Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Giovanni Sansone

Sul teorema di Parseval in intervalli infiniti

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 4, nº 1 (1935), p. 35-41
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1935_2_4_1_35_0>

SUL TEOREMA DI PARSEVAL IN INTERVALLI INFINITI

di GIOVANNI SANSONE (Firenze).

1. - È ben noto il criterio di chiusura di VITALI [1]: Se g è un aggregato di misura *finita* appartenente ad una retta r, se $\{\varphi_k\}$ è un sistema ortogonale e normale in g, se $\mu(g_t)$ indica la misura dell'aggregato di punti che si trovano alla sinistra di t, condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema $\{\varphi_k\}$ sia chiuso rispetto alle funzioni di quadrato sommabile, cioè l'unica funzione a quadrato sommabile, ortogonale a tutte le funzioni del sistema sia quella generalmente nulla, è che per qualunque valore di t si abbia

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_{g_t}\varphi_k dt\right]^2=\mu(g_t). \tag{1}$$

Quando g ha misura infinita dal ragionamento di VITALI si deduce che la (1) è condizione sufficiente di chiusura, e che perciò il verificarsi delle infinite equazioni

$$\int_g \omega\varphi_k dt=0 \qquad (k=1, 2,....)$$

con ω di quadrato sommabile in g, porta che ω è generalmente nulla in g.

Vogliamo ora provare il teorema: *Se $\{\varphi_k(t)\}$ è un sistema ortogonale e normale nell'intervallo infinito I, e per esso è soddisfatta l'equazione di chiusura di Vitali*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\int_a^\alpha \varphi_k(t)dt\right]^2=|\alpha-a|, \tag{2}$$

dove a è un punto fisso di I, e α variabile in I, allora se $f(t)$ è una funzione a quadrato sommabile in I, e consideriamo la successione $\{a_k\}$ delle sue costanti di Fourier

$$a_k=\int_I f\varphi_k dt \tag{3}$$

[1] G. VITALI: *a) Sulla condizione di chiusura di un sistema di funzioni ortogonali*, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei (5), XXX (2° sem. 1921), pp. 498-501; *b) Geometria dello spazio Hilbertiano* (Bologna, 1929), p. 67.

sussiste l'uguaglianza di Parseval

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \int_I f^2 dt \quad (^2). \tag{4}$$

Noi supporremo $I=(a, +\infty)$ con a finito; ugualmente si ragiona per l'intervallo $(-\infty, +\infty)$. Per dimostrare la (4) basterà provare che fissato $\sigma>0$, si può determinare una combinazione lineare a coefficienti costanti di $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$

$$F_n(t) = \gamma_1\varphi_1(t) + \gamma_2\varphi_2(t) + \ldots + \gamma_n\varphi_n(t) \tag{5}$$

con n sufficientemente grande, tale che

$$\int_I |f-F_n|^2 dt < \sigma. \tag{6}$$

Infatti ricordando che la combinazione lineare di $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ che ha la minima distanza da f è data da $a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \ldots + a_n\varphi_n$, dove le a_k hanno l'espressione (3), abbiamo

$$0 \leq \int_I f^2 dt - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \int_I \left| f - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k \right|^2 dt \leq \int_I |f-F_n|^2 dt < \sigma,$$

e perciò la (4).

Per provare la (6) procederemo per gradi.

a). Sia $f(t)=c=$costante in (a, α), gli estremi al più esclusi, ed $f(t)=0$ per $t>\alpha$. Si ha

$$a_k = c\int_a^\alpha \varphi_k dt, \qquad \int_I f^2 dt = c^2(\alpha - a)$$

e se facciamo nella (5) $\gamma_k = a_k$, prendiamo cioè $F_n = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \ldots + a_n\varphi_n$, si ha

$$\int_I |f-F_n|^2 dt = \int_I f^2 dt - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = c^2 \left\{ |\alpha - a| - \sum_{k=1}^{n} \left[\int_a^\alpha \varphi_k dt \right]^2 \right\}$$

e allora la (6) è conseguenza della (2) che per ipotesi è verificata.

b). Sia $f(t)=c$ nell'intervallo (α, β), $\alpha<\beta$, appartenente ad $(a, +\infty)$, e $f(t)=0$ per t appartenente all'aggregato complementare di (α, β) in $(a, +\infty)$.

Poniamo

$$f_1(t)=c \text{ per } a\leq t\leq\beta \quad \text{e} \quad f_1(t)=0 \text{ per } \beta<t;$$
$$f_2(t)=c \text{ per } a\leq t\leq\alpha \quad \text{e} \quad f_2(t)=0 \text{ per } \alpha<t,$$

(2) Se I è finito, il verificarsi della (4) qualunque sia f, dà, come è ben noto, la condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema sia chiuso. [Cfr., ad esempio, VITALI, loc. cit (1), *b*), p. 66].

e determiniamo come in *a*) due combinazioni lineari F_{n_1}, F_{n_2} delle $\{\varphi_k\}$ tali che

$$\int_I |f_1 - F_{n_1}|^2 dt < \frac{\sigma}{4}, \qquad \int_I |f_2 - F_{n_2}|^2 dt < \frac{\sigma}{4};$$

si ha allora

$$\int_I |f - \{F_{n_1} - F_{n_2}\}|^2 dt = \int_I |(f_1 - f_2) - (F_{n_1} - F_{n_2})|^2 dt \leq$$
$$\leq 2\int_I |f_1 - F_{n_1}|^2 dt + 2\int_I |f_2 - F_{n_2}|^2 dt < \sigma,$$

e perciò con $F_n = F_{n_1} - F_{n_2}$ si soddisfa la (6).

c). Sia $a = a_0 < a_1 < .... < a_s$ e si abbia $f(t) = c_k$ per t interno all'intervallo (a_{k-1}, a_k) ed $f(t) = 0$ per $t = a_k$ $(k = 0, 1, 2,...., s)$, e per $t > a_s$.

Consideriamo le funzioni $f_1(t)$, $f_2(t)$,...., $f_s(t)$ così definite:

$$f_k(t) = c_k \text{ per } a_{k-1} < t < a_k \quad \text{e} \quad f_k(t) = 0 \text{ per } t \leq a_{k-1}, \text{ oppure } t \geq a_k,$$

e determiniamo come in *b*) s combinazioni lineari F_{n_k} delle $\{\varphi_k\}$ tali che

$$\int_I |f_k - F_{n_k}|^2 dt < \frac{\sigma}{s} \qquad (k = 1, 2,...., s).$$

Si ha allora:

$$\int_I \left| f - \sum_{k=1}^{s} F_{n_k} \right|^2 dt = \int_I \left| \sum_{k=1}^{s} (f_k - F_{n_k}) \right|^2 dt \leq s \sum_{k=1}^{s} \int_I |f_k - F_{n_k}|^2 dt < \sigma.$$

d). Sia $f(t)$ continua in (a, α) e si abbia $f(t) = 0$ per $t > \alpha$. Si divida l'intervallo (a, α) con i punti a_0, a_1,...., a_s, $a = a_0 < a_1 < .... < a_s = \alpha$ in modo che in ciascun intervallo parziale (a_{k-1}, a_k) l'oscillazione di $f(t)$ sia inferiore a $\sigma^{\frac{1}{2}}/2\sqrt{\alpha - a}$, e posto $c_k = f[(a_{k-1} + a_k)/2]$ si consideri la funzione $F(t)$ nulla nei punti a_0, a_1,...., a_s e per $t > a_s$ e uguale a c_k per t interno ad (a_{k-1}, a_k); si determini poi per *c*) una combinazione lineare F_n di φ_1, φ_2,...., φ_n tale che

$$\int_I |F - F_n|^2 dt < \frac{\sigma}{4};$$

abbiamo

$$\int_I |f - F_n|^2 dt \leq 2\int_I |f - F|^2 dt + 2\int_I |F - F_n|^2 dt < 2\sum_{k=1}^{s} \int_{a_{k-1}}^{a_k} |f - F|^2 dt + \frac{\sigma}{2}$$

perciò

$$\int_I |f - F_n|^2 dt < 2\sum_{k=1}^{s} \frac{\sigma}{4(\alpha - a)} \int_{a_{k-1}}^{a_k} dt + \frac{\sigma}{2} = \sigma.$$

e). Sia infine $f(t)$ di quadrato sommabile in $(a, +\infty)$ e si determini α così grande che

$$\int_\alpha^{+\infty} f^2 dt < \frac{\sigma}{6}.$$

Siccome $f(t)$ è di quadrato sommabile nell'intervallo *finito* (a, α), si può determinare una funzione continua $F(t)$ tale che sia

$$\int_a^\alpha |f-F|^2 dt < \frac{\sigma}{6};$$

basterà ad esempio prendere la somma dei primi m termini della serie trigonometrica di FOURIER di $f(t)$ relativa all'intervallo (a, α) con m sufficientemente grande [3].

Si faccia $F(t)=0$ per $t>\alpha$ e si determini come in *d*) una combinazione lineare F_n di $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ tale che

$$\int_a^{+\infty} |F-F_n|^2 dt < \frac{\sigma}{6};$$

si ha allora

$$\int_a^{+\infty} |f-F_n|^2 dt \leq 2\int_a^{+\infty} |f-F|^2 dt + 2\int_a^{+\infty} |F-F_n|^2 dt \leq$$

$$\leq 2\int_a^{\alpha} |f-F|^2 dt + 2\int_\alpha^{+\infty} f^2 dt + 2\int_a^{+\infty} |F-F_n|^2 dt < \sigma.$$

Il teorema è perciò dimostrato.

2. - *a*). Il sistema di TCHEBYCHEF-LAGUERRE $\{e^{-\frac{x}{2}} L_k(x)\}$

$$L_0(x)=1, \qquad L_k(x)=\frac{1}{k!}\, e^x \frac{d^k}{dx^k}[x^k e^{-x}] \qquad (k=1, 2, \ldots) \tag{7}$$

ortogonale e normale in $(0, +\infty)$ soddisfa l'equazione di chiusura di VITALI [4], perciò *se $f(x)$ è di quadrato sommabile in $(0, +\infty)$ e poniamo*

$$a_k=\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} f(x) L_k(x) dx \qquad (k=0, 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

---

[3] Cfr., ad esempio, L. TONELLI: *Serie trigonometriche* (Bologna, 1928), p. 232.

[4] Cfr. G. SANSONE: *La chiusura dei sistemi ortogonali di Legendre, di Laguerre e di Hermite rispetto alle funzioni di quadrato sommabile*, Giorn. dell'Ist. It. degli Attuari, IV (1933), pp. 71-82.

si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 = \int_0^{+\infty} f^2(x)dx\,; \tag{9}$$

o ciò che è lo stesso fissato $\sigma > 0$, può determinarsi un polinomio $P(x)$ tale che

$$\int_0^{+\infty} |\, f(x) - e^{-\frac{x}{2}} P(x)\,|^2 dx < \sigma. \tag{10}$$

Vogliamo provare più in generale che assegnata una funzione $f(x)$ di quadrato sommabile in $(0, +\infty)$, e fissato $\sigma > 0$, qualunque sia il numero reale α può determinarsi un polinomio $P(x)$ tale che

$$\int_0^{+\infty} |\, f(x) - e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} P(x)\,|^2 dx < \sigma \quad (^5), \tag{11}$$

e perciò il sistema di TCHEBYCHEF-LAGUERRE

$$\left\{ \Gamma^{\frac{1}{2}}(k+1)\Gamma^{-\frac{1}{2}}(k+\alpha+1) e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} L_k^{(\alpha)}(x) \right\}$$

$$L_0^{(\alpha)}(x) = 1, \qquad L_k^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{k!} e^x x^{-\alpha} \frac{d^k}{dx^k} [x^{k+\alpha} e^{-x}] \qquad \alpha > -1 \tag{12}$$

ortogonale e normale in $(0, +\infty)$ soddisfa anch'esso l'equazione di chiusura di VITALI.

---

(5) Il chiarissimo prof. M. PICONE, in un'interessante memoria: *Trattazione elementare dell'approssimazione lineare in insiemi non limitati*, Giornale dell'Ist. It. degli Attuari, V (1934), pp. 155-195, consegue brevemente la (11) definendo chiuso un sistema ortogonale $\{\varphi_k\}$ in un aggregato finito o infinito, se per ogni funzione f di quadrato sommabile in I è soddisfatta la (4) del testo, e stabilendo preventivamente un nuovo e notevole criterio di chiusura.

In una mia monografia in corso di pubblicazione: *Sugli sviluppi in serie di funzioni ortogonali*, edita dal Consiglio Nazionale delle Ricerche, ho preso come definizione di chiusura di un sistema ortogonale $\{\varphi_k\}$ in un intervallo I finito o infinito, l'inesistenza di una funzione a quadrato sommabile non generalmente nulla in I, ortogonale a tutte le funzioni del sistema.

Le due definizioni sono equivalenti quando I è finito [cfr. (2)], e come si era notato in una conversazione coll'amico prof. PICONE, l'equivalenza doveva sussistere per I infinito, quando ci si riferisca ai sistemi ortogonali di TCHEBYCHEF-LAGUERRE e di TCHEBYCHEF-HERMITE.

Postomi più in generale la questione ho provato appunto nel n.° 1 l'equivalenza delle due definizioni quando per il sistema $\{\varphi_k\}$ è soddisfatta l'equazione di chiusura di VITALI [la (1) del testo] e nel n.° 2 ne ho fatto applicazione ai sistemi di TCHEBYCHEF-LAGUERRE e di TCHEBYCHEF-HERMITE.

Sia $a>0$, ed s un intero tale che $a/2=s/4+\varrho$ con $0\leqslant\varrho<1/4$. Qualunque siano i polinomi $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$,...., $P_s(x)$, $P(x)$ si ha

$$(13)\qquad \int_0^{+\infty}|f(x)-e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{a}{2}}P(x)|^2dx\leqslant$$

$$\leqslant(s+2)\left\{\int_0^{+\infty}|f(x)-e^{-\frac{x}{2}}P_0(x)|^2dx+\sum_{k=1}^{s}\int_0^{+\infty}|e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{k-1}{4}}P_{k-1}(x)-e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{k}{4}}P_k(x)|^2dx+\right.$$

$$\left.+\int_0^{+\infty}|e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{s}{4}}P_s(x)-e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{s}{4}+\varrho}P(x)|^2dx\right\}.$$

Possiamo per la (10) determinare un polinomio $P_0(x)$ tale che

$$(14)_1\qquad \int_0^{+\infty}|f(x)-e^{-\frac{x}{2}}P_0(x)|^2dx<\frac{\sigma}{s+2}.$$

Osserviamo che si ha

$$\int_0^{+\infty}|e^{-\frac{x}{2}}P_0(x)-e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{1}{4}}P_1(x)|^2dx=\int_0^{+\infty}|e^{-t}P_0(2t)-e^{-t}2^{\frac{1}{4}}t^{\frac{1}{4}}P_1(2t)|^2 2dt=$$

$$=2\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{\frac{1}{2}}[e^{-\frac{t}{2}}t^{-\frac{1}{4}}P_0(2t)-2^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{t}{2}}P_1(2t)]^2dt;$$

ma esiste una costante M tale che in $(0,+\infty)$ si ha $0\leqslant e^{-t}t^{\frac{1}{2}}\leqslant M$, perciò

$$\int_0^{+\infty}|e^{-\frac{x}{2}}P_0(x)-e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{1}{4}}P_1(x)|^2dx<2M\int_0^{+\infty}|e^{-\frac{t}{2}}t^{-\frac{1}{4}}P_0(2t)-2^{\frac{1}{4}}e^{-\frac{t}{2}}P_1(2t)|^2dt,$$

e siccome la funzione $e^{-\frac{t}{2}}t^{-\frac{1}{4}}P_0(2t)$ è di quadrato sommabile in $(0,+\infty)$, possiamo determinare un polinomio $P_1(2t)$ tale che

$$\int_0^{+\infty}|e^{-\frac{t}{2}}t^{-\frac{1}{4}}P_0(2t)-2^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{t}{2}}P_1(2t)|^2dt<\frac{\sigma}{2(s+2)M}$$

e quindi

$$(14)_2\qquad \int_0^{+\infty}|e^{-\frac{x}{2}}P_0(x)-e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{1}{4}}P_1(x)|^2dx<\frac{\sigma}{s+2}.$$

Determinato $P_1(x)$ si determineranno successivamente i polinomi $P_2(x), \ldots, P_s(x)$, $P(x)$ in modo che

$$(14)_k \qquad \int_0^{+\infty} |e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{k-1}{4}} P_{k-1}(x) - e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{k}{4}} P_k(x)|^2 dx < \frac{\sigma}{s+2} \qquad (k=2, \ldots, s)$$

$$(14) \qquad \int_0^{+\infty} |e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{s}{4}} P_s(x) - e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} P(x)|^2 dx < \frac{\sigma}{s+2}$$

e dalle (13) e (14) segue appunto la (11).

Se $\alpha < 0$, scegliamo l'intero positivo m in modo che $\alpha + 2m \geqslant 0$, e se fissata la funzione $f(x)$ di quadrato sommabile in $(0, +\infty)$ scegliamo il polinomio $P(x)$ in modo che

$$\int_0^{+\infty} |f(x) - e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}+m} P(x)|^2 dx < \sigma$$

abbiamo anche

$$\int_0^{+\infty} |f(x) - e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} P_1(x)|^2 dx < \sigma \qquad \text{con } P_1(x) = x^m P(x).$$

b). Si osservi ancora che il sistema di TCHEBYCHEF-HERMITE

$$\{(2^k k! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_k(x)\}$$

$$(15) \qquad H_0 = 1, \qquad H_k(x) = e^{x^2} \frac{d^k e^{-x^2}}{dx^k} \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

ortogonale e normale in $(-\infty, +\infty)$ soddisfa l'equazione di chiusura di VITALI [6], perciò, in virtù del teorema dimostrato nel n.° 1, *se $f(x)$ è di quadrato sommabile in $(-\infty, +\infty)$, vale l'uguaglianza di Parseval.*

$$(16) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx, \qquad a_k = \frac{1}{\sqrt{2^k k! \sqrt{\pi}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} f(x) H_k(x) dx, \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

---

[6] Cfr. G. SANSONE, loc. cit. [4].