Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Leonida Tonelli

Sulle estremali complete

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 5, nº 2 (1936), p. 159-168
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1936_2_5_2_159_0>

SULLE ESTREMALI COMPLETE

di LEONIDA TONELLI (Pisa).

Esporrò qui alcune considerazioni sulle *estremali complete* (o *periodiche*) che mi sono state suggerite dalla lettura del molto interessante lavoro di W. DAMKÖHLER: *Periodische Extremalen vom Minimumtyp in Ringbereichen* [1].

Sia $\mathfrak{A}$ un campo anulare del piano (x, y), limitato da due curve continue (di JORDAN), chiuse, semplici (cioè prive di punti multipli) $\mathfrak{L}_1$ e $\mathfrak{L}_2$, di cui la prima risulti completamente interna alla seconda. Considerato un integrale curvilineo della forma

$$\int_{\mathcal{C}} \varphi(x, y)\, ds, \tag{1}$$

— dove ds sarà sempre, in tutto ciò che segue, il differenziale della lunghezza dell' arco della curva $\mathcal{C}$ (continua e rettificabile) — e ammesse certe condizioni di continuità e derivabilità per la $\varphi(x, y)$, se è sempre $\varphi(x, y) > 0$ e se il campo $\mathfrak{A}$ è *convessoidale* [2] rispetto alla funzione $\varphi(x, y)\sqrt{x'^2 + y'^2}$, in tale campo esiste, per l' integrale (1), almeno un'estremale completa, semplice, circondante la curva $\mathfrak{L}_1$. Questo criterio è quello che fu enunciato da E. T. WHITTAKER [3] nel 1902, e che A. SIGNORINI [4] ed io [5] (indipendentemente l' uno dall' altro) dimostrammo rigorosamente nel 1912, facendo vedere che l' integrale (1) ammette un minimo assoluto nella classe di tutte le curve di $\mathfrak{A}$ continue, chiuse, rettificabili, circondanti $\mathfrak{L}_1$, e che tale minimo è dato precisamente da un' estremale completa.

---

[1] Vedi questo stesso fascicolo pp. 127-140.

[2] Vedi L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Vol. II (1923), p. 180.

[3] *On Periodic Orbits*, Monthly Notices of Royal Astronomical Society, (London), Vol. 62 (1902), pp. 186-193.

[4] *Sul teorema di Whittaker*, Rend. R. Accad. dei Lincei, Vol. XXI (1912), pp. 36-39; *Esistenza di un' estremale chiusa dentro un contorno di Whittaker*, Rend. Circolo Matematico di Palermo, T. XXXIII (1912), pp. 187-193.

[5] *Sulle orbite periodiche*, Rend. R. Accad. dei Lincei, Vol. XXI (1912), pp. 251-258, 332-334.

Il criterio di WHITTAKER si estende ad integrali della forma

$$\int_{\mathcal{C}} F(x, y, x', y')\,ds \tag{2}$$

che risultino quasi-regolari normali, definiti positivi, e vale anche in casi più generali [6].

Un integrale che non rientra in queste estensioni è quello preso in considerazione nel criterio dato da G. D. BIRKHOFF [7] nel 1917. Scelto, su ogni curva $\mathcal{L}$ continua (di JORDAN), chiusa e semplice, come *verso positivo* quello che lascia l'interno della curva alla sua sinistra [8] (e quindi come *verso negativo* il contrario), considerato l'integrale

$$\int_{\mathcal{C}} \{\varphi(x, y) + \alpha(x, y)x' + \beta(x, y)y'\}\,ds \tag{3}$$

— dove supponiamo che sia sempre $\varphi(x, y) > 0$ e $\alpha_y \neq \beta_x$ — e ammesso che il campo $\mathcal{A}$ sia ***convessoidale nel verso positivo*** [9] rispetto alla funzione

$$\varphi(x, y)\sqrt{x'^2 + y'^2} + \alpha(x, y)x' + \beta(x, y)y',$$

l'integrale (3) ha in $\mathcal{A}$ almeno un'estremale completa, semplice che circonda $\mathcal{L}_1$ ed è percorsa nel verso *positivo* [10].

Di questo criterio del BIRKHOFF io diedi [11], nel 1923, una semplice dimostrazione servendomi dello stesso metodo con cui avevo già trattato il caso del WHITTAKER. L'integrale (3) (al contrario di quanto avviene per (1)) non ha, in generale, un minimo assoluto nella classe di tutte le curve continue, rettificabili,

---

(6) Per gli integrali regolari definiti positivi, vedi A. SIGNORINI, loc. cit. in (4); per gli stessi integrali e per gli altri casi più generali, vedi L. TONELLI, loc. cit. in (2), pp. 186-187.

(7) *Dynamical systems with two degrees of freedom*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 18 (1917), pp. 224-232.

(8) Il significato di ciò è ben chiaro quando si tratta di una curva rettificabile (la quale ha necessariamente quasi dappertutto la tangente). Nel caso generale, si consideri la curva $\mathcal{L}^*$ chiusa, convessa, di minima lunghezza, che racchiude la $\mathcal{L}$. La $\mathcal{L}^*$ e la $\mathcal{L}$ hanno in comune almeno tre punti e ciò permette di far corrispondere ad un dato verso di $\mathcal{L}$ quel verso di $\mathcal{L}^*$ secondo il quale i punti comuni alle due curve si susseguono nello stesso ordine. Allora il verso positivo della $\mathcal{L}$ sarà quello che così corrisponde al verso positivo della $\mathcal{L}^*$.

Infine, per *lato sinistro* di una retta orientata si intenderà quello in cui viene a trovarsi, dopo una rotazione di 90°, nel verso positivo delle rotazioni (quello antiorario), intorno al suo primo punto, un raggio giacente sulla retta e orientato come questa retta.

(9) Vedi più oltre n.° 8.

(10) In questo enunciato il verso *positivo* può essere sostituito da quello *negativo*.

(11) *Sulle orbite periodiche irreversibili*. Memorie R. Accad. delle Scienze dell'Istituto di Bologna (Classe di Scienze Fisiche), S. VIII, T. I (1923-1924) pp. 21-25.

chiuse di $\mathfrak{A}$ che circondano $\mathfrak{L}_1$ ed hanno *verso positivo*; ma io feci vedere che tale integrale ha il minimo assoluto nella classe più particolare di tutte le curve continue, rettificabili, chiuse, semplici, con *verso positivo*, che appartengono ad $\mathfrak{A}$ e circondano $\mathfrak{L}_1$, e mostrai pure che tutte le curve minimanti in questa classe sono delle estremali complete.

Così facendo io venivo a seguire un *principio generale*: quando un'estremale relativa ad un certo integrale non dà il minimo assoluto di questo integrale nella classe generale delle curve a cui l'estremale appartiene, la stessa estremale può diventare una minimante assoluta per l'integrale considerato in una opportuna classe particolare di curve, la quale permetta di stabilire le proprietà analitiche dell'estremale stessa.

Di questo principio ha fatto una brillante applicazione W. DAMKÖHLER, nel lavoro citato, mostrando come il criterio di BIRKHOFF valga, non solo indipendentemente dalla condizione $\alpha_y \neq \beta_x$, ma anche per *qualsiasi integrale regolare* della forma generale (2). Il DAMKÖHLER sostituisce alla considerazione di una singola curva chiusa $\mathfrak{C}$ quella di un complesso C formato da un numero finito o da un'infinità numerabile di curve continue, rettificabili, chiuse, semplici, appartenenti ad $\mathfrak{A}$, a due a due non intrecciantisi e opportunamente condizionate, e mostra che, se l'integrale (2) è regolare positivo, e se il campo $\mathfrak{A}$ è *convessoidale nel verso positivo* rispetto alla funzione $F(x, y, x', y')$, l'integrale

$$\int_{\mathsf{C}} F(x, y, x', y')ds$$

ammette il minimo assoluto e tale minimo è dato da un complesso C_0 formato da un numero finito di estremali complete, semplici, a due a due senza punti comuni, una almeno delle quali ha verso positivo e circonda $\mathfrak{L}_1$. Ciascuna di queste estremali dà poi un minimo forte relativamente alla classe di tutte le curve continue, rettificabili, chiuse, semplici, giacenti in $\mathfrak{A}$, appartenenti ordinatamente ad un intorno sufficientemente piccolo dell'estremale considerata, e aventi lo stesso verso di questa estremale.

Nella presente nota mi propongo:

1°) di semplificare, nel caso degli integrali regolari, la dimostrazione del DAMKÖHLER, eliminando del tutto la considerazione del funzionale $Z(\mathsf{C}/\mu)$ da Lui introdotto nel § 2 del suo lavoro, e rendendo il ragionamento indipendente dal risultato della teoria del potenziale che il DAMKÖHLER sfrutta nel suo § 3;

2°) di estendere il risultato del DAMKÖHLER a tutti gli integrali *quasi-regolari normali*; ed anche a tutti gli integrali *quasi-regolari seminormali*, quando alla considerazione delle *estremali* si sostituisca quella delle *estremaloidi*.

1. - Richiamiamo con tutta precisione la definizione di complesso C.

Diremo *complesso* C l'insieme di un *numero finito qualunque* ([12]) (che può essere anche $=1$ e che *non* è necessariamente lo stesso per tutti i complessi) di curve continue (di JORDAN), rettificabili, chiuse, semplici, e ognuna con un proprio verso, $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_m$, appartenenti al campo anulare $\mathcal{A}$ e soddisfacenti alle seguenti condizioni:

1°) ogni curva $\mathcal{C}_r$ di C non può avere simultaneamente punti interni e punti esterni ad un'altra curva $\mathcal{C}_s$ dello stesso complesso;

2°) due curve $\mathcal{C}_r$ e $\mathcal{C}_s$ di C non possono essere costituite dagli stessi punti (anche se ordinati in senso inverso);

3°) ogni curva $\mathcal{C}_r$ di C la quale non abbia punti interni ad altre curve dello stesso complesso avrà *verso positivo*; per ogni altra curva $\mathcal{C}_s$ di C, detto i_s il massimo numero delle curve di C alle quali risultano *interni* dei punti di $\mathcal{C}_s$, il verso di $\mathcal{C}_s$ sarà *positivo* o *negativo* a seconda che i_s risulterà pari o dispari;

4°) fra le curve $\mathcal{C}_r$ di C ve n'è sempre un *numero dispari* che circondano completamente la curva $\mathcal{L}_1$ ([13]); e pertanto, ve n'è sempre almeno una che circonda completamente $\mathcal{L}_1$ e che ha verso positivo.

Chiameremo lunghezza del complesso C la somma delle lunghezze $L_1, L_2, \ldots, L_m$ di tutte le curve $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_m$ che lo costituiscono. La lunghezza di C sarà indicata con $\mathfrak{L}$.

L'insieme di tutti i complessi C sarà indicato con $\mathfrak{C}$.

2. - Supposta la funzione $F(x, y, x', y')$ definita e continua, insieme con le sue derivate parziali del 1° ordine, per ogni punto (x, y) del campo $\mathcal{A}$ ed ogni coppia (x', y') di numeri non ambedue nulli, e supposta anche positivamente omogenea, di grado 1, rispetto a x' e y', consideriamo l'integrale

$$\mathfrak{I}_{\mathcal{C}} = \int_{\mathcal{C}} F(x, y, x', y')ds.$$

Posto $\mathsf{C} \equiv (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_m)$,

$$\mathfrak{I}_{\mathsf{C}} = \sum_{r=1}^{m} \mathfrak{I}_{\mathcal{C}_r},$$

dimostriamo la seguente proposizione:

([12]) Il DAMKÖHLER ammette che C sia costituito anche da un'infinità numerabile di curve $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots$; ma per i risultati che vogliamo ottenere basta limitarsi ai complessi formati soltanto di un numero finito di curve continue.

([13]) Vale a dire che contengono come punti interni tutti i punti interni a $\mathcal{L}_1$.

Se $\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}$ è un integrale quasi-regolare positivo seminormale [14], *ad ogni numero M si può sempre far corrispondere un $\mathfrak{L}^*$ tale che, per qualsiasi complesso C di $\mathfrak{C}$ soddisfacente alla disuguaglianza*

$$\mathfrak{J}_{\mathsf{C}} \leqslant M,$$

risulti

$$\mathfrak{L} \leqslant \mathfrak{L}^* \quad ({}^{15}).$$

Rammentiamo innanzi tutto che, per essere l'integrale $\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}$ quasi-regolare positivo seminormale, ad ogni punto $P_0 \equiv (x_0, y_0)$ di $\mathfrak{A}$ si possono far corrispondere quattro numeri p_0, q_0, m_0 e r_0, con $m_0 > 0$, $r_0 > 0$, in modo che, in tutti i punti (x, y) di $\mathfrak{A}$ appartenenti al cerchio (P_0, r_0), di centro P_0 e raggio r_0, risulti

$$F(x, y, x', y') + p_0 x' + q_0 y' \geqslant m_0, \tag{4}$$

per tutte le coppie (x', y') tali che $x'^2 + y'^2 = 1$ [16].

Dopo di ciò, sia Q un quadrato del piano (x, y) a lati paralleli agli assi x e y e contenente tutto il campo $\mathfrak{A}$. Potremo dividere Q in N quadrati uguali, Q_1, Q_2,...., Q_N, con N preso sufficientemente grande affinchè ad ogni Q_r contenente almeno un punto di $\mathfrak{A}$ si possano far corrispondere tre numeri p_r, q_r e m_r, con $m_r > 0$, in modo che risulti

$$F(x, y, x', y') + p_r x' + q_r y' \geqslant m_r$$

in tutti i punti (x, y) di $\mathfrak{A}$ appartenenti a Q_r e per tutte le coppie (x', y') tali che $x'^2 + y'^2 = 1$.

Detto m il minore dei numeri m_1, m_2,...., m_N, e considerato un qualunque complesso C di $\mathfrak{C}$, avremo allora

$$\mathfrak{J}_{\mathsf{C}} + \sum_{r=1}^{N} \int_{e_r} (p_r x' + q_r y') ds \geqslant m \mathfrak{L},$$

dove abbiamo indicato con e_r la parte di C contenuta nel quadrato Q_r, intendendo che sia fissata una regola relativa ai punti delle curve di C che si tro-

---

[14] Vale a dire, se la figurativa $u = F(x, y, x', y')$, relativa ad un punto (x, y) qualsiasi di $\mathfrak{A}$, è sempre concava verso l'alto, senza mai ridursi ad un piano.

[15] Questa proposizione è analoga a quella stabilita da E. J. MCSHANE, per le curve sulle quali è sempre $x' \geqslant 0$, a pag. 294 della sua Memoria: *Existence Theorems for ordinary problems of the Calculus of Variations* (Part. II). Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie II, Vol. III, pp. 287-315.

[16] Cfr. L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Vol. I (1921), p. 329.

vano sui lati di Q_r, in modo che questi punti vengano computati tutti una ed una sol volta. Tenendo presente la natura del complesso $\mathfrak{C}$, abbiamo

$$\left|\int_{e_r}(p_r x' + q_r y')ds\right| \leq \{|p_r| + |q_r|\} l,$$

essendo l la lunghezza comune dei lati dei quadrati Q_r; e perciò

$$m\mathfrak{L} \leq \mathfrak{J}_{\mathfrak{C}} + PlN, \tag{5}$$

dove abbiamo indicato con P la massima delle somme $|p_r| + |q_r|$ per $r = 1, 2, ..., N$. Se dunque poniamo

$$\mathfrak{L}^* = \{M + PlN\} : m,$$

la proposizione enunciata risulta provata.

3. - Dalla (5) del n.° precedente segue che, in $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}$ è limitato inferiormente ($\geq -PlN$).

4. - Dalla proprietà espressa mediante la disuguaglianza (4) segue immediatamente, con un ragionamento per assurdo, che:

Se $\mathfrak{J}_{\mathcal{C}}$ è un integrale quasi-regolare positivo seminormale, si può determinare un $\varrho > 0$ in modo che, per ogni curva continua, rettificabile e chiusa $\mathcal{C}$ appartenente ad $\mathfrak{A}$, non ridotta ad un solo punto, e contenuta in un cerchio di raggio ϱ, valga la disuguaglianza

$$\int_{\mathcal{C}} F(x, y, x', y')ds > 0.$$

5. - Da quanto precede, con la considerazione di una successione minimizzante e ragionando come ha fatto il DAMKÖHLER, dal § 6 in poi del suo lavoro citato, si ottiene senza difficoltà che:

Se $\mathfrak{J}_{\mathcal{C}}$ è un integrale quasi-regolare positivo seminormale, $\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}$ ammette in $\mathfrak{C}$ il minimo assoluto, che è dato da (almeno) un complesso $\mathfrak{C}_0$ formato da un numero finito di curve chiuse aventi a due a due al più un numero finito di punti comuni.

6. - Dimostriamo ora che, *se $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ sono due curve chiuse del complesso $\mathfrak{C}_0$ del teorema del n.° precedente, esse non possono avere a comune nessun punto P_0 interno al campo $\mathfrak{A}$.*

Se $\mathfrak{J}_{\mathcal{C}}$ è un integrale regolare od anche quasi-regolare normale, il fatto si prova semplicemente con l'argomentazione sfruttata dal DAMKÖHLER alla fine del § 8 della sua Memoria e tenendo presenti i risultati del n.° 51 del Vol. II dei miei « *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* » nonchè quanto ho provato nel mio lavoro « *Sulle equazioni di Eulero nel Calcolo delle Variazioni* » ([17]).

Nel caso generale, quando si suppone soltanto che $\mathfrak{J}_{\mathcal{C}}$ sia quasi-regolare positivo seminormale, ammettiamo, se è possibile, che $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ abbiano in comune il punto P_0 *interno* ad $\mathfrak{A}$. Per semplicità di ragionamento, supponiamo che per P_0 non passi nessuna altra curva del complesso $\mathbf{C}$.

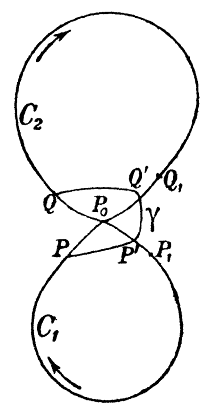

Fig. 1.

In base alle ipotesi fatte, possiamo determinare due numeri positivi r e ϱ, con $r<\varrho$, in modo che, presi due punti qualsiasi P e Q del cerchio (P_0, r) esista sempre un'estremaloide che partendo da P giunga a Q rendendo minimo l'integrale $\mathfrak{J}$ fra tutte le curve continue e rettificabili che vanno da P a Q e che appartengono al cerchio (P_0, ϱ). Scegliamo P e Q, interni al cerchio (P_0, r), il primo su $\mathcal{C}_1$ e il secondo su $\mathcal{C}_2$, nel modo indicato nella qui unita figura. Sia γ un'estremaloide minimante $\mathfrak{J}$ nella classe di curve or ora indicata, e supponiamo ϱ sufficientemente piccolo affinchè il cerchio (P_0, ϱ) risulti formato tutto di punti di $\mathfrak{A}$ e non contenga punti di altre curve del complesso $\mathbf{C}$ distinte da $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$.

Se γ non ha in comune con $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ che i suoi punti terminali, la curva $\widehat{PP_0Q}$, formata coi due archi $\widehat{PP_0}$ e $\widehat{P_0Q}$ di $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, risulta anch'essa un'estremaloide, perchè, in caso contrario, sostituendo ad essa l'arco γ si otterrebbe una nuova curva che, considerata al posto delle due $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, darebbe un valore per $\mathfrak{J}$ minore di $\mathfrak{J}_{\mathcal{C}_1}+\mathfrak{J}_{\mathcal{C}_2}$.

Se invece γ ha in comune con $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ altri punti oltre P e Q, indichiamo con Q' il primo punto di γ che è su $\mathcal{C}_2$. Se Q' fosse sull'arco $\widehat{P_0Q}$ della $\mathcal{C}_2$, P_0 escluso, ne verrebbe come dianzi che $\widehat{PP_0Q}$ sarebbe un'estremaloide; nel caso contrario, diciamo P' l'ultimo punto dell'arco $\widehat{PQ'}$ di γ che si trova su $\mathcal{C}_1$. La curva γ' costituita dagli archi $\widehat{PP_0P'}$ di $\mathcal{C}_1$ e $\widehat{P'Q'Q}$ di γ è, come γ, una curva minimante nella classe indicata. Analogamente, si può dedurre da γ' un'altra curva minimante γ'' che contenga l'arco $\widehat{PP_0}$ della $\mathcal{C}_1$ e quello $\widehat{P_0Q}$ della $\mathcal{C}_2$. Allora, supponendo ϱ e r sufficientemente piccoli, γ'' sarà costituita soltanto da questi due archi (n.° 4), e risulterà anch'essa un'estremaloide.

Con lo stesso ragionamento si prova che sono delle estremaloidi gli archi $\widehat{PP_0P_1}$ di $\mathcal{C}_1$ e $\widehat{Q_1P_0Q}$ di $\mathcal{C}_2$, come pure quello $\widehat{Q_1P_0P_1}$ formato con gli archi $\widehat{Q_1P_0}$ di $\mathcal{C}_2$ e $\widehat{P_0P_1}$ di $\mathcal{C}_1$. Questa conclusione, come ora vedremo, è in contrasto con l'ipotesi che l'integrale $\mathfrak{J}_{\mathcal{C}}$ sia *quasi-regolare seminormale*.

([17]) Annali della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. IV (1935), pp. 191-216.

Consideriamo, infatti, un'estremaloide e per $\mathfrak{I}$, e su di essa due punti, uno fisso M_0 ed uno mobile M, con la condizione che M possa assumere soltanto quelle posizioni in cui la e ammette tangente. Al tendere di M a M_0, se la tangente t in M alla e tende ad un'unica retta limite, in M_0 esiste la tangente t_0 alla e, data precisamente dalla posizione limite di t. In caso contrario, le direzioni delle varie rette limiti (orientate) si troveranno tutte in uno degli angoli del piano (x', y') (angoli che risultano tutti $<\pi$) su cui si proiettano le parti piane della figurativa $u=F(x, y, x', y')$ relativa al punto M_0; e detto α l'angolo di cui si tratta, per il punto M_0 si potranno condurre due rette, facenti tra loro un angolo uguale ad α, le quali conterranno, negli angoli opposti al vertice di ampiezza α, tutti i punti di e sufficientemente vicini a M_0. Ciò prova che, se gli archi $\widehat{PP_0P_1}$ e $\widehat{PP_0Q}$, sopra considerati, sono delle estremaloidi, non può essere un'estremaloide l'arco $\widehat{Q_1P_0P_1}$.

7. - Da quanto si è detto nel n.° precedente segue che, su ogni curva $\mathcal{C}_r$ del complesso $\mathbf{C}_0$ indicato nel teorema del n.° 5, tutti gli archi che hanno al più i punti terminali sulle curve $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$, sono delle estremaloidi, e più particolarmente delle estremali, se $\mathfrak{I}_{\mathcal{C}}$ è regolare o quasi-regolare normale.

8. - Introduciamo ora l'ipotesi che il campo $\mathfrak{A}$ sia *convessoidale nel verso positivo.*

Supponiamo che la funzione $F(x, y, x', y')$ sia definita in un campo $\mathfrak{A}^*$ avente tutti i punti di $\mathfrak{A}$ come punti interni, e che in $\mathfrak{A}^*$ essa ammetta tutte le proprietà che abbiamo supposte in $\mathfrak{A}$. Ammettiamo poi che il campo $\mathfrak{A}$ sia *convessoidale nel verso positivo* rispetto alla funzione $F(x, y, x', y')$, vale a dire, sia tale che si possa determinare un numero $\varrho>0$ in modo che tutte le estremaloidi che congiungono gli estremi di un qualsiasi arco $\widehat{P_1P_2}$ di $\mathcal{L}_1$ o di $\mathcal{L}_2$, che insieme con questo arco giacciono interamente nel cerchio (P_1, ϱ), e che hanno un *verso* concorde con quello positivo dell'arco $\widehat{P_1P_2}$ detto [18], appartengano interamente al campo $\mathfrak{A}$.

Con questa ipotesi sul campo $\mathfrak{A}$, quanto si è detto nel n.° 6, relativamente ai punti comuni a due curve del complesso $\mathbf{C}_0$ del teorema del n.° 5, si può ripetere anche se questi punti comuni sono sulle curve $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$, e se ne conclude che *le curve chiuse $\mathcal{C}_r$ che compongono $\mathbf{C}_0$ sono due a due senza punti comuni.* Inoltre, si può anche subito affermare che *tutte le curve chiuse $\mathcal{C}_r$ del complesso $\mathbf{C}_0$ sono delle estremaloidi complete* [19] e, più particolarmente,

---

[18] Ciò significa che se, secondo il verso positivo di $\mathcal{L}_1$ o $\mathcal{L}_2$, sull'arco $\widehat{P_1P_2}$ è P_1 il primo estremo e P_2 il secondo, altrettanto avvenga per l'estremaloide considerata.

[19] Vedi loc. cit. in [2], p. 100.

delle estremali complete se $\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}$ *è un integrale regolare o quasi-regolare normale.* Si ha pure che ognuna delle curve chiuse $\mathfrak{C}_r$ di C_0 dà un minimo relativo forte per $\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}$, vale a dire, *dà il minimo assoluto per* $\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}$ *nella classe di tutte le curve continue, rettificabili, chiuse, che giacciono in* $\mathfrak{A}$, *che appartengono ordinatamente ad un intorno convenientemente piccolo della* $\mathfrak{C}_r$ *considerata, e che hanno lo stesso verso di questa* $\mathfrak{C}_r$.

9. - I risultati ottenuti danno la seguente proposizione:

Se $\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}$ *è un integrale quasi-regolare seminormale in un campo che contiene come punti interni tutti i punti del campo anulare* $\mathfrak{A}$; *se* $\mathfrak{A}$ *è convessoidale nel verso positivo rispetto alla funzione* $F(x, y, x', y')$; *esiste in* $\mathfrak{A}$ *almeno un' estremaloide completa, relativa alla* $F(x, y, x', y')$, *semplice, circondante* $\mathfrak{L}_1$ *ed avente verso positivo. Questa estremaloide è una estremale completa se* $\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}$ *è regolare oppure quasi-regolare normale.*

10. - Se l'integrale $\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}$ è regolare, i risultati dei n.[i] 8 e 9 si possono liberare dalla condizione che la funzione $F(x, y, x', y')$ sia definita in un campo più ampio di $\mathfrak{A}$, purchè si restringa un poco la generalità delle curve $\mathfrak{L}_1$ e $\mathfrak{L}_2$ e si esprima in modo opportuno la condizione che il campo $\mathfrak{A}$ è convessoidale nel verso positivo.

Supponiamo, a questo scopo, che $\mathfrak{L}_1$ e $\mathfrak{L}_2$, oltre alle condizioni per esse già poste, risultino formate di un numero finito di archi Γ aventi sempre tangente e curvatura variabili in modo continuo, e tali che, in ogni punto comune a due di essi, questi archi facciano un angolo $\leqq \pi$ rivolto verso l'interno del campo $\mathfrak{A}$. Supponiamo, infine, che esistano finite e continue anche le derivate parziali del 1° ordine di $F_{x'}$ e $F_{y'}$, e che su ciascuno degli archi Γ di $\mathfrak{L}_1$ valga la disuguaglianza

$$\frac{1}{r} \leqq \frac{F_{x'y}(x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta) - F_{y'x}(x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta)}{F_1(x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta)} \qquad (^{20})$$

e su ciascuno dei Γ di $\mathfrak{L}_2$ valga la

$$\frac{1}{r} \geqq \frac{F_{x'y}(x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta) - F_{y'x}(x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta)}{F_1(x, y, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta)},$$

intendendosi che θ e $1:r$ rappresentino rispettivamente l'angolo di direzione della tangente (orientata) a Γ nel punto (x, y) e la curvatura di Γ pure in (x, y), curvatura considerata come positiva o negativa secondo che la concavità della curva è rivolta alla sinistra o alla destra della curva stessa.

Con queste nuove ipotesi, che sostituiscono quella introdotta nel n.° 8 sulla

(20) F_1 è la solita funzione $\equiv F_{x'x'} : y'^2 \equiv - F_{x'y'} : x'y' \equiv F_{y'y'} : x'^2$.

natura convessoidale del campo $\mathfrak{A}$, si possono ottenere, nel caso che $\mathfrak{I}_{\mathfrak{C}}$ sia regolare, i risultati dei n.i 8 e 9 senza dover ammettere che la F sia definita fuori di $\mathfrak{A}$. Basta, a questo fine, ragionare come ho già fatto nel n.o 58 *c*), del Vol. II dei miei « *Fondamenti* » [21].

[21] Tutto quello che si è detto nel presente lavoro sussiste anche se si assume come *verso positivo* di una curva chiusa semplice quello da noi chiamato *verso negativo*.

LEONIDA TONELLI - *Direttore responsabile*. Finito di stampare il 27 marzo 1936 - XIV