ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

WILLEM VAN DER WOUDE

Über die Drehungsgruppe in R_6

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 4, nº 2 (1935), p. 163-174

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1935_2_4_2_163_0>

ÜBER DIE DREHUNGSGRUPPE IN R_6

von WILLEM VAN DER WOUDE (Leiden).

Am Schlusz seiner Verhandlung: *Les groupes réels simples, finis et continus* (Annales Scientifiques de l'École normale supérieure (3), 31 (1914)) gibt E. CARTAN eine Aufzählung bemerkenswerter Beispiele von aequivalenten Gruppen (1). Dabei wird eine dieser Gruppen stets gebildet von den reellen linearen Transformationen, mit Determinante gleich 1, die eine der Formen $\sum_{i=1}^{n} \pm x_i^2$ $(n=4, 5, 6)$ invariant lassen; m. a. W. eine dieser Gruppen ist die Drehungsgruppe im vier-, fünf- und sechsdimensionalen euclidischen oder pseudo-euclidischen Raume.

Es ist hier an erster Stelle meine Absicht diese Aequivalenzen für den Fall $n=6$ nochmals in ganz andrer Weise — CARTAN geht von den infinitesimalen Transformationen, ich gehe von den Gleichungen in endlicher Form aus — abzuleiten, während hier auch der bei CARTAN nicht vorkommender Fall der Signatur $(+++++-)$ berücksichtigt ist. Die Cartanschen Resultate für $n=5$ ergeben sich sogleich hieraus; der Fall $n=4$ ist öfters behandelt.

Ich zeige dazu, dasz man, von der bekannten Abbildung der Geraden eines dreidimensionalen Raumes R_3 auf die Punkte einer quadratischen Varietät in R_5 (F. KLEIN) ausgehend, sofort zu diesen Aequivalenzen geführt wird (§ 5).

Ich meinte aber dasz es angebracht sein könnte, wenn ich einige Eigenschaften dieser Abbildung hier noch einmal wiederhole (§§ 1, 2). Indem ich angebe welche (endliche) Transformationen in den aequivalenten Gruppen korrespondieren, zeigt es sich dann, dasz die Abbildung der einen Gruppe durch die andere stets auf zwei verschiedene Weisen möglich ist, wie auch aus den Automorphismen dieser Gruppe (oder aus den Transformationen der Kleinschen Varietät in sich mit Verwechslung der auf ihr liegenden Ebenenscharen) unmittelbar ersichtlich ist.

§ 1. - Es sei R_3 ein dreidimensionaler projektiver Raum; Punkt- und Ebenenkoordinaten werden respektive mit x_i $(i=1,...., 4)$ und ξ_i bezeichnet. Eine Gerade

(1) Herr Dr. H. FREUDENTHAL war so freundlich mich auf die Arbeit Cartan's hinzuweisen. Auch für einige Bemerkungen danke ich ihn.

durch die Punkte $A(a_i)$ und $B(b_i)$ kann man durch die sechs homogenen Koordinaten $p_{ik}(=a_i b_k - a_k b_i)$ bestimmen; es besteht dabei zwischen diesen Koordinaten die Identität

$$p_{23}p_{14}+p_{31}p_{24}+p_{12}p_{34}=0.$$

Wenn man nun die p_{ik} als Punktkoordinaten in einem fünfdimensionalen projektiven Raume R_5^* auffaszt, so ist jede Gerade des R_3 auf einem Punkte einer in R_5^* liegenden Varietät

$$\Omega^* \equiv p_{23}p_{14}+p_{31}p_{24}+p_{12}p_{34}=0 \tag{1}$$

abgebildet.

Umgekehrt ist jeder Punkt von Ω^* das Bild einer Geraden des R_3 (Abbildung von F. KLEIN).

Auf Ω^* liegen zwei Ebensysteme. Das erste System wird durch die folgenden Gleichungen dargestellt

$$\left\{\begin{aligned} -x_3p_{24}+x_2p_{34}+x_4p_{23}&=0,\\ x_3p_{14}-x_1p_{34}+x_4p_{31}&=0,\\ -x_2p_{14}+x_1p_{24}+x_4p_{12}&=0,\\ x_1p_{23}+x_2p_{31}+x_3p_{12}&=0. \end{aligned}\right. \tag{2a}$$

Von diesen vier Gleichungen sind stets, d. h. für jedes Wertsystem der x_i, drei von einander unabhängig; läszt man aber eine Gleichung fort, so bestimmen die drei anderen nicht mehr *jede* Ebene des Systems. Eine Ebene dieses Systems werde ich unten durch $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ angeben; man darf vorläufig die x_i nur als Parameter dieser Ebenen betrachten (unabhängig von den Punktkoordinaten des Ausgangsraumes R_3, worauf sie weiterhin abgebildet werden).

Ebenso kann man das zweite Ebenensystem durch

$$\left\{\begin{aligned} -\xi_3p_{31}+\xi_2p_{12}+\xi_4p_{14}&=0,\\ \xi_3p_{23}-\xi_1p_{12}+\xi_4p_{24}&=0,\\ -\xi_2p_{23}+\xi_1p_{31}+\xi_4p_{34}&=0,\\ \xi_1p_{14}+\xi_2p_{24}+\xi_3p_{34}&=0, \end{aligned}\right. \tag{2b}$$

darstellen.

Eine Ebene dieses Systems werde ich mit $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4\}$ bezeichnen.

Man beweist nun leicht die drei Sätze:

1). Zwei Ebenen eines und desselben Systems haben stets einen Punkt gemein.

2). Eine Ebene $\{x\}$ und eine Ebene $\{\xi\}$ haben keinen Punkt gemein, wenn nicht

$$\sum_{i=1}^{4} \xi_i x_i = 0;$$

in diesem Falle schneiden sie sich in einer Geraden.

3). Durch eine Gerade auf Ω^* geht eine Eben $\{x\}$ und eine Ebene $\{\xi\}$.

§ 2. - Man kann den Gleichungen ($2a$) eine ganz andere Deutung geben. Wenn man die x_i als Punktkoordinaten und die p_{ik} als Geradenkoordinaten im Ausgangsraume R_3 auffaszt, dann drücken sie die Bedingungen aus, dasz eine Gerade (p_{ik}) durch einen Punkt (x_i) geht. Mit den Punkten einer Ebene auf Ω^* korrespondieren bei der Kleinschen Abbildung dann in R_3 die Geraden eines Bündels (x). Die Abbildung der Geraden in R_3 durch die Punkte der Varietät Ω^* in R_5^* induziert also die Abbildung der Punkte (x) in R_3 durch die Ebenen $\{x\}$ des ersten Systems und ebenso die Abbildung der Ebenen (ξ) in R_3 durch die Ebenen $\{\xi\}$ des zweiten Systems auf Ω^* (ausführlicher gesagt: mit jeder Geraden in einer bestimmten Ebene (ξ) in R_3 korrespondiert ein Punkt einer bestimmten Ebene $\{\xi\}$ auf Ω^*).

Die drei vorhin gegebenen Sätze kann man also als Übersetzungen der folgenden Aussagen auffassen:

1). Zwei Punkte bestimmen eine Verbindungsgerade, zwei Ebenen eine Schnittgerade.

2). Eine Ebene und ein Geradenbündel haben keine Gerade gemein, es sei denn dasz der Mittelpunkt des Bündels in der Ebene liegt; dann aber haben sie einen Strahlenbüschel gemein.

3). Ein Strahlenbüschel hat einen Mittelpunkt und liegt in einer Ebene.

Man kann ebensogut die Punkte des R_3 auf die Ebenen des Systems ($2b$) abbilden. Ich deute dazu auf einen Augenblick die Punktkoordinaten in R_5^* mit p_{ik}^* statt p_{ik} an, ebenso die koordinaten der Ebenen beider Systeme auf Ω^* mit x_i^* und ξ_i^*; die ungekreuzten p_{ik}, x_i, ξ_i mögen für die Geraden-, Punkt- und Ebenenkoordinaten in R_3 reserviert bleiben. Die vorgehende Abbildung wird dann durch die Gleichungen

$$p_{ik}^* = p_{ik}$$

gegeben; sie induziert die weiteren Abbildungen, die durch

$$x_i^* = x_i, \qquad \xi_i^* = \xi_i$$

charakterisiert sind.

Man bekommt nun die zweite Abbildung durch

$$p_{23}^* = p_{14}, \qquad p_{24}^* = p_{31}, \qquad p_{31}^* = p_{24}, \qquad \text{u. s. w.;}$$

es folgen dann die weiteren Abbildungsgleichungen

$$x_i^* = \xi_i, \qquad \xi_i^* = x_i,$$

§ 3. - Eine Drehung in R_6 um den Ursprung des Koordinatensystems ist eine orthogonale Transformation, d. h. eine Transformation

$$y_i' = \sum_{k=1}^{6} \gamma_{ik} y_k \tag{3}$$

welche die Form $\sum_{i=1}^{6} y_i^2$ invariant läszt, wenn sie noch den folgenden Forderungen genügt: alle Koeffizienten γ_{ik} sind reell, $|\gamma_{ik}| = +1$.

Statt der Drehungen in R_6 nehme ich im folgenden die mit ihnen nahverwandte Bewegungen im elliptischen Raume R_5^* als Ausgangspunkt.

Ich betrachte dazu die y_i als homogene Koordinaten in einem fünfdimensionalen projektiven Raume R_5^* (z. B. dem uneigentlichen linearen Raume des R_6) in dem eine quadratische Varietät

$$\Omega^* \equiv \sum_{i=1}^{6} y_i^2 = 0 \tag{4}$$

gegeben ist.

Eine (elliptische) Bewegung in diesem Raume ist jede projektive Transformation,

$$\varrho y_i' = \sum_{k=1}^{6} \gamma_{ik} y_k \tag{5}$$

welche die Varietät $\Omega^* = 0$ invariant läszt und wobei man, durch Multiplikation aller Koeffizienten mit demselben Faktor erreichen kann, dasz sie alle reell sind und ihre Determinante den Wert $+1$ hat. Am einfachsten ist es, wenn man stets annimmt, dasz die Koeffizienten schon in dieser Weise normiert sind: nimmt man dann $\varrho = \pm 1$, dann geht die elliptische Bewegung in R_5^* in eine sechsdimensionale Drehung über. Also;

Die Gruppe der elliptischen Bewegungen in R_5^* ist homomorph (1, 2) *mit der Drehungsgruppe in R_6.*

§ 4. - Ich führe nun in R_5^* neue Koordinaten ein. Dazu setze ich

$$\left.\begin{aligned} y_1 + iy_4 &= p_1 \\ y_1 - iy_4 &= \bar{p}_1 \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} y_2 + iy_5 &= p_2 \\ y_2 - iy_5 &= \bar{p}_2 \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} y_3 + iy_6 &= p_3 \\ y_3 - iy_6 &= \bar{p}_3 \end{aligned}\right\}.$$

(Ich schreibe hier $p_1, p_2, p_3, \bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$, statt wie in § 1 $p_{23}, p_{31}, p_{12}, p_{14}, p_{24}, p_{34}$).

Die Gleichung (4) geht über in

$$\Omega^* \equiv \sum_{k=1}^{3} p_k \bar{p}_k = 0, \tag{6}$$

die Transformationsgleichungen (5) gehen über in

$$\begin{aligned} \varrho p_i' &= \sum_{k=1}^{3} \delta_{ik} p_k + \sum_{k=1}^{3} \delta_{i\bar{k}} \bar{p}_k \\ \varrho \bar{p}_i' &= \sum \delta_{\bar{i}k} p_k + \sum \delta_{\bar{i}\bar{k}} \bar{p}_k. \end{aligned} \tag{7}$$

Diese Transformationen lassen (6) invariant; wenn man die Koeffizienten γ_{ik} zuerst normiert hat, gilt von den Koeffizienten δ, dasz δ_{ik} und $\delta_{\bar{i}\bar{k}}$, und ebenso $\delta_{\bar{i}k}$ und $\delta_{i\bar{k}}$ konjugiert-komplexe Zahlen sind (sonst hat man dazu alle Koeffizienten mit einem Faktor zu multiplizieren); die Determinante $|\delta|$ hat den Wert $+1$. Am einfachsten ist es, wieder stets anzunehmen, dasz man für die Normierung der der Koeffizienten δ schon gesorgt hat.

Die Gleichungen der Ebenensysteme schreibe ich noch einmal auf

$$(8a)\quad \begin{cases} -x_3\bar{p}_2+x_2\bar{p}_3+x_4p_1=0,\\ x_3\bar{p}_1-x_1\bar{p}_3+x_4p_2=0,\\ -x_2\bar{p}_1+x_1\bar{p}_2+x_4p_3=0,\\ x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3=0, \end{cases} \qquad (8b)\quad \begin{cases} -\xi_3p_2+\xi_2p_3+\xi_4\bar{p}_1=0,\\ \xi_3p_1-\xi_1p_3+\xi_4\bar{p}_2=0,\\ -\xi_2p_1+\xi_1p_2+\xi_4\bar{p}_3=0,\\ \xi_1\bar{p}_1+\xi_2\bar{p}_2+\xi_3\bar{p}_3=0. \end{cases}$$

Es liegt dann auf der Hand neben R_5^* einen projektiven Raum R_3 einzuführen und auf der in den §§ 1, 2 angegebenen Weise die Punkte von Ω^* als die Bilder der Geraden in R_3 zu betrachten; mit den Punkten (x) von R_3 mögen die Ebenen $\{x\}$ von (8a), mit den Ebenen (ξ) von R_3 die Ebenen $\{\xi\}$ von (8b) korrespondieren.

Durch eine Kollineation

$$(9)\qquad x_i'=\sum_{k=1}^{4} a_{ik}x_k$$

in R_3 wird dann in R_5^* eine projektive Transformation der p_i und $\bar{p}_i$ induziert ($p_1=a_2b_3-a_3b_2,\ \bar{p}_1=a_1b_4-a_4b_1$; u. s. w.), die (6) invariant läszt. Sie braucht aber nicht eine elliptische Bewegung in R_5^* zu sein, weil die Koeffizienten in der Transformation der p_i und $\bar{p}_i$ nicht den genannten Bedingungen genügen. Umgekehrt ist es bekannt, dasz jede elliptische Bewegung in R_5^* eine Kollineation (9) in R_3 erzeugt ([2]). Es entsteht so die Frage, welche Untergruppe der Kollineationen in R_3 mit der Gruppe der elliptischen Bewegungen in $R_5{}^*$ isomorph ist.

§ 5. - Zur Beantwortung dieser Frage werde ich, wie es auf der Hand liegt, als konjugiert-komplexe Punkte in R_6 oder $R_5{}^*$ ein Punktepaar bezeichnen, dessen y-Koordinaten konjugiert-komplexe Zahlen sind. Welche lineare Räumepaare als konjugiert-komplexe bezeichnet werden sollen, bedarf dann keiner weiteren Erörterung. Komplex-konjugierte Zahlen deute ich durch a und $\bar{a}$, b und $\bar{b}$ an.

Ein Blick auf die Gleichungen (8a) und (8b) lehrt dann sogleich:

Eine Ebene $\{x\}$ und eine Ebene $\{\xi\}$ sind dann und nur dann konjugiert-komplex, wenn

$$(10)\qquad \varrho\bar{\xi}_i=x_i \qquad (i=1,\ldots,4).$$

([2]) Man sieht z. B. leicht ein, dasz nicht nur $\Omega^*=0$ invariant bleibt, aber dasz auch die beiden Ebenensysteme auf Ω^* in sich selbst übergehen, sodasz in R_3 eine Transformation

$$(9^*)\qquad x'=f_i(x_1,x_2,x_3,x_4)$$

entsteht, die ein- eindeutig Punkte mit Punkten, Geraden mit Geraden, Ebenen mit Ebenen korrespondieren läszt. Diese Transformation ist also eine Kollineation (nicht eine Antikollineation, s. (9*)).

Liegt nun eine elliptische Bewegung (7) in R_5^* vor, dann werden, wie wir gesehen haben, auch die Parameter x_i und ξ_i der Ebenensysteme auf Ω^* (oder die Punkt- und Ebenenkoordinaten in R_3) projektiv transformiert und zwar kontragredient zu einander, weil die Beziehung

$$\sum_{i=1}^{4} \xi_i x_i = 0$$

invariant ist (§ 1).

Aber auch die Beziehungen (10) sind invariant; kehrt man zu den Variabeln y zurück, so hat die Transformation ja nur reelle Koeffizienten.

Also ist auch die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{4} x_i \bar{x}_i = 0,$$

wenn man auf $\bar{x}_i$ die zu (9) konjugiert-komplexe Transformation ausübt, invariant.

Die Form $\sum_{i=1}^{4} x_i \bar{x}_i$ wird dabei mit einer positiven Konstante λ multipliziert. Man kann, dadurch dasz man die Matrix $\|a_{ik}\|$ mit $\lambda^{-\frac{1}{2}}$ multipliziert, dafür Sorg tragen, dasz diese Konstante gleich $+1$ ist; dann ist auch $\sum_{i=1}^{4} x_i \bar{x}_i$ invariant und (9) stellt eine unitäre Transformation dar. Man kann aber noch einen Schritt weitergehen und erreichen, dasz $|a_{ik}| = +1$.

Es ist hier wieder am einfachsten anzunehmen, dasz die Matrix $\|a_{ik}\|$ in dieser Weise normiert ist (s. dieser §, Schlusz); sie ist also eine unitäre Matrix mit Determinante gleich $+1$. Die zugehörige Transformation (9) nenne ich weiter eine *unitäre Kollineation.*

Mit einer Drehung in R_6 oder mit einer Bewegung in R_5^* korrespondiert also eine unitäre Kollineation in R_3. Dasz diese Korrespondenz der Kompositionsvorschrift — aus $B_1 \to K_1$ und $B_2 \to K_2$ folgt $B_1 B_2 \to K_1 K_2$ — genügt, ist sofort klar. Weil nun alle die drei Gruppen — die der Drehungen in R_6, die der Bewegungen in R_5^* und die der unitären Kollineationen in R_3 — fünfzehngliedrig sind, sind sie also homomorph (isomorph im Kleinen).

Deute ich noch einmal (gleichwie in § 3) die Punkte und die Ebenen des ersten Systems von Ω^* mit p_i^*, $\bar{p}_i^*$ und x_i^* an, während die Koordinaten der Geraden und Punkte in R_3 durch p_i, $\bar{p}_i$ und x_i angegeben bleiben,

$$(p_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2,\ \bar{p}_1 = a_1 b_4 - a_4 b_1,\ \text{u. s. w.})$$

so ist diese Abbildung durch

$$p_i^* = p_i, \qquad \bar{p}_i^* = \bar{p}_i$$

(und demzufolge $x_i^* = x_i$) dargestellt.

Also: *Die Bewegungsgruppe in R_5^* ist isomorph (auch im Groszen) mit* *der Gruppe der unitären Kollineationen in* R_3; *beide sind mit der Drehungsgruppe in* R_6 ([3]) *homomorph* (1, 2).

Es ist übrigens selbstverständlich, dasz man ganz leicht diesen Satz beweisen kann, ausgehend von einer Kollineation

$$x_i' = \sum_{k=1}^{4} a_{ik} x_k \tag{9}$$

mit unitärer Matrix; auszerdem denken wir uns die Koeffizienten wieder normiert, sodasz $|a_{ik}| = +1$. Die Transformation (9) erzeugt nämlich in R_3 eine projektive Transformation der Geradenkoordinaten, also in R_5^* eine Punkttransformation (7), die Ω^* invariant läszt. Es ist bekannt (und man überzeugt sich leicht davon), dasz die Koeffizienten δ_{ik} und $\delta_{\bar{i}\bar{k}}$, und ebenso $\delta_{\bar{i}k}$ und $\delta_{i\bar{k}}$, komplementäre Matrizen in der Matrix $\| a_{ik} \|$ sind; das bedeutet, weil $\| a_{ik} \|$ unitär ist und ihre determinante den Wert $+1$ hat, dasz δ_{ik} und $\delta_{\bar{i}\bar{k}}$, $\delta_{\bar{i}k}$ und $\delta_{i\bar{k}}$, konjugiert-komplexe Zahlen sind.

Auszerdem hat $|\delta|$ den Wert $+1$; es gilt

$$\delta = |a_{ik}|^3 = +1.$$

Die in R_5^* erzeugte Transformation ist also eine Bewegung (§ 4). Wenn man dann in der gefundenen Transformation (7) ϱ durch $+1$ oder -1 ersetzt, findet man zwei verschiedenen Drehungen in R_6; es bleibt ja, wenn man zu den Koordinaten y zurückkehrt, in R_6 der Kegelraum $\Omega^* = 0$ invariant, die Transformationsdeterminante ist gleich $+1$ (also bleibt auch Ω^* invariant) und die Transformationskoeffizienten sind reell.

Dasz diese Abbildung der unitären Kollineationen in R_3 auf die Bewegungen in R_5^* die Umkehrung der vorigen ist, leuchtet, weil zur Darstellung der Abbildung die nämlichen Gleichungen benützt wurden, wieder sofort ein.

§ 6. - Eine zweite Abbildung erhält man, wenn man (§ 2, Schlusz) die Ebenen (8*a*) auf Ω^* und die Ebenen (ξ) des R_3 auf einander abbildet.

Wenn nun mit einer bestimmten Bewegung in R_5^* bei der ersten Abbildung eine unitäre Kollineation

$$x_i' = \sum_{k=1}^{4} a_{ik} x_k \tag{9}$$

in R_3 korrespondiert, so korrespondiert bei der zweiten Abbildung mit derselben Bewegung die Transformation

$$\xi_i' = \sum_{k=1}^{4} a_{ik} \xi_k .$$

([3]) Selbstverständlich kann man statt der unitären Kollineationen in R_3 die unitären Transformationen im vierdimensionalen Vektorraume wählen; ich habe wegen der «Isomorphie im Groszen» den projektiven Raum R_3 bevorzugt.

Diese Transformation erzeugt, weil x sich transformiert wie $\bar{\xi}$, in R_3 die unitäre Kollineation

$$x_i' = \sum_{k=1}^{4} \bar{a}_{ik} x_k. \tag{9'}$$

Man kann nun fragen, ob diese beiden Abbildungen verschieden sind, d. h. ob durch eine einzige Koordinatentransformation jede Kollineation (9) in die mit ihr korrespondierende (9′) übergeführt werden kann. Dazu würde jedenfalls nötig sein, dasz korrespondierende Transformationen gleiche Normen hätten, d. h. dasz die Norm jeder unitären Kollineation, mit Determinante $+1$, reell wäre. Dasz dies aber nicht der Fall ist, zeigt z. B. die folgende Kollineation:

$$x_1' = x_1, \qquad x_2' = e^{i\frac{\pi}{2}} x_2, \qquad x_3' = e^{i\frac{\pi}{3}} x_3, \qquad x_4' = e^{i\frac{\pi}{6}} x_4.$$

Die beiden Abbildungen sind also nicht aequivalent.

§ 7. - Ich mache hier noch eine kurze Bemerkung über die Transformationen mit reellen Koeffizienten der *ganzen* orthogonalen Gruppe in R_6 (Drehungen und Umlegungen; Determinante gleich $+1$ oder -1).

Durch die Koordinaten p_i und $\bar{p}_i$ einzuführen (§ 4) und diese weiterhin als Geradenkoordinaten im projektiven Raume R_3 zu deuten, sind die Drehungen auf die unitären Kollineationen in R_3 abgebildet. Man darf hier fragen: wo bleiben die Umlegungen?

Es ist klar, dasz auch diese (s. die Transformationen (7), wo aber jetzt die normierte Determinante gleich -1 ist) nicht nur $\Omega^* = 0$ invariant lassen, aber auch jede Ebene auf Ω^* in eine Ebene auf Ω^* überführen. Aber diese beiden Ebenen gehören nicht zum selben System (durch kontinuierlichen Änderung der Transformationskoeffizienten wird die Identität nicht erreicht). Und wenn man dann wieder zum projektiven R_3 übergeht, korrespondiert von diesen Ebenen die eine mit einem Punkte, die andere mit einer Ebene des R_3. Also:

Die orthogonale Gruppe in R_6 ist homomorph mit der Gruppe in R_3, die aus den unitären Kollineationen und den unitären Korrelationen zusammengesetzt ist; Umlegungen in R_6 bilden sich auf die Korrelationen in R_3 ab.

§ 8. - Nach derselben Methode (§ 5) erhält man die Darstellungen im dreidimensionalen projektiven Raume der reellen Transformationen, mit Determinante $+1$, welche $\sum_{i=1}^{6} \varepsilon_i y_i^2$ $(\varepsilon_i = \pm 1)$ invariant lassen; es treten aber, wenn nicht ε_i für jedes i gleich $+1$ ist, bei der Bestimmung der «Isomorphien im Groszen» gewisse Komplikationen auf. Ich glaube deshalb mich weiter ziemlich kurz fassen zu dürfen; nur die Punkte, wo die folgenden Fälle vom vorangehenden abweichen, habe ich ausführlicher besprochen.

a). An erster Stelle betrachte ich jetzt die reellen linearen Transformationen, mit der Determinante $+1$, die in R_6 die Form

$$\Phi \equiv y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_4^2-y_5^2+y_6^2$$

invariant lassen. Diese Transformationen bestehen aus zwei nicht unter einander zusammenhängenden Scharen.

α). Als Beispiel der ersten Schar kann man die identische Transformation oder die « Spiegelung in bezug auf den Ursprung des Koordinatensystems »:

$$y_i'=-y_i \qquad (i=1,\ldots, 6) \tag{11}$$

betrachten. Beide sind Sonderfälle der allgemeineren Transformation

$$\begin{cases} y_1'=y_1 \cos\varphi+y_2 \sin\varphi, \\ y_2'=-y_1 \sin\varphi+y_2 \cos\varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_3'=y_3 \cos\psi+y_6 \sin\psi, \\ y_6'=-y_3 \sin\psi+y_6 \cos\psi, \end{cases}$$
$$\begin{cases} y_4'=y_4 \cos\chi+y_5 \sin\chi, \\ y_5'=-y_4 \sin\chi+y_5 \cos\chi, \end{cases}$$

und gehen durch kontinuierliche Änderung von φ, ψ, χ aus einander hervor.

β). Ein Beispiel der zweiten Schar bildet

$$y_1'=-y_1, \qquad y_4'=-y_4, \qquad y_k'=y_k \qquad (k=2,3,5,6).$$

Es ist klar, dasz zwei Transformationen, die durch Multiplizierung mit der « Spiegelung » (11) aus einander entstehen, stets zur selben Schar gehören.

Alle diese Transformationen lassen in R_5^* die Varietät

$$\Phi=0$$

invariant. Mit einer « Bewegung » in R_5^* korrespondieren wieder zwei « Drehungen » in R_6; die beiden Gruppen sind wieder homomorph (1, 2). Diese beiden Drehungen in R_6 gehen durch eine Spiegelung i. b. a. den Ursprung (11) in einander über; sie gehören also stets zur selben Schar $a^{(\alpha)}$ oder $a^{(\beta)}$. *Die Bewegungen in R_5^* bilden deshalb auch zwei nicht unter einander zusammenhängende Scharen.*

Ich führe neue Koordinaten ein durch

$$\begin{cases} y_1+y_4=p_1, \\ y_1-y_4=q_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2+y_5=p_2, \\ y_2-y_5=q_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_3+iy_6=p_3, \\ y_3-iy_6=\bar{p}_3. \end{cases}$$

Die Koordinaten p_1, p_2, q_1, q_2 (von reellen Punkten) sind reell.

Die bei den Bewegungen invariante Varietät wird jetzt durch

$$\Phi \equiv p_1q_1+p_2q_2+p_3\bar{p}_3=0$$

dargestellt.

Die Flächensysteme auf Φ (zuvor Ω^*) haben ihre Gleichungen (8a und 8b) nicht geändert; nur hat man $\bar{p}_1$ und $\bar{p}_2$ durch q_1 und q_2 zu ersetzen.

Konjugiert-komplex sind die Ebenen $\{x\}$ und $\{\xi\}$, wenn

$$\varrho\xi_1=\bar{x}_2, \qquad \varrho\xi_2=-\bar{x}_1, \qquad \varrho\xi_3=-\bar{x}_4, \qquad \varrho\xi_4=\bar{x}_3.$$

Invariant ist bei jeder projektiven Transformation in R_3

$$\sum_{i=1}^{4}\xi_i x_i=0,$$

also bei den hier in Betracht kommenden Transformationen

$$\varphi\equiv\bar{x}_2x_1-\bar{x}_1x_2-\bar{x}_4x_3+x_3\bar{x}_4=0.$$

Die Bewegungsgruppe in R_5^* *ist also isomorph, auch im Groszen,* (s. § 5), *mit den Kollineationen in* R_3, *die* $\varphi=0$ *invariant lassen.*

Es braucht aber nicht die Form

$$\varphi\equiv\bar{x}_2x_1-\bar{x}_1x_2-\bar{x}_4x_3+\bar{x}_3x_4$$

bei diesen Transformationen invariant zu sein; sie kann mit einer reellen, positiven oder negativen, Konstante multipliziert werden. Es entsteht so die Frage; Die Bewegungen in R_5^* bilden zwei Scharen (α und β), ebenso die hier gefundenen Kollineationen im projektiven R_3; wie hängen diese Scharen von einander ab?

Um dies zu entscheiden wähle ich aus den Bewegungen in R_5^* die Identität. diese erzeugt in R_3 wieder die Identität. Wähle ich aber in R_5^* die Trasformation

$$y_1'=-y_1, \qquad y_4'=-y_4, \qquad y_k'=y_k \qquad (k=2,\,3,\,5,\,6),$$

dann erzeugt diese (s. 8a) in R_3 die Kollineation

$$x_1'=-x_1, \qquad x_2'=x_2, \qquad x_3'=x_3, \qquad x_4'=-x_4$$

Die Scharen (α *und* β) *der Bewegungsgruppe in* R_5^* *werden in* R_3 *durch die Scharen von Kollineationen, welche* φ *mit einer positiven resp. einer negativen Konstante multiplizieren, abgebildet.*

Man kann diesem Resultat eine andere Form geben. Invariant (bis auf eine reelle Konstante) ist auch $\psi=i\varphi$; ψ ist aber eine hermitesche Form, die durch eine Koordinatentransformation in

$$\psi\equiv\bar{x}_1x_1-\bar{x}_2x_2-\bar{x}_3x_3+\bar{x}_4x_4$$

übergeht. Man kann also in dem vorgehenden Satz φ durch ψ ersetzen (4).

b). Ich betrachte jetzt die reellen linearen Transformationen, mit Determinante $+1$, welche in R_6 die Form

$$\Psi\equiv y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2+y_5^2-y_6^2$$

(4) Auf die zweite Abbildungsweise der Bewegungen und auf die Abbildung der « Umlegungen » (die Analoga der in den §§ 6, 7 behandelten Fragen) gehe ich nicht ein.

invariant lassen. Die Gruppe besteht wieder aus zwei nicht unter einander zusammenhängenden Scharen; jetzt gehören aber die identische Transformation und die Speigelung in bezug auf den Ursprung zu verschiedenen Scharen.

Die Bewegungsgruppe in R^*_5, d. h. jetzt die reellen Kollineationen mit positiver Determinante (die man auf $+1$ normieren kann), welche auszerdem

$$\Psi=0$$

invariant lassen, ist nochmals mit der vorigen homomorph (1, 2); aber die beiden Drehungen in R_6, die mit einer und derselben Bewegung in R_5^* korrespondieren, gehören jetzt zu verschiedenen Scharen. *Die Bewegungsgruppe in R_5^* ist zusammenhängend.*

Setze ich

$$\begin{cases} y_1+iy_4=p_1, \\ y_1-iy_4=\bar{p}_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_2+iy_5=p_2, \\ y_2-iy_5=\bar{p}_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} y_3+y_6=p_3, \\ y_3-y_6=q_3, \end{cases}$$

dann wird die invariante Varietät durch

$$\Psi\equiv p_1\bar{p}_1+p_2\bar{p}_2+p_3q_3=0$$

dargestellt. Die Ebenensysteme auf Ψ haben die nämlichen Gleichungen als zuvor auf Ω^*, nur hat man q_3 statt $\bar{p}_3$ zu setzen. Zwei konjugiert-komplexe Ebenen sind jetzt Ebenen *desselben* Systems. Sind z. B. $\{x\}$ und $\{x^*\}$ zwei solche Ebenen, dann ist

$$x_1^*=-\bar{x}_2, \qquad x_2^*=\bar{x}_1, \qquad x_3^*=\bar{x}_4, \qquad x_4=-\bar{x}_3.$$

Also ist bei diesen Transformationen, auszer

$$\sum_{i=1}^{4}\xi_i x_i=0,$$

auch die Gleichung

$$\xi_1\bar{x}_2-\xi_2\bar{x}_1-\xi_3\bar{x}_4+\xi_4\bar{x}_3=0$$

invariant (5).

Die Untergruppe der Kollineationen in R_3, die mit der hier betrachteten Gruppe in R_6 homomorph (1, 2) — mit der Gruppe in R_5^* isomorph — ist, ist hierdurch charakterisiert (6).

---

(5) Diese Korrespondenz tritt bei CARTAN nicht auf.

(6) Seien diese Kollineationen in R_3 durch $x_i'=\sum_{k=1}^{4}a_{ik}x_k$ dargestellt. Die Matrix $\|a_{ik}\|$ hat (abgesehen von einem konstanten Faktor) dann die folgende merkwürdige Gestalt

$$\|a_{ik}\|=\begin{Vmatrix} a & b & p & q \\ -\bar{b} & \bar{a} & \bar{q} & -\bar{p} \\ r & s & c & d \\ \bar{s} & -\bar{r} & -\bar{d} & \bar{c} \end{Vmatrix}.$$