

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ORAZIO LAZZARINO

**Sulla velocità di variazione dell' obliquità nel moto
giroscopico dei proietti rigidi oblunghi**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 5, n° 1
(1936), p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1936_2_5_1_1_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1936, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SULLA VELOCITÀ DI VARIAZIONE DELL'OBLIQUITÀ NEL MOTO GIROSCOPICO DEI PROIETTI RIGIDI OBLUNGHII

di ORAZIO LAZZARINO (Pisa).

1. - È noto che nella *Balistica esterna* dei proietti di rivoluzione *oblunghi* hanno fondamentale importanza le *variazioni* dell'*obliquità*, cioè dell'angolo δ che l'asse di simmetria, rivolto alla punta del proietto, forma, in ogni istante, con la tangente alla traiettoria del baricentro G del proietto stesso, volta nel senso degli archi crescenti. Infatti le variazioni di δ , oltre a modificare la posizione del proietto rispetto alla traiettoria di G , alterano l'effetto delle resistenze del mezzo anche sul moto traslatorio.

Di tali variazioni si occuparono da tempo numerosi Autori ⁽¹⁾. Il signor ESCLANGON stabilì anche delle formule che, sotto certe particolari ipotesi restrittive, danno le *componenti*, secondo una particolare coppia di assi, della velocità $\dot{\delta}$ di variazione dell'obliquità e dedusse una rappresentazione cinematica del moto precessionale del proietto. In queste formule figura una certa grandezza μ , di cui darò in seguito l'espressione, che nella detta rappresentazione cinematica ha tale importanza che qualche A. fu indotto ad introdurla come elemento di calcolo ⁽²⁾.

Ora, avendo avuto occasione di trattare per via sintetica il secondo problema della Balistica esterna, ho trovato, per la detta velocità risultante $\dot{\delta}$, una espressione non solo molto semplice ma valida per ipotesi più generali delle predette. In questa espressione, come in quella che da essa si deduce nelle ipotesi restrittive dell'ESCLANGON, non figura nè può figurare la detta grandezza μ ed, a conferma di ciò, mostro che, deducendo dalle predette componenti l'espressione di $\dot{\delta}$, la grandezza μ si elimina e si ritrova la mia formula. Quindi « *la grandezza μ può eventualmente servire per la rappresentazione cinematica, ma non interviene*

(1) Per la bibliografia dell'argomento, troppo vasta per essere riportata qui, si può consultare: CHARBONNIER: *Traité de Balistique extérieure* [T. I, 1921, T. II, 1927, Ed. Gauthier-Villars et Doin, Paris]; *Essais sur l'Histoire de la Balistique* [Mémorial de l'Artillerie française, 1927].

(2) ESCLANGON, C. R. de l'Acad. des Sciences, Paris, 1927; G. SUGOT: *Balistique extérieure théorique*, da p. 875 a p. 880 [Gauthier-Villars, Paris, 1928].

certamente nelle effettive variazioni della obliquità e non può quindi assumersi come elemento di calcolo ».

2. - Equazioni intrinseche del moto giroscopico di un proietto rigido.

a). Rispetto al baricentro G del proietto, sia a l'omografia d'inerzia, Ω il vettore della rotazione istantanea, \mathbf{M}_r il momento di tutte le resistenze del mezzo in cui si considerino inglobati anche gli attriti longitudinali, \mathbf{M}_a il momento degli attriti laterali. Essendo evidentemente nullo il momento rispetto a G del peso del proietto, si ha che il momento risultante \mathbf{M}_e di tutte le forze esterne considerate sarà $\mathbf{M}_e = \mathbf{M}_r + \mathbf{M}_a$.

Adottando per le derivate rispetto al tempo la solita notazione del puntino sopra segnato, il secondo teorema dell'impulso può scriversi

$$(1) \quad (\alpha\Omega) \cdot = \mathbf{M}_r + \mathbf{M}_a$$

e dà, senz'altro, la più generale equazione intrinseca del moto giroscopico, attorno al proprio baricentro, di un proietto rigido di forma qualunque.

Osservando ancora che per tale sistema si ha

$$(2) \quad \dot{a} = \Omega \wedge \cdot a - a \cdot \Omega \wedge,$$

la (1) esplicitata assume la forma

$$(3) \quad a\dot{\Omega} + \Omega \wedge a\Omega = \mathbf{M}_r + \mathbf{M}_a.$$

b). Nel caso, particolarmente notevole per le applicazioni pratiche, di un proietto simmetrico rispetto ad un asse $G\mathbf{k}$ ($\mathbf{k}^2 = 1$), due dei tre momenti centrali d'inerzia (A, B, C) risultano eguali fra loro. Supposto $A = B$, l'omografia a d'inerzia può assumere la forma

$$(4) \quad a = A + (C - A)H(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = A[1 + \varepsilon H(\mathbf{k}, \mathbf{k})]$$

dove $H(\mathbf{k}, \mathbf{k})$ è diade, ed anche dilatazione avendo i vettori eguali, ed

$$(5) \quad \varepsilon = (C - A)/A$$

rappresenta lo schiacciamento polare dell'ellissoide centrale d'inerzia.

Inoltre, essendo l'asse $G\mathbf{k}$ solidale col proietto, si ha, per la formola fondamentale della cinematica dei sistemi rigidi,

$$(6) \quad \dot{\mathbf{k}} = \Omega \wedge \mathbf{k}$$

ed operando su (6) con $\Omega \times$ si ottiene

$$(7) \quad \Omega \times \dot{\mathbf{k}} = 0.$$

Per le (4), (5), (6) e (7), l'equazione (1) del moto assume per i proietti di rivoluzione, ed in particolare per quelli oblungi, la forma

$$(8) \quad A(\Omega + \varepsilon\Omega \times \mathbf{k} \cdot \mathbf{k})' = \mathbf{M}_r + \mathbf{M}_a.$$

Indicando poi non β l'assiale $\Omega \wedge$ ed applicando alla (6) un noto sviluppo in serie convergente del PEANO, si ottiene

$$(9) \quad \mathbf{k} = \left[1 + \int \beta dt + \int \beta \dot{\beta} dt + \int \beta \dot{\beta} \dot{\beta} dt + \dots \right] \mathbf{k}_0$$

dove il vettore \mathbf{k}_0 (costante d'integrazione) risulta determinato quando sia data la posizione iniziale dell'asse di simmetria del proietto.

3. - Equazioni cartesiane del moto giroscopico dei proietti di rivoluzione.

Per mostrare come dalla (8) si possano facilmente dedurre le solite equazioni cartesiane del moto giroscopico dei proietti oblungi, scegliamo come terna di riferimento una *terna fondamentale* $G(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ ⁽³⁾ orientata nel modo generalmente usato, cioè con l'asse $G\mathbf{k}$ coincidente con quello di simmetria e rivolto alla punta del proietto, con l'asse $G\mathbf{i}$ avente la direzione ed il senso del vettore $\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}$, essendo $G\mathbf{t}$ ($t^2 = 1$) tangente alla traiettoria del baricentro e rivolto sempre nel senso degli archi crescenti. Indicando inoltre, come al solito, con p, q, r , le componenti di Ω secondo $G(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, si ha

$$(10) \quad \Omega = \Omega \times \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + \Omega \times \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + \Omega \times \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + r\mathbf{k}.$$

Se $-\dot{\varphi}\mathbf{k}$ è la rotazione impressa al proietto dalla rigatura dell'anima del cannone e si pone

$$(11) \quad \omega = r - \dot{\varphi},$$

si ha che la rotazione Ω_1 della detta terna differisce da Ω per la sola componente secondo $G\mathbf{k}$ e si può quindi scrivere

$$(12) \quad \Omega_1 = \Omega_1 \times \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + \Omega_1 \times \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + \Omega_1 \times \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = p\mathbf{i} + q\mathbf{j} + \omega\mathbf{k}.$$

Ora, per le (10) e (5), l'equazione (8) del moto può assumere la forma

$$A\dot{\Omega} + (C - A)(r\dot{\mathbf{k}} + r\dot{\mathbf{k}}) = \mathbf{M}_r + \mathbf{M}_a$$

ossia, sostituendo ad $\dot{\Omega}$ l'espressione che si ottiene derivando la (10) rispetto al tempo,

$$(13) \quad A(p\dot{\mathbf{i}} + q\dot{\mathbf{j}} + p\dot{\mathbf{i}} + q\dot{\mathbf{j}}) + C(r\dot{\mathbf{k}} + r\dot{\mathbf{k}}) = \mathbf{M}_r + \mathbf{M}_a.$$

⁽³⁾ Per « terna fondamentale » s'intende una terna oraria di vettori unitari, ortogonali due a due.

D'altra parte, tenendo conto anche delle (12), si ha successivamente

$$(14) \quad \begin{cases} a) & \dot{\mathbf{i}} = \Omega_1 \wedge \mathbf{i} = \Omega_1 \wedge (\mathbf{j} \wedge \mathbf{k}) = \omega \mathbf{j} - q \mathbf{k} \\ b) & \dot{\mathbf{j}} = \Omega_1 \wedge \mathbf{j} = \Omega_1 \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{i}) = p \mathbf{k} - \omega \mathbf{i} \\ c) & \dot{\mathbf{k}} = \Omega_1 \wedge \mathbf{k} = \Omega_1 \wedge (\mathbf{i} \wedge \mathbf{j}) = q \mathbf{i} - p \mathbf{j}. \end{cases}$$

Operando ora sulla (13) con $\mathbf{i} \times$, $\mathbf{j} \times$, $\mathbf{k} \times$ e tenendo conto delle (14), si ricavano le equazioni cartesiane del moto

$$(15) \quad \begin{cases} a) & A \dot{p} + q(Cr - A\omega) = \mathbf{M}_r \times \mathbf{i} + \mathbf{M}_a \times \mathbf{i} \\ b) & A \dot{q} - p(Cr - A\omega) = \mathbf{M}_r \times \mathbf{j} + \mathbf{M}_a \times \mathbf{j} \\ c) & C \dot{r} = \mathbf{M}_r \times \mathbf{k} + \mathbf{M}_a \times \mathbf{k}. \end{cases}$$

4. - Ipotesi particolari sulle resistenze del mezzo e sulle forze di attrito.

a). Se (P_r, \mathbf{R}) è la risultante di tutte le resistenze del mezzo e degli attriti longitudinali, si suole ammettere, per i proietti di rotazione oblunghi, che il punto P_r (*centro delle resistenze*) appartenga all'asse $G\mathbf{k}$ di simmetria del proietto e che il piano $G(\mathbf{k}, \mathbf{R})$ (*piano di resistenza*) coincida col piano $G(\mathbf{t}, \mathbf{k})$.

In tali ipotesi, ponendo $l = \text{mod}(P_r - G)$ e tenendo presente che \mathbf{i} è parallelo al vettore $\mathbf{t} \wedge \mathbf{k}$, si ha

$$(16) \quad \mathbf{M}_r = l \mathbf{k} \wedge \mathbf{R}$$

$$(17) \quad \mathbf{M}_r \times \mathbf{i} = -l \mathbf{R} \times \mathbf{j}, \quad \mathbf{M}_r \times \mathbf{j} = l \mathbf{R} \times \mathbf{i} = 0, \quad \mathbf{M}_r \times \mathbf{k} = 0$$

cioè « il momento \mathbf{M}_r delle resistenze risulta parallelo all'asse $G\mathbf{i}$, cioè normale al piano $G(\mathbf{t}, \mathbf{k})$ di resistenza ». Quindi si può scrivere

$$(18) \quad \mathbf{M}_r \times \mathbf{i} = \text{mod } \mathbf{M}_r = l \text{ mod } \mathbf{R} \text{ sen } (\mathbf{k}, \mathbf{R}).$$

b). Per il momento \mathbf{M}_a degli attriti laterali si ammettono ipotesi tali per cui \mathbf{M}_a risulti *complanare* con i vettori \mathbf{t} e \mathbf{k} e quindi perpendicolare ai vettori \mathbf{i} ed \mathbf{M}_r . D'altra parte, essendo anche \mathbf{j} *complanare* con \mathbf{t} e \mathbf{k} , si può esprimere \mathbf{M}_a in funzione lineare di \mathbf{j} e di \mathbf{k} e scrivere

$$\mathbf{M}_a = \mathbf{M}_a \times \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + \mathbf{M}_a \times \mathbf{k} \cdot \mathbf{k},$$

ossia, ponendo con ESCLANGON

$$(19) \quad \mathbf{M}_a \times \mathbf{j} = v r f(\delta) \delta, \quad \mathbf{M}_a \times \mathbf{k} = -v r g(\delta),$$

dove $f(\delta)$, $g(\delta)$ sono, per i proietti ordinari, funzioni *positive* dell'obliquità δ e v è una *costante fisica positiva* caratterizzante lo stato della *superficie* del proietto,

$$(20) \quad \mathbf{M}_a = v r f(\delta) \delta \cdot \mathbf{j} - v r g(\delta) \cdot \mathbf{k}.$$

Per le (17), (18) e (19) le equazioni (15) del moto assumono, nelle fatte ipotesi, la forma

$$(21) \quad \begin{cases} a) & A\dot{p} + q(Cr - A\omega) = l \text{ mod } \mathbf{R} \text{ sen } (\mathbf{k}, \mathbf{R}) \\ b) & A\dot{q} - p(Cr - A\omega) = vrf(\delta)\delta \\ c) & C\dot{r} = -vrg(\delta). \end{cases}$$

La (21 c) mostra che « per effetto dell'attrito laterale, la velocità di rotazione del proietto, attorno al proprio asse di simmetria, decresce col crescere del tempo ».

5. - Velocità di variazione dell'obliquità δ del proietto.

a). Ricordiamo che l'obliquità δ è l'angolo che l'asse di simmetria $G\mathbf{k}$, volto alla punta del proietto, forma, in ogni istante, con la tangente Gt , alla traiettoria di G , volta nel senso degli archi crescenti. Quindi δ varia col tempo sia perché varia $G\mathbf{k}$ sotto l'azione dell'impulso iniziale e dei momenti perturbatori, sia perché Gt cambia continuamente di direzione per l'incurvarsi della traiettoria di G .

b). Da ciò segue che, per studiare le variazioni di δ , conviene ricercare anzitutto le velocità, rispetto a G , degli assi $G\mathbf{k}$ e Gt . La velocità $\dot{\mathbf{k}}$ di $G\mathbf{k}$ è data senz'altro dalla (14 c). La velocità \dot{t} di Gt dipende dell'accelerazione g di gravità e dalle accelerazioni non tangenziali, dovute alle resistenze ed agli attriti, il cui vettore risultante indichiamo con \mathbf{R} . Allora, se $G\mathbf{u}$ ($u^2=1$) è l'asse verticale rivolto allo zenit di G , l'accelerazione \ddot{G} del baricentro sarà data da

$$(22) \quad \ddot{G} = \mathbf{R} - g\mathbf{u}.$$

Ora il vettore accelerazione, dovendo per proprietà note essere parallelo al piano osculatore in G alla traiettoria del baricentro, può immaginarsi decomposto, in ogni istante, secondo la tangente Gt e secondo la normale principale $G\mathbf{n}$, essendo \mathbf{n} vettore unitario parallelo, in ogni istante, alla normale principale e rivolto al corrispondente centro di curvatura della traiettoria di G .

Il componente tangenziale di \ddot{G} ha l'effetto di spostare G lungo la sua traiettoria, mentre il componente normale fa rotare Gt attorno a G .

Tale componente è dato da

$$(23) \quad \ddot{G} \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{R} - g\mathbf{u}) \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}.$$

D'altra parte, posto $v = \text{mod } \dot{G}$, si ha $\dot{G} = vt$ e quindi $\ddot{G} = \dot{v}t + v\dot{t}$, ossia, per la nota formola di FRENET $\dot{t} = (v/\rho)\mathbf{n}$, dove ρ è il raggio di curvatura della traiettoria di G , in un suo punto generico,

$$\ddot{G} = \dot{v}t + (v^2/\rho)\mathbf{n}.$$

Essendo $\mathbf{t} \times \mathbf{n} = 0$, $\mathbf{n} \times \mathbf{n} = 1$, da qui si deduce

$$(24) \quad \ddot{G} \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = v\dot{\mathbf{t}}$$

e dal confronto di (24) con (23) si ricava l'espressione della velocità $\dot{\mathbf{t}}$ di $G\mathbf{t}$, cioè

$$(25) \quad \dot{\mathbf{t}} = (1/v)(\mathbf{R} - g\mathbf{u}) \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}.$$

c). Dopo ciò la ricerca della *velocità di variazione $\dot{\delta}$ dell'obliquità δ* si può fare con un procedimento molto semplice. Basta, infatti, derivare rispetto al tempo $\cos \delta = \mathbf{k} \times \mathbf{t}$ e tener conto della (14 e) e della (25). Si ha

$$(26_0) \quad -\sin \delta \cdot \dot{\delta} = q\mathbf{i} \times \mathbf{t} - p\mathbf{j} \times \mathbf{t} + (1/v)(\mathbf{R} - g\mathbf{u}) \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \times \mathbf{k}$$

ossia, poichè $\mathbf{i} \times \mathbf{t} = 0$, $\mathbf{j} \times \mathbf{t} = \sin \delta$, $\mathbf{n} \times \mathbf{k} = \sin \delta$,

$$(26) \quad \dot{\delta} = p - (1/v)(\mathbf{R} - g\mathbf{u}) \times \mathbf{n}.$$

È da rilevare che, non essendovi particolari condizioni restrittive per la validità delle (14 e) e (25), la (26) risulta valida nelle ipotesi più generali ammesse. Inoltre, fissata, come generalmente si fa, nel modo indicato la terna $G(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, si ha $\mathbf{i} \times \mathbf{t} = 0$ per la definizione stessa di \mathbf{i} , e quindi non può figurare nell'espressione di $\dot{\delta}$ la componente q della rotazione Ω , come immediatamente si vede dalla (26₀).

d). Volendo ora esaminare il caso considerato dall'ESCLANGON, poniamo

$$(27) \quad \varkappa = \text{ang}(\mathbf{k}, \mathbf{R})/\delta$$

ed ammettiamo con l'ESCLANGON che, oltre le ipotesi precedentemente indicate, si possa praticamente sostituire $\varkappa\delta$ a $\sin \varkappa\delta$ e che, di fronte a Cr , siano praticamente trascurabili le grandezze $A\omega$, $A\dot{p}$, $A\dot{q}$. Allora dalle (21 a) e (21 b) si ricava

$$(28) \quad q = \frac{\varkappa l \text{ mod } \mathbf{R}}{Cr} \delta = \mu \delta$$

$$(29) \quad p = -\frac{v}{C} f(\delta) \delta = -\frac{\lambda}{C} \delta$$

avendo posto

$$(30) \quad \mu = \frac{\varkappa l \text{ mod } \mathbf{R}}{Cr}, \quad \lambda = v f(\delta).$$

È precisamente questa la grandezza μ che, per la (28) e per l'osservazione precedente, non può figurare nell'espressione di $\dot{\delta}$ che ora assume la forma

$$(31) \quad \dot{\delta} = -(\lambda/C)\delta - (1/v)(\mathbf{R} - g\mathbf{u}) \times \mathbf{n}.$$

Inoltre, potendosi facilmente dimostrare che, nelle fatte ipotesi, si ha

$$\mathbf{R} \times \mathbf{n} = \text{mod } \mathbf{R}(\varkappa - 1)\delta, \quad \mathbf{u} \times \mathbf{n} = -\cos \tau \cos \psi$$

dove τ è l'angolo che la tangente Gt forma con l'orizzonte (*inclinazione*) e ψ è l'angolo dietro, di spigolo Gt , che il piano verticale $G(\mathbf{u}, t)$ forma con il piano $G(t, \mathbf{n})$, la (31) può scriversi

$$(32) \quad \dot{\delta} = K\delta - (g/v) \cos \tau \cos \psi,$$

avendo posto

$$(33) \quad K = - \left[\frac{\text{mod } \mathbf{R}}{v} (\alpha - 1) + \frac{\lambda}{C} \right].$$

e). Nelle stesse ipotesi, ma con procedimento diverso, ESCLANGON ha trovato

$$(34) \quad \dot{\delta}_1 = K\delta_1 - \mu\delta_2, \quad \dot{\delta}_2 = K\delta_2 + \mu\delta_1 + (g/v) \cos \tau$$

dove

$$(35) \quad \delta_1 = \delta \sin \psi, \quad \delta_2 = -\delta \cos \psi$$

e le lettere K , μ , δ , ψ , τ hanno lo stesso significato precedentemente indicato.

Nelle (34) figura la grandezza μ , ma se da queste si ricava la velocità risultante $\dot{\delta}$, si vede che μ si elimina e si riottiene per altra via la (32) da me stabilita.

Infatti, derivando rispetto al tempo le (35) e confrontando con le (34) le espressioni di $\dot{\delta}_1$, $\dot{\delta}_2$ così ottenute, si ha

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} a) \quad \dot{\delta} \sin \psi + \delta \cos \psi \cdot \dot{\psi} = K\delta_1 - \mu\delta_2 \\ b) \quad -\dot{\delta} \cos \psi + \delta \sin \psi \cdot \dot{\psi} = K\delta_2 + \mu\delta_1 + (g/v) \cos \tau. \end{array} \right.$$

Sottraendo la (36 b) moltiplicata per $\cos \psi$ dalla (36 a) moltiplicata per $\sin \psi$, si ricava

$$(37) \quad \dot{\delta} = K(\delta_1 \sin \psi - \delta_2 \cos \psi) - \mu(\delta_1 \cos \psi + \delta_2 \sin \psi) - (g/v) \cos \tau \cos \psi.$$

Poichè dalla (35) si può dedurre

$$\delta_1 \sin \psi - \delta_2 \cos \psi = \delta; \quad \delta_1 \cos \psi + \delta_2 \sin \psi = 0,$$

μ si elimina e la (37) si riduce alla (32).

c. d. d.

Si ha dunque una ulteriore conferma che la grandezza μ , pur potendo avere un valore rappresentativo, *non interviene nell'effettiva velocità di variazione dell'obliquità.*