

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

RENATO EINAUDI

Sulle vibrazioni elastiche di una lamina curva

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 4, n° 3
(1935), p. 231-240

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1935_2_4_3_231_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SULLE VIBRAZIONI ELASTICHE DI UNA LAMINA CURVA

di RENATO EINAUDI (Roma).

Le equazioni differenziali cui soddisfa lo spostamento elastico della fibra media di una lamina curva sono state stabilite per la prima volta da ARON ⁽¹⁾ con un procedimento estremamente complicato che richiede delicate considerazioni sulle proprietà geometriche della lamina.

Siano σ e σ' le due superfici parallele che limitano la lamina, P un punto della superficie σ , \vec{n} la normale in P alla superficie σ , rivolta verso l'interno della lamina, z la distanza di un punto di \vec{n} da P .

Notevole importanza hanno gli stati vibratorii della lamina nei quali lo spostamento elastico e le tensioni elastiche sono *sensibilmente* indipendenti da z . In questi stati lo spostamento elastico locale differisce poco dallo spostamento medio rispetto a z , e le condizioni di sforzo nullo, valide su σ e σ' , sono sensibilmente verificate in tutta la lamina: con una locuzione semplice e chiara potremo quindi chiamare questi stati « stati di tensione tangenziale ».

In questa nota ci proponiamo di far vedere come negli stati di tensione tangenziale si possa evitare il complicato procedimento di ARON e giungere in modo molto semplice alle equazioni differenziali cui soddisfano le componenti dello spostamento elastico medio.

Sulla superficie σ prendiamo come linee di riferimento, le linee di curvatura $\alpha = \text{cost.}$ e $\beta = \text{cost.}$; e sia:

$$(1) \quad ds^2 = E d\alpha^2 + G d\beta^2$$

il quadrato dell'elemento lineare su σ ; siano inoltre R_1 e R_2 i raggi principali di curvatura, presi col segno + o -, secondo che i centri di curvatura si trovano, rispetto alla superficie σ , nella direzione della normale \vec{n} o nella direzione opposta. Il sistema di riferimento che ha come superfici coordinate le rigate $\alpha = \text{cost.}$ e $\beta = \text{cost.}$, e le superfici $z = \text{cost.}$, parallele alla σ , sarà dunque un sistema triplo

⁽¹⁾ J. f. Math. (Crelle), Bd. 78 (1874).

ortogonale, e il quadrato dell'elemento lineare nello spazio, riferito a questo sistema, sarà dato dalla formula:

$$(2) \quad ds^2 = h_1^2 d\alpha^2 + h_2^2 d\beta^2 + dz^2$$

ove

$$(2') \quad h_1^2 = E \left(1 - \frac{z}{R_1}\right)^2, \quad h_2^2 = G \left(1 - \frac{z}{R_2}\right)^2.$$

Ciò posto, indichiamo con ε lo spessore della lamina, e supponiamo che ε sia minore di R_1 e R_2 : condizione necessaria affinchè esista una corrispondenza biunivoca tra i punti della lamina e le coordinate α, β, z . Indichiamo inoltre con u, v, w rispettivamente le componenti dello spostamento elastico locale secondo le linee α, β, z : le componenti U, V, W dello spostamento elastico medio saranno fornite allora dalle relazioni:

$$U = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon u dz, \quad V = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon v dz, \quad W = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon w dz.$$

Per determinare le equazioni differenziali alle quali soddisfano le funzioni U, V, W , applicheremo il principio di HAMILTON. A tal uopo calcoliamo l'energia elastica della lamina.

Indichiamo con $e_\alpha, e_\beta, e_{\alpha\beta}, e_z, e_{\alpha z}, e_{\beta z}$ gli allungamenti unitari e gli scorrimenti, definiti dalle relazioni:

$$(3) \quad \begin{cases} e_\alpha = \frac{1}{h_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \beta} v + \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial z} w; & e_\beta = \frac{1}{h_2} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \alpha} u + \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial z} w \\ e_{\alpha\beta} = \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{v}{h_2} \right) + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{u}{h_1} \right); & e_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ e_{\alpha z} = h_1 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u}{h_1} \right) + \frac{1}{h_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha}; & e_{\beta z} = h_2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{h_2} \right) + \frac{1}{h_2} \frac{\partial w}{\partial \beta} \end{cases}$$

e indichiamo con λ e μ i parametri elastici di LAMÈ, che supporremo funzioni arbitrarie del posto. L'energia elastica del nostro sistema sarà allora:

$$(4) \quad \Omega = \frac{1}{2} \int_V \{ (\lambda + 2\mu)(e_\alpha + e_\beta + e_z)^2 + \mu(e_{\alpha\beta}^2 + e_{\alpha z}^2 + e_{\beta z}^2 - 4e_\alpha e_\beta - 4e_\alpha e_z - 4e_\beta e_z) \} dV.$$

Trasformiamo ora l'espressione dell'energia elastica, tenendo conto dell'ipotesi che in tutta la lamina siano verificate le condizioni di sforzo nullo valide sulle superfici che la limitano. A tal uopo, indichiamo con $\widehat{\alpha z}, \widehat{\beta z}, \widehat{zz}$ le componenti secondo le linee α, β, z della forza elastica che agisce sull'unità di area disposta perpendicolarmente alla linea z ; esse sono legate agli allungamenti unitari e agli scorrimenti dalle relazioni:

$$(5) \quad \widehat{\alpha z} = \mu e_{\alpha z}, \quad \widehat{\beta z} = \mu e_{\beta z}, \quad \widehat{zz} = (\lambda + 2\mu)e_z + \lambda(e_\alpha + e_\beta).$$

L'ipotesi che le condizioni di sforzo nullo siano verificate non solo sulle superfici σ e σ' , ma in tutta la lamina, implica che siano verificate le relazioni:

$$\widehat{\alpha z} = \widehat{\beta z} = \widehat{z z} = 0$$

che, tenendo conto delle (5), si possono scrivere in forma equivalente:

$$(6) \quad \begin{cases} e_{\alpha z} = 0, \\ e_{\beta z} = 0, \\ e_z = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} (e_\alpha + e_\beta). \end{cases}$$

Trasformiamo pertanto la (4), tenendo conto delle relazioni (6); con facili calcoli si trova:

$$(7) \quad \Omega = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} (e_\alpha^2 + e_\beta^2) + \frac{4\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} e_\alpha e_\beta + \mu e_{\alpha\beta}^2 \right\} dV.$$

Ciò posto, determiniamo la funzione Lagrangiana L del nostro sistema, uguale alla differenza tra l'energia cinetica e l'energia elastica. Dalla (7) si ricava:

$$(8) \quad L = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] - \left[\frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} (e_\alpha^2 + e_\beta^2) + \frac{4\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} e_\alpha e_\beta + \mu e_{\alpha\beta}^2 \right] \right\} dV$$

ove ρ indica la densità, che supporremo funzione arbitraria del posto.

Dalla formula (8) si vede, tenendo conto delle espressioni di e_α , e_β , $e_{\alpha\beta}$ fornite dalle (3), che la funzione Lagrangiana non contiene derivate dello spostamento elastico rispetto alla variabile z ; d'altra parte abbiamo supposto che i valori dello spostamento elastico locale differiscano di poco dai valori dello spostamento elastico medio: ne segue che nell'espressione della funzione Lagrangiana potremo sostituire le funzioni u , v , w coi loro valori medi rispetto a z e cioè colle funzioni U , V , W . Operata tale sostituzione ed effettuata l'integrazione rispetto a z , la funzione Lagrangiana si può scrivere nella forma:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} L = \int_\sigma & \left\{ \frac{P}{2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right] - \left[\frac{A_1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{A_2}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial \beta} \right)^2 + \right. \right. \\ & + \frac{A_3}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{A_4}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial \beta} \right)^2 + A_0 \frac{\partial U}{\partial \alpha} \frac{\partial V}{\partial \beta} + M \frac{\partial U}{\partial \beta} \frac{\partial V}{\partial \alpha} + (B_1 U + B_2 V + B_3 W) \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \\ & + (B_4 U + B_5 V) \frac{\partial U}{\partial \beta} + (B_6 U + B_7 V) \frac{\partial V}{\partial \alpha} + (B_8 U + B_9 V + B_{10} W) \frac{\partial V}{\partial \beta} + \\ & \left. \left. + \frac{C_1}{2} U^2 + \frac{C_2}{2} V^2 + \frac{C_3}{2} W^2 + C_4 UV + C_5 UW + C_6 VW \right\} dad\beta, \right. \end{aligned} \right.$$

ove P , M , A_i , B_i , C_i sono definiti dalle relazioni

$$\begin{aligned}
 P &= \int_0^\varepsilon \rho h_1 h_2 dz; & M &= \int_0^\varepsilon \mu dz; & A_0 &= 2 \int_0^\varepsilon \frac{\lambda \mu}{\lambda + 2\mu} dz; \\
 A_1 &= \int_0^\varepsilon \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \frac{h_2}{h_1} dz; & A_2 &= \int_0^\varepsilon \mu \frac{h_1}{h_2} dz; \\
 A_3 &= \int_0^\varepsilon \mu \frac{h_2}{h_1} dz; & A_4 &= \int_0^\varepsilon \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \frac{h_1}{h_2} dz; \\
 B_1 &= \int_0^\varepsilon \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \alpha} dz; & B_2 &= \int_0^\varepsilon \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \beta} dz; \\
 B_3 &= \int_0^\varepsilon \left\{ \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial z} + \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial h_2}{\partial z} \right\} dz; & B_4 &= - \int_0^\varepsilon \frac{\mu}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \beta} dz; \\
 B_5 &= - \int_0^\varepsilon \frac{\mu}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \alpha} dz; & B_6 &= - \int_0^\varepsilon \frac{\mu}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \beta} dz; & B_7 &= - \int_0^\varepsilon \frac{\mu}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \alpha} dz; \\
 B_8 &= \int_0^\varepsilon \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \alpha} dz; & B_9 &= \int_0^\varepsilon \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \beta} dz; \\
 (10) \quad B_{10} &= \int_0^\varepsilon \left\{ \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial z} + \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial h_1}{\partial z} \right\} dz; \\
 C_1 &= \int_0^\varepsilon \frac{\mu}{h_1 h_2} \left\{ \frac{4(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial h_2}{\partial \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial h_1}{\partial \beta} \right)^2 \right\} dz; \\
 C_2 &= \int_0^\varepsilon \frac{\mu}{h_1 h_2} \left\{ \frac{4(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial h_1}{\partial \beta} \right)^2 + \left(\frac{\partial h_2}{\partial \alpha} \right)^2 \right\} dz; \\
 C_3 &= \int_0^\varepsilon \left\{ \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \left[\frac{h_2}{h_1} \left(\frac{\partial h_1}{\partial z} \right)^2 + \frac{h_1}{h_2} \left(\frac{\partial h_2}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{4\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial h_1}{\partial z} \frac{\partial h_2}{\partial z} \right\} dz; \\
 C_4 &= \int_0^\varepsilon \frac{3\lambda\mu + 2\mu^2}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \beta} \frac{\partial h_2}{\partial \alpha} dz; \\
 C_5 &= \int_0^\varepsilon \frac{\partial h_2}{\partial \alpha} \left\{ \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial z} + \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial z} \right\} dz; \\
 C_6 &= \int_0^\varepsilon \frac{\partial h_1}{\partial \beta} \left\{ \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial z} + \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial z} \right\} dz.
 \end{aligned}$$

Siamo ora in grado di applicare il principio di HAMILTON; esso dice che deve essere verificata la relazione:

$$(11) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0$$

per valori arbitrari di $\delta U, \delta V, \delta W$, nulli agli estremi dell'intervallo $(t_0 \text{---} t_1)$ e compatibili coi vincoli. Ma i vincoli — che nel caso nostro sono le condizioni di sforzo nullo che noi abbiamo supposto verificate non solo sulle superfici σ e σ' , ma in tutta la lamina — vincolano gli spostamenti virtuali locali $\delta u, \delta v, \delta w$, ma non implicano alcuna limitazione agli spostamenti virtuali medi $\delta U, \delta V, \delta W$. Applicando la (11) si giunge pertanto al seguente sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} P \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(A_1 \frac{\partial U}{\partial \alpha} + A_0 \frac{\partial V}{\partial \beta} + B_2 V + B_3 W \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(A_2 \frac{\partial U}{\partial \beta} + M \frac{\partial V}{\partial \alpha} + B_5 V \right) + \\ \quad + B_6 \frac{\partial V}{\partial \alpha} + B_3 \frac{\partial V}{\partial \beta} + \left(C_1 - \frac{\partial B_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial B_4}{\partial \beta} \right) U + C_4 V + C_5 W = 0 \\ P \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(A_3 \frac{\partial V}{\partial \alpha} + M \frac{\partial U}{\partial \beta} + B_6 U \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(A_4 \frac{\partial V}{\partial \beta} + A_0 \frac{\partial U}{\partial \alpha} + B_3 U + B_{10} W \right) + \\ \quad + B_5 \frac{\partial U}{\partial \beta} + B_2 \frac{\partial U}{\partial \alpha} + \left(C_2 - \frac{\partial B_7}{\partial \alpha} - \frac{\partial B_9}{\partial \beta} \right) V + C_4 U + C_6 W = 0 \\ P \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + B_3 \frac{\partial U}{\partial \alpha} + B_{10} \frac{\partial V}{\partial \beta} + C_5 U + C_6 V + C_3 W = 0. \end{array} \right.$$

Le equazioni (12) sono le equazioni fondamentali che regolano le vibrazioni di una lamina curva negli stati di tensione tangenziale.

Nel caso di una lamina piana le equazioni (12) diventano:

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{3\lambda\mu + 2\mu^2}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \\ \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{3\lambda\mu + 2\mu^2}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \mu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0. \end{array} \right.$$

Le equazioni (13) coincidono infatti colle ben note equazioni che regolano le cosiddette « vibrazioni longitudinali » di una piastra piana.

È interessante osservare che le due prime equazioni (13) ammettono soluzioni corrispondenti a due tipi di onde piane: e cioè onde in cui lo spostamento elastico medio è ortogonale alla direzione di propagazione (onde trasversali), e onde in cui lo spostamento elastico medio è parallelo alla direzione di propagazione (onde longitudinali). Le equazioni (13) ammettono infatti la soluzione:

$$(14) \quad U = 0, \quad V = \varphi \left(x - \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} t \right)$$

che corrisponde a onde trasversali e la soluzione:

$$(14') \quad \begin{cases} U = \psi \left(x - \sqrt{\frac{4\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)\varrho}} t \right), \\ V = 0 \end{cases}$$

che corrisponde a onde longitudinali; φ e ψ essendo due funzioni arbitrarie. Dalle formule (14) e (14') si deduce che le onde piane trasversali e longitudinali si propagano rispettivamente colle velocità u_1 e u_2 definite dalle relazioni:

$$(15) \quad \begin{cases} u_1 = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}, \\ u_2 = \sqrt{\frac{4\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)\varrho}}. \end{cases}$$

Studiamo ora l'onda di discontinuità collegata alla propagazione delle vibrazioni elastiche che sono rette dalle equazioni (12), limitandoci però al caso che i parametri elastici di LAMÈ e la densità siano costanti.

L'onda di discontinuità è una linea della superficie σ , variabile col tempo, che separa la regione della superficie σ in cui lo spostamento elastico medio è nullo dalla regione in cui lo spostamento elastico medio è differente da zero. Su di essa si annullano lo spostamento elastico medio e le sue derivate prime: essa è quindi una linea caratteristica del sistema di equazioni (12).

L'onda di discontinuità è generalmente una linea di discontinuità per le derivate seconde dello spostamento elastico medio. Sia P un punto di questa linea. Sia \vec{n}_1 la normale in P alla linea, contenuta nel piano tangente a σ e rivolta verso la regione di σ in cui vi è moto ondoso; e sia P_1 un punto di \vec{n}_1 vicinissimo a P . Analogamente sia \vec{n}_2 la normale in P che ha verso opposto a \vec{n}_1 ; e sia P_2 un punto di \vec{n}_2 vicinissimo a P . Il limite, per $P_2 \rightarrow P$, dei valori che le derivate seconde dello spostamento elastico medio assumono nel punto P_2 , è evidentemente nullo. In seguito pertanto, quando parleremo dei valori che le derivate seconde dello spostamento elastico medio assumono in P , intenderemo parlare del limite, per $P_1 \rightarrow P$, dei valori che le derivate seconde dello spostamento elastico medio assumono in P_1 .

Ciò posto, per trovare l'equazione dell'onda di discontinuità, trascriviamo le equazioni (12), limitandoci ai termini contenenti le derivate seconde, che sole ci interessano:

$$(16) \quad \begin{cases} \varrho A_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \frac{A_1}{E} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} - \mu \frac{A_2}{G} \frac{\partial^2 U}{\partial \beta^2} - \frac{3\lambda\mu + 2\mu^2}{\lambda + 2\mu} \frac{\varepsilon}{\sqrt{EG}} \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha \partial \beta} = 0 \\ \varrho A_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \mu \frac{A_1}{E} \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} - \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \frac{A_2}{G} \frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2} - \frac{3\lambda\mu + 2\mu^2}{\lambda + 2\mu} \frac{\varepsilon}{\sqrt{EG}} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha \partial \beta} = 0 \end{cases}$$

$$(16') \quad \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0$$

ove Δ_0 , Δ_1 e Δ_2 sono definiti dalle relazioni:

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta_0 &= \int_0^\varepsilon \left(1 - \frac{z}{R_1}\right) \left(1 - \frac{z}{R_2}\right) dz = \varepsilon \left[1 - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^2}{3R_1R_2}\right] \\ \Delta_1 &= \int_0^\varepsilon \frac{1 - z/R_2}{1 - z/R_1} dz = R_1 \left[\frac{\varepsilon}{R_2} + \left(\frac{R_1}{R_2} - 1\right) \lg \left(1 - \frac{\varepsilon}{R_1}\right)\right] \\ \Delta_2 &= \int_0^\varepsilon \frac{1 - z/R_1}{1 - z/R_2} dz = R_2 \left[\frac{\varepsilon}{R_1} + \left(\frac{R_2}{R_1} - 1\right) \lg \left(1 - \frac{\varepsilon}{R_2}\right)\right]. \end{aligned} \right.$$

Le linee caratteristiche dell'equazione (16'), e cioè le linee di discontinuità delle derivate seconde della componente W dello spostamento elastico medio, sono linee statiche, che non variano col tempo e non rappresentano quindi un moto ondoso. Le onde di discontinuità collegate alla propagazione delle vibrazioni elastiche che abbiamo preso in considerazione, coincideranno quindi colle linee caratteristiche del sistema (16) e cioè colle linee di discontinuità delle derivate seconde dello spostamento elastico medio tangente alla superficie σ (spostamento elastico tangenziale medio).

Sia

$$(18) \quad \xi(\alpha, \beta, t) = \text{cost.}$$

una linea caratteristica del sistema (16). Per determinare l'equazione differenziale alla quale soddisfa la funzione ξ , poniamo:

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega_{11} &= \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \Delta_1 \cdot \frac{1}{E} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \alpha}\right)^2 + \mu \Delta_2 \cdot \frac{1}{G} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \beta}\right)^2 - \rho \Delta_0 \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 \\ \omega_{12} &= \frac{3\lambda\mu + 2\mu^2}{\lambda + 2\mu} \varepsilon \cdot \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \frac{\partial \xi}{\partial \beta} \\ \omega_{22} &= \mu \Delta_1 \cdot \frac{1}{E} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \alpha}\right)^2 + \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \Delta_2 \cdot \frac{1}{G} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \beta}\right)^2 - \rho \Delta_0 \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2. \end{aligned} \right.$$

Dalla teoria delle caratteristiche ⁽²⁾ si sa allora che la funzione ξ deve soddisfare l'equazione:

$$(20) \quad \omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}^2 = 0.$$

Ciò posto, osserviamo che, se i punti (α, β) e $(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta)$ sono punti infinitamente vicini della linea (18), si ha, per ogni valore di t :

$$\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \xi}{\partial \beta} d\beta = 0.$$

Ma $\sqrt{E}d\alpha$ e $\sqrt{G}d\beta$ sono le componenti del vettore che unisce il punto (α, β) col

⁽²⁾ Cfr. LEVI-CIVITA: *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*, § 3, Bologna, Zanichelli, 1931.

punto $(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta)$; dall'uguaglianza precedente si deduce allora che $\frac{1}{\sqrt{E}} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \alpha}$ e $\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \xi}{\partial \beta}$ sono proporzionali ai coseni direttori n_α e n_β della normale alla linea (18); onde potremo scrivere:

$$(21) \quad n_\alpha = \frac{1}{g} \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \xi}{\partial \alpha}, \quad n_\beta = \frac{1}{g} \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \xi}{\partial \beta}$$

ove g è definito dalla relazione:

$$g^2 = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{1}{G} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \beta} \right)^2.$$

Indichiamo ora con γ_1 la linea di discontinuità all'istante t , con γ_2 la linea di discontinuità all'istante $t + dt$. Sia P un punto di γ_1 e sia Q il punto in cui la normale in P a γ_1 incontra γ_2 ; siano inoltre α e β le coordinate di P , $\alpha + \overline{d\alpha}$ e $\beta + \overline{d\beta}$ le coordinate di Q . Se indichiamo con dn il segmento \overline{PQ} , sarà:

$$\sqrt{E} \overline{d\alpha} = \pm n_\alpha dn, \quad \sqrt{G} \overline{d\beta} = \pm n_\beta dn$$

ove il segno $+$ o $-$ dipende dall'orientazione del segmento \overline{PQ} . Ora il valore che ξ assume all'istante t nel punto P è uguale al valore che ξ assume all'istante $t + dt$ nel punto Q . Sarà pertanto:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} dt + \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} \overline{d\alpha} + \frac{\partial \xi}{\partial \beta} \overline{d\beta} = 0.$$

Eliminando $\overline{d\alpha}$ e $\overline{d\beta}$ fra le ultime tre relazioni ora scritte, e tenendo conto di (21) si vede che la velocità locale di propagazione dell'onda di discontinuità è data dalla formula:

$$(22) \quad v = \frac{dn}{dt} = \pm \frac{1}{g} \frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

Dalle formule (19), (20), (21) e (22) si deduce che sono possibili due onde di discontinuità che si propagano rispettivamente colle velocità v_1 e v_2 definite dalle relazioni:

$$(23) \quad \begin{cases} v_1^2 = \frac{1}{2\rho\Delta_0} \left\{ \frac{5\mu\lambda + 6\mu^2}{\lambda + 2\mu} [\Delta_1 n_\alpha^2 + \Delta_2 n_\beta^2] - \frac{3\lambda\mu + 2\mu^2}{\lambda + 2\mu} \sqrt{[\Delta_1 n_\alpha^2 - \Delta_2 n_\beta^2]^2 + 4\varepsilon^2 n_\alpha^2 n_\beta^2} \right\} \\ v_2^2 = \frac{1}{2\rho\Delta_0} \left\{ \frac{5\mu\lambda + 6\mu^2}{\lambda + 2\mu} [\Delta_1 n_\alpha^2 + \Delta_2 n_\beta^2] + \frac{3\lambda\mu + 2\mu^2}{\lambda + 2\mu} \sqrt{[\Delta_1 n_\alpha^2 - \Delta_2 n_\beta^2]^2 + 4\varepsilon^2 n_\alpha^2 n_\beta^2} \right\}. \end{cases}$$

Le formule (23) ci danno le velocità locali di propagazione delle due possibili onde di discontinuità in funzione dei coseni direttori della direzione di propagazione, dei raggi principali di curvatura di σ , dello spessore della lamina, dei parametri elastici di LAMÈ e della densità.

Le formule (23) si semplificano notevolmente nel caso che i due raggi principali di σ coincidano, e cioè nel caso che σ sia una sfera. Se indichiamo con v_1^*

e v_2^* le velocità con cui si propagano in tal caso le due possibili onde di discontinuità, si vede che:

$$(24) \quad v_1^{*2} = \frac{\mu}{\rho \Delta}, \quad v_2^{*2} = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{(\lambda + 2\mu)\rho \Delta}$$

ove

$$(24)' \quad \Delta = \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \frac{z}{R}\right)^2 dz = 1 - \frac{\varepsilon}{R} + \frac{\varepsilon^2}{3R^2}$$

se con R indichiamo il raggio della sfera.

Ciò posto, dimostriamo una interessante proprietà di cui godono — nel caso che la superficie σ sia una sfera — le derivate seconde dello spostamento elastico tangenziale medio nei punti di una linea di discontinuità; precisamente dimostriamo che le derivate seconde dello spostamento elastico tangenziale sono perpendicolari alla direzione di propagazione per l'onda che si propaga colla velocità v_1^* , mentre sono parallele alla direzione di propagazione per l'onda che si propaga colla velocità v_2^* .

Per dimostrare questa proprietà, cominciamo col ricordare ⁽³⁾ che, se indichiamo con x_i una qualunque delle variabili α, β, t , valgono, in virtù delle condizioni di compatibilità geometrico-cinematiche, le relazioni:

$$(25) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_k} = \lambda_\alpha \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_k} = \lambda_\beta \frac{\partial \xi}{\partial x_i} \frac{\partial \xi}{\partial x_k}.$$

Dimostrare dunque che le derivate seconde dello spostamento elastico tangenziale medio sono perpendicolari alla direzione di propagazione per l'onda che si propaga colle velocità v_1^* , e parallele alla direzione di propagazione per l'onda che si propaga colla velocità v_2^* , equivale a dimostrare che il vettore Δ , di componenti λ_α e λ_β è perpendicolare alla direzione di propagazione per l'onda che si propaga colla velocità v_1^* e parallelo alla direzione di propagazione per l'onda che si propaga colla velocità v_2^* .

Indichiamo con $\omega_{11}^{(i)}, \omega_{12}^{(i)}, \lambda_\alpha^{(i)}, \lambda_\beta^{(i)}, n_\alpha^{(i)}, n_\beta^{(i)}, g^{(i)}$ le quantità $\omega_{11}, \omega_{12}, \lambda_\alpha, \lambda_\beta, n_\alpha, n_\beta, g$ relative all'onda che si propaga colla velocità v_i^* ($i=1, 2$). Dalle formule (17), (19), (21), (22) e (24) si ricava:

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_{11}^{(1)} = \varepsilon g^{(1)2} \left\{ \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} n_\alpha^{(1)2} + \mu n_\beta^{(1)2} - \mu \right\}; \\ \omega_{12}^{(1)} = \varepsilon g^{(1)2} \frac{3\lambda\mu + 2\mu^2}{\lambda + 2\mu} n_\alpha^{(1)} n_\beta^{(1)}; \\ \omega_{11}^{(2)} = \varepsilon g^{(2)2} \left\{ \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} n_\alpha^{(2)2} + \mu n_\beta^{(2)2} - \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \right\}; \\ \omega_{12}^{(2)} = \varepsilon g^{(2)2} \frac{3\lambda\mu + 2\mu^2}{\lambda + 2\mu} n_\alpha^{(2)} n_\beta^{(2)}. \end{array} \right.$$

⁽³⁾ Cfr. LEVI-CIVITA: *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*, § 7, Bologna, Zanichelli, 1931.

Dalle formole (26) si deduce allora:

$$(27) \quad -n_{\alpha}^{(1)} \omega_{12}^{(1)} + n_{\beta}^{(1)} \omega_{11}^{(1)} = 0; \quad n_{\alpha}^{(2)} \omega_{11}^{(2)} + n_{\beta}^{(2)} \omega_{12}^{(2)} = 0.$$

D'altra parte dalle condizioni di compatibilità dinamiche si deduce:

$$(28) \quad \frac{\lambda_{\alpha}}{\lambda_{\beta}} = -\frac{\omega_{12}}{\omega_{11}}.$$

Dalle relazioni (27) e (28) si ricava finalmente:

$$\lambda_{\alpha}^{(1)} n_{\alpha}^{(1)} + \lambda_{\beta}^{(1)} n_{\beta}^{(1)} = 0, \quad \frac{\lambda_{\alpha}^{(2)}}{n_{\alpha}^{(2)}} = \frac{\lambda_{\beta}^{(2)}}{n_{\beta}^{(2)}}.$$

Dalle relazioni (29) si vede che il vettore \mathcal{A} è perpendicolare alla direzione di propagazione per l'onda che si propaga colla velocità v_1^* , parallelo alla direzione di propagazione per l'onda che si propaga colla velocità v_2^* . Resta così dimostrato il carattere di trasversalità per le onde che si propagano colla velocità v_1^* , e il carattere di longitudinalità per le onde che si propagano colla velocità v_2^* .