ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ORAZIO LAZZARINO

Teoria sintetica dell'equivalenza fra i sistemi di equazioni differenziali di Euler-Poisson e di Hess-Schiff nella teoria dei giroscopi rigidi pesanti e studio dei casi singolari per i quali l'equivalenza non sussiste (parte prima)

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 7, nº 1 (1938), p. 97-107

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1938_2_7_1_97_0>

TEORIA SINTETICA DELL'EQUIVALENZA FRA I SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI EULER-POISSON E DI HESS-SCHIFF NELLA TEORIA DEI GIROSCOPI RIGIDI PESANTI E STUDIO DEI CASI SINGOLARI PER I QUALI L'EQUIVALENZA NON SUSSISTE

(PARTE PRIMA)

di ORAZIO LAZZARINO (Pisa).

È noto che la soluzione dei problemi relativi al moto dei giroscopi rigidi pesanti può, in generale, ridursi all'integrazione delle equazioni differenziali di EULER-POISSON. Nel 1882, W. HESS, mediante la considerazione di *tre grandezze scalari invariantive, indipendenti* cioè *dagli assi di riferimento ma funzioni in generale del tempo*, pose le dette equazioni sotto una nuova forma la quale, nel 1903, fu ulteriormente modificata da P. A. SCHIFF in modo particolarmente utile allo studio dei giroscopi rigidi *asimmetrici*. Le equazioni del moto sotto quest'ultima forma sono generalmente indicate con la denominazione di « *equazioni di Hess-Schiff* » od anche di « *equazioni differenziali ridotte* ».

Però le equazioni ridotte non sono in tutti i casi equivalenti a quelle di EULER-POISSON e l'averne ammessa come intuitiva l'equivalenza condusse qualche autore a conclusioni errate.

Dare, per via sintetica, una trattazione organica e completa della teoria della equivalenza e dei casi in cui l'equivalenza non sussiste (*casi singolari*) *è lo scopo di questa Memoria* (1).

Essa è divisa in due parti: nella prima si stabiliscono, sotto forma sintetica, i due sistemi di equazioni differenziali e si ricercano i criteri di equivalenza. Il procedimento di tale ricerca, oltre ad essere rapido ed estremamente semplice, ha il pregio di mettere immediatamente in luce tutti i casi in cui l'equivalenza non sussiste (casi singolari).

Lo studio dettagliato dei casi singolari è oggetto della seconda parte. In questa si dimostrano interessanti proprietà geometriche e cinematiche dei corrispondenti moti giroscopici; si ritrovano, come casi molto particolari, i notevoli moti di HESS, STAUDE, KLEIN, SOMMERFELD e MLODZJEJOWSKI, che, prospettati da un nuovo ed unico punto di vista, rientrano tutti in una più generale categoria di moti

(1) La bibliografia specifica dell'argomento trovasi alla fine della Parte Seconda, disposta in ordine cronologico. Vengono utilizzati i risultati da me precedentemente ottenuti e pubblicati nelle varie Note indicate nella bibliografia.

giroscopici; si ricercano, infine, tutti i moti possibili, quando alcune equazioni caratteristiche del moto non sono fra loro indipendenti.

PARTE I.

Teoria sintetica dell'equivalenza.

1. - Forma sintetica delle equazioni di Euler-Poisson.

Rispetto al punto fisso O, o che si possa considerare come tale, di un qualunque giroscopio rigido pesante in moto, siano, all'istante generico t, Ω il vettore della rotazione istantanea, a l'omografia d'inerzia (dilatazione). Assumendo, per semplicità di scrittura, come unitario il peso del giroscopio ed indicando, con la solita notazione dei puntini soprasegnati, quando ciò non generi equivoco, le *derivate temporali*, le equazioni sintetiche del moto giroscopico sono [2]:

$$(a\Omega)^{\cdot} = \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g} \tag{1}$$

$$\dot{\mathbf{k}}_1 = 0 \tag{2}$$

dove, indicando con G il baricentro del giroscopio, è $\mathbf{g} = G - O$, e $\mathbf{k}_1$ è un versore verticale rivolto allo zenit di O.

Esplicitando il primo membro della (1) ed osservando che

$$\dot{a} = \Omega \wedge \cdot\, a - a \cdot \Omega \wedge \qquad \text{[A. V. G., T. II, p. 1 (3)]} \ (^3)$$

la (1), che ingloba le tre note equazioni di EULER, può scriversi

$$a\dot{\Omega} + \Omega \wedge a\Omega = \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g}. \tag{1'}$$

Poichè la (2) sintetizza le tre note equazioni di POISSON, il sistema di equazioni (1) e (2), oppure (1') e (2), lo chiameremo, senz'altro, « *sistema di Euler-Poisson* ».

2. - Espressioni vettoriali degl'invarianti principali di Hess e loro significato geometrico e cinematico.

Gl'invarianti principali S, T, U, considerati da HESS, possono assumere la seguente forma vettoriale:

$$(3) \quad \begin{cases} a) & S = a\Omega \times \mathbf{g} \\ b) & 2T = a\Omega \times \Omega \\ c) & 2U = a\Omega \times a\Omega. \end{cases}$$

---

(2) O. LAZZARINO: *Interpretazione cinematica e realizzazione meccanica del problema di Sofia Kowalewski relativo al moto di un corpo rigido pesante intorno ad un punto fisso.* [Rend. della R. Accad. di Napoli, vol. XVII, a. 1911].

(3) Con la sigla A. V. G. è indicato il testo di C. BURALI FORTI e MARCOLONGO: *Anayse Vectorielle Générale.* [Edit. Mattei, Pavia, 1912-1913].

Tale forma mette in evidenza non solo la *loro invarianza* rispetto ad eventuali sistemi di assi di riferimento, ma anche il loro *significato geometrico* e *cinematico.* Basta, infatti, osservare che i vettori $\mathbf{g}$, Ω, $a\Omega$ sono, per il loro stesso significato meccanico, invarianti nel senso predetto ed inoltre, essendo $a\Omega = \mathbf{M}$ il *momento cinetico* del sistema, le (3) esprimono che « *gl'invarianti principali S, T, U sono rispettivamente proporzionali alle componenti del momento cinetico secondo l'asse baricentrale* $O\mathbf{g}$, *l'asse istantaneo di rotazione* $O\Omega$ *e l'asse dell'impulso* $O\mathbf{M}$ ». Le (3) mostrano anche che « *T ed U sono rispettivamente la semienergia cinetica ed il semiquadrato del momento cinetico del giroscopio* » [4].

3. - Equazioni di Hess.

Derivando le (3) rispetto al tempo e tenendo conto delle (1) e (1'), si ricavano le relazioni:

$$(4)\qquad \begin{cases} a) & \dot{S} = a\dot{\Omega} \times \mathbf{g} \\ b) & \dot{T} = a\dot{\Omega} \times \Omega \\ c) & \dot{U} = a\dot{\Omega} \times a\Omega \end{cases}$$

od anche, sostituendo nelle (4) ad $a\dot{\Omega}$ l'espressione ricavata dalla (1'),

$$(5)\qquad \begin{cases} a) & \dot{S} = a\Omega \times \Omega \wedge \mathbf{g} \\ b) & \dot{T} = \ \Omega \times \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g} \\ c) & \dot{U} = a\Omega \times \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{g}. \end{cases}$$

Infatti, essendo l'asse baricentrale $O\mathbf{g}$ solidale col corpo, si ha

$$(a)\qquad \dot{\mathbf{g}} = \Omega \wedge \mathbf{g}.$$

D'altra parte, da (1) e (1') si deduce

$$(b)\qquad (a\Omega)^{\cdot} = a\dot{\Omega} + \Omega \wedge a\Omega.$$

Derivando rispetto al tempo le (3) e tenendo conto delle (a), (b) e del fatto che a è dilatazione, si deducono immediatamente le (4).

---

[4] Ponendo $P = O + \Omega$ nelle (3), queste si possono scrivere:

$$\mathbf{g} \times a(P - O) = S; \qquad (P - O) \times a(P - O) = 2T; \qquad (P - O) \times a^2(P - O) = 2U$$

e rappresentano rispettivamente un piano π, un ellissoide E omotetico a quello d'inerzia ed un ellissoide E_1 coassiale con E. Gli ellissoidi E, E_1 si tagliano in una quartica gobba di prima specie Γ, simmetrica rispetto ai piani principali dell'ellissoide E, la quale è tagliata dal piano π in quattro punti, al più, ai quali corrispondono altrettante espressioni di Ω in funzione di S, T, U. Sostituendo poi queste espressioni di Ω nei *secondi membri* delle equazioni di SCHIFF, che stabiliremo in seguito [formole (14)], questi diventano funzioni note di S, T, U.

Chiameremo « *equazioni di Hess* » l'insieme dei sistemi (3) e (4), oppure (3) e (5). Le (4) mostrano che « *le derivate temporali prime degli invarianti principali S, T, U sono rispettivamente eguali alle componenti del vettore* $a\dot{\Omega}$ *secondo la terna* $O(\mathbf{g}, \Omega, a\Omega)$ ».

4. - Determinazione dei vettori $a\Omega$ ed $a\dot{\Omega}$.

Risolvendo, con procedimento noto ([5]), le (3) rispetto ad $a\Omega$ e le (4) rispetto ad $a\dot{\Omega}$, si ha rispettivamente:

$$\mathbf{g}\times\Omega\wedge a\Omega\cdot a\Omega = S\cdot\Omega\wedge a\Omega + 2T\cdot a\Omega\wedge\mathbf{g} + 2U\cdot\mathbf{g}\wedge\Omega \tag{6}$$

$$\mathbf{g}\times\Omega\wedge a\Omega\cdot a\dot{\Omega} = \dot{S}\cdot\Omega\wedge a\Omega + \dot{T}\cdot a\Omega\wedge\mathbf{g} + \dot{U}\cdot\mathbf{g}\wedge\Omega. \tag{7}$$

Le (6) e (7) mostrano che, escludendo rispettivamente le ipotesi $S=T=U=0$, $\dot{S}=\dot{T}=\dot{U}=0$, le quali importerebbero rispettivamente l'annullarsi dei vettori $a\Omega$ ed $a\dot{\Omega}$, tali vettori risultano determinati quando, e solo quando, sia soddisfatta la condizione

$$\mathbf{g}\times\Omega\wedge a\Omega \neq 0 \tag{8}$$

la quale esprime che « *i tre vettori* $\mathbf{g}$, Ω, $a\Omega$ *non devono essere complanari* ». Da ciò segue, ed è utile rilevarlo, che « *quando* $\mathbf{g}$, Ω, $a\Omega$ *sono complanari, come ad esempio nel noto caso di Lagrange, le equazioni di Hess non permettono di risolvere il problema del moto* ».

5. - Le equazioni di Schiff.

a). Associando alla (5_c) l'integrale delle forze vive e quello delle aree, si ha

$$\begin{cases} a) & \mathbf{k}_1\times\mathbf{g} = h - T \\ b) & \mathbf{k}_1\times a\Omega = k \\ c) & \mathbf{k}_1\times\mathbf{g}\wedge a\Omega = \dot{U} \end{cases} \tag{9}$$

dove h, k sono le rispettive costanti d'integrazione. Le (9) dànno il sistema delle componenti del vettore verticale unitario $\mathbf{k}_1$ rispetto alla terna $O(\mathbf{g}, a\Omega, \mathbf{g}\wedge a\Omega)$.

Risolvendo le (9) rispetto a $\mathbf{k}_1$, si ha

$$(\mathbf{g}\wedge a\Omega)^2\cdot\mathbf{k}_1 = (h-T)\cdot a\Omega\wedge(\mathbf{g}\wedge a\Omega) + k(\mathbf{g}\wedge a\Omega)\wedge\mathbf{g} + \dot{U}\cdot\mathbf{g}\wedge a\Omega. \tag{10}$$

Tenendo conto anche delle (3), il coefficiente di $\mathbf{k}_1$ può scriversi successivamente

$$(\mathbf{g}\wedge a\Omega)^2 = \mathbf{g}^2\cdot(a\Omega)^2 - (\mathbf{g}\times a\Omega)^2 = 2\mathbf{g}^2 U - S^2. \tag{11}$$

([5]) La risoluzione dei sistemi di equazioni lineari del tipo (3) e (4), cioè del tipo:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{x} = m, \qquad \mathbf{b}\times\mathbf{x} = n, \qquad \mathbf{c}\times\mathbf{x} = p$$

mediante la formola

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\times\mathbf{c}\cdot\mathbf{x} = m\cdot\mathbf{b}\wedge\mathbf{c} + n\cdot\mathbf{c}\wedge\mathbf{a} + p\cdot\mathbf{a}\wedge\mathbf{b},$$

trovasi in HAMILTON: *Elements of Quaternions*. [Vol. I, p. 341, 2ª ediz., 1899].

Introducendo, in modo analogo, gl'invarianti S, T, U anche nel secondo membro della (10), questa assume la forma

(12) $(2\mathbf{g}^2 U - S^2)\mathbf{k}_1 = (h-T)(2U\cdot\mathbf{g} - S\cdot a\Omega) + k(\mathbf{g}^2\cdot a\Omega - S\mathbf{g}) + \dot{U}\cdot\mathbf{g}\wedge a\Omega.$

La (12) è una delle equazioni di SCHIFF e dà l'espressione, in funzione degli invarianti S, T, U, del vettore $\mathbf{k}_1$ che risulta determinato soltanto quando sia soddisfatta la condizione

(13) $$2\mathbf{g}^2 U - S^2 \neq 0$$

che, per la (11), può anche scriversi

(13′) $$(\mathbf{g}\wedge a\Omega)^2 \neq 0.$$

« *Tale condizione non è evidentemente verificata nè per* $\mathbf{g}=0$ (*caso di Euler-Poinsot*), *nè per* $a\Omega=0$ (*caso del riposo*), *nè per* $\mathbf{g}$ *parallelo allo asse* $Oa\Omega$ *dell'impulso* ».

b). Un'altra equazione di SCHIFF si ottiene eliminando $\mathbf{k}_1$ fra (12) e (5_b).

Sostituendo in (5_b) l'espressione di $\mathbf{k}_1$ dedotta dalla (12), si ha

$$(2\mathbf{g}^2 U - S^2)\dot{T} = [k\mathbf{g}^2 - (h-T)S]\cdot\mathbf{g}\wedge\Omega\times a\Omega + (\mathbf{g}\wedge\Omega)\times(\mathbf{g}\wedge a\Omega)\,\dot{U},$$

ossia, sviluppando l'ultimo termine e tenendo conto della (5_a) e delle (3),

(*a*) $$(2\mathbf{g}^2 U - S^2)\dot{T} = [S(h-T) - k\mathbf{g}^2]\dot{S} + [2g^2\cdot T - S\cdot\mathbf{g}\times\Omega]\,\dot{U}.$$

c). Una terza equazione di SCHIFF si trova cercando l'espressione di $\dot{U}^2$ in funzione degli invarianti principali e di grandezze indipendenti dal tempo.

Quadrando la (5_c) e tenendo anche conto delle (3) e (9) si ha successivamente:

$$\dot{U}^2 = (a\Omega\times\mathbf{k}_1\wedge\mathbf{g})^2 = \begin{vmatrix} (a\Omega)^2 & a\Omega\times\mathbf{k}_1 & a\Omega\times\mathbf{g} \\ a\Omega\times\mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_1^2 & \mathbf{k}_1\times\mathbf{g} \\ a\Omega\times\mathbf{g} & \mathbf{k}_1\times\mathbf{g} & \mathbf{g}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2U & k & S \\ k & 1 & h-T \\ S & h-T & \mathbf{g}^2 \end{vmatrix} \quad (^6)$$

ossia, sviluppando il determinante,

(*b*) $$\dot{U}^2 = \mathbf{g}^2(2U - k^2) - 2U(h-T)^2 + 2kS(h-T) - S^2.$$

d). Associando le equazioni (*a*) (*b*) alla (5_a), che non contiene $\mathbf{k}_1$, si ha il sistema:

$$(14)\quad \begin{cases} a) & \dot{S} = a\Omega\wedge\Omega\times\mathbf{g} \\ b) & (2\mathbf{g}^2 U - S^2)\dot{T} = [S(h-T) - k\mathbf{g}^2]\dot{S} + [2\mathbf{g}^2\cdot T - S\cdot\mathbf{g}\times\Omega]\,\dot{U} \\ c) & \dot{U}^2 = \mathbf{g}^2(2U - k^2) - 2U(h-T)^2 + 2kS(h-T) - S^2. \end{cases}$$

---

[6] A. GUGLIELMI: *Prodotto di due prodotti vettoriali misti, ecc.* Bollettino della « Mathesis », a. 1919.

Le (12) e (14) sogliono chiamarsi « *equazioni di Schiff* » o « *equazioni differenziali ridotte* ». In esse, oltre gl'invarianti principali S, T, U, figurano l'invariante $\Omega \times \mathbf{g}$ e le costanti [rispetto al tempo] $\mathbf{g}^2$, h, k, essendo $\mathbf{g}^2$ il quadrato della distanza del baricentro G del giroscopio dal punto fisso O, h la costante dell'integrale delle forze vive e k quella dell'integrale delle aree.

Le (14) non contengono esplicitamente il tempo e perciò, sostituendo nella (14_b) l'espressione di $\dot{U}$, dedotta dalla (14_c), esse si riducono ad un sistema di due equazioni differenziali del 1° ordine in $\dot{S}$, $\dot{T}$ e con coefficienti algebrici. Si può quindi dire che « *la determinazione delle grandezze S e T in funzione di U dipende da una equazione differenziale ordinaria del 2° ordine a coefficienti reali* ».

Inoltre, il tempo può essere determinato mediante una quadratura e si può quindi concludere che « *la determinazione del moto di un giroscopio rigido pesante dipende, in generale, dalla integrazione di un'equazione differenziale del 2° ordine a coefficienti algebrici, equazione che il procedimento di Schiff permette almeno teoricamente di formare, e da una quadratura* » (7).

6. - Ricerca di casi ai quali le equazioni di Hess o di Schiff non sono applicabili.

Si è già rilevato che i casi di moto per i quali non è soddisfatta la condizione (8) sfuggono alle equazioni di HESS e quelli per i quali non è soddisfatta la (13′) sfuggono alle equazioni di SCHIFF.

Ora la (13′) non è verificata soltanto quando si abbia

$$\mathbf{g} \wedge \alpha\Omega = 0 \tag{15}$$

e ciò importa il verificarsi di uno dei seguenti casi:

$$\mathbf{g} = m \cdot \alpha\Omega\,; \qquad \mathbf{g} = 0\,; \qquad \alpha\Omega = 0. \tag{16}$$

La prima delle (16), dove m è numero reale non nullo, esprime che « *il momento cinetico $\alpha\Omega$ deve mantenersi, durante il moto, parallelo all'asse baricentrale $O\mathbf{g}$ che è solidale col giroscopio* ».

---

(7) R. MARCOLONGO: *Sul moto di un corpo pesante intorno ad un punto fisso*. [Rend. della R. Accad. dei Lincei, vol. XVII, 2° sem. 1908]. Giova ricordare un'osservazione del CERRUTI [Corso di Meccanica sup. a. 1894-95] messa in rilievo dal MARCOLONGO, che cioè la riduzione indicata è conseguenza del seguente teorema sulle equazioni canoniche del moto: *Se di un sistema hamiltoniano di ordine $2n$ si conoscono m integrali in involuzione, l'integrazione si può far dipendere da quella di un sistema hamiltoniano di ordine $2(n-m)$ e da m quadrature* ». Infatti, essendo, nel caso del giroscopio pesante, $n=3$ ed $m=2$, si ha $2(n-m)=2$ e quindi l'integrazione del sistema può ridursi all'integrazione di un'equazione differenziale del 2° ordine.

In tal caso si ha inoltre, dalla (5_c), identicamente

$$\dot{U} = m \cdot a\Omega \times \mathbf{k}_1 \wedge a\Omega = 0$$

e quindi

$$2U = (a\Omega)^2 = \text{costante} \tag{17}$$

cioè « *la grandezza del momento cinetico si conserva costante* ».

Questo caso di moto è molto interessante e sarà studiato dettagliatamente in seguito.

Il caso $\mathbf{g}=0$ coincide col noto caso di EULER-POINSOT ed il caso $a\Omega=0$ corrisponde al moto nullo, come si è già rilevato.

Giova anche notare che il verificarsi della (15), e quindi di uno dei casi (16), importa anche il verificarsi della condizione

$$\mathbf{g} \wedge a\Omega \times \Omega = 0, \tag{18}$$

per qualunque valore di Ω, e quindi il non verificarsi della condizione (8).

Si conclude perciò che « *i casi caratterizzati dalle* (16) *sfuggono anche alle equazioni di Hess* ».

Da quanto precede risulta che, non esistendo in tutti i casi perfetta equivalenza fra le equazioni di HESS-SCHIFF e quelle di EULER-POISSON, è necessario stabilire dei *criteri di equivalenza* fra i detti sistemi di equazioni.

7. - Impostazione del problema dell' equivalenza.

Il procedimento con il quale abbiamo dedotto dalle equazioni di EULER-POISSON quelle di HESS-SCHIFF mostra, senz'altro, che queste ultime sono *conseguenza* delle prime, ma l'esistenza di casi ai quali le equazioni di HESS-SCHIFF non sono applicabili [§ 6] impedisce di ammettere, a priori, che le equazioni di EULER-POISSON siano *conseguenza* di quelle di HESS-SCHIFF. Per stabilire quindi, nel modo più generale, i *criteri di equivalenza* fra i detti sistemi di equazioni, basta cercare « *se e quando sia possibile dedurre le equazioni di Euler-Poisson come conseguenza di quelle di Hess-Schiff* ». Quando e solo quando tale possibilità sussiste, si può essere sicuri che tutte le soluzioni ottenute mediante l'integrazione delle equazioni di HESS-SCHIFF soddisfano anche alle equazioni di EULER-POISSON e che si sono quindi effettivamente ottenuti i moti del giroscopio considerato.

Per procedere con ordine e chiarezza in tale ricerca, conviene stabilire prima *sotto quali condizioni* le equazioni di EULER-POISSON *possono essere conseguenza* di quelle di HESS-SCHIFF e ricercare poi il *criterio generale di equivalenza* fra i detti sistemi di equazioni.

8. - Deduzione dell'equazione di Euler dalle equazioni di Hess.

Posto, per comodità di scrittura,

$$\mathbf{a} = \alpha\dot{\Omega} + \Omega \wedge \alpha\Omega + \mathbf{g} \wedge \mathbf{k}_1 = (\alpha\Omega)^{\cdot} + \mathbf{g} \wedge \mathbf{k}_1 , \tag{19}$$

dimostriamo anzitutto che il seguente sistema di equazioni

$$\mathbf{g} \times \mathbf{a} = 0, \qquad \alpha\Omega \times \mathbf{a} = 0, \qquad \Omega \times \mathbf{a} = 0 \tag{20}$$

è *conseguenza* del sistema (4) di HESS. Basta, infatti, osservare che, operando sulla (19) con $\mathbf{g}\times$, $\alpha\Omega\times$, $\Omega\times$ e tenendo conto delle (4) e (5), si deducono immediatamente le (20). Risolvendo poi queste rispetto al vettore $\mathbf{a}$, si ottiene l'equazione

$$\mathbf{g} \times \alpha\Omega \wedge \Omega \cdot \mathbf{a} = 0 \tag{21}$$

la quale può essere soddisfatta per

$$\mathbf{a} = 0, \tag{22}$$

oppure per

$$\mathbf{g} \times \alpha\Omega \wedge \Omega = 0. \tag{23}$$

Per la (19), la (22) importa l'esistenza dell'equazione (1) o (1′) di EULER; per la (5_a), la (23) importa

$$\dot{S} = 0. \tag{24}$$

Se è $\dot{S} = 0$, cioè l'invariante principale S è indipendente dal tempo, le (20) possono risultare soddisfatte anche per $\mathbf{a} \neq 0$, cioè anche quando l'*equazione di Euler* non è soddisfatta; mentre la condizione $\dot{S} \neq 0$ importa necessariamente l'esistenza di questa equazione.

Si può dunque concludere che « *la condizione* $\dot{S} \neq 0$ *è sufficiente per l'equivalenza fra le equazioni di Hess e quella di Euler, ma quando è* $\dot{S} = 0$, *cioè quando* S *è indipendente dal tempo, allora l'equivalenza può non sussistere* ».

9. - Deduzione dell' equazione di Poisson.

a). Cominciamo col dimostrare che il sistema di equazioni

$$\dot{\mathbf{k}}_1 \times \mathbf{k}_1 = 0, \qquad \dot{\mathbf{k}}_1 \times \mathbf{g} = 0, \qquad \dot{\mathbf{k}}_1 \times \alpha\Omega + \mathbf{k}_1 \times \mathbf{a} = 0 \tag{25}$$

è conseguenza delle equazioni di HESS-SCHIFF e della condizione (13) o (13′).

Infatti, operando con $\mathbf{k}_1\times$ sulla (12), si ha

$$\begin{aligned}(2\mathbf{g}^2 U - S^2)\mathbf{k}_1^2 = (h-T)(2U \cdot \mathbf{g}\times\mathbf{k}_1 - S \cdot \alpha\Omega\times\mathbf{k}_1) + \\ + k(\mathbf{g}^2 \cdot \alpha\Omega\times\mathbf{k}_1 - S \cdot \mathbf{g}\times\mathbf{k}_1) + \dot{U} \cdot \mathbf{g}\wedge\alpha\Omega\times\mathbf{k}_1\end{aligned}$$

ossia, tenendo conto delle (9),

$$(2\mathbf{g}^2 U - S^2)\mathbf{k}_1^2 = 2U(h-T)^2 - 2kS(h-T) + k^2\mathbf{g}^2 + \dot{U}^2$$

od anche, sostituendo ad $\dot{U}^2$ la sua espressione (14_c) e riducendo,

$$(2\mathbf{g}^2 U - S^2)\mathbf{k}_1^2 = 2\mathbf{g}^2 U - S^2.$$

Da qui, per la condizione (13), risulta $\mathbf{k}_1^2 = 1$ e quindi la prima delle (25).

Per dedurre la seconda delle (25), si opera con $\mathbf{g}\times$ sulla (12) e si ha

$$(2\mathbf{g}^2 U - S^2)\mathbf{k}_1 \times \mathbf{g} = (h-T)(2\mathbf{g}^2 U - S \cdot a\Omega \times \mathbf{g}) + k(\mathbf{g}^2 \cdot a\Omega \times \mathbf{g} - S\mathbf{g}^2)$$

ossia, tenendo conto della (3_a),

$$\mathbf{k}_1 \times \mathbf{g} = h - T$$

e da qui, derivando rispetto al tempo e tenendo conto della (5_b), si ottiene la 2ª delle (25).

Analogamente, operando sulla (12) con $a\Omega\times$, si ottiene

$$(2\mathbf{g}^2 U - S^2)\mathbf{k}_1 \times a\Omega = (h-T)[2U \cdot \mathbf{g} \times a\Omega - S(a\Omega)^2] + k[\mathbf{g}^2(a\Omega)^2 - S \cdot \mathbf{g} \times a\Omega]$$

ossia, tenendo conto delle (3_a) e (3_c),

$$(2\mathbf{g}^2 U - S^2)\mathbf{k}_1 \times a\Omega = k(2\mathbf{g}^2 U - S^2)$$

e da qui, per la condizione (13), si ha la relazione

$$\mathbf{k}_1 \times a\Omega = k$$

dalla quale, derivando rispetto al tempo e tenendo conto della (19), si deduce la 3ª delle (25).

b). Ciò premesso, se si suppone $\dot{S} \neq 0$, cioè l'invariante S funzione del tempo, sussiste l'equazione (2) di Euler e, quindi, risulta $\mathbf{a} = 0$. In tale ipotesi, le (25) si scrivono

(25′) $$\dot{\mathbf{k}}_1 \times \mathbf{k}_1 = 0, \qquad \dot{\mathbf{k}}_1 \times \mathbf{g} = 0, \qquad \dot{\mathbf{k}}_1 \times a\Omega = 0$$

e risultano evidentemente soddisfatte quando sia

(26) $$\dot{\mathbf{k}}_1 = 0,$$

oppure quando i tre vettori $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{g}$, $a\Omega$ siano tutti normali a $\dot{\mathbf{k}}_1 \neq 0$ e, quindi, fra loro complanari [8], cioè quando sussista la condizione

(27) $$\mathbf{k}_1 \times \mathbf{g} \wedge a\Omega = 0.$$

---

[8] Diconsi « *complanari* » i vettori paralleli ad uno stesso piano.

Poichè la (26) è l'equazione di POISSON e la (27) equivale, per la (5_c), ad

$$\dot{U}=0, \tag{27'}$$

si può concludere che « *la possibilità di dedurre dalle equazioni di Schiff l'equazione di Poisson è subordinata all'esistenza delle condizioni*

$$\dot{S}\neq 0 \tag{28}$$

$$\dot{U}\neq 0. \tag{29}$$

In altri termini « *quando gl'invarianti principali S ed U sono funzioni del tempo, sussiste necessariamente l'equivalenza fra le equazioni di Schiff e quella di Poisson* ».

10. - Caso in cui gl'invarianti S ed U sono indipendenti dal tempo.

a). Dimostriamo anzitutto il teorema: « *Quando S ed U sono indipendenti dal tempo, anche l'invariante T è indipendente dal tempo*, o, più in generale, *se due qualunque dei tre invarianti principali S, T, U sono indipendenti dal tempo, risulta tale anche il rimanente* ».

Infatti, dalle (5) si vede immediatamente che, se due qualunque delle tre derivate temporali $\dot{S}$, $\dot{T}$, $\dot{U}$ sono *nulle*, il vettore $\mathbf{g}$ risulta *complanare* con i vettori Ω, $\alpha\Omega$, $\mathbf{k}_1$ e risulta quindi necessariamente *nulla* la rimanente derivata.

b). Utilizzando il teorema precedente si può anche dimostrare che « se S ed U o, più in generale, *due qualunque dei tre invarianti principali di Hess sono indipendenti dal tempo, il moto del giroscopio è una rotazione permanente* ».

Una rotazione permanente è caratterizzata dalla condizione

$$\Omega=\mathbf{K}, \tag{30}$$

essendo $\mathbf{K}$ vettore costante, rispetto al tempo, in grandezza, direzione e verso. Essendo, in tal caso, $\dot{\Omega}=0$, l'equazione (1') del moto porge

$$\Omega\wedge\alpha\Omega=\mathbf{k}_1\wedge\mathbf{g}. \tag{31}$$

Operando con $\mathbf{g}\times$ sulla (31), si ha l'equazione

$$\mathbf{g}\times\Omega\wedge\alpha\Omega=0 \tag{32}$$

la quale, essendo *omogenea e di 2° grado* rispetto ad Ω, è l'equazione del *cono quadratico luogo degli assi permanenti di rotazione* del giroscopio, cioè del così detto *cono di Staude*.

D'altra parte, nelle fatte ipotesi devono annullarsi, per il teorema precedente, tutti i primi membri delle (5) e ciò importa, come si vede dalla semplice ispezione delle (5), che è soddisfatta la (32) e che risultano inoltre indipendenti dal tempo l'energia cinetica T ed il modulo U del momento cinetico del giroscopio.

Si conclude, quindi, che nelle fatte ipotesi l'asse istantaneo di rotazione deve appartenere al *cono di Staude*, cioè la rotazione deve essere permanente. c. d. d.

11. - Casi singolari.

Quando *uno solo* degli invarianti principali S, U è indipendente dal tempo, allora l'*equivalenza* fra le equazioni di HESS-SCHIFF e quelle di EULER-POISSON *non sussiste.* Chiameremo perciò questi due casi, caratterizzati rispettivamente da una *delle due condizioni* $\dot{S}=0$, $\dot{U}=0$, « *casi singolari* » e, per la loro notevolissima importanza, li studieremo a fondo nella seconda parte di questa memoria.

Intanto rileviamo che la precedente ricerca, condotta con procedimento rapido e semplice, ha permesso di stabilire fra i detti sistemi di equazioni differenziali un *criterio generale di equivalenza* e di mettere anche in piena luce l'*esistenza di due casi singolari* per i quali l'equivalenza *non sussiste.*

L'aver ammessa come intuitiva la detta equivalenza condusse HESS, nel caso $U=$costante, a risultati errati, riconosciuti per tali anche dallo stesso A. il quale ne spiegò l'origine osservando che $U=$costante è *soluzione singolare* delle equazioni di HESS-SCHIFF, mentre le equazioni di EULER-POISSON non ammettono soluzioni singolari. Partendo da tale osservazione, HESS impostò un lungo procedimento per la ricerca di tutte le *soluzioni singolari* delle equazioni di HESS-SCHIFF.

Però la notevole superiorità del metodo dell'equivalenza su quello delle soluzioni singolari è messa in evidenza dal fatto che il primo permette di stabilire con estrema rapidità e semplicità, come si è visto, le *condizioni di equivalenza* fra i detti sistemi di equazioni e l'*esistenza dei casi singolari* $S=$cost., $U=$cost.; mentre l'altro conduce, attraverso calcoli lunghi e complicati, a tutta una serie di possibilità che poi, in ultima analisi, si riducono ai due casi singolari predetti.

LEONIDA TONELLI - *Direttore responsabile.* Finito di stampare il 10 gennaio 1938 - XVI