

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

GIANNI FRANZÌ

**Sulla estensione ai fluidi viscosi incompressibili di alcuni problemi  
relativi alle cavitazioni nei fluidi perfetti**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2<sup>e</sup> série, tome 7, n° 2*  
(1938), p. 147-156

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1938\\_2\\_7\\_2\\_147\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1938_2_7_2_147_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1938, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

SULLA ESTENSIONE AI FLUIDI VISCOSI INCOMPRESSIBILI  
DI ALCUNI PROBLEMI RELATIVI ALLE CAVITAZIONI NEI  
FLUIDI PERFETTI

di GIANNI FRANZÌ (Napoli).

Col presente lavoro vengono risolti nel caso dei fluidi viscosi incompressibili i seguenti problemi, di cui sinora era stata data la soluzione solo per i fluidi perfetti.

1). Stabilire le condizioni necessarie per il nascere di una cavitazione dall'interno di una massa fluida.

2). Studiare, nel caso del moto piano, il sorgere delle cavitazioni sulle pareti di un solido messo bruscamente in moto in una massa fluida indefinita.

---

Premettiamo che, nello studio effettuato nel presente lavoro per la risoluzione delle due questioni sovraesposte, verrà sempre fatto, in maniera esplicita, il parallelo tra le soluzioni già note per i fluidi perfetti esposte dal DEMSCENKO <sup>(1)</sup> e quelle trovate da noi, per i fluidi viscosi incompressibili. Premettiamo anche che, in tutti i casi, partiremo dall'ipotesi che il campo delle velocità iniziali sia finito e continuo con tutte le sue derivate prima spaziali e così, analogamente senza doverlo ripetere più, che, dovunque parleremo di fluido viscoso, intenderemo detto fluido viscoso come incompressibile.

Prima di iniziare la nostra trattazione riassumiamo però brevemente i risultati ottenuti, i quali sono i seguenti:

Per il 1° problema si ritrova una completa corrispondenza delle condizioni generali tra fluidi perfetti e fluidi viscosi incompressibili, restando variare le sole condizioni al contorno. A questo proposito vengono corrette le condizioni al contorno ricavate per la prima volta dal BOULIGAND <sup>(2)</sup> per i fluidi perfetti e riscontrate inesatte dal sottoscritto.

Per l'estensione del 2° problema viene trovata una analogia formale completa tra i due casi del fluido perfetto e del fluido viscoso, sempre salve le condizioni al contorno.

---

<sup>(1)</sup> DEMSCENKO: *Problèmes mixtes harmoniques en hydrodynamique des fluides parfaits*. Gauthier-Villars, 1933.

<sup>(2)</sup> BOULIGAND: *Le problème de la naissance des cavitations dans un liquide*. Revue Générale des Sciences, 28 février 1931.

Si fa notare, però, che mentre l'ipotesi della brusca messa in moto è effettivamente essenziale nel caso dei fluidi viscosi, con il metodo di risoluzione adottato esso non lo è, invece, nel caso dei fluidi perfetti; sicchè ne risulta una estensione dei risultati già noti, relativamente alla brusca messa in moto di un solido cilindrico in un fluido perfetto, non solo al caso analogo per i fluidi viscosi incompressibili, ma anche a quello in cui, restando nel campo dei fluidi perfetti, il moto non presenta caratteristiche impulsive.

Dato un fluido viscoso occupante all'istante  $t_0$  un dominio  $\Omega_0$ , vogliamo vedere se può esistere un insieme di punti  $\sigma_0$ , di  $\Omega_0$ , su cui si possa produrre una rottura delle continuità della massa fluida, indicando brevemente tale rottura della continuità sotto il nome generico di cavitazione. Come condizione necessaria per l'esistenza dell'insieme di scissione  $\sigma_0$ , considereremo l'esistenza di punti di minimo per la pressione, tali che essa vi si annulli. Se però, per avvicinarci di più allo schema dei fluidi reali, vogliamo supporre che la cavitazione possa sorgere ancora prima che la pressione si annulli, non appena il suo minimo avrà raggiunto un certo valore, si può facilmente riscontrare che tutto quanto si dirà resta ugualmente valido.

Poichè nell'interno  $\tau$  di un punto di minimo per la  $p$ , il *grad*  $p$  deve essere volto verso l'esterno, considerando, al solito, come volto verso l'interno il versore normale  $\bar{n}$  relativo al contorno  $\sigma$  di  $\tau$ , avremo per ogni punto di  $\sigma$ :

$$\text{grad } p \times \bar{n} < 0$$

e quindi per il teorema di GAUSS

$$\int_{\tau} \Delta_2 p d\tau = - \int \text{grad } p \times \bar{n} d\sigma > 0.$$

Passando al limite per  $\tau \rightarrow 0$  avremo allora, che la condizione di minimo della pressione nel punto in questione, che dovrà essere soddisfatta per il sorgere di una cavitazione dall'interno del fluido, sarà:

$$(1) \quad \Delta_2 p > 0.$$

Ora per i *fluidi perfetti* si parte dall'equazione generale

$$(2) \quad \text{grad } p = \bar{F} - \frac{d\bar{V}}{dt}$$

e da questa, mentre nel caso generale di un moto qualsiasi si ricava solamente:

$$(3) \quad \frac{1}{\rho} \Delta_2 p = \frac{1}{\rho} \text{div grad } p = 2 \sum_{r,s}^3 \frac{D(v_r, v_s)}{D(x_r, x_s)},$$

nel caso di moto irrotazionale con potenziale  $\varphi$  si ha, invece, la

$$(4) \quad \frac{1}{\rho} \Delta_2 p = - \sum_{r,s}^3 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_r \partial x_s} \right) < 0$$

che è in opposizione con la (1), in modo che ne risulta subito la impossibilità del nascere di qualsiasi forma di cavitazione dall'interno della massa di fluido perfetto, nel caso di moto irrotazionale.

In ogni modo per la determinazione e per l'esame della  $p$  nel caso generale, non è sufficiente la (3) se non è integrata dalle corrispondenti condizioni al contorno, cui il fluido deve soddisfare, sempre prima dell'eventuale formarsi delle cavitazioni. Per quella parte di contorno relativa alle superfici libere  $\lambda$ , la condizione richiesta sarà evidentemente:  $p = \text{cost}$ .

Per le pareti solide invece, se indichiamo con

$$(5) \quad S(x_1, x_2, x_3, t) = 0$$

l'equazione di una di queste pareti, il BOULIGAND ricava la condizione al contorno corrispondente, derivando due volte rispetto al tempo la

$$S(x_1, x_2, x_3, t) = 0$$

sostituendo alle  $\frac{dx_r}{dt}$  le  $v_r$  del fluido nei punti immediatamente adiacenti alle pareti e tenendo conto in ultimo della (2). Così si giunge alla seguente condizione

$$(6) \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} - \bar{F} \times \bar{n} = \frac{1}{\sqrt{\sum_1^3 \left(\frac{\partial S}{\partial x_r}\right)^2}} \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + \sum_1^3 \left[ 2 \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial x_r} v_r + \sum_1^3 \frac{\partial^2 S}{\partial x_r \partial x_s} v_r v_s \right] \right\}$$

la quale è inesatta, perchè nei fluidi perfetti, solo la velocità normale della parete è uguale alla velocità normale del fluido, e non è quindi lecita la sostituzione delle  $\frac{dx_r}{dt}$  con le corrispondenti  $v_r$  del fluido.

Piuttosto indicando, con  $v_r'$  le tre componenti della velocità di un generico punto della parete, tenendo conto appunto dell'uguaglianza delle due velocità normali, potremo scrivere:

$$\sum_1^3 \frac{\partial S}{\partial x_r} v_r' = \sum \frac{\partial S}{\partial x_r} v_r.$$

Tenendo conto di questa uguaglianza e del fatto che le  $v_r$  devono sempre soddisfare alla (2), avremo allora per la condizione al contorno

$$(7) \quad \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} - \bar{F} \times \bar{n} \right\} \sqrt{\sum_1^3 \left(\frac{\partial S}{\partial x_r}\right)^2} = \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + \sum_1^3 \left\{ \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial x_r} (v_r + v_r') + \sum_1^3 \frac{\partial^2 S}{\partial x_r \partial x_s} v_r v_s' \right\}.$$

Questo per i fluidi perfetti. Per i fluidi viscosi, partiremo, naturalmente, invece che dalla (2), dalla

$$(8) \quad \frac{1}{\rho} \text{grad } p = \bar{F} - \frac{d\bar{V}}{dt} + \nu \Delta_2 \bar{V}$$

da cui otterremo

$$\frac{1}{\rho} \Delta_2 p = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \operatorname{grad} p = 2 \sum_{r,s}^3 \frac{D(v_r, v_s)}{D(x_r, x_s)} + \nu \operatorname{div} \Delta_2 \bar{V}$$

ma

$$\operatorname{div} \Delta_2 \bar{V} = \Delta_2 (\operatorname{div} \bar{V}) = 0$$

quindi ritroveremo ancora inalterata la (3) e, nel caso di moto irrotazionale, la (4). Cioè, nel caso di moto irrotazionale, si ha l'impossibilità del sorgere di qualsiasi cavitazione dall'interno della massa fluida, anche per i fluidi viscosi.

Se la relazione generale che determina la pressione nel fluido è la stessa sia per i fluidi perfetti, che per i fluidi viscosi, non altrettanto possiamo dire circa le condizioni al contorno relative alle pareti solide. Ora, però, nella determinazione di queste, nel caso dei fluidi viscosi, data l'aderenza del fluido alla parete, potremo effettivamente sostituire alle  $\frac{dx_r}{dt}$  che si ottengono dalla doppia derivazione rispetto al tempo della  $S(x_1, x_2, x_3, t)$ , le corrispondenti  $v_r$  del fluido. Applicando allora la (8) avremo come nuova condizione al contorno:

$$(9) \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} - \nu \Delta_2 \bar{V} \times \bar{n} - \bar{F} \times \bar{n} \right] \sqrt{\sum_1^3 \left( \frac{\partial S}{\partial x_r} \right)^2} = \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + \sum_r^3 \left\{ 2 \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial x_r} v_r + \sum_s^3 \frac{\partial^2 S}{\partial x_r \partial x_s} v_r v_s \right\}.$$

La continuità idrodinamica può essere rotta, però, in due modi, o partendo da un insieme tridimensionalmente nullo, cioè da una superficie, con il nascere di una cavitazione vera e propria, oppure partendo da un volume, con la conseguenza di una disseminazione totale o parziale del fluido. Per i fluidi perfetti è stato dimostrato come la formazione del 1° tipo di rottura idrodinamica sia impossibile a partire dall'interno della massa fluida, anche quando il moto di questa non è irrotazionale; mentre per la disseminazione del fluido si ritrova come condizione necessaria di esistenza la condizione generale (3).

Come al solito esporremo prima brevemente quanto è già noto per i fluidi perfetti e mostreremo, poi, come gli stessi ragionamenti possono essere applicati anche ai fluidi viscosi da noi trattati, con gli stessi risultati di quelli citati sopra per i fluidi perfetti.

Supponiamo, perciò, anzitutto che, nell'interno della massa fluida, ad un certo istante si presenti una superficie di pressione nulla o negativa, destinata a fungere da insieme di scissione per la nascita della cavitazione vera e propria. Al sorgere di questa cavitazione, ammessane per un istante la possibilità, si avrà subito in tutto il fluido un nuovo sistema di pressioni  $p(t_0 + 0)$ , differenti dalle pressioni preesistenti  $p(t_0)$ , ed in nessun punto negative. Queste nuove pressioni soddisferanno sempre alla (3), perchè le velocità all'istante  $t_0 + 0$  restano le stesse, ma per l'apparire di nuove superfici libere, resteranno variate le condizioni al contorno.

Indichiamo ora con  $K$  il volume della cavitazione vera e propria, le cui condizioni di esistenza vogliamo studiare, e sviluppiamo in serie rispetto al tempo la sua espressione.

$$(10) \quad K = K_0 + (t - t_0)K_0' + \frac{1}{2}(t - t_0)^2 K_0'' + \dots$$

dove evidentemente sarà:  $K_0 = 0$ .

Possiamo ottenere la prima derivata  $K'$  tenendo conto che essa rappresenta l'incremento del volume  $K$  durante l'unità di tempo, e cioè che può essere rappresentata dal flusso uscente attraverso la superficie  $\sigma$  di contorno  $K$ , sicchè:

$$(11) \quad K' = \int_{\sigma} \bar{V} \cos(\bar{V}, \bar{n}) d\sigma$$

dove  $\bar{n}$  è la normale esterna al volume  $K$ . Perchè  $V_0'$  sia diversa da zero è necessario che il campo delle velocità  $\bar{V}$  presenti delle discontinuità, che saranno quelle che poi rigonfiandosi daranno origine a  $K$ , ma poichè ciò è contrario alle ipotesi sarà:  $K_0' = 0$ .

La derivata seconda  $K''$  la possiamo ricavare tenendo conto che, se nell'istante  $t$  lungo la superficie  $\sigma$  si avevano le velocità  $\bar{V}(v_1, v_2, v_3)$ , all'istante  $t + dt$  negli stessi punti avremo le velocità  $V'(v_1 + \frac{\partial v_1}{\partial t} dt, \dots)$ ; ossia il flusso uscente da  $\sigma$ ,  $K'$  sarà aumentato della quantità

$$dK' = \int_{\sigma} \left\{ \frac{\partial v_1}{\partial t} \cos(n x_1) dt + \dots \right\} d\sigma.$$

Ma allora se teniamo conto che gli integrali del tipo  $\int_{\sigma} v_r \frac{\partial v_r}{\partial x_s} d\sigma$  sono nulli, perchè abbiamo detto che non esistono superfici di scissione per il campo iniziale delle velocità e che non esistono discontinuità nemmeno per le  $\bar{F}$ , ma solo per il campo iniziale delle pressioni, avremo che:

$$(12) \quad K_0'' = \left( \frac{dK}{dt} \right) = \int_{\sigma} \left[ \frac{dv_1}{dt} \cos(n x_1) + \dots \right] d\sigma$$

tenendo conto della (2) diventa:

$$(13) \quad K_0'' = - \frac{1}{\rho} \int_{\sigma} \frac{\partial p}{\partial n} d\sigma.$$

Ora perchè la cavitazione possa nascere occorre e basta che sia

$$K_0'' > 0$$

altrimenti si avrà compenetrazione degli elementi fluidi. Ciò equivale a dire che la superficie  $\sigma$  deve essere una superficie di  $p$  massima, mentre per lo stesso

fatto che essa è la superficie di origine della cavitazione, su di essa è  $p=0$ . Nell'intorno dovrebbe essere cioè,  $p < 0$ , mentre invece nell'interno della massa fluida la pressione dovrà essere positiva dovunque. Vuol dire che la superficie  $\sigma$  non può essere altro che una delle superfici di frontiera del fluido al tempo  $t_0$ .

Per i fluidi viscosi il ragionamento resta lo stesso. Infatti, pur applicando la (8) invece che la (2), poichè non esistono superfici di scissione per il campo iniziale della velocità e quindi

$$v \int_{\sigma} \Delta_2 \bar{V} \times \bar{n} d\sigma = 0,$$

avremo anche per i fluidi viscosi la (13) con le stesse conseguenze, che cioè per qualsiasi moto irrotazionale o no, la superficie  $\sigma$  non può essere altro che una delle superfici di frontiera al tempo  $t_0$ .

Studiamo ora il caso della disseminazione totale o parziale del fluido. In questo caso le particelle fluide in stato di disseminazione restano libere e descrivono traiettorie indipendenti l'una dall'altra.

$$(14) \quad \xi = x_1 + v_1^0 t, \quad \eta = x_2 + v_2^0 t, \quad \zeta = x_3 + v_3^0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

Perchè questo movimento sia possibile, è necessario che il determinante funzionale delle (14) sia crescente col tempo, altrimenti si avrebbe compenetrazione degli elementi fluidi. Ora tenendo conto della (2) e del fatto che  $g$  è cost. si ha:

$$(15) \quad \frac{D(\xi, \eta, \zeta)}{D(x_1, x_2, x_3)} = 1 + t^2 \left[ \frac{D(v_1^0, v_2^0)}{D(x_1, x_2)} + \dots \right] + t^3 \frac{D(v_1^0, v_2^0, v_3^0)}{D(x_1, x_2, x_3)}$$

da cui la condizione

$$(16) \quad \frac{D(v_1^0, v_2^0)}{D(x_1, x_2)} + \frac{D(v_2^0, v_3^0)}{D(x_2, x_3)} + \frac{D(v_3^0, v_1^0)}{D(x_3, x_1)} > 0$$

oppure tenendo conto della (3),

$$(17) \quad \Delta_2 p > 0.$$

Si ritrova cioè la (1), salvo ad integrarla con le relative condizioni al contorno.

Per i fluidi viscosi, come si vede facilmente, dopo tutto quanto è stato detto finora, il ragionamento esposto sopra può essere ripetuto in maniera analoga, in modo da ottenere anche qui come era stato annunziato, lo stesso risultato che per i fluidi perfetti salvo naturalmente le condizioni al contorno.

Passiamo ora alla seconda parte del nostro lavoro e cioè, come abbiamo detto al principio, ad estendere anche ai fluidi viscosi lo studio del sorgere delle cavitazioni sulle pareti di un solido cilindrico indefinito  $\mathfrak{F}$ , messo bruscamente in moto nell'interno di una massa fluida ugualmente indefinita, considerando questo caso come caso di moto piano.

Da RIABUSCINSKI <sup>(3)</sup> è stato mostrato come per i fluidi perfetti, questo problema sia riducibile alla risoluzione di un problema misto armonico. Prima di mostrare come può essere risolto questo problema, anche nel caso dei fluidi viscosi, sotto determinate condizioni, esporremo, come al solito, brevemente la risoluzione data per i fluidi perfetti. Facciamo notare però, che, come risulta immediatamente da tutto quanto segue, l'ipotesi della brusca messa in moto introdotta da RIABUSCINSKI è, in linea generale, superflua, nel caso dei fluidi perfetti. Essa risulta invece effettivamente essenziale per il metodo da noi adottato nel caso dei fluidi viscosi.

Nel caso dei fluidi perfetti, per il teorema di LAGRANGE, il moto del fluido sarà irrotazionale, sia prima che dopo il sorgere delle cavitazioni. Indichiamo ora con  $\lambda_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), le parti della superficie  $\Sigma$  del corpo  $\mathfrak{F}$  dove si formano le cavitazioni e con  $\omega_i$  le parti che restano a contatto con il fluido. Siano:  $f=\varphi+i\psi$  e  $f+\delta f$  i potenziali complessi del moto fluido, rispettivamente prima e dopo la formazione delle cavitazioni. Alle accelerazioni delle particelle fluide, prima del sorgere delle cavitazioni si riesce a dare, allora, la seguente espressione

$$(18) \quad \bar{J} = \text{grad} \left[ \frac{1}{2} \text{grad}^2 \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]$$

sicchè per le accelerazioni, nel momento in cui nasce la cavitazione ed in cui ancora  $\delta\varphi=0$ , avremo

$$\bar{J} + \delta\bar{J} = \text{grad} \left[ \frac{1}{2} \text{grad}^2 \varphi + \frac{\partial(\varphi + \delta\varphi)}{\partial t} \right]$$

da cui si ottiene

$$(19) \quad \delta\bar{J} = \text{grad} \frac{\partial\delta\varphi}{\partial t}.$$

Si tratta cioè di calcolare il potenziale  $\frac{\partial\delta\varphi}{\partial t}$ . Ora dall'equazione generale del moto irrotazionale dei fluidi perfetti in assenza di forze esterne

$$(20) \quad \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \text{cost.},$$

oltre alla determinazione della pressione sulla superficie del corpo, nel moto non ancora cavitazionale, poichè la pressione sui tratti  $\lambda_i$ , si annulla, si ottiene, appunto per questi tratti  $\lambda$ , indicando con  $p_0$  la pressione all'infinito:

$$(21) \quad \left( \frac{\partial\delta\varphi}{\partial t} \right)_{\lambda} - (\Phi_0)_{\lambda} = C$$

dove

$$\Phi_0 = \frac{p_0}{\rho} - \frac{1}{2} \text{grad}^2 \varphi - \frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

---

<sup>(3)</sup> RIABUSCINSKI: *Sur quelques cas de cavitations*. (Comptes Rendus t. 184, 1927, p. 584).

$$(23) \quad C = \left( \frac{\partial \delta \varphi}{\partial t} \right)_{\infty},$$

data l'equivalenza all'infinito tra una cavitazione ed una sorgente, è dell'ordine di  $\log \infty$ .

Sui tratti  $\omega_i$ , invece, il potenziale  $\frac{\partial \delta \varphi}{\partial t}$  deve soddisfare alla condizione

$$\frac{d}{dn} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{ossia} \quad \frac{\partial \delta \psi}{\partial t} = \text{cost.}$$

Rappresentiamo ora, mediante una trasformazione conforme, lo spazio occupato dal liquido nel piano  $Z$ , sullo spazio esterno ad un cerchio unitario  $L$  nel piano  $z = ze^{i\theta}$  e sia  $Z = g(z)$ .

Indichiamo con

$$\frac{\partial \delta \bar{f}}{\partial t} = \frac{\partial \delta \bar{\varphi}}{\partial t} + i \frac{\partial \delta \bar{\psi}}{\partial t}$$

la  $\frac{\partial \delta f}{\partial t}$  trasformata in conseguenza e poniamo:

$$(24) \quad f_1 = \varphi_1 + i\psi_1 = \frac{d}{d \log z} \frac{\partial \delta \bar{f}}{\partial t} = r \frac{d}{dr} \frac{\partial \delta \bar{\varphi}}{\partial t} + ir \frac{d}{dr} \frac{\partial \delta \bar{\psi}}{\partial t} = r |g'(z)| (\partial J_n - i \partial J_s)$$

dove  $\partial J_n$  e  $\partial J_s$  sono le due componenti curvilinee delle accelerazioni delle particelle fluide dovute alle cavitazioni.

In questo modo il problema resta ridotto alla determinazione della  $f_1$ . Poichè questa è regolare all'infinito, poichè la sua parte reale è uguale a 0 sugli archi  $\omega_i$  e la sua parte immaginaria assume sugli archi  $\lambda_i$  il valore

$$\psi_1 = - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \delta \bar{\varphi}}{\partial t} = \frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta},$$

il problema proposto risulta ridotto addirittura ad un semplice problema misto armonico. Come si vede, in tutto lo svolgimento, l'ipotesi della brusca messa in moto, non viene mai utilizzata. Resta perciò confermata l'affermazione (vedi pag. 147) che per i fluidi perfetti detta ipotesi è superflua.

Rimandiamo il lettore al lavoro di DEMSCENKO sopra citato, per ulteriori particolari e per quel che riguarda la determinazione effettiva degli archi  $\lambda_i$  i quali non possono coincidere cogli archi del contorno del solido su cui si ha inizialmente una pressione negativa, ma devono essere sempre interni a questi, e passiamo senz'altro al caso dei fluidi viscosi.

Consideriamo, nell'intervallo di tempo  $t_1 - t_0$  il moto del fluido prima del formarsi delle cavitazioni, trascurando le forze esterne e partiamo dall'equazione di NAVIER:

$$(25) \quad \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta_2 \bar{V} = \frac{d \bar{V}}{dt}$$

trattandosi nel nostro caso di un moto impulsivo, possiamo, come è noto, ritenere che le derivate prime spaziali delle velocità, al diminuire dell'intervallo di

tempo considerato, diventino trascurabili rispetto alle corrispondenti derivate seconde e così via,

$$\lim_{(t_1-t_0) \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial v_1}{\partial x}}{\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}} = 0 \text{ ecc.}$$

la (25) diventerà allora

$$(26) \quad -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta_2 \bar{V} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t}$$

poniamo ora

$$\varphi = -\frac{1}{\rho} \int p dt$$

e indichiamo con  $\bar{V}'' = \bar{V} - \bar{V}'$  la differenza tra la velocità effettiva  $\bar{V}$  del fluido e la velocità  $\bar{V}' = \text{grad } \varphi$ .

Possiamo considerare il moto del fluido come risultante dei due moti, l'uno irrotazionale di velocità  $\bar{V}'$  e l'altro di velocità  $\bar{V}''$ , essendo ambedue la  $\bar{V}'$  e  $\bar{V}''$  legate dalla condizione al contorno, che il loro valore complessivo nei punti adiacenti alla parete del solido, sia uguale alla velocità  $\bar{U}$  dei corrispondenti punti della parete suddetta. Si può riscontrare come l'effetto della  $\bar{V}''$  si vada rapidamente attenuando con l'aumentare della distanza dal solido e come all'infinito si abbia quindi  $\bar{V}' = \bar{V}'' = 0$ .

Se a questo punto in conseguenza dei risultati della teoria dello strato limite, introduciamo l'ipotesi che, all'esterno del solido la  $\frac{\partial p}{\partial n}$  sia indipendente dalla viscosità e costante nello strato limite, avremo per di più che, sul contorno, dovrà essere:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = V_n' = U_n$$

in modo che il potenziale  $\varphi$  ne risulterà completamente determinato e con esso la pressione mediante la

$$(27) \quad p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Per lo studio delle cavitazioni potremo partire allora, invece che dalla (20) dalla (27). In conseguenza avremo sempre la (21) e la (23), ma in luogo della (22) si avrà:

$$(28) \quad \Phi_0 = \frac{p_0}{\rho} - \frac{\partial \delta \varphi}{\partial t}.$$

Termineremo mostrando con un esempio l'influenza che hanno sulla soluzione le condizioni effettive di brusca messa in moto e l'importanza della distinzione fatta a questo proposito in corrispondenza dei due diversi tipi di fluidi da noi esaminati. Considereremo perciò un cilindro circolare di raggio  $r=1$ , sia per i fluidi perfetti, che per i fluidi viscosi. Per i primi avremo, come è noto:

$$(29) \quad \varphi = U \frac{\cos \theta}{r}$$

se  $U$  = velocità del cilindro, sicchè, secondo la (20), prima del nascere delle cavitazioni avremo:

$$(30) \quad \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2} U^2 - 2U^2 \sin^2 \theta - \frac{dU}{dt} \cos \theta = 0$$

e l'equazione che ci darà i limiti degli archi di pressione negativa sarà:

$$(31) \quad \Phi_0 = \frac{p_0}{\rho} - \frac{1}{2} U^2 - 2U^2 \sin^2 \theta - \frac{dU}{dt} \cos \theta = 0.$$

Nel caso in cui questa equazione di secondo grado, rispetto a  $\cos \theta$ , abbia una sola radice per  $0 < \theta < \pi$ , avremo una sola zona di pressione negativa simmetrica rispetto all'asse delle  $x$ . Nel caso invece che si abbiano due radici per  $0 < \theta < \pi$  queste delimiteranno una zona laterale di pressione negativa sulle pareti del cilindro, di cui si avrà la simmetrica dell'altro lato per  $\pi < \theta < 2\pi$ .

Se ora prendiamo l'equazione

$$(32) \quad \frac{d\Phi_0}{d\theta} = \left( \frac{dU}{dt} - 4U^2 \cos \theta \right) \sin \theta = 0$$

vediamo subito come la  $\Phi_0$ , oltre ad assumere dei valori estremi, rispettivamente minimo e massimo per  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi$ , caso che corrisponde a quello dell'unica cavitazione simmetrica rispetto all'asse delle  $x$  e naturalmente posteriore, può effettivamente avere due massimi per  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi$ , e due minimi simmetrici rispetto all'asse delle ascisse per  $0 < \theta < \pi$ ,  $\pi < \theta < 2\pi$ , nel caso che  $\frac{dU}{dt} < 4U^2$ , determinati dalla relazione  $\cos \theta = \frac{1}{4U^2} \frac{dU}{dt}$ .

La relazione  $\frac{dU}{dt} < 4U^2$  risulta perciò condizione necessaria e sufficiente a che in luogo della cavitazione unica posteriore si abbia il formarsi di due cavitazioni laterali.

Questo secondo caso esce fuori dell'ambito di quelli da noi considerati per i fluidi viscosi dato che, per questi noi supponiamo una messa in moto effettivamente brusca, e che, perciò, per questi non potrà mai aversi

$$\frac{dU}{dt} < 4U^2.$$

Sarà, perciò solamente il caso della cavitazione unica posteriore, quello che noi potremo studiare nel caso dei fluidi viscosi applicando quanto è stato detto prima e come effettivamente si vede dalle equazioni che si ricavano dalle (30), (31), (32).

$$(33) \quad \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} - \frac{dU}{dt} \cos \theta$$

$$(34) \quad \frac{p_0}{\rho} - \frac{dU}{dt} \cos \theta = 0$$

$$(35) \quad \frac{dU}{dt} \sin \theta = 0$$

dato che la (34) non ammetterà altro che una sola radice per  $0 < \theta < \pi$ , e la (35) ci darà solo un massimo ed un minimo, rispettivamente per

$$\theta = \pi, \quad \theta = 0.$$