0) > m$, dico che allora esso dovrà appartenere a un Λ_{y_i}. Infatti, non appartenendo x_0 ad a_x, la funzione $\bar{V}_y(x_0, y)$ è continua a sinistra come funzione di y, e quindi alla sinistra di (x_0, y_0) sulla retta $x = x_0$ esiste un intorno in cui è sempre $\bar{V}_y(x_0, y) > m$ e in tale intorno un punto y_j per cui è anche $\bar{V}_y(x_0, y_j) > m$. È così visto che (x_0, y_0) appartiene a Λ_{y_j}. Risulta dunque $\Lambda = \Sigma \Lambda_{y_i}$, da cui segue che Λ è misurabile superficialmente. La $\bar{V}_y(x, y)$ è pertanto superficialmente misurabile in $Q - A_x$ e perciò anche in Q.

6. - Analogamente a quanto si è fatto per la $\bar{f}(x, y)$, si può costruire in Q una funzione quasi continua $\bar{\bar{f}}(x, y)$, quasi dappertutto uguale alla $f(x, y)$, per la quale la corrispondente variazione totale, come funzione della sola x, $\bar{\bar{V}}_x(x, y)$ risulta quasi continua come funzione di (x, y) in tutto Q, e inoltre la $\bar{\bar{V}}_x(\bar{x}, y)$ è funzione quasi continua della y in $(0, 1)$ per ogni $\bar{x}$ di $(0, 1)$. Ne viene allora, analogamente a quanto ha fatto vedere il CESARI [15], che si può determinare un insieme E' contenente E (n.° 2) di punti di Q, di misura superficiale nulla, in modo che, dette $V_x^*(x, y)$ e $V_y^*(x, y)$ le variazioni totali della $f(x, y)$, calcolate senza tenere alcun conto dei valori della $f(x, y)$ in E', si abbia, quasi dappertutto in Q, $V_x^*(x, y) = \bar{\bar{V}}_x(x, y)$, $V_y^*(x, y) = \bar{V}_y(x, y)$ — donde risulta che $V_x^*(x, y)$

---

[15] Cfr. loc. cit. in [9], pag. 305.

e $V_y^*(x, y)$ sono funzioni di (x, y) quasi continue in Q — e in modo anche che $V_x^*(\bar{x}, y)$ e $V_y^*(x, \bar{y})$ risultino funzioni quasi continue rispettivamente di y e di x per tutti gli $\bar{x}$ e $\bar{y}$ di $(0, 1)$. Essendo poi $V_x^*(x, y) \leqslant V_x(1, y)$, $V_y^*(x, y) \leqslant V_y(x, 1)$, le $V_x^*(x, y)$ e $V_y^*(x, y)$ risultano finite quasi dappertutto in Q, e le $V_x^*(1, y)$, $V_y^*(x, 1)$ risultano, come funzioni rispettivamente di y e di x, integrabili in $(0, 1)$.

7. - Dimostriamo ora il seguente:

TEOREMA: *Se $f(x, y)$ è una funzione quasi continua in Q ed ivi generalmente a variazione limitata, dato un numero positivo arbitrario σ, esistono un numero positivo N ed un insieme E^* di punti di Q, tali che si abbia $m(Q) - m(E^*) < \sigma$* (16), *e*

$$\frac{|f(x', y') - f(x, y)|}{\sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}} \leqslant N,$$

per ogni coppia (x, y), (x', y') di punti di E^*.

Senza restrizione per la generalità della proposizione che si vuole dimostrare, si può sempre supporre che $f(x, y)$ sia quasi continua linearmente sui lati del quadrato Q. Si può anche supporre che su questi lati l'insieme E' (considerato al n.° 6) abbia soltanto punti costituenti insiemi lineari di misura nulla. Si dica J l'insieme delle rette parallele all'asse x su cui $V_x^*(1, y)$ (17) non risulti finita, di quelle pure parallele all'asse x su cui l'insieme E' sechi insiemi di misura lineare non nulla od eventualmente non misurabili (linearmente), ed infine di quelle, sempre parallele all'asse delle x, che passano per i punti $(0, y)$ appartenenti ad E'. L'insieme dei valori y' corrispondenti a tutte queste parallele risulta di misura lineare nulla.

Sull'insieme E'' costituito dai punti del quadrato Q che non appartengono alle rette del sistema J, nè all'insieme E', si definiscano le due funzioni $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ mediante le due eguaglianze (17):

$$(1) \qquad \begin{cases} V_x^*(x, y) = P(x, y) + Q(x, y) \\ f(x, y) - f(0, y) = P(x, y) - Q(x, y), \end{cases}$$

da cui risulta che, essendo

$$P(x, y) = \frac{V_x^*(x, y) + f(x, y) - f(0, y)}{2}$$
$$Q(x, y) = \frac{V_x^*(x, y) - f(x, y) + f(0, y)}{2},$$

le $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ sono in E'' (per quanto si è visto al n.° 6) funzioni quasi continue di (x, y) e, inoltre, funzioni non negative e non decrescenti di x per ogni y

---

(16) Con $m(Q)$ e $m(E^*)$ indico le misure di Q e di E^*.

(17) Si tenga presente che $V_x^*(x, y)$ e $V_y^*(x, y)$ sono calcolate senza tenere alcun conto dei valori assunti dalla $f(x, y)$ sull'insieme E' (considerato al n.° 6).

fissato. Se $y = y_0$ è una retta non appartenente all'insieme J, l'insieme dei punti π_{y_0} che E'' sega su essa ha misura lineare eguale a 1. Chiamo ω_{y_0} l'insieme (di misura lineare nulla) complementare di π_{y_0} rispetto al segmento $(0, 1)$, su cui quindi $P(x, y_0)$ e $Q(x, y_0)$ non sono definite. Poichè $P(x, y_0)$ nell'insieme π_{y_0} è funzione finita non decrescente, non negativa di x, se $\bar{x}$ è un punto di ω_{y_0}, esisterà finito il limite di $P(x, y_0)$ per $x \to \bar{x} - 0$, con (x, y_0) appartenente a π_{y_0}; assumo tale limite come valore di $P(x, y_0)$ nel punto $(\bar{x}, y_0)$. Così facendo per ogni punto di ω_{y_0}, e ponendo $P(x, y_0) = 0$ per $x < 0$ e $P(x, y_0) = P(1, y_0)$ per $x > 1$, la $P(x, y_0)$ viene ad essere definita su tutta la retta $y = y_0$, su cui risulta non negativa, non decrescente. Per ogni punto (x, y) di Q in cui la $P(x, y)$ risulta così definita (quindi esclusi *tutti e soli* i punti (x, y') essendo $y = y'$ una retta del sistema J), si indichi con $p(x, y)$ l'estremo superiore dell'espressione

$$\left| \frac{P(x+h, y) - P(x, y)}{h} \right|$$

considerata per tutti i valori di $h \neq 0$.

Mostrerò anzitutto che $p(x, y)$ è funzione quasi continua di (x, y). Se $h_1, h_2, h_3, \ldots, h_n, \ldots$ è un insieme numerabile uniformemente denso di numeri non nulli dell'intervallo $(-1, 1)$, per essere la $P(x, y)$ funzione non decrescente di x, per ogni y fissato $(y \neq y')$, si può considerare $p(x, y)$ come estremo superiore dell'espressione:

$$\left| \frac{P(x+h_r, y) - P(x, y)}{h_r} \right|.$$

Poichè l'espressione entro il segno di valore assoluto è, per ogni h_r, funzione quasi continua di (x, y), tale è $p(x, y)$ come estremo superiore di un insieme numerabile di tali funzioni.

Fissato ora un numero positivo L e detto e l'insieme dei punti (x, y) in cui è $p(x, y) > \frac{1}{8} L$, si consideri la sezione $e(y_0)$ di e con la retta $y = y_0$ e si osservi che ad ogni punto di $e(y_0)$ è associato almeno un segmento, di lunghezza $|\bar{h}|$ della retta $y = y_0$, che ha tale punto come estremo e per cui è:

$$\left| \frac{P(x+\bar{h}, y) - P(x, y)}{\bar{h}} \right| > \frac{1}{8} L.$$

Ricordando un lemma del VITALI ([18]), si può scegliere un numero finito di

([18]) Il lemma è il seguente:

« Sia E un insieme lineare di misura esterna finita $m_e(E)$. Supponiamo che ad ogni punto P di E siano associati uno o più intervalli chiusi contenenti P come punto interno o come estremo. Dato allora un numero $\varepsilon > 0$, si può scegliere un insieme $\mathcal{G}$ di un numero finito di intervalli associati non sovrapponentisi tali che $m(\mathcal{G}) > \frac{1}{3} m_e(E) - \varepsilon$ ».

In una forma leggermente diversa, ma del resto perfettamente equivalente, esso si trova in VITALI: *Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali.* Atti Accademia Scienze, Torino, vol. XLIII, 1908, pag. 230.

tali segmenti in modo che risultino non sovrapponentisi e che, dette $|\overline{h}_1|$, $|\overline{h}_2|,\ldots,$ $|\overline{h}_s|$ le loro lunghezze, risulti

$$m(e(y_0)) \leqslant 4\sum_1^s |\overline{h}_i| < 4\cdot 8L^{-1}\sum_1^s |P(x+\overline{h}_i, y)-P(x,y)| <$$
$$< 32L^{-1}P(1, y_0) \leqslant 32L^{-1}V_x^*(1, y_0).$$

Da qui integrando si ha:

$$m(e) = \int_0^1 m(e(y))dy < 32L^{-1}\int_0^1 V_x^*(1,y)dy = AL^{-1},$$

dove A è una costante positiva indipendente da L.

Ragionando analogamente su $Q(x, y)$ come si è fatto su $P(x, y)$, si ha, per la seconda delle uguaglianze (1),

$$\text{(2)}\qquad \left|\frac{f(x+h, y)-f(x,y)}{h}\right| \leqslant \frac{1}{8}L + \frac{1}{8}L = \frac{1}{4}L,$$

essendo (x, y) e $(x+h, y)$ due punti qualunque del quadrato Q, purchè non appartenenti ad un certo insieme di misura superficiale $< 2AL^{-1}$.

Analogamente si dimostra che in un insieme corrispondente è

$$\text{(3)}\qquad \left|\frac{f(x, y+k)-f(x,y)}{k}\right| \leqslant \frac{1}{4}L.$$

Preso dunque un $\sigma > 0$ ad arbitrio, si possono trovare un numero $L > 0$ ed un insieme chiuso H di punti di Q tali che $m(Q)-m(H) < \frac{\sigma}{3}$ ed in modo che quando (x, y) appartiene ad H valga la (2) se anche $(x+h, y)$ appartiene ad H e valga pure la (3) se anche $(x, y+k)$ appartiene ad H.

Si indichi ora con Δ un insieme chiuso di punti di Q tale che $m(Q)-m(\Delta) < \frac{\sigma}{3}$ e sul quale la $f(x, y)$ risulti funzione continua, e si dica M il massimo modulo di $f(x, y)$ su Δ. Si esamini l'insieme chiuso $\overline{E}$ dei punti comuni ad H e a Δ. È $m(\overline{E}) > m(Q) - \frac{2\sigma}{3}$. Segando l'insieme $\overline{E}$ con la retta $y=\overline{y}$ si ottiene un insieme lineare $\overline{E}_{\overline{y}}$ chiuso (e quindi misurabile). Quasi tutti i punti di $\overline{E}_{\overline{y}}$ sono, per un noto teorema del LEBESGUE, punti di densità lineare 1 (rispetto a $\overline{E}_{\overline{y}}$); e questi punti di densità lineare 1 costituiscono un insieme $\overline{\overline{E}}_{\overline{y}}$ di cui ogni punto è quindi di densità lineare 1 rispetto all'insieme $\overline{\overline{E}}_{\overline{y}}$ stesso (avendo escluso dall'insieme $\overline{E}_{\overline{y}}$ solo l'insieme di misura lineare nulla $\overline{E}_{\overline{y}} - \overline{\overline{E}}_{\overline{y}}$). Si indichi ora con $\overline{\overline{E}}$ l'insieme superficiale di tutti i punti degli $\overline{\overline{E}}_{\overline{y}}$ per tutti gli $\overline{y}$. Questo insieme $\overline{\overline{E}}$ è misurabile superficialmente ([19]). È poi $m(\overline{\overline{E}})=m(\overline{E})>m(Q)-\frac{2\sigma}{3}$. Sia $(\bar{x}, \bar{y})$ un qualunque punto di $\overline{\overline{E}}$ e si dica $m(\bar{x}, \bar{y}, n)$ la misura dell'insieme dei punti di $\overline{\overline{E}}$ che cadono nell'intervallo di ampiezza $\frac{2}{n}$ della retta $y=\bar{y}$ e avente il centro in $(\bar{x}, \bar{y})$. Si ponga $\varphi_n(x, y)=\frac{n}{2}\, m(\bar{x}, \bar{y}, n)$. Le funzioni $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$,...., $\varphi_n(x, y)$,.... definite in $\overline{\overline{E}}$ sono ivi quasi continue ([20]) e convergono in tutto $\overline{\overline{E}}$ al valore 1, per $n\to\infty$; per il noto teorema di SEVERINI-EGOROFF è quindi possibile determinare un insieme chiuso E^* di punti di $\overline{\overline{E}}$ soddisfacente alla condizione $m(E^*)>m(\overline{\overline{E}})-\frac{\sigma}{3}>m(Q)-\sigma$ e in cui la convergenza di $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$,...., $\varphi_n(x, y)$,.... verso il valore 1 è uniforme. È dunque possibile trovare un $\bar{n}>8$ tale che, *per ogni indice* $n\geqslant\bar{n}$ *e per ogni punto* (x, y) *di* E^* *si abbia* $\varphi_n(x, y)>\frac{8}{9}$; e allora, se è $0<\delta\leqslant\frac{1}{\bar{n}}$, posto $\frac{1}{n_1+1}<\delta\leqslant\frac{1}{n_1}$, si avrà per un qualunque punto (x', y') di E^*, e indicando con $\overline{\overline{E}}(2\delta)$ l'insieme dei punti di $\overline{\overline{E}}$ che cadono nell'intervallo $(x'-\delta, x'+\delta)$ della retta $y=y'$:

$$m[\overline{\overline{E}}(2\delta)]\geqslant m(x', y', n_1)-\left(\frac{2}{n_1}-\frac{2}{n_1+1}\right)=m(x', y', n_1)-$$
$$-\frac{2}{n_1(n_1+1)}>\frac{8}{9}\cdot\frac{2}{n_1}-\frac{2}{9n_1}=\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{n_1}\geqslant\frac{7}{9}\cdot 2\delta.$$

Se ora (x, y) e (x', y') sono due punti qualunque di E^* con $|x-x'|\leqslant\frac{1}{\bar{n}}$, i punti di $\overline{\overline{E}}$ che cadono nell'intervallo di estremi (x', y'), (x, y'), come pure quelli che cadono nell'intervallo (di uguale ampiezza $\bar{\delta}=|x-x'|$) di estremi (x, y), (x', y), costituiscono due insiemi ciascuno di misura $>\frac{5}{9}\,\bar{\delta}$.

Ne segue che esisterà necessariamente una retta $x=x^*$, con x^* compreso fra x e x', tale che i punti (x^*, y') e (x^*, y) appartengano entrambi ad $\overline{\overline{E}}$. È allora, per le (2) e (3) (e poichè $\overline{\overline{E}}$ appartiene ad H):

$$\frac{|f(x, y)-f(x', y')|}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}}\leqslant\left|\frac{f(x', y')-f(x^*, y')}{x'-x^*}\right|+\left|\frac{f(x^*, y')-f(x^*, y)}{y'-y}\right|+$$
$$+\left|\frac{f(x^*, y)-f(x, y)}{x^*-x}\right|\leqslant\frac{1}{4}\,L+\frac{1}{4}\,L+\frac{1}{4}\,L=\frac{3}{4}\,L<L.$$

([19]) Per questo basta osservare che, dicendo $\varphi(x, y)$ la funzione caratteristica relativa all'insieme $\overline{E}$, la funzione $\psi(x, y)=\int_0^x \varphi(x, y)dx$ è superficialmente misurabile (cfr. L. TONELLI: *Sull'integrazione per parti.* Rendic. Accad. Lincei, 1909, XVIII, pag. 248) e che tale è anche $\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x}$; donde segue che è superficialmente misurabile l'insieme dei punti in cui è $\frac{\partial\psi(x, y)}{\partial x}=1$.

([20]) Infatti, detta $\varphi(x, y)$ la funzione caratteristica dell'insieme $\overline{\overline{E}}$, è

$$\varphi_n(x, y)=\frac{n}{2}\left\{\int_0^{x+\frac{1}{n}}\varphi(x, y)dx-\int_0^{x-\frac{1}{n}}\varphi(x, y)dx\right\}.$$