ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

CARLO BIRINDELLI

Sull'applicazione dei metodi di sommazione di Gronwall al problema del prolungamento analitico

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 6, nº 2 (1937), p. 179-189

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1937_2_6_2_179_0>

SULL'APPLICAZIONE DEI METODI DI SOMMAZIONE DI GRONWALL AL PROBLEMA DEL PROLUNGAMENTO ANALITICO

di CARLO BIRINDELLI (Pavia).

1. - È noto che la serie $\sum_0^\infty u_n$ si dice sommabile col procedimento di DE LA VALLÉE POUSSIN e con la somma s quando l'espressione

$$V_n = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{n!\, n!}{(n-\nu)!\, (n+\nu)!} u_\nu \tag{1}$$

tende verso s al tendere di n ad ∞.

Questo procedimento rientra come caso particolare nei metodi di sommazione studiati da T. H. GRONWALL (1), ciò che ha permesso a questo Autore di darne una notevole estensione, di cui ha studiato le principali proprietà. Converrà richiamare brevemente questi risultati.

Siano date due funzioni $f(w)$ e $g(w)$ delle quali la prima sia analitica per $|w| \leq 1$ eccetto $w=1$, e $z=f(w)$ rappresenti $|w|<1$ semplicemente in un campo D interno a $|z|<1$ in modo che $z=0$ corrisponda a $w=0$ e $z=1$ a $w=1$; la funzione inversa è olomorfa lungo il contorno di D eccetto che per $z=1$ e in questo punto

$$1-w=(1-z)^\lambda \cdot (a+....), \qquad \lambda \geq 1, \qquad a>0, \tag{2}$$

ove i puntini indicano una serie di potenze in $1-z$ senza termine noto (a coefficienti eventualmente complessi). In quanto alla $g(w)$ si ha:

$$g(w)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n, \qquad b_n \neq 0 \qquad (n=0, 1, 2,....) \tag{3}$$

e

$$g(w)=(1-w)^{-\alpha}+\gamma(w), \qquad \alpha>0, \tag{4}$$

(1) T. H. GRONWALL: *Summation of series and conformal mapping*. (Annals of Mathematics, 2d series, vol. 33, n.o 1, January 1932.

con $\gamma(w)$ analitica per $|w| \leqq 1$; inoltre

(5) $$g(w) \neq 0 \quad \text{per} \quad |w| < 1.$$

Ogni qualvolta le quantità $U_0, U_1, \ldots, U_n, \ldots$ che si ricavano dalla identità

(6) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu = \frac{1}{g(w)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot U_n \cdot w^n,$$

sono tali che U_n tenda, per $n \to \infty$, ad s, si dice che la serie $\sum_0^\infty u_\nu$ è sommabile (f, g) verso la somma s.

Si noti che, poichè in $z = f(w)$ è $f(0) = 0$, lo sviluppo di z^ν secondo le potenze di w inizia con la ν^{ma} potenza e dalla (6) segue perciò che

(7) $$U_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_{n,\nu} \cdot u_\nu, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

le $a_{n,\nu}$ dipendendo dai coefficienti di $f(w)$ e $g(w)$, ma non dalle u_ν.

Il GRONWALL definisce le sue generalizzazioni del metodo del DE LA VALLÉE POUSSIN ponendo in particolare

(8) $$a = 2^{-K}, \qquad z = f(w) = \frac{1-(1-w)^a}{1+(1-w)^a}, \qquad g(w) = (1-w)^{-a},$$

essendo $(1-w)^a$ quel ramo della funzione che assume il valore 1 per $w = 0$; definisce così il metodo generalizzato di sommazione (V, k), di ordine $k \geqq 0$, del DE LA VALLÉE POUSSIN. Il rammentato metodo semplice si ritroverebbe per questa via per $k = 1$.

Indicando con $V_n^{(k)}$ l'espressione di U_n relativa al metodo (V, k) (cioè alle ipotesi (8)) si avrà dunque

(9) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu \cdot z^\nu = (1-w)^a \cdot \sum_0^\infty b_n^{(k)} \cdot V_n^{(k)} \cdot w^n$$

avendo posto

$$b_n^{(k)} = \frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(n+1)}.$$

Considerando in particolare la serie geometrica $1 + \xi + \xi^2 + \ldots$ il GRONWALL stesso ne dimostra la sommabilità (V, k), e precisamente verso la somma $s = \frac{1}{1-\xi}$, per ogni ξ interno al campo racchiuso dalla curva

(L_k^{-1}) $$\frac{z-1}{z+1} = (2\cos\varphi)^a \cdot e^{a\varphi i}, \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2};$$

la sommabilità è uniforme per ξ appartenente a un campo chiuso e interno ad L_k^{-1}. Non si ha convergenza lungo L_k^{-1} ed esternamente.

È da notare che la curva L_k^{-1} si ottiene operando la trasformazione $z'=\frac{1}{z}$ (od anche una semplice inversione rispetto al cerchio $|z|=1$, data la sua simmetria rispetto all'asse reale) sulla curva

$$(L_k) \qquad \frac{1-z}{1+z}=(2\cos\varphi)^a\cdot e^{a\varphi i}, \qquad -\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},$$

la quale, a sua volta, è la trasformata del cerchio unità del piano w mediante la $z=f(w)$ data dalla (8).

2. - Fondandoci sui risultati del GRONWALL, brevemente riassunti al numero precedente, ci proponiamo anzitutto di mostrare, con metodo sostanzialmente noto, come ciascuno dei procedimenti (V, k) possa servire ad ottenere il prolungamento di un elemento di funzione analitica $f(z)\sim\sum_0^\infty d_\nu z^\nu$ (a raggio di convergenza $\neq 0$) in un opportuno campo piano.

Si consideri per questo una curva semplice rettificabile l che circondi il punto regolare $z=0$ e sia posta entro la stella rettilinea, di $f(z)$, relativa al punto $z=0$. La (7) dà allora

$$V_n^{(k)}(z)=\sum_{\nu=0}^n a_{n,\nu}^{(k)}\cdot d_\nu\cdot z^\nu. \tag{10}$$

Dalla formula integrale di CAUCHY abbiamo

$$d_\nu=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_l\frac{f(t)}{t^{\nu+1}}\cdot dt$$

da cui

$$V_n^{(k)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_l\frac{f(t)}{t}\cdot\left[\sum_{\nu=0}^n a_{n,\nu}^{(k)}\left(\frac{z}{t}\right)^\nu\right]\cdot dt.$$

Quando il punto $y=\frac{z}{t}$ è interno al campo A_k^{-1} racchiuso dalla L_k^{-1} si ha

$$\lim_{n=\infty}\sum_{\nu=0}^n a_{n,\nu}^{(k)}\cdot\left(\frac{z}{t}\right)^\nu=\frac{1}{1-\frac{z}{t}},$$

uniformemente per y appartenente ad una regione chiusa tutta interna ad A_k^{-1}. È di conseguenza, per ogni z racchiuso da l e tale che gli $\frac{z}{t}$ siano interni ad A_k^{-1},

$$\lim_{n=\infty}V_n^{(k)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_l\frac{f(t)}{t}\cdot\frac{t}{t-z}\cdot dt=f(z). \tag{11}$$

Ci occorrerà dunque trovare quali siano i punti z per i quali è possibile costruire una linea l dotata delle proprietà indicate.

Indichiamo con a i punti singolari al contorno della stella rettilinea e con B_k l'insieme dei punti z comuni a tutti i campi $a \cdot A_k^{-1}$. Si può mostrare [2] facilmente: che ogni punto interno a tutti i campi aA_k^{-1} è interno a B_k (e viceversa); che unendo l'origine con un punto di B_k tutti i punti del segmento, salvo al più il punto dato, sono interni e che B_k è un campo chiuso limitato e semplicemente connesso.

Sia G un campo chiuso ed interno a B_k. Potremo determinare un numero θ_1 positivo e <1 tale che il campo $\theta_1 \cdot B_k$, che è interno a B_k, racchiuda il campo G. Scegliendo allora θ tale che $\theta_1 < \theta < 1$ si ottiene un campo $\theta \cdot B_k$ interno a B_k e contenente internamente G.

Sia R la massima distanza di O da B_k e si considerino i punti singolari a, tali che $|a| \leqslant R$, con i relativi segmenti $a\,\delta$ ottenuti mediante prolungamento dei raggi $(0, a)$ dalla parte di a fino ad incontrare la circonferenza $|z| = R$. Sia I l'insieme di questi segmenti. Si verifica che quando z varia in G, e t in I, $\frac{z}{t}$ varia in un campo interno ad A_k^{-1}.

Infatti per t di I si ha $t = \lambda \cdot a$ con $1 \leqslant \lambda \leqslant \frac{R}{|a|}$; d'altra parte appartenendo z a G (e quindi a $\theta \cdot B_k$) z appartiene pure, per ogni a, al campo $\theta \cdot a \cdot A_k^{-1}$; $\frac{z}{t}$ appartiene di conseguenza al campo $\frac{\theta \cdot a}{\lambda \cdot a} \cdot A_k^{-1} = \frac{1}{\lambda} \cdot \theta \cdot A_k^{-1}$, cioè a $\theta \cdot A_k^{-1}$.

Converrà ora sostituire ad I un opportuno insieme I' distante da I meno di un $\eta > 0$ assegnato. Indichiamo con $\overline{R}$ il minimo modulo degli a e con centro nei punti a e raggio $\frac{\overline{R}}{R} \cdot \eta$ descriviamo le relative circonferenze. I cerchi ottenuti hanno tutti gli a nel loro interno e sarà possibile perciò, per il lemma di

---

[2] Si osservi che se a_1 è uno degli a di modulo minimo, ed R' è la massima distanza di $a_1 L_k^{-1}$ dall'origine, B_k è contenuta nel cerchio $|z| \leqslant R'$. D'altra parte per $|a| > R'$, aA_k^{-1} contiene questo cerchio e quindi $a_1 A_k^{-1}$, sicchè gli aA_k^{-1} pei quali è $|a| > R'$ possono essere trascurati per la costruzione di B_k. In altri termini B_k è la parte comune a quei campi aA_k^{-1} per i quali è $|a| \leqslant R'$.

Detti β gli a aventi questa proprietà avremo che essi costituiscono un insieme limitato e chiuso; l'insieme corrispondente di tutti i contorni βL_k^{-1} è pur esso, come facilmente si dimostra, limitato e chiuso.

Ciò posto se un punto z_0 non appartiene a nessuno dei βL_k^{-1} esisterà un suo intorno i cui punti hanno la stessa proprietà; esso sarà perciò interno a tutti i βA_k^{-1} od esterno ad almeno uno di essi. Nel primo caso z_0 sarà interno a B_k, nel secondo esterno ad esso. Se ne conclude anzitutto che i punti interni ai βA_k^{-1} (o agli aA_k^{-1}) sono interni a B_k. L'inverso è evidente.

Si vede inoltre che un punto di contorno di B_k deve essere di contorno per almeno uno dei βL_k^{-1}.

Sia z_0 un tale punto. Allora il segmento Oz_0 appartiene ad ogni βA_k^{-1}, e quindi a B_k; anzi ogni suo punto diverso da z_0 è interno a βA_k^{-1} e quindi a B_k. Da ciò risulta in particolare che z_0 è punto di accumulazione di punti interni a B_k, e che B_k è quindi un campo chiuso, evidentemente semplicemente connesso.

PINCHERLE-BOREL, di sceglierne un numero finito a_1, a_2,...., a_s, per modo che i cerchi corrispondenti abbiano ancora gli a nel loro interno.

Mandate da O le coppie di tangenti ad ognuno dei cerchietti in questione considereremo di queste i due segmenti compresi fra il punto di tangenza e la circonferenza $|z|=R$. L'arco di quest'ultima così intercettato (assieme alla coppia di segmenti e all'archetto di circonferenza $\left(a_r, \frac{\overline{R}}{R}\cdot\eta\right)$ che ha per estremi i due punti di tangenza e che sta dalla parte di O rispetto alla congiungente di questi) delimita un campo semplicemente connesso Γ_{a_r}.

Sia Γ l'insieme dei campi Γ_{a_1}, Γ_{a_2}, Γ_{a_3},...., Γ_{a_s}. Dai rispettivi s contorni si eliminino gli archi di $|z|=R$. Quanto rimane degli s contorni di Γ costituisce appunto l'insieme I'. Si riconosce infatti facilmente (³) che I' dista da I meno di η.

Aggiungiamo ora ad I' i tratti liberi di $|z|=R$; si ottiene così una linea l composta di un numero finito di tratti rettilinei e di archi di cerchio; diciamo che essa soddisfa, per ogni z scelto in C, alle condizioni desiderate (⁴).

La l è intanto chiusa, semplice, rettificabile e contiene all'interno l'origine. Dovremo ora verificare che se z è in C e t su l, $\frac{z}{t}$ varia in un campo interno ad A_k^{-1}. Ed infatti, se $|t|=R$, è $\left|\frac{z}{t}\right|<\frac{\theta R}{R}=\theta$; $\frac{z}{t}$ appartiene quindi a $\theta\cdot A_k^{-1}$ (⁵). Per t appartenente ad I' l'insieme dei punti $\frac{z}{t}$, che possiamo indicare brevemente con $\frac{G}{I'}$, è vicino quanto si vuole all'analogo insieme $\frac{G}{I}$; ciò risulta subito dal fatto che $|t|$ ha, tanto su I che su I', un limite inferiore positivo. Ma si è già visto che $\frac{G}{I}$ giace in $\theta\cdot A_k^{-1}$; l'insieme degli $\frac{z}{t}$ è dunque, per η abbastanza piccolo, interno ad un $\theta'\cdot A_k^{-1}$ con $\theta<\theta'<1$.

Assumendo allora nella (11) la curva l come cammino di integrazione, si ha che per ogni z di G e t di l è $\frac{z}{t}$ interno ad un campo interno ad A_k^{-1}; $V_n^{(k)}(z)$ converge allora, per $n\to\infty$, uniformemente verso $f(z)$. Si ha cioè il:

TEOREMA. — *Sia dato un qualsiasi elemento di funzione analitica,*

(³) Si osservi infatti che un punto di I' è sul contorno di un certo Γ_{a_r}; come tale la sua distanza da I è al massimo eguale alla metà della corda massima del cerchio $|z|=R$ contenuta in Γ_{a_r}. Ora un calcolo elementare da per questa semicorda il valore $\frac{\overline{R}}{|a_r|}\cdot\eta\leqslant\eta$.

(⁴) La costruzione qui indicata per la linea l si ispira ad un metodo usato da N. OBRECHKOFF [*Vrhu sumiraneto na razhodiastcite redove* (trascrizione in lettere latine), Annali della Facoltà fisico-matematica dell'Università di Sofia, t. XXIV, 1927-1928] che però, come è esposto da questo Autore, non ci sembra rigoroso. Esso, infatti, non garantisce affatto che il contorno trovato sia una linea nel senso di JORDAN e tanto meno una linea rettificabile.

(⁵) Si verifica infatti che al campo A_k^{-1} è interno tutto il cerchio $|z|\leqslant 1$ salvo il punto $z=1$ che sta sul contorno.

$\sum_0^\infty d_\nu \cdot z^\nu$, *a raggio di convergenza* $\neq 0$) *e sia* $f(z)$ *il ramo monodromo ottenuto dal prolungamento di questo elemento entro la stella rettilinea. Si consideri la curva*

$$(L_k^{-1}) \qquad \frac{z-1}{z+1} = (2\cos\varphi)^\alpha \cdot e^{\alpha\varphi i}, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \qquad \alpha = 2^{-k};$$

allora indicando con a' *un qualunque punto singolare di* $f(z)$ *e con* B_k *il campo interno a tutte le curve* $a' \cdot L_k^{-1}$, *la serie* $\sum_0^\infty d_\nu z_\nu$ *è uniformemente sommabile, col procedimento* (V, k) *generalizzato del De la Vallée Poussin, in ogni campo interno a* B_k, *e verso il detto ramo* $f(z)$.

3. - Supponiamo ora di applicare alla nostra serie di potenze $\sum_0^\infty d_\nu z_\nu$ il procedimento (V, k), dando a k una successione di valori tendenti all'infinito, per esempio i valori interi 1, 2, 3,...., n,.... Si può verificare (cfr. n.° 4, b)) che in questa ipotesi i campi A_k^{-1} tendono al piano tagliato da $+1$ a $+\infty$ lungo l'asse reale; ciò nel senso che ogni campo limitato tutto interno a questo piano tagliato risulta interno ad ogni L_k^{-1} di indice abbastanza grande. Da ciò segue facilmente che per ogni campo G contenuto entro la stella rettilinea di centro $z=0$ esiste un valore k_0 di k tale che per $k > k_0$ il campo G cade entro il corrispondente B_k.

Si può dunque dire che i procedimenti (V, k) nel loro complesso consentono il calcolo di $f(z)$ in ogni punto interno alla detta stella, come limiti di successioni che sono anzi uniformemente convergenti in ogni campo interno alla stella medesima.

Noi vogliamo però ottenere un risultato più completo, deducendo, dai metodi (V, k), con un procedimento che potrebbe dirsi *diagonale*, un unico metodo di sommazione, valido senz'altro in tutta la stella. Ciò sarà fatto nei n.i 5 e 6; occorrerà però premettere uno studio più approfondito del comportamento per $k \to \infty$ di certe linee e campi che si presentano nella trattazione.

4. - a). Riprendiamo la trasformazione

$$z = f(w) = \frac{1-(1-w)^\alpha}{1+(1-w)^\alpha}, \qquad \alpha = 2^{-k},$$

considerata al n.° 1, e osserviamo che essa può scriversi

$$\frac{1-z}{1+z} = (1-w)^\alpha.$$

Consideriamo la sostituzione lineare

$$Z = \frac{1-z}{1+z};$$

essa fa corrispondere al settore

$$Z = re^{\theta i}, \qquad -a\pi < \theta < a\pi, \qquad r > 0,$$

l'area T_k racchiusa da due archi di cerchio simmetrici rispetto all'asse reale ed intersecantisi per $z=-1$, $z=1$, con angolo interno $2a\pi$.

Infatti, ponendo $Z = x + iy$, $z = \xi + i\zeta$, si ha

$$x + iy = \frac{(1-\xi-i\zeta)(1+\xi-i\zeta)}{(1+\xi)^2+\zeta^2} = \frac{1-\xi^2-\zeta^2}{(1+\xi)^2+\zeta^2} - i\,\frac{2\zeta}{(1+\xi)^2+\zeta^2}$$

e all'asse reale del piano Z, poichè per $y=0$ è $\zeta=0$, corrisponde l'asse reale del piano z. I due lati del nostro settore formano l'angolo interno $2a\pi$ $(a=2^{-k})$, e sono simmetrici rispetto all'asse reale. Questi due lati hanno come corrispondenti nel piano z due archi di cerchio (per la isogonalità ed omociclia della sostituzione lineare) simmetrici rispetto all'asse reale del piano z e il loro angolo interno è $2a\pi$. I punti di intersezione di questi due archi di cerchio sono $z=+1$, $z=-1$ (perchè quando $Z=0$, ∞, risulta $z=1$, $z=-1$).

Possiamo ora verificare che la trasformazione

$$Z = (1-w)^a$$

fa corrispondere al piano w, tagliato lungo l'asse reale da $w=+1$ a $+\infty$,

$$1 - w = \varrho e^{i\varphi}, \qquad -\pi < \varphi < \pi, \qquad \varrho > 0,$$

il campo semplice del considerato settore del piano Z

$$(*) \qquad re^{\theta i} = Z, \qquad -a\pi < \theta < a\pi, \qquad r > 0.$$

Infatti, poichè si considera quel ramo di $(1-w)^a$ che si riduce ad 1 per $w=0$, abbiamo $r=\varrho^a$, $\theta = a\cdot\varphi$. Per due diversi valori di w $\varrho e^{\varphi i}$ e $\varrho' e^{\varphi' i}$ non possono dare lo stesso valore di Z a meno che $\varrho=\varrho'$ e $a\varphi - a\varphi' = 2m\pi$ con m intero. Ma, poichè φ e φ' stanno entrambi fra $-\pi$ e $+\pi$, abbiamo $|\varphi-\varphi'|<2\pi$ e di qui risulterebbe essere $m=0$, $\varphi=\varphi'$.

Ogni campo semplice del piano w tagliato lungo l'asse reale da $+1$ a $+\infty$ è dunque rappresentato in un campo semplice interno alla regione T_k del piano z.

È chiaro che per $k\to\infty$ questa regione tende al segmento $(-1, +1)$ dell'asse reale di z, poichè, essendo $a=2^{-k}$, l'angolo interno $2a\pi$ dei due archi di cerchio tende a zero.

b). Studiamo, in particolare, il comportamento per $k\to\infty$ (o $a\to 0$) della curva del piano z

$$(L_k) \qquad \frac{1-z}{1+z} = (2\cos\varphi)^a \cdot e^{a\varphi i}, \qquad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

già considerata nel n.° 1, come corrispondente del cerchio unità per la trasformazione $z=f(w)$. Alla L_k corrisponde nel piano Z l'altra curva

$$Z=(2\cos\varphi)^a\cdot e^{a\varphi i},\qquad -\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},$$

che è contenuta evidentemente nel settore circolare

$$Z=re^{\theta i},\qquad -a\cdot\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant a\cdot\frac{\pi}{2},\qquad 0\leqslant r\leqslant 2^a,$$

e che quindi per $k\to\infty$ tende al segmento $(0,+1)$ dell'asse reale. Ora nel piano z a questo segmento corrisponde il segmento $(0,+1)$ (percorso in senso inverso);

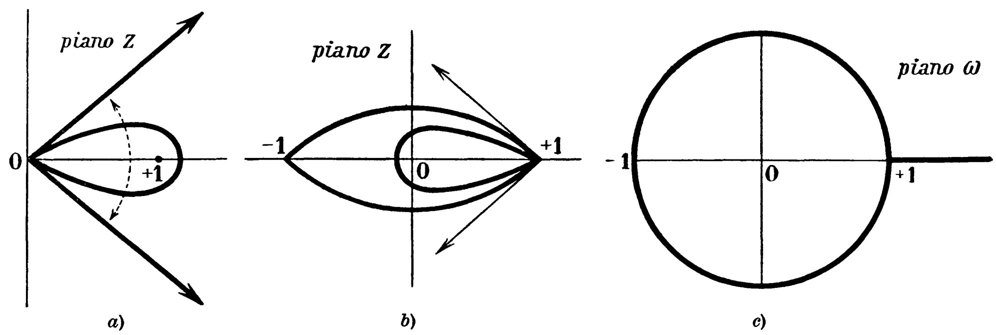

Fig. 1.

concludiamo quindi che *per $k\to\infty$ la curva L_k tende al segmento* $(0,+1)$ *dell'asse reale.*

Di qui segue facilmente quanto si è affermato nel n.° 3 circa il limite dei campi A_k^{-1} per $k\to\infty$.

Se infatti C è un campo limitato e chiuso del piano z che lasci all'esterno il taglio fatto lungo l'asse reale da $+1$ a $+\infty$, il campo C^{-1} lascierà all'esterno il segmento $(0,+1)$ dello stesso asse reale, e quindi, per k abbastanza grande C^{-1} sarà esterno ad L_k.

Sarà allora C interno ad L_k^{-1}, come si era asserito.

c). Più generalmente, consideriamo un contorno l del piano w costituito dal segmento da $w=+1$ a $w=1+h$ con $h>0$ (sull'orlo superiore del taglio) dal cerchio $|w|=1+h$ e dal segmento da $w=1+h$ a $w=+1$ (sull'orlo inferiore), e la linea corrispondente del piano Z, e poi sul piano z. Nel piano Z, ai due tratti rettilinei corrispondono pure due tratti rettilinei che vanno dall'origine ai punti $h^a\cdot e^{\pi i a}$, $h^a\cdot e^{-\pi i a}$; per $a\to 0$ essi tendono al segmento $(0,+1)$.

Quanto al cerchio, il semplice esame del modo di variare del modulo e dell'argomento di $1-w$ prova che ad esso corrisponde una curva compresa nell'angolo dei due considerati tratti rettilinei e tra i cerchi aventi il centro nell'origine e raggi h^a, $(2+h)^a$. Questa curva tende dunque al punto $Z=1$ quando a tende a zero. Concludiamo che l'intera linea corrispondente di l tende per $k \to \infty$ al segmento $(0, +1)$ del piano Z. Ricordando allora l'effetto della trasformazione lineare che muta Z in z concludiamo che *anche la linea* λ_k *corrispondente nel piano* z *alla linea* l *del piano tagliato* w *tende per* $k \to \infty$ *al segmento* $(0, +1)$ *dell'asse reale.*

5. - a). Ci occuperemo ora anzitutto della sommazione della serie geometrica $1+\xi+\xi^2+....$ riprendendo per questo le considerazioni del GRONWALL (l. c., n.° 6, teor. 5). Alla serie data conviene sostituire l'altra di somma nulla (per $|\xi|<1$) che si ottiene sottraendo $\frac{1}{1-\xi}$ dal primo termine, e cioè assumendo

$$u_0 = 1 - \frac{1}{1-\xi}, \qquad u_\nu = \xi^\nu \quad \text{per} \quad \nu < 0.$$

Ponendo allora $\frac{1}{\xi} = z_0$, per $|z| < |z_0|$ risulterà

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu z^\nu = \frac{1}{1-\xi z} - \frac{1}{1-\xi} = \frac{1-z}{(1-\xi)(z-z_0)} = \frac{(1-w)^\alpha}{1-\xi} \cdot \frac{1+z}{z-z_0}$$

poichè $\frac{1-z}{1+z} = (1-w)^\alpha$.

Sostituendo nella (9) si ha dunque in questo caso:

$$\sum b_n^{(k)} \cdot V_n^{(k)} w^n = \frac{1}{1-\xi} \cdot \frac{1+z}{z-z_0},$$

e quindi, applicando la formula integrale di CAUCHY,

$$\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(n+1)} V_n^{(k)}(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{1}{1-\xi} \cdot \frac{1+z}{z-z_0} \cdot \frac{dw}{w^{n+1}} \tag{12}$$

ove l'integrazione deve eseguirsi lungo una linea che avvolga in senso positivo l'origine non avendo all'interno altre singolarità della funzione integranda. Questa linea potrà in certi casi deformarsi in una linea l del tipo considerato al n.° 4, c), e cioè formata da un tratto rettilineo $(1, 1+h)$ tracciato sull'orlo superiore del taglio $(+1, +\infty)$, dal cerchio $|w| = 1+h$ descritto in senso positivo, e dal tratto rettilineo $(1+h, +1)$ descritto sull'orlo inferiore del taglio. Ciò avverrà se la linea corrispondente λ_k del piano z lascierà all'esterno il punto z_0.

b). Supponiamo ora di dare a k valori indefinitamente crescenti e di porre n eguale ad una funzione determinata di k; vogliamo indagare sotto quali condizioni i polinomi $V_n^{(k)}(\xi)$ tenderanno a zero uniformemente per ξ variabile in un campo C limitato e chiuso e che lasci all'esterno il tratto da $z=1$ a $z=+\infty$ dell'asse reale. Ci converrà supporre questo campo convenientemente esteso in modo da contenere all'interno l'origine.

Mentre ξ varia in C, $z_0 = \frac{1}{\xi}$ descrive un campo illimitato C^{-1} che lascia all'esterno il segmento $(0, +1)$. Considerando allora la linea l del piano w definita in a) e la sua corrispondente λ_k nel piano z, e ricordando che per $k \to \infty$ la λ_k tende al segmento $(0, +1)$ dell'asse reale, vediamo che per k abbastanza grande il campo C^{-1} sarà esterno a λ_k ed anzi la distanza tra un qualunque punto di C^{-1} e un qualunque punto di una arbitraria λ_k sarà, per k maggiore di un certo k', sempre maggiore di una certa quantità positiva δ. Sicchè, tornando al piano w, la linea l potrà essere assunta nella (12) come linea d'integrazione, per ogni ξ del campo C, appena sia $k > k'$, e sarà sempre, durante l'integrazione

$$|z - z_0| > \delta.$$

D'altra parte, essendo il punto $+1$ esterno a C la distanza $|1 - \xi|$ ha un minimo positivo; mentre, essendo le λ_k uniformemente limitate, $|1 + z|$ non supera un numero fisso. Esiste quindi un $M > 0$ tale che per $k > k'$, w su l e ξ in C è sempre

$$\left| \frac{1}{1 - \xi} \cdot \frac{1 + z}{z - z_0} \right| < M.$$

Spezziamo ora l'integrale in due parti: quella relativa ai due tratti rettilinei è minore in modulo di

$$2 \cdot \int_1^{1+h} M \frac{dw}{w^{n+1}} < 2M \cdot \int_1^{\infty} \frac{dw}{w^{n+1}} = \frac{2M}{n}$$

mentre l'altra è minore in modulo di

$$M \cdot \frac{2\pi(1 + h)}{(1 + h)^{n+1}} = \frac{2\pi M}{(1 + h)^n},$$

sicchè si ha finalmente

$$|V_n^{(k)}(\xi)| < \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(n + 1)}{\Gamma(n + a)} \left(\frac{M}{\pi n} + \frac{M}{(1 + h)^n} \right) = M \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(n)}{\Gamma(n + a)} \left(\frac{1}{\pi} + \frac{n}{(1 + h)^n} \right).$$

Ora si ha

$$\lim_{a \to 0} a \cdot \Gamma(a) = 1$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\Gamma(n)}{n^{n - \frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}} = 1, \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{n}{(1 + h)^n} = 0$$

e quindi l'ultima espressione per $n \to \infty$ e $a \to 0$ è asintotica all'altra

$$\frac{M}{\pi a} \cdot \frac{n^{n - \frac{1}{2}} \cdot e^{-n} \cdot \sqrt{2\pi}}{(n + a)^{n + a - \frac{1}{2}} e^{-n-a} \cdot \sqrt{2\pi}} = \frac{M e^a}{\pi a} \left(\frac{n + a}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{n^n}{(n + a)^{n+a}}$$

cioè all'altra

$$\frac{M}{\pi a} \frac{n^n}{n^{n+a}} \left(\frac{n + a}{n} \right)^{-n-a} = \frac{M}{\pi a \cdot n^a} \left\{ \left(1 + \frac{a}{n} \right)^{\frac{n}{a}} \right\}^{-a - \frac{a^2}{n}}$$

o finalmente all'altra

$$\frac{M}{\pi a n^{a}}.$$

Se ne conclude che $V_n^{(k)}(\xi)$ tenderà uniformemente a zero per ogni ξ nel campo C se n sarà una tale funzione di a o di k per cui $a \cdot n^a$, ossia $2^{-k} \cdot n^{2^{-k}}$, tenda all'∞ per $a \to 0$ o $k \to \infty$. Questa condizione si verifica, per esempio, prendendo

$$n \geqslant k^{2^{2k}};$$

infatti

$$2^{-k} \cdot (k^{2^{2k}})^{2^{-k}} = \frac{k^{2^k}}{2^k}$$

tende a $+\infty$ per $k \to \infty$.

Un altro valore di n che soddisfa alla condizione posta e che è notevolmente minore del precedente è

$$n = 2^{k \cdot 2^k} \cdot k^{2^k}$$

che dà

$$a n^a = 2^{-k} \cdot (2^{k \cdot 2^k} \cdot k^{2^k})^{2^{-k}} = 2^{-k} \cdot 2^k \cdot k = k.$$

c). Il risultato precedente non si riferisce propriamente alla serie geometrica, ma all'altra

$$\left(1 - \frac{1}{1-\xi}\right) + \xi + \xi^2 + \ldots.,$$

ma se ne deriva subito quanto ci occorre osservando col GRONWALL che in base alla (6), se un metodo (f, g) sostituisce ad una serie $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots.$ la successione U_0, $U_1, \ldots.$, esso sostituirà alla serie $(u_0 + c) + u_1 + u_2 + \ldots.$ la successione $U_0 + c$, $U_1 + c, \ldots.$.

Concludiamo dunque che *al crescere contemporaneo di k ed n, con la condizione* $\lim (2^{-k} \cdot n^{2^{-k}}) = +\infty$, *i polinomi $V_n^{(k)}$ calcolati per la serie geometrica $1 + \xi + \xi^2 + \ldots.$ convergono ad $\frac{1}{1-\xi}$ per ogni ξ non appartenente al taglio* $(1, +\infty)$ *e che la convergenza è uniforme in ogni campo C limitato e chiuso interno al piano così tagliato.*

6. - Basterebbe ora ripetere con le opportune modificazioni i ragionamenti del n.° 2 (che risultano anzi qui alquanto più semplici) per ottenere il risultato generale:

Sotto le medesime condizioni i polinomi $V_n^{(k)}(\xi)$ calcolati per un arbitrario elemento $\sum a_n \xi^n$ di funzione analitica a raggio di convergenza diverso da zero convergono ad un limite finito in tutta la stella rettilinea dell'elemento stesso relativa all'origine e forniscono il prolungamento analitico dell'elemento in detta stella. In ogni campo limitato interno alla stella la convergenza è uniforme [1].

([1]) Ringrazio vivamente il Chiarissimo Professor G. ASCOLI per il prezioso aiuto datomi nel corso della presente ricerca.

LEONIDA TONELLI - *Direttore responsabile.* Finito di stampare il 31 marzo 1937 - XV.