

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

LEONIDA TONELLI

Su un teorema relativo alle serie di Fourier

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 7,
n° 3-4 (1938), p. 329-331

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1938_2_7_3-4_329_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1938, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SU UN TEOREMA RELATIVO ALLE SERIE DI FOURIER

di LEONIDA TONELLI (Pisa).

1. - La presente breve Nota ha uno scopo puramente didattico e si riferisce alla dimostrazione del classico teorema di DIRICHLET-JORDAN nella teoria delle serie di FOURIER delle funzioni di una sola variabile.

Tale teorema, nella sua forma generale, si enuncia nel seguente modo:

Se $f(x)$ è una funzione data e integrabile (nel senso del Lebesgue) sull'intervallo $(0, 2\pi)$ e se il punto x_0 interno a questo intervallo ⁽¹⁾ è pure interno ad un intervallo parziale in cui la $f(x)$ risulta a variazione limitata, in x_0 la serie di Fourier della $f(x)$ converge verso il valore

$$\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

La dimostrazione che di questo teorema vien data nei Trattati si discosta notevolmente da quella esposta da DIRICHLET per la forma particolare della proposizione da Lui considerata, e si appoggia sul *secondo teorema della media*, introdotto nell'Analisi da OSSIAN BONNET, nel 1850. Il suo sviluppo è sostanzialmente semplice; e questa semplicità è dovuta al fatto che ogni funzione a variazione limitata può essere considerata come la differenza di due funzioni non decrescenti.

Nel Corso sulle serie di FOURIER da me tenuto nel corrente anno accademico all'Università di Pisa, avendo voluto dimostrare il teorema di DIRICHLET-JORDAN senza il sussidio del secondo teorema della media, sono stato condotto ad osservare che la dimostrazione di cui sopra abbiamo detto può, *senza alterazione del procedimento seguito e della sua semplicità*, esser lievemente modificata in modo da renderla indipendente dall'indicato teorema della media: il che contribuisce a dare alla dimostrazione un carattere più elementare. La modificazione sta tutta nell'esprimere una funzione a variazione limitata come differenza di due funzioni *non crescenti* invece che come differenza di due funzioni *non decrescenti*. È quanto farò vedere nelle righe seguenti.

(1) Tralascio la considerazione ovvia relativa agli estremi di $(0, 2\pi)$.

2. - Come è noto, per dimostrare che la serie di FOURIER della $f(x)$ converge, nel punto x_0 , verso il valore

$$\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2},$$

che, nel seguito, indicherò con Φ_0 , basta provare che, preso ad arbitrio un numero $\varepsilon > 0$, si possono sempre determinare un $\sigma > 0$ e non maggiore di $\pi : 2$, ed un $M > 0$, in modo che, per ogni numero intero dispari m , maggiore di M , sia

$$\left| \int_0^\sigma \varphi(z) \frac{\text{sen } mz}{z} dz \right| < \varepsilon,$$

dove è

$$\varphi(z) = f(x_0 + 2z) + f(x_0 - 2z) - 2\Phi_0.$$

Sia $\sigma > 0$ e tale che tutto l'intervallo $(x_0 - 2\sigma, x_0 + 2\sigma)$ appartenga a $(0, 2\pi)$ ed in esso la $f(x)$ risulti a variazione limitata. In tutto $(x_0 - 2\sigma, x_0 + 2\sigma)$ potremo scrivere

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x),$$

con $f_1(x)$ e $f_2(x)$ funzioni non crescenti. Posto

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &= \{f_1(x_0 + 2z) - f_2(x_0 - 2z)\} - \{f_1(x_0 + 0) - f_2(x_0 - 0)\}, \\ \varphi_2(z) &= \{f_2(x_0 + 2z) - f_1(x_0 - 2z)\} - \{f_2(x_0 + 0) - f_1(x_0 - 0)\}, \end{aligned}$$

avremo, per $0 < z \leq \sigma$,

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) - \varphi_2(z),$$

con $\varphi_1(z)$ e $\varphi_2(z)$ funzioni non crescenti e ≤ 0 . Detto $\bar{\varphi}_\sigma$ il maggiore dei numeri $|\varphi_1(\sigma)|$ e $|\varphi_2(\sigma)|$, e posto

$$\bar{\varphi}_1(z) = \varphi_1(z) + \bar{\varphi}_\sigma, \quad \bar{\varphi}_2(z) = \varphi_2(z) + \bar{\varphi}_\sigma,$$

le $\bar{\varphi}_1(z)$ e $\bar{\varphi}_2(z)$ risultano *non crescenti*, *non negative* e $\leq \bar{\varphi}_\sigma$, per $0 < z \leq \sigma$, con

$$\varphi(z) = \bar{\varphi}_1(z) - \bar{\varphi}_2(z).$$

Sempre per $0 < z \leq \sigma$, il rapporto $\bar{\varphi}_1(z) : z$ risulta non crescente e non negativo. Si ha perciò, per ogni intero positivo dispari m , tale che $\pi : m \leq \sigma$,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^\sigma \bar{\varphi}_1(z) \frac{\text{sen } mz}{z} dz \leq \int_0^{\pi : m} \bar{\varphi}_1(z) \frac{\text{sen } mz}{z} dz \\ &\leq \bar{\varphi}_1(+0) \int_0^{\pi : m} \frac{\text{sen } mz}{z} dz \leq \bar{\varphi}_\sigma m \int_0^{\pi : m} dz = \pi \bar{\varphi}_\sigma. \end{aligned}$$

Analogamente per $\bar{\varphi}_2(z)$; e pertanto

$$\left| \int_0^\sigma \varphi(z) \frac{\text{sen } mz}{z} dz \right| \leq 2\pi \bar{\varphi}_\sigma.$$

Ora, siccome è $\varphi_1(+0) = \varphi_2(+0) = 0$, è pure $\bar{\varphi}_\sigma \rightarrow 0$ per $\sigma \rightarrow +0$; scelto perciò ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, per σ preso come si è già detto e in modo che sia anche $\bar{\varphi}_\sigma < \varepsilon : 2\pi$, risulta, per tutti gli m interi positivi dispari, sufficientemente grandi,

$$\left| \int_0^\sigma \varphi(z) \frac{\text{sen } mz}{z} dz \right| < \varepsilon,$$

come appunto volevasi provare.

Questa dimostrazione costituisce, in un certo senso, un ritorno a quella di DIRICHLET.