ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ARNOLD WALFISZ

Teilerprobleme (Vierte Abhandlung)

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 5, nº 3-4 (1936), p. 289-298

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1936_2_5_3-4_289_0>

TEILERPROBLEME

(VIERTE ABHANDLUNG)

von ARNOLD WALFISZ (Radość).

Es bezeichne im folgenden: $\sigma(n)$ die Summe der reziproken Teiler einer natürlichen Zahl n; γ die Eulersche Konstante; $F(x)$ die Restfunktion

$$(1)\qquad \sum_{n \leqq x}(x-n)\sigma(n)=\frac{\pi^2}{12}x^2-\frac{1}{2}x\log x-\frac{1}{2}(\gamma-1+\log 2\pi)x+F(x)$$

(falls untere Summationsgrenzen nicht ausdrücklich angegeben werden, sind sie stets Eins); $\psi_1(u)$, $\psi_2(u)$ die beiden ersten Bernoullischen Polynome

$$\psi_1(u)=(u-[u])-\frac{1}{2}, \qquad \psi_2(u)=(u-[u])^2-(u-[u])+\frac{1}{6};$$

B unterschiedslos reelle Zahlen, die von allem Möglichen abhängen dürfen, absolut genommen jedoch unterhalb numerischer Konstanten liegen.

Die Restfunktion $F(x)$ ist von WIGERT [1], LANDAU [2], RAMANUJAN [3], LANDAU [4] nach oben abgeschätzt worden. Die besten Ergebnisse, nämlich

$$(2)\qquad F(x)=O(x^{\frac{1}{3}}),$$

$$(3)\qquad F(x)=O(x^{\frac{7}{23}}\log^{\frac{12}{23}}x),$$

erzielte LANDAU (l. c. [4]), indem er von der Wigertschen Reihenentwicklung

$$F(x)=-\frac{1}{24}+\frac{\sqrt{x}}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma(n)}{\sqrt{n}}J_1(4\pi\sqrt{nx})$$

---

[1] S. WIGERT: *Sur quelques fonctions arithmétiques* [Acta Mathematica, **37** (1914), S. 113-140].

[2] E. LANDAU: *Besprechung von S. Wigert: Sur quelques fonctions arithmétiques* [Göttingische gelehrte Anzeigen, **177** (1915), S. 377-414].

[3] S. RAMANUJAN: *On certain trigonometrical sums and their applications in the theory of numbers* [Transactions of the Cambridge Philosophical Society, **22** (1918), S. 259-276 oder Collected Papers of Srinivasa Ramanujan (Cambridge, 1927), S. 179-199].

[4] E. LANDAU: *Über einige zahlentheoretische Funktionen* [Göttinger Nachrichten (1924), S. 116-134].

ausging, wo J_1 die Besselsche Funktion erster Art bezeichnet. (3) ist natürlich besser als (2); der Fortschritt wird durch Anwendung des bekannten Weylschen Satzes aus der Lehre von den Diophantischen Näherungen ermöglicht.

Bei Untersuchung des der summatorischen Funktion $\sum\limits_{n\leqq x}\sigma(n)$ entsprechenden Fehlerquadratintegrals bin ich auf die folgende Darstellung dieser Funktion gestossen:

$$(4)\quad \sum_{n\leqq x}\sigma(n)=\frac{\pi^2}{6}x-\frac{1}{2}\log x-\frac{1}{2}(\gamma+\log 2\pi)-\sum_{n\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{n}\psi_1\left(\frac{x}{n}\right)$$
$$-\frac{1}{x}\sum_{n\leqq\sqrt{x}}n\psi_1\left(\frac{x}{n}\right)-\frac{1}{2x^2}\sum_{n\leqq\sqrt{x}}n^2\psi_2\left(\frac{x}{n}\right)-\frac{2}{\sqrt{x}}\psi_2(\sqrt{x})-\frac{1}{12\sqrt{x}}+Bx^{-1}\quad (x\geqq 1)$$ [5].

Diese Formel bietet, wie der folgende Hilfssatz 2 zeigt, einen bequemen Zugang zur Abschätzung von $F(x)$. Ich gebe einen neuen Beweis für (2) und verschärfe (3) zu

$$(5)\qquad F(x)=O(x^{\frac{3}{10}}).$$

Hilfssatz 1. - *Es gilt* (4).

Beweis: Ich nehme von vornherein $x\geqq 3$ an, da die Behauptung für $1\leqq x<3$ klar ist. Zur Abkürzung sei

$$(6)\qquad R(u)=u-[u].$$

so dass also

$$(7)\qquad \psi_1(u)=R(u)-\frac{1}{2},\qquad \psi_2(u)=R^2(u)-R(u)+\frac{1}{6}$$

ist.

Die fetten Zahlen geben Nummern von Formeln an, die an den betreffenden Stellen benutzt werden, sind also als Hinweise zu verstehen.

$$\sum_{n\leqq x}\sigma(n)=\sum_{n\leqq x}\sum_{a/n}\frac{1}{a}=\sum\sum_{ab\leqq x}\frac{1}{a}$$
$$(8)\qquad =\sum\sum_{\substack{a\leqq b\leqq x\\ ab\leqq x}}\frac{1}{a}+\sum\sum_{\substack{b\leqq a\leqq x\\ ab\leqq x}}\frac{1}{a}-\sum\sum_{\substack{a=b\leqq x\\ ab\leqq x}}\frac{1}{a}=S_1+S_2-S_3.$$

---

(5) Die etwas schwächere Abschätzung

$$(4')\quad \sum_{n\leqq x}\sigma(n)=\frac{\pi^2}{6}x-\frac{1}{2}\log x-\frac{1}{2}(\gamma+\log 2\pi)-\sum_{n\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{n}\psi_1\left(\frac{x}{n}\right)$$
$$-\frac{1}{x}\sum_{n\leqq\sqrt{x}}n\psi_1\left(\frac{x}{n}\right)+Bx^{-\frac{1}{2}}\qquad (x\geqq 1)$$

befindet sich in der zweiten gleichnamigen Abhandlung [Mathematische Zeitschrift, **34** (1931), S. 448-472; Hilfssatz 1]. Das beim Beweise von (4') benutzte Verfahren liefert auch (4).

$$S_1 = \sum_{a \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{a} \sum_{a \leqq b \leqq \frac{x}{a}} 1 = \sum_{a \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{a}\left(\left[\frac{x}{a}\right] + 1 - a\right) \quad (8)$$

(9) $$= -\sum_{a \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{a} \psi_1\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2} \sum_{a \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{a} + x \sum_{a \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{a^2} - [\sqrt{x}] \quad (6, 7).$$

$$\log[\sqrt{x}] = \log(\sqrt{x} - R(\sqrt{x})) = \log\sqrt{x} + \log\left(1 - \frac{R(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right) \quad (6)$$

(10) $$= \frac{1}{2}\log x - \frac{R(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} - \frac{R^2(\sqrt{x})}{2x} + Bx^{-\frac{3}{2}}.$$

(11) $$\frac{1}{[\sqrt{x}]} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{B}{x}.$$

$$\sum_{a \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{a} = \log[\sqrt{x}] + \gamma + \frac{1}{2[\sqrt{x}]} + Bx^{-1} \quad (^6)$$

(12) $$= \frac{1}{2}\log x + \gamma - \frac{\psi_1(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + Bx^{-1} \quad (10, 11, 7).$$

(13) $$q = [\sqrt{x}] + 1 \qquad \text{(Definition von } q\text{)}.$$

(14) $$\frac{1}{2a^2(a+1)^2} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{(a+1)^3}\right) - \frac{1}{6a^3(a+1)^3}.$$

$$\sum_{a=q}^{\infty} \frac{1}{a^2} = \sum_{a=q}^{\infty}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}\right) + \frac{1}{2}\sum_{a=q}^{\infty}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a+1)^2}\right)$$
$$+ \frac{1}{6}\sum_{a=q}^{\infty}\left(\frac{1}{a^3} - \frac{1}{(a+1)^3}\right) - \frac{1}{6}\sum_{a=q}^{\infty}\frac{1}{a^3(a+1)^3} \quad (14)$$

(15) $$= \frac{1}{q} + \frac{1}{2q^2} + \frac{1}{6q^3} + Bq^{-5}.$$

---

(6) Die hierfür und die Formeln (23), (32) w. u. benutzte wohlbekannte Abschätzung

$$\sum_{a=1}^{n} \frac{1}{a} = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + Bn^{-3}$$

ergibt sich mittels der Eulerschen Summenformel. Man kann sie aber auch unmittelbar wie folgt bestätigen:

$$\sum_{a=1}^{n} \frac{1}{a} = \int_1^n \frac{[u]}{u^2}\,du + 1 = \log n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \int_1^n \frac{\psi_1(u)}{u^2}\,du = \log n + \gamma + \frac{1}{2n} + \int_n^{\infty} \frac{\psi_1(u)}{u^2}\,du,$$

$$\int_n^{\infty} \frac{\psi_1(u)}{u^2}\,du = 2\int_n^{\infty} \frac{dv}{v^3} \int_0^{R(v)} \left(u - \frac{1}{2}\right) du = \int_n^{\infty} \left(-\frac{1}{6} + \psi_2(v)\right) \frac{dv}{v^3} = -\frac{1}{12n^2} + Bn^{-3}.$$

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{\sqrt{x}-(R(\sqrt{x})-1)}=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1-\frac{R(\sqrt{x})-1}{\sqrt{x}}\right)^{-1} \quad (13,\ 6)$$

(16) $$=\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{R(\sqrt{x})-1}{x}+\frac{(R(\sqrt{x})-1)^2}{x^{\frac{3}{2}}}+Bx^{-2},$$

(17) $$\frac{1}{2q^2}=\frac{1}{2x}+\frac{R(\sqrt{x})-1}{x^{\frac{3}{2}}}+Bx^{-2} \quad (16),$$

(18) $$\frac{1}{6q^3}=\frac{1}{6x^{\frac{3}{2}}}+Bx^{-2} \quad (16).$$

$$x\sum_{a>\sqrt{x}}\frac{1}{a^2}=x\sum_{a=q}^{\infty}\frac{1}{a^2}=\sqrt{x}+R(\sqrt{x})-1+\frac{(R(\sqrt{x})-1)^2}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2}+\frac{R(\sqrt{x})-1}{\sqrt{x}}$$

$$+\frac{1}{6\sqrt{x}}+Bx^{-1} \quad (13,\ 15\text{-}18)$$

$$=2\sqrt{x}-[\sqrt{x}]-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\left\{(R(\sqrt{x})-1)^2+R(\sqrt{x})-1+\frac{1}{6}\right\}+Bx^{-1} \quad (6)$$

(19) $$=2\sqrt{x}-[\sqrt{x}]-\frac{1}{2}+\frac{\psi_2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}+Bx^{-1} \quad (7).$$

$$x\sum_{a\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{a^2}=\frac{\pi^2}{6}x-x\sum_{a>\sqrt{x}}\frac{1}{a^2}$$

(20) $$=\frac{\pi^2}{6}x-2\sqrt{x}+[\sqrt{x}]+\frac{1}{2}-\frac{\psi_2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}+Bx^{-1} \quad (19).$$

$$S_1=-\sum_{a\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{a}\psi_1\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{1}{4}\log x+\frac{1}{2}\gamma-\frac{\psi_1(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}+\frac{\pi^2}{6}x-2\sqrt{x}+[\sqrt{x}]$$

$$+\frac{1}{2}-\frac{\psi_2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}-[\sqrt{x}]+Bx^{-1} \quad (9,\ 12,\ 20)$$

(21) $$=\frac{\pi^2}{6}x-2\sqrt{x}+\frac{1}{4}\log x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\gamma-\sum_{a\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{a}\psi\left(\frac{x}{a}\right)-\frac{1}{2\sqrt{x}}(\psi_1(\sqrt{x})+2\psi_2(\sqrt{x}))+Bx^{-1}.$$

$$S_2=\sum_{\substack{b\leqq a\leqq x\\ ab\leqq x}}\sum\frac{1}{a}=\sum_{b\leqq\sqrt{x}}\ \sum_{b\leqq a\leqq\frac{x}{b}}1=\sum_{b\leqq\sqrt{x}}\ \sum_{a\leqq\frac{x}{b}}\frac{1}{a}-\sum_{b\leqq\sqrt{x}}\ \sum_{a<b}\frac{1}{a} \quad (8)$$

(22) $$=S_{21}-S_{22}.$$

(23) $$\sum_{a\leqq\frac{x}{b}}\frac{1}{a}=\log\left[\frac{x}{b}\right]+\gamma+\frac{1}{2}\left[\frac{x}{b}\right]^{-1}-\frac{1}{12}\left[\frac{x}{b}\right]^{-2}+Bb^3x^{-3} \quad ({}^{6}).$$

$$\log\left[\frac{x}{b}\right]=\log\left(\frac{x}{b}-R\left(\frac{x}{b}\right)\right)=\log\frac{x}{b}+\log\left(1-\frac{b}{x}R\left(\frac{x}{b}\right)\right) \quad (6)$$

(24) $$=\log x-\log b-\frac{b}{x}R\left(\frac{x}{b}\right)-\frac{b^2}{2x^2}R^2\left(\frac{x}{b}\right)+Bb^3x^{-3},$$

(25) $$\left[\frac{x}{b}\right]^{-1}=\left(\frac{x}{b}-R\left(\frac{x}{b}\right)\right)^{-1}=\frac{b}{x}\left(1-\frac{b}{x}R\left(\frac{x}{b}\right)\right)^{-1}=\frac{b}{x}+\frac{b^2}{x^2}R\left(\frac{x}{b}\right)+Bb^3x^{-3}\quad(6),$$

(26) $$\left[\frac{x}{b}\right]^{-2}=\frac{b^2}{x^2}+Bb^3x^{-3}\quad(25).$$

$$\sum_{a\leqq\frac{x}{b}}\frac{1}{a}=\log x-\log b-\frac{b}{x}R\left(\frac{x}{b}\right)-\frac{b^2}{2x^2}R^2\left(\frac{x}{b}\right)+\gamma+\frac{b}{2x}$$
$$+\frac{b^2}{2x^2}R\left(\frac{x}{b}\right)-\frac{b^2}{12x^2}+Bb^3x^{-3}\quad(23\text{-}26)$$

(27) $$=\log x+\gamma-\log b-\frac{b}{x}\psi_1\left(\frac{x}{b}\right)-\frac{b^2}{2x^2}\psi_2\left(\frac{x}{b}\right)+Bb^3x^{-3}\quad(7).$$

$$\sum_{b\leqq\sqrt{x}}\log b=\left([\sqrt{x}]+\frac{1}{2}\right)\log[\sqrt{x}]-[\sqrt{x}]+\frac{1}{2}\log 2\pi+\frac{1}{12[\sqrt{x}]}+Bx^{-1}$$
(Stirlingsche Formel)
$$=\left([\sqrt{x}]+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\log x-\frac{R(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}-\frac{R^2(\sqrt{x})}{2x}+Bx^{-\frac{3}{2}}\right)$$
$$-\sqrt{x}+R(\sqrt{x})+\frac{1}{2}\log 2\pi+\frac{1}{12\sqrt{x}}+Bx^{-1}\quad(10,\,6,\,11)$$

(28) $$=\frac{1}{2}\left([\sqrt{x}]+\frac{1}{2}\right)\log x-\sqrt{x}+\frac{1}{2}\log 2\pi+S_{211},\quad\text{wo}$$

$$S_{211}=-\left(\sqrt{x}-R(\sqrt{x})+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{R(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}+\frac{R^2(\sqrt{x})}{2x}\right)+R(\sqrt{x})+\frac{1}{12\sqrt{x}}+Bx^{-1}\quad(6)$$
$$=-R(\sqrt{x})+\frac{R^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}-\frac{R(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}-\frac{R^2(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}+R(\sqrt{x})+\frac{1}{12\sqrt{x}}+Bx^{-1}$$

(29) $$=\frac{\psi_2(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}+Bx^{-1}\quad(7).$$

(30) $$\sum_{b\leqq\sqrt{x}}\log b=\frac{1}{2}\left([\sqrt{x}]+\frac{1}{2}\right)\log x-\sqrt{x}+\frac{1}{2}\log 2\pi+\frac{\psi_2(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}+Bx^{-1}\quad(28,\,29).$$

$$S_{21}=\sum_{b\leqq\sqrt{x}}\sum_{a\leqq\frac{x}{b}}\frac{1}{a}=[\sqrt{x}](\log x+\gamma)-\frac{1}{2}\left([\sqrt{x}]+\frac{1}{2}\right)\log x+\sqrt{x}-\frac{1}{2}\log 2\pi$$
$$-\frac{\psi_2(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\sum_{b\leqq\sqrt{x}}b\psi_1\left(\frac{x}{b}\right)-\frac{1}{2x^2}\sum_{b\leqq\sqrt{x}}b^2\psi_2\left(\frac{x}{b}\right)+Bx^{-1}\quad(22,\,27,\,30)$$

(31) $$=\frac{1}{2}[\sqrt{x}]\log x+\gamma[\sqrt{x}]+\sqrt{x}-\frac{1}{4}\log x-\frac{1}{2}\log 2\pi-\frac{\psi_2(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$
$$-\frac{1}{x}\sum_{b\leqq\sqrt{x}}b\psi_1\left(\frac{x}{b}\right)-\frac{1}{2x^2}\sum_{b\leqq\sqrt{x}}b^2\psi_2\left(\frac{x}{b}\right)+Bx^{-1}.$$

$$S_{22}=\sum_{b\leqq\sqrt{x}}\sum_{a<b}\frac{1}{a}=\sum_{a<\sqrt{x}}\frac{1}{a}\sum_{a<b\leqq\sqrt{x}}1=\sum_{a<\sqrt{x}}\frac{1}{a}([\sqrt{x}]-a)\quad(22)$$
$$=\sum_{a\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{a}([\sqrt{x}]-a)=[\sqrt{x}]\left(\sum_{a\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{a}-1\right)$$

$$=[\sqrt{x}]\left(\log[\sqrt{x}]+\gamma-1+\frac{1}{2[\sqrt{x}]}-\frac{1}{12[\sqrt{x}]^2}+Bx^{-\frac{3}{2}}\right)\quad(^6)\tag{32}$$

$$=[\sqrt{x}]\log[\sqrt{x}]+\gamma[\sqrt{x}]-[\sqrt{x}]+\frac{1}{2}-\frac{1}{12[\sqrt{x}]}+Bx^{-1}$$

$$=[\sqrt{x}]\left(\frac{1}{2}\log x-\frac{R(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}-\frac{R^2(\sqrt{x})}{2x}\right)+\gamma[\sqrt{x}]-\sqrt{x}+R(\sqrt{x})$$

$$+\frac{1}{2}-\frac{1}{12\sqrt{x}}+Bx^{-1}\quad(10,\ 6,\ 11)$$

$$=\frac{1}{2}[\sqrt{x}]\log x-(\sqrt{x}-R(\sqrt{x}))\left(\frac{R(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}+\frac{R^2(\sqrt{x})}{2x}\right)+\gamma[\sqrt{x}]-\sqrt{x}$$

$$+R(\sqrt{x})+\frac{1}{2}-\frac{1}{12\sqrt{x}}+Bx^{-1}\quad(6)$$

$$=\frac{1}{2}[\sqrt{x}]\log x-R(\sqrt{x})+\frac{R^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}-\frac{R^2(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}+\gamma[\sqrt{x}]-\sqrt{x}+R(\sqrt{x})$$

$$+\frac{1}{2}-\frac{1}{12\sqrt{x}}+Bx^{-1}$$

$$=\frac{1}{2}[\sqrt{x}]\log x+\gamma[\sqrt{x}]-\sqrt{x}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(R^2(\sqrt{x})-\frac{1}{6}\right)+Bx^{-1}.\tag{33}$$

$$S_2=2\sqrt{x}-\frac{1}{4}\log x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log 2\pi-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(2\psi_2(\sqrt{x})+\psi_1(\sqrt{x})+\frac{1}{6}\right)\tag{34}$$

$$-\frac{1}{x}\sum_{b\leqq\sqrt{x}}b\psi_1\left(\frac{x}{b}\right)-\frac{1}{2x^2}\sum_{b\leqq\sqrt{x}}b^2\psi_2\left(\frac{x}{b}\right)+Bx^{-1}\quad(22,\ 31,\ 33,\ 6,\ 7).$$

$$S_3=\sum_{a\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{a}=\frac{1}{2}\log x+\gamma-\frac{\psi_1(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}+Bx^{-1}\quad(8,\ 12).\tag{35}$$

$$\sum_{n\leqq x}\sigma(n)=\frac{\pi^2}{6}x-2\sqrt{x}+\frac{1}{4}\log x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\gamma-\sum_{a\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{a}\psi_1\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{x}}(\psi_1(\sqrt{x})+2\psi_2(\sqrt{x}))+2\sqrt{x}-\frac{1}{4}\log x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log 2\pi$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(2\psi_2(\sqrt{x})+\psi_1(\sqrt{x})+\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{x}\sum_{b\leqq\sqrt{x}}b\psi_1\left(\frac{x}{b}\right)-\frac{1}{2x^2}\sum_{b\leqq\sqrt{x}}b^2\psi_2\left(\frac{x}{b}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\log x-\gamma+\frac{\psi_1(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}+Bx^{-1}\quad(8,\ 21,\ 34,\ 35)$$

$$=\frac{\pi^2}{6}x-\frac{1}{2}\log x-\frac{1}{2}(\gamma+\log 2\pi)-\sum_{a\leqq\sqrt{x}}\frac{1}{a}\psi_1\left(\frac{x}{a}\right)\tag{4}$$

$$-\frac{1}{x}\sum_{b\leqq\sqrt{x}}b\psi_1\left(\frac{x}{b}\right)-\frac{1}{2x^2}\sum_{b\leqq\sqrt{x}}b^2\psi_2\left(\frac{x}{b}\right)-\frac{2\psi_2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}-\frac{1}{12\sqrt{x}}+Bx^{-1}.$$

Hilfssatz 2. - *Für* $x \geqq 3$ *ist*

$$F(x) = -\sum_{n \leqq \sqrt{x}} \psi_2\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{1}{2x}\int_1^x \sum_{n \leqq \sqrt{u}} \psi_2\left(\frac{x}{n}\right) du + B \log x. \tag{36}$$

Beweis: In

$$\sum_{n \leqq x} (x-n)\sigma(n) = \int_1^x \sum_{n \leqq u} \sigma(n) du$$

setze ich (4) mit u statt x ein und erhalte

$$\begin{aligned}\sum_{n \leqq x} (x-n)\sigma(n) &= \frac{\pi^2}{12} x^2 - \frac{1}{2} x \log x - \frac{1}{2}(\gamma - 1 + \log 2\pi)x \\ &- \int_1^x \sum_{n \leqq \sqrt{u}} \frac{1}{n} \psi_1\left(\frac{u}{n}\right) du - \int_1^x \sum_{n \leqq \sqrt{u}} n\psi_1\left(\frac{u}{n}\right)\frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int_1^x \sum_{n \leqq \sqrt{u}} n^2\psi_2\left(\frac{u}{n}\right)\frac{du}{u^2} \\ &- 2\int_1^x \frac{\psi_2(\sqrt{u})}{\sqrt{u}} du - \frac{1}{6}\sqrt{x} + B \log x.\end{aligned} \tag{37}$$

Wegen

$$g(v) = \int_0^v \psi_1(u) du = \frac{1}{2}\psi_2(v) - \frac{1}{12} \qquad (v > 0)$$

ist

$$\begin{aligned}\int_1^x \sum_{n \leqq \sqrt{u}} \frac{1}{n}\psi_1\left(\frac{u}{n}\right) du &= \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \frac{1}{n}\int_{n^2}^x \psi_1\left(\frac{u}{n}\right) du = \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \int_n^{\frac{x}{n}} \psi_1(u) du \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n \leqq \sqrt{x}} \psi_2\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{1}{2}\sum_{n \leqq \sqrt{x}} \psi_2(n) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n \leqq \sqrt{x}} \psi_2\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{1}{12}\sqrt{x} + B;\end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}\int_n^{\frac{x}{n}} \psi_1(u)\frac{du}{u} &= \frac{g(u)}{u}\Bigg|_n^{\frac{x}{n}} + \int_n^{\frac{x}{n}} \frac{g(u)}{u^2} du = \frac{\psi_2(u)}{2u}\Bigg|_n^{\frac{x}{n}} + \frac{1}{2}\int_n^{\frac{x}{n}} \frac{\psi_2(u)}{u^2} du \\ &= \frac{n}{2x}\psi_2\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{1}{12n} + Bn^{-2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^x \sum_{n \leqq \sqrt{u}} n\psi_1\left(\frac{u}{n}\right)\frac{du}{u} &= \sum_{n \leqq \sqrt{x}} n\int_{n^2}^x \psi_1\left(\frac{u}{n}\right)\frac{du}{u} = \sum_{n \leqq \sqrt{x}} n\int_n^{\frac{x}{n}} \psi_1(u)\frac{du}{u} \\ &= \frac{1}{2x}\sum_{n \leqq \sqrt{x}} n^2\psi_2\left(\frac{x}{n}\right) - \frac{1}{12}\sqrt{x} + B \log x.\end{aligned} \tag{39}$$

Ferner hat man

$$\int_1^x \sum_{n\leqq\sqrt{u}} n^2\psi_2\left(\frac{u}{n}\right)\frac{du}{u^2}=\sum_{n\leqq\sqrt{x}} n^2\int_{n^2}^{x}\psi_2\left(\frac{u}{n}\right)\frac{du}{u^2}$$

$$=\sum_{n\leqq\sqrt{x}} n\int_n^{\frac{x}{n}}\frac{\psi_2(u)}{u^2}\,du=B\sum_{n\leqq\sqrt{x}} n\cdot\frac{1}{n^2}$$

$$=B\log x, \tag{40}$$

$$\int_1^x \frac{\psi_2(\sqrt{u})}{\sqrt{u}}\,du=2\int_1^{\sqrt{x}}\psi_2(v)dv=B. \tag{41}$$

Aus (1) und (37) bis (41) folgt

$$F(x)=-\frac{1}{2}\sum_{n\leqq\sqrt{x}}\psi_2\left(\frac{x}{n}\right)-\frac{1}{2x}\sum_{n\leqq\sqrt{x}} n^2\psi_2\left(\frac{x}{n}\right)+B\log x$$

$$=-\sum_{n\leqq\sqrt{x}}\psi_2\left(\frac{x}{n}\right)+\frac{1}{2x}\sum_{n\leqq\sqrt{x}}(x-n^2)\psi_2\left(\frac{x}{n}\right)+B\log x$$

$$=-\sum_{n\leqq\sqrt{x}}\psi_2\left(\frac{x}{n}\right)+\frac{1}{2x}\int_1^x\sum_{n\leqq\sqrt{u}}\psi_2\left(\frac{x}{n}\right)du+B\log x. \tag{36}$$

Hilfssatz 3 (J. G. VAN DER CORPUT [7]). - *Es sei* $a\leqq b-1$, *$f(u)$ im Intervall $a\leqq u\leqq b$ mitsamt den beiden ersten Ableitungen stetig; $f''(u)$ daselbst $\geqq r$ oder $\leqq -r$, wo $r>0$ von u unabhängig ist;* $|f'(b)-f'(a)|=(b-a)R$. *Dann ist*

$$\left|\sum_{a\leqq n\leqq b} e^{2\pi i f(n)}\right|=B(b-a)Rr^{-\frac{1}{2}}+Br^{-\frac{1}{2}}. \tag{37}$$

Beweis von (2): Es sei a, b ein Zahlenpaar mit $0<a\leqq b-1$, $b\leqq 2a$; k eine natürliche Zahl; $f(u)=\frac{kx}{u}$ für $a\leqq u\leqq b$. In den Bezeichnungen von Hilfssatz 3 ist dann

$$b-a=Ba,\qquad R=Bkxa^{-3},\qquad \frac{1}{r}=Bk^{-1}x^{-1}a^3,$$

---

(7) *Zahlentheoretische Abschätzungen* [Mathematische Annalen, **84** (1921), S. 53-79], Satz 2. Einen überaus einfachen Beweis von (37) gab E. C. TITCHMARSH: *On van der Corput's method and the zeta-function of Riemann* [The Quarterly Journal of Mathematics, **2** (1931), S. 161-173], Theorem 1.

und (37) liefert

$$\sum_{a \leqq n \leqq b} \cos \frac{2\pi k x}{n} = B k^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}} + B k^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}},$$

$$(38) \qquad \sum_{a \leqq n \leqq b} \psi_2\left(\frac{x}{n}\right) = B \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{a \leqq n \leqq b} \cos \frac{2\pi k x}{n} = B x^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{2}} + B x^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}}.$$

Durch einen bekannten Kunstgriff folgt hieraus für $1 \leqq u \leqq \sqrt{x}$

$$\sum_{\sqrt[3]{x} \leqq n \leqq u} \psi_2\left(\frac{x}{n}\right) = B x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} + B x^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}} = B x^{\frac{1}{3}},$$

also

$$\sum_{n \leqq u} \psi_2\left(\frac{x}{n}\right) = B x^{\frac{1}{3}},$$

und (36) ergibt die Behauptung (2).

Hilfssatz 4 (E. C. TITCHMARSH [8]). - *Es sei $a \leqq b-1$, $f(u)$ im Intervall $a \leqq u \leqq b$ mitsamt den drei ersten Ableitungen stetig; $f'''(u)$ daselbst $\geqq \varrho$ oder $\leqq -\varrho$, wo $\varrho > 0$ von u unabhängig ist; $|f''(b) - f''(a)| = (b-a)\mathrm{P}$. Dann ist*

$$(39) \qquad \left|\sum_{a \leqq n \leqq b} e^{2\pi i f(n)}\right| = B(b-a)\mathrm{P}^{\frac{1}{3}} \varrho^{-\frac{1}{6}} + B(b-a)^{\frac{1}{2}} \mathrm{P}^{\frac{1}{6}} \varrho^{-\frac{1}{3}}.$$

Beweis von (5): Ich beginne wie beim Beweise von (2) und habe nach (38) für $x^{\frac{2}{5}} \leqq u \leqq x^{\frac{1}{2}}$

$$(40) \qquad \sum_{x^{\frac{2}{5}} \leqq n \leqq u} \psi_2\left(\frac{x}{n}\right) = B x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}} + B x^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}} = B x^{\frac{3}{10}}.$$

In den Bezeichnungen von Hilfssatz 4 ist jetzt

$$b - a = Ba, \qquad \mathrm{P} = Bkxa^{-4}, \qquad \frac{1}{\varrho} = Bk^{-1}x^{-1}a^4,$$

---

(8) l. c. (7), Theorem 2. Diesen Satz wendet TITCHMARSH auf die Zetafunktion an und bekommt $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O(t^{\frac{1}{6}} \log t)$, während Theorem 1 nur $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O(t^{\frac{1}{4}})$ ergab.

In der ursprünglichen Fassung der vorliegenden Arbeit (vom September 1931) hatte ich nicht (5), sondern die etwas schwächere Abschätzung

$$F(x) = O(x^{\frac{3}{10}} \log x),$$

zu deren Beweis ich Hilfssatz 3 der ersten gleichnamigen Abhandlung [Mathematische Zeitschrift, **26** (1927), S. 66-88] heranzog. Ich verzichte auf die Darstellung dieses Zusammenhanges, weil mein Hilfssatz lange und umständliche Rechnungen erforderte, während der Beweis von (39) überraschend einfach ist.

und (39) ergibt

$$\sum_{a\leqq n\leqq b} \cos \frac{2\pi kx}{n} = Bk^{\frac{1}{6}} x^{\frac{1}{6}} a^{\frac{1}{3}} + Bk^{-\frac{1}{6}} x^{-\frac{1}{6}} a^{\frac{7}{6}},$$

$$\sum_{a\leqq n\leqq b} \psi_2\left(\frac{x}{n}\right) = B \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sum_{a\leqq n\leqq b} \cos \frac{2\pi kx}{n} = Bx^{\frac{1}{6}} a^{\frac{1}{3}} + Bx^{-\frac{1}{6}} a^{\frac{7}{6}}.$$

Durch jenen Kunstgriff folgt nunmehr für $1 \leqq u \leqq x^{\frac{2}{5}}$

$$\sum_{n\leqq u} \psi_2\left(\frac{x}{n}\right) = Bx^{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}} + Bx^{-\frac{1}{6}+\frac{7}{6}\cdot\frac{2}{5}} = Bx^{\frac{3}{10}}. \tag{41}$$

Nach (40) und (41) ist für $1 \leqq u \leqq \sqrt{x}$

$$\sum_{n\leqq u} \psi_2\left(\frac{x}{n}\right) = Bx^{\frac{3}{10}},$$

und (36) liefert die Behauptung (5).