Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Waclaw Sierpiński

Sur deux ensembles linéaires singuliers

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 4, nº 1 (1935), p. 43-46
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1935_2_4_1_43_0>

SUR DEUX ENSEMBLES LINÉAIRES SINGULIERS

par WACLAW SIERPIŃSKI (Warszawa).

1. - On dit qu'un ensemble linéaire jouit de la *propriété C*, si pour chaque suite infinie $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de nombres réels positifs donnés d'avance, il peut être couvert par une suite infinie d'intervalles $d_1, d_2, d_3, \ldots$ tels que la longueur de l'intervalle d_n est a_n pour $n=1, 2, 3, \ldots$ (Les ensembles jouissant de la propriété C coïncident avec ceux que M. E. BOREL appelle « ensembles qui ont une mesure asymptotique inférieure à toute série donnée à l'avance » (1)).

M. E. SZPILRAJN a démontré (2) qu'un ensemble jouissant de la propriété C ne peut contenir aucun sous-ensemble parfait, de sorte que s'il est mesurable B, ou plus généralement s'il est un ensemble analytique, il est nécessairement au plus dénombrable. Or, en admettant que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ j'ai démontré (3) (en utilisant un ensemble de M. N. LUSIN) qu'il existe des ensembles indénombrables jouissant de la propriété C.

Les ensembles jouissant de la propriété C constituent une classe d'ensembles de mesure nulle qui doivent être regardés comme très pauvres en éléments. Or, on pourrait croire que si E est un ensemble linéaire indénombrable pauvre en points, une translation convenable de l'ensemble E le long de la droite le transforme en un ensemble ayant une infinité indénombrable de points étrangers à E. Cependant, en admettant que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ j'ai démontré (4) qu'il existe parmi les ensembles indénombrables un ensemble de mesure nulle que chaque translation le long de la droite transforme en lui même, abstraction faite tout au plus d'une infinité dénombrable de points. Or, en modifiant cette démonstration, j'établirai ici un théorème plus fort que voici:

THÉORÈME I. - *Si $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, il existe un ensemble linéaire indénombrable E jouissant de la propriété C et tel que chaque translation le long de la droite le transforme en lui-même, si l'on néglige tout au plus un ensemble dénombrable de points.*

---

(1) *Bull. Soc. Math. de France*, XLVII, 1919, p. 1.

(2) *Fund. Math.*, XV, p. 126. Cf. A. S. BESICOVITCH, *Acta Mathematica*, 62, p. 291.

(3) *Fund. Math.*, XI, p. 304.

(4) *Fund. Math.*, XIX, p. 22; cf. S. BANACH, ibid., p. 15. Voir aussi mon livre *Hypothèse du continu* (Monografje Matematyczne, t. IV, Warszawa, 1934), p. 132.

Démonstration. - Admettons que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$. Il existe dans ce cas une suite transfinie du type Ω (où Ω désigne le plus petit nombre ordinal de la troisième classe de G. CANTOR)

$$(1) \qquad x_1=0, \quad x_2, \quad x_3,\ldots, \quad x_\omega, \quad x_{\omega+1},\ldots, \quad x_\alpha,\ldots \qquad (\alpha<\Omega)$$

formée de tous les nombres réels, et une suite transfinie du type Ω

$$(2) \qquad Q_1, \quad Q_2, \quad Q_3,\ldots, \quad Q_\omega, \quad Q_{\omega+1},\ldots, \quad Q_\alpha,\ldots \qquad (\alpha<\Omega)$$

formée de tous les ensembles linéaires fermés non denses.

Désignons d'une façon générale par $M(a)$ la translation de l'ensemble M de longueur a, c'est-à-dire l'ensemble de tous les nombres réels $x+a$, où $x \varepsilon M$.

Nous allons définir par l'induction transfinie une suite transfinie $\{p_\alpha\}$, où $\alpha<\Omega$, comme il suit.

Posons $p_1=x_1$. Soit maintenant α un nombre ordinal donné compris entre 1 et Ω et supposons que nous avons déjà défini tous les points p_ξ, où $\xi<\alpha$: leur ensemble P_α est au plus dénombrable, puisque $\alpha<\Omega$.

Or, désignons par T_α la somme de tous les ensembles

$$Q_\xi(-x_{\xi_1}-x_{\xi_2}- \ldots -x_{\xi_n}),$$

où ξ, ξ_1, $\xi_2,\ldots$, ξ_n est une suite finie quelconque de nombres ordinaux $<\alpha$. Comme $\alpha<\Omega$, l'ensemble de telles suites est évidemment au plus dénombrable. Or, $Q_\xi(a)$ étant pour tout nombre ordinal $\xi<\Omega$ et pour tout a réel un ensemble non dense, l'ensemble T_α est par définition une somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses; donc T_α est un ensemble de 1re catégorie. L'ensemble P_α étant au plus dénombrable, la somme $S_\alpha=T_\alpha+P_\alpha$ constitue encore un ensemble de 1re catégorie et il existe dans la suite (1) de tous les nombres réels des nombres n'appartenant pas à S_α et c'est le premier de ces nombres que nous désignerons par p_α.

La suite transfinie

$$(3) \qquad p_1=0, \quad p_2, \quad p_3,\ldots, \quad p_\omega, \quad p_{\omega+1},\ldots, \quad p_\alpha,\ldots \qquad (\alpha<\Omega)$$

se trouve ainsi définie par l'induction transfinie et il est évident que tous les termes de cette suite sont distincts.

Ceci établi, désignons par E l'ensemble formé de p_1 et de tous les nombres de la forme

$$(4) \qquad p_\alpha+x_{\xi_1}+x_{\xi_2}+ \ldots +x_{\xi_n},$$

où $1<\alpha<\Omega$ et ξ_1, $\xi_2,\ldots$, ξ_n est une suite finie arbitraire de nombres ordinaux $<\alpha$. Comme $x_1=0$, l'ensemble E ainsi défini contient évidemment tous les points p_α, où $\alpha<\Omega$. Par conséquent il est indénombrable. Or, nous allons montrer que l'ensemble E jouit de la propriété C.

En effet, soit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ une suite infinie donnée quelconque de nombres réels positifs et soit

$$r_1, \quad r_2, \quad r_3, \ldots$$

une suite infinie formée de tous les nombres rationnels. Désignons, pour $n=1, 2, 3, \ldots$, par d_{2n} l'intervalle ouvert

$$d_{2n} = \left(r_n - \frac{1}{2} a_{2n},\ r_n + \frac{1}{2} a_{2n}\right). \tag{5}$$

L'ensemble

$$Q = C\left(\sum_{n=1}^{\infty} d_{2n}\right) \tag{6}$$

(où $C(M)$ désigne le complémentaire de l'ensemble M par rapport à l'ensemble de tous les nombres réels) est évidemment fermé et non dense: c'est donc un terme de la suite (2), soit $Q = Q_\lambda$, où λ est un nombre ordinal $< \Omega$.

Je dis que l'ensemble EQ est au plus dénombrable. En effet, supposons que p est un élément de l'ensemble EQ. On a $p \neq p_1$, puisque $p_1 = x_1 = 0$ et le nombre 0 (en tant que rationnel) n'appartient pas à Q. Comme appartenant à E, le nombre p est de la forme (4). Or, je dis que $\alpha \leqslant \lambda$. Admettons, par contre, que $\alpha > \lambda$. D'après la définition de l'ensemble T_α on a pour $\alpha > \lambda$ (les nombres ordinaux $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ étant $< \alpha$):

$$Q_\lambda(-x_{\xi_1} - x_{\xi_2} - \ldots - x_{\xi_n}) \subset T_\alpha \subset S_\alpha; \tag{7}$$

or, d'après $p \,\varepsilon\, Q = Q_\lambda$, p étant de la forme (4), on a

$$p_\alpha + x_{\xi_1} + x_{\xi_2} + \ldots + x_{\xi_n} \,\varepsilon\, Q_\lambda,$$

d'où

$$p_\alpha \,\varepsilon\, Q_\lambda(-x_{\xi_1} - x_{\xi_2} - \ldots - x_{\xi_n}),$$

donc, d'après (7):

$$p_\alpha \,\varepsilon\, S_\alpha,$$

contrairement à la définition du nombre p_α.

Donc, si p est un nombre de l'ensemble EQ, p est de la forme (4), où $\alpha \leqslant \lambda$. L'ensemble de tous les nombres (4), où $\alpha \leqslant \lambda$ étant, comme on voit sans peine, au plus dénombrable, il en résulte que l'ensemble EQ est au plus dénombrable, soit

$$EQ = (q_1, q_2, q_3, \ldots). \tag{8}$$

Désignons maintenant, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$, par d_{2n-1} l'intervalle ouvert

$$d_{2n-1} = \left(q_n - \frac{1}{2} a_{2n-1},\ q_n + \frac{1}{2} a_{2n-1}\right). \tag{9}$$

L'ensemble $E = E \cdot Q + E \cdot C(Q)$ est, d'après (6), (5), (8) et (9) contenu dans la somme des intervalles d_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ et la longueur de l'intervalle d_n est évidemment a_n (pour $n = 1, 2, 3, \ldots$). La suite infinie de nombres réels positifs a_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ pouvant être quelconque, cela prouve que l'ensemble E jouit de la propriété C.

Considérons maintenant les translations de l'ensemble E. Soit a un nombre réel quelconque. C'est donc un terme de la suite (1), soit $x = x_\mu$, où μ est un nombre ordinal $< \Omega$. Étant donné un point arbitraire $p \varepsilon E(a) - E$, on a, selon la définition de E et $E(a)$ d'une part

$$p = p_a + x_{\xi_1} + x_{\xi_2} + \dots + x_{\xi_n} + x_\mu, \tag{10}$$

et d'autre part $a \leqslant \mu$, puisque dans le cas contraire p appartiendrait à E.

Il est ainsi démontré que chaque nombre p de l'ensemble $E(a) - E$ est de la forme (10), où $a \leqslant \mu$ et $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ est une suite finie de nombres ordinaux $< a$. Or, l'ensemble de tous les nombres p de ce genre pour $a = x_\mu$ fixe est évidemment au plus dénombrable.

L'ensemble E satisfait donc aux conditions de notre théorème qui est ainsi démontré.

2. - Un ensemble est dit, d'après M. LUSIN, *toujours de 1^re^ catégorie*, s'il est de 1^re^ catégorie sur tout ensemble parfait. Les ensembles toujours de 1^re^ catégorie doivent être aussi regardés comme très pauvres en points. Or, je démontrerai ce

THÉORÈME II. - *Si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *il existe un ensemble linéaire indénombrable E toujours de 1^re^ catégorie et tel que chaque translation le long de la droite le transforme en lui-même si l'on néglige tout au plus un ensemble dénombrable de points.*

Démonstration. - En comprenant par la suite (2) une suite transfinie formée de tous les ensembles G_δ de mesure nulle, repetons (avec des modifications évidentes) la démonstration du théorème I jusqu'au moment où nous avons introduit la suite $a_1, a_2, a_3, \dots$ Nous allons montrer que l'ensemble E est toujours de 1^re^ catégorie.

En effet, soit P un ensemble linéaire parfait donné quelconque et soit Q un ensemble G_δ de mesure nulle contenu dans P et dense dans P. C'est donc un terme de la suite (2), soit $Q = Q_\lambda$. Comme dans la démonstration du théorème I, on démontre que l'ensemble EQ est au plus dénombrable. Or, on a $EP = EPQ + E(P - Q)$ et, Q étant un G_δ dense dans P, l'ensemble $P - Q$ est de 1^re^ catégorie sur P. L'ensemble EP est donc de 1^re^ catégorie sur P. L'ensemble parfait P pouvant être quelconque, cela prouve que l'ensemble E est toujours de 1^re^ catégorie.

La démonstration que pour tout nombre a réel l'ensemble $E(a) - E$ est au plus dénombrable est la même que pour le théorème I.

Le théorème II est ainsi établi.