

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

FRANCESCO SCANDONE

**Sulle frange d'ombra extraassiali ottenute con reticoli rettilinei  
in presenza di aberrazione sferica sull'asse**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2<sup>e</sup> série*, tome 3, n° 1  
(1934), p. 33-42

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1934\\_2\\_3\\_1\\_33\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1934_2_3_1_33_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1934, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

SULLE FRANGE D'OMBRA EXTRAASSIALI  
OTTENUTE CON RETICOLI RETTILINEI  
IN PRESENZA DI ABERRAZIONE SFERICA SULL'ASSE

di FRANCESCO SCANDONE (Milano).

1. - In due note precedenti <sup>(1)</sup> ho esposto la teoria generale delle frange d'ombra per i fasci luminosi extraassiali.

Nella prima mi limitavo al caso in cui il reticolo rettilineo avesse i tratti paralleli oppure perpendicolari al piano di simmetria del sistema in esame, nella seconda generalizzavo le formule al caso di reticoli comunque inclinati.

In ambedue le note però, dopo stabilite le formule generali, mi soffermavo a considerare soltanto il caso in cui è assente l'aberrazione sferica. Si trova allora che le frange sono in generale delle ellissi o delle iperboli.

Numerosi lavori sperimentali <sup>(2)</sup> hanno confermato questi risultati, con un accordo quantitativo assai spinto fra teoria ed esperienza, e mostrando come la misura delle aberrazioni, fatta ricavando i coefficienti caratteristici dagli interferogrammi, è assai precisa.

Vogliamo qui perciò approfondire anche il caso omissso, e cioè in cui sia presente nel sistema in esame anche l'aberrazione sferica.

La teoria delle aberrazioni, arrestata alla cosiddetta approssimazione del 3° ordine, conosce 3 tipi di aberrazione sferica fuori dell'asse, corrispondenti ai coefficienti  $c_{4,0}$ ,  $c_{4,2}$ ,  $c_{4,4}$  dell'espressione generale dell'aberrazione d'onda che ho stabilito per i fasci extraassiali. Ma mi limiterò a considerare il caso, largamente

---

<sup>(1)</sup> FRANCESCO SCANDONE: *Sulla forma delle frange d'ombra dovute ad onde luminose affette da aberrazioni extraassiali*. Nuovo Cimento, 4, p. 157, 1931; FRANCESCO SCANDONE: *Sulla forma delle frange d'ombra extraassiali ottenute con un reticolo rettilineo a tratti inclinati sul piano di simmetria del sistema ottico*. Nuovo Cimento, 8, p. 310, 1931.

<sup>(2)</sup> FLORA VILLANI: *Sulla misura dell'astigmatismo e del coma mediante le frange d'ombra*. Nuovo Cimento, 7, p. 264, 1931; FLORA VILLANI e RAFFAELLO BRUSCAGLIONI: *Sulla forma delle frange d'ombra ottenute da onde affette da astigmatismo e coma*. Nuovo Cimento, 1, p. 23, 1932; RAFFAELLO BRUSCAGLIONI: *Sulla forma delle frange d'interferenza ottenute da onde affette da astigmatismo puro con reticoli ad orientamento qualunque*. Rend. Acc. Lincei, serie 6, 1° sem., Gennaio 1932, p. 70; RAFFAELLO BRUSCAGLIONI: *Sulla misura dell'astigmatismo e del coma mediante le frange d'ombra*. Boll. Ass. Ottica, 4, p. 46, Luglio 1932.

sufficiente in pratica, in cui l'aberrazione sferica sia caratterizzata da un solo coefficiente  $c_4$ , coincidente col coefficiente di aberrazione sferica sull'asse. Questo è certamente vero per qualunque sistema ottico, se i fasci sono poco inclinati sull'asse.

Porremo perciò:

$$c_4 = c_{4,0} = \frac{1}{2} c_{4,2} = c_{4,4}.$$

Allora l'espressione dell'aberrazione d'onda diviene:

$$(1) \quad w(l, g) = c_{2,0} l^2 + c_{2,2} g^2 + c_{3,1} l^2 g + c_{3,3} g^2 + c_4 (l^2 + g^2)^2.$$

Corrispondentemente l'equazione della  $j$ -ma frangia, per reticoli comunque inclinati è:

$$(2) \quad \left[ 2 \left( c_{2,0} - \frac{y}{2D_0^2} \right) l + 2c_{3,1} l g + 4c_4 l (l^2 + g^2) \right] \cos \alpha + \\ + \left[ 2 \left( c_{2,2} - \frac{y}{2D_0^2} \right) g + c_{3,1} l^2 + 3c_{3,3} g^2 + 4c_4 g (l^2 + g^2) \right] \sin \alpha - \frac{j}{mD_0} = 0.$$

Le formule e le notazioni sono prese dalle note citate.

Mi propongo ora di ricavare dalla (2) le proprietà caratteristiche delle frange.

2. - La (2) può essere anche scritta sotto la forma seguente:

$$(2a) \quad (l \cos \alpha + g \sin \alpha) (l^2 + g^2) + \frac{c_{3,1}}{4c_4} \sin \alpha l^2 + 2 \frac{c_{3,1}}{4c_4} \cos \alpha l g + 3 \frac{c_{3,3}}{4c_4} g^2 + \\ + 2 \frac{\left( c_{2,0} - \frac{y}{2D_0^2} \right)}{4c_4} \cos \alpha l + 2 \frac{\left( c_{2,2} - \frac{y}{2D_0^2} \right)}{4c_4} \sin \alpha g - \frac{j}{4mD_0 c_4} = 0.$$

Essa è una *cubica circolare* ossia possiede all'infinito i punti ciclici. Una proprietà assai importante di tali cubiche è che per esse vale il teorema di CZUBER <sup>(3)</sup>: « Qualunque cubica circolare è generabile mediante un fascio di raggi ed un fascio proiettivo di cerchi concentrici; il centro del fascio di raggi è il *punto principale*, ossia il punto in cui l'asintoto reale della curva la sega ulteriormente, e il centro comune dei cerchi è il *fuoco straordinario*, ossia il punto d'incontro delle rette tangenti alla curva nei punti ciclici ».

Una conseguenza immediata di questo teorema è il seguente teorema di ECKARDT: « Ogni retta condotta pel punto principale di una cubica circolare taglia ulteriormente la curva in due punti equidistanti dal fuoco straordinario ».

Farò grande uso di questi teoremi, ed anzi dalla determinazione quantitativa del punto principale e del fuoco straordinario prenderò le mosse per studiare le proprietà delle frange in dipendenza delle aberrazioni presenti.

---

<sup>(3)</sup> Vedi GINO LORIA: *Curve piane speciali algebriche e trascendenti*. Vol. I, cap. III, p. 34 e seg., Hoepli, 1930.

Prima di affrontare il caso del reticolo comunque inclinato, tratterò i casi particolari  $\alpha=0$ ,  $\alpha=\frac{\pi}{2}$ , in cui il reticolo ha i tratti paralleli oppure perpendicolari al piano di simmetria del sistema ottico.

Per lo studio approfondito delle cubiche circolari rimando alla citazione.

3. - Poniamo dunque  $\alpha=0$  (reticolo coi tratti paralleli al piano di simmetria). L'equazione diventa:

$$l(l^2 + g^2) + 2 \frac{c_{3,1}}{4e_4} lg + 2 \frac{\left( c_{2,2} - \frac{y}{2D_0^2} \right)}{4e_4} l - \frac{j}{4mD_0e_4} = 0.$$

Le curve annettono l'asse  $g$  (retta  $l=0$ ) come asintoto.

Il fuoco straordinario (punto d'incontro delle rette tangenti alla curva nei punti ciclici) ha le coordinate:

$$\bar{l}=0, \quad \bar{g} = -\frac{c_{3,1}}{4e_4}$$

ossia si trova sull'asse  $g$  (traccia del piano di simmetria del sistema ottico, sul piano del reticolo), spostato rispetto all'origine di una quantità indipendente dall'astigmatismo, dalla posizione del reticolo, e dall'ordine della frangia. Tale punto è il centro comune del fascio proiettivo di cerchi che genera la cubica.

Se cerchiamo le coordinate del punto principale (punto in cui l'asintoto  $l=0$ , ossia l'asse  $g$  incontra ulteriormente la curva), troviamo che esso è situato sull'asse  $g$  e all'infinito, ossia il fascio di rette è un fascio di rette parallelo ai tratti del reticolo.

Il fuoco straordinario è assai facilmente individuabile sugli interferogrammi applicando il teorema di ECKARDT citato al paragrafo precedente: basta tirare una qualsiasi parallela all'asintoto (asse  $g$ ) che incontri la cubica in due punti: l'asse del segmento intercettato dai due punti incontra l'asintoto nel punto cercato. La determinazione è anche precisa perchè può essere ripetuta parecchie volte sia cambiando la retta, sia la frangia che si considera. In altre parole la curva gode simmetria rispetto all'asse  $g = -\frac{c_{3,1}}{4e_4}$ .

Conosciuto  $\bar{g}$ , si determina il rapporto  $\frac{c_{3,1}}{e_4}$  mediante la formula

$$\frac{c_{3,1}}{e_4} = -4\bar{g}.$$

Se si cerca l'equazione della retta che corrisponde proiettivamente al cerchio di raggio  $r$  per generare l' $j$ -ma frangia, si trova

$$\lambda \left[ r^2 + \frac{\left( c_{2,0} - \frac{y}{2D_0^2} \right)}{2e_4} - \frac{\left( c_{3,1} \right)^2}{4e_4} \right] - \frac{j}{4mD_0e_4} = 0$$

$\lambda$ ,  $r$ ,  $\frac{c_{3,1}}{4c_4} = -\bar{g}$ , si misurano sugli interferogrammi, perciò si ricava

$$\frac{c_{2,0} - \frac{y}{2D_0^2}}{c_4} = \frac{j}{2mD_0c_4\lambda} - 2(r^2 + \bar{g}^2).$$

Ma  $r^2 + \bar{g}^2$  non è altro che  $l^2 + g^2$  per il punto considerato d'incontro della retta con il cerchio, quantità che il Prof. RONCHI ha indicato con  $z$  (<sup>4</sup>), quindi potremo scrivere la relazione precedente così:

$$2D_0^2 \left( c_{2,0} - \frac{y}{2D_0^2} \right) + 4D_0^2 c_4 z^2 = \frac{D_0}{m} \frac{j}{\lambda}$$

ossia l'astigmatismo sagittale misurato dal piano del reticolo, più l'aberrazione sferica longitudinale relativa alla zona considerata, uguagliano il rapporto fra l'ordine della frangia e la distanza  $\lambda$  della retta dall'asse  $g$ , a meno delle costanti di esperienza  $\frac{D_0}{m}$ .

Abbiamo così ridotto la conoscenza dei coefficienti  $c_{2,0}$  e  $c_{3,1}$  alla conoscenza di  $c_4$ .

4. - Poniamo ora  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . L'equazione della  $j$ -ma frangia diviene

$$g(l^2 + g^2) + \frac{c_{3,1}}{4c_4} l^2 + \frac{3c_{3,3}}{4c_4} g^2 + \frac{2 \left( c_{2,2} - \frac{y}{2D_0^2} \right)}{4c_4} g - \frac{j}{4mD_0c_4} = 0.$$

Il fuoco straordinario è nel punto

$$\bar{l} = 0, \quad \bar{g} = \frac{c_{3,1} - 3c_{3,3}}{8c_4}$$

inoltre l'asintoto reale è parallelo all'asse  $l$  ed ha l'equazione

$$g_{as} = -\frac{c_{3,1}}{4c_4}$$

posizione del fuoco straordinario nel caso in cui  $\alpha = 0$ .

Come nel caso precedente il fuoco straordinario (come pure l'asintoto) dipende solo dai coefficienti del coma e dell'aberrazione sferica, ed è comune a tutte le frange.

Il punto principale è all'infinito nella direzione dell'asintoto, quindi il fascio di rette è parallelo all'asse  $l$ .

L'equazione della retta che corrisponde al cerchio di raggio  $r$  è

$$\left[ r^2 + \frac{(c_{3,1} + c_{3,3})(c_{3,1} - 3c_{3,3})}{64c_4^2} + \frac{\left( c_{2,2} - \frac{y}{2D_0^2} \right)}{2c_4} \right] r + \left[ \frac{c_{3,1}}{4c_4} r^2 - \frac{(c_{3,1} - c_{3,3})(c_{3,1} - 3c_{3,3})}{2^{10}c_4^3} - \frac{j}{4mD_0c_4} \right] = 0$$

(<sup>4</sup>) VASCO RONCHI: *Sul comportamento e l'impiego delle frange d'ombra nella prova dei sistemi ottici*. Nuovo Cimento, 6, p. 752, 1927.

da cui essendo già determinati i termini che dipendono dal coma, e rilevando dall'interferogramma  $r^2$  e  $\gamma$ , si può misurare  $\frac{\left(c_{2,2} - \frac{y}{2D_0^2}\right)}{2c_4}$ .

5. - Vediamo ora cosa ci dice la teoria generale dedotta dalla (2a) per una inclinazione  $\alpha$  qualsiasi dei tratti del reticolo.

Oltre agli asintoti immaginari passanti per i punti ciclici la curva ha un asintoto reale parallelo alla direzione

$$l \cos \alpha + g \sin \alpha = 0$$

ossia

$$\frac{g}{l} = \operatorname{tg} \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right)$$

ossia parallelo ai tratti del reticolo.

Cambiamo le coordinate  $l, g$  in quelle  $l', g'$  mobili col reticolo, mediante le equazioni

$$\begin{cases} l = l' \cos \alpha - g' \sin \alpha \\ g = l' \sin \alpha + g' \cos \alpha \end{cases}$$

si ottiene l'equazione:

$$\begin{aligned} (2b) \quad l'(l'^2 + g'^2) + \frac{3}{4c_4} \sin \alpha (c_{3,1} \cos^2 \alpha + c_{3,3} \sin^2 \alpha) l'^2 + \\ + \frac{\cos \alpha}{2c_4} [c_{3,1} (\cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha) + 3c_{3,3} \sin^2 \alpha] l' g' + \\ + \frac{\sin \alpha}{4c_4} [c_{3,1} (\sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha) + 3c_{3,3} \cos^2 \alpha] g'^2 + \\ + \frac{1}{2c_4} \left[ \left( c_{2,0} - \frac{y}{2D_0^2} \right) \cos^2 \alpha + \left( c_{2,2} - \frac{y}{2D_0^2} \right) \sin^2 \alpha \right] l' + \\ + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{2c_4} (c_{2,2} - c_{2,0}) g' - \frac{j}{4mD_0c_4} = 0. \end{aligned}$$

Le coordinate del fuoco straordinario sono:

$$\begin{cases} \bar{l}' = \frac{\sin \alpha}{8c_4} [c_{3,1} (\sin^2 \alpha - 5 \cos^2 \alpha) + 3c_{3,3} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)] \\ \bar{g}' = -\frac{\cos \alpha}{4c_4} [c_{3,1} (\cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha) + 3c_{3,3} \sin^2 \alpha] \end{cases}$$

come si vede, anche nel caso generale il fuoco straordinario dipende essenzialmente dai coefficienti del coma, è indipendente dall'ordine della frangia, dalla posizione del reticolo e dall'astigmatismo.

L'asintoto, parallelo all'asse  $g'$ , ha per equazione:

$$l'_{as} = \frac{\sin \alpha}{4c_4} [c_{3,1} (2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - 3c_{3,3} \cos^2 \alpha].$$

Sostituendo l'equazione dell'asintoto in quella delle frange si ottiene una equa-

zione lineare in  $g'$  che ci dà l'ulteriore punto d'intersezione della curva con l'asintoto, ossia il punto principale.

L'equazione è:

$$\begin{aligned} & \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2c_4} \left\{ (c_{2,2} - c_{2,0}) + \right. \\ & + \frac{1}{4c_4} [c_{3,1}(2 \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) - 3c_{3,3} \cos^2 \alpha] [c_{3,1}(\cos^2 \alpha - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha) + 3c_{3,3} \operatorname{sen}^2 \alpha] \left. \right\} g' + \\ & + \frac{\operatorname{sen}^3 \alpha}{4^3 c_4^3} [c_{3,1}(2 \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) - 3c_{3,3} \cos^2 \alpha]^2 [3 \cos^2 \alpha (3c_{3,1} - c_{3,3}) - \operatorname{sen}^2 \alpha (c_{3,1} - 3c_{3,3})] + \\ & + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{8c_4^2} [c_{3,1}(2 \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) - 3c_{3,3} \cos^2 \alpha] \left[ \left( c_{2,0} - \frac{y}{2D_0^2} \right) \cos^2 \alpha + \left( c_{2,2} - \frac{y}{2D_0^2} \right) \operatorname{sen}^2 \alpha \right] - \\ & - \frac{j}{4mD_0c_4} = 0. \end{aligned}$$

Espressione in generale assai complicata.

Esaminiamo però alcuni casi particolari.

Assenza di coma  $c_{3,1} = c_{3,3} = 0$ .

Allora si ha per le coordinate del fuoco straordinario

$$\bar{v}' = 0, \quad \bar{g}' = 0, \quad v'_{\text{as}} = 0$$

ossia esso è nell'origine, per dove passa pure l'asintoto.

Per il punto principale si ha

$$g_p = \frac{j}{2mD_0(c_{2,2} - c_{2,0}) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}$$

ossia esso è inversamente proporzionale all'astigmatismo longitudinale. In tal caso il punto principale è assai facilmente individuabile per il teorema di ECKARDT. Basterà descrivere dei cerchi col centro nell'origine e prolungare le corde degli archi sottesi dalle intersezioni con la curva finchè incontrino l'asintoto. Le corde devono incontrarsi tutte nel punto cercato. (Notare che per  $j=0$  anche  $g_p=0$ ).

Per  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  ( $45^\circ$ ) si ottiene

$$\begin{aligned} \bar{v}' &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{c_{3,1}}{4c_4} \\ \bar{g}' &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(c_{3,1} - 3c_{3,3})}{8c_4} \\ v'_{\text{as}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(c_{3,1} - 3c_{3,3})}{8c_4} \\ & \left[ (c_{2,2} - c_{2,0}) - \frac{(c_{3,1} - 3c_{3,3})^2}{16c_4} \right] g_p' + \frac{c_{3,1}(c_{3,1} - 3c_{3,3})^2}{32\sqrt{2}c_4^2} + \\ & + \frac{(c_{3,1} - 3c_{3,3}) \left( c_{2,0} + c_{2,2} - \frac{y}{D_0^2} \right)}{8\sqrt{2}c_4} - \frac{je_4}{mD_0} = 0 \end{aligned}$$

ossia :

$$\begin{aligned} \left[ (c_{2,2} - c_{2,0}) - \frac{\bar{g}'^2}{2} \right] g_p' + \frac{c_{3,1}}{4c_4} \frac{\bar{g}'^2}{2} + \left( c_{2,0} + c_{2,2} - \frac{y}{D_0^2} \right) g' - \frac{j}{mD_0} &= 0 \\ \left[ (c_{2,2} - c_{2,0}) - \frac{\bar{g}'^2}{2} \right] g_p' - \sqrt{2} \frac{\bar{l}'\bar{g}'^2}{2} + \left( c_{2,0} + c_{2,2} - \frac{y}{D_0^2} \right) g' - \frac{j}{mD_0} &= 0. \end{aligned}$$

Queste formule sono sufficienti per individuare tutti i coefficienti che ci interessano.

Infatti il fuoco straordinario può venir individuato sugli interferogrammi come quel punto che ha l'ordinata uguale all'ascissa dell'asintoto ( $\bar{g}' = l'_{as}$ ) e l'ascissa uguale a  $-\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{c_{3,1}}{4c_4}$ , valore che si può ricavare da misure fatte col reticolo a inclinazione  $a=0$  e  $a=\frac{\pi}{2}$ .

Il teorema di ECKARDT permette quindi d'individuare il punto principale. Allora le equazioni esposte determinano i coefficienti delle aberrazioni.

Abbiamo così raggiunto lo scopo propostoci, di riassumere le proprietà delle frange d'ombra nel caso generale, indipendentemente dal loro aspetto più o meno complicato che possono presentare nei vari casi, legando il valore delle aberrazioni alle proprietà intrinseche fondamentali della generabilità proiettiva delle frange stesse.

6. - Per completare lo studio, esamineremo le caratteristiche dei *luoghi* più importanti del complesso delle frange dei vari ordini.

Esaminiamo innanzi tutto il luogo delle tangenti parallele a  $l'$  (perpendicolari ai tratti del reticolo), esso corrisponde al luogo dei massimi di larghezza studiato dal Prof. RONCHI nel caso assiale (5). La sua equazione è

$$\begin{aligned} 3l'^2 + g'^2 + \frac{3}{2c_4} \operatorname{sen} \alpha (c_{3,1} \cos^2 \alpha + c_{3,3} \operatorname{sen}^2 \alpha) l' + \\ + \frac{\cos \alpha}{2c_4} [c_{3,1} (\cos^2 \alpha - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha) + 3c_{3,3} \operatorname{sen}^2 \alpha] g' + \\ + \frac{1}{2c_4} \left[ \left( c_{2,0} - \frac{y}{2D_0^2} \right) \cos^2 \alpha + \left( c_{2,2} - \frac{y}{2D_0^2} \right) \operatorname{sen}^2 \alpha \right] = 0; \end{aligned}$$

essa è l'equazione di un'ellisse con gli assi paralleli alle coordinate ( $l', g'$ ) col caratteristico rapporto 1 a  $\sqrt{3}$  degli assi già rilevato dal Prof. RONCHI e da me generalizzato nel caso di aberrazioni zonali di ordine superiore (6).

L'ellisse ruota dunque coi tratti del reticolo mantenendo sempre parallelo ad essi ( $g'$ ) il suo asse maggiore.

(5) VASCO RONCHI: *Sul comportamento e l'impiego delle frange d'ombra nella prova dei sistemi ottici*. Nuovo Cimento, 5, p. 752, 1927.

(6) FRANCESCO SCANDONE: *Sulla forma delle frange d'ombra dovute ad onde luminose affette da aberrazione zonale*. Nuovo Cimento, 7, N. 7, 1930.



Il centro dell'ellisse ha per coordinate

$$L_0' = -\frac{\operatorname{sen} \alpha}{4c_4} (c_{3,1} \cos^2 \alpha + c_{3,3} \operatorname{sen}^2 \alpha)$$

$$G_0' = -\frac{\cos \alpha}{4c_4} [c_{3,1} (\cos^2 \alpha - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha) + 3c_{3,3} \operatorname{sen}^2 \alpha] = \bar{g}'.$$

Analogamente si trova un luogo delle tangenti parallele a  $g'$  (parallele ai tratti del reticolo, di equazione:

$$2l'g' + \frac{\cos \alpha}{2c_4} [c_{3,1} (\cos^2 \alpha - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha) + 3c_{3,3} \operatorname{sen}^2 \alpha] l' +$$

$$+ \frac{\operatorname{sen} \alpha}{2c_4} [c_{3,1} (\operatorname{sen}^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha) + 3c_{3,3} \cos^2 \alpha] g' + \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2c_4} (c_{2,2} - c_{2,0}) = 0$$

che è manifestamente una iperbole equilatera cogli asintoti paralleli agli assi  $l', g'$  e quindi gli assi a  $45^\circ$  coi medesimi. Il centro dell'iperbole ha per coordinate

$$L_v' = -\frac{\operatorname{sen} \alpha}{4c_4} [c_{3,1} (\operatorname{sen}^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha) + 3c_{3,3} \cos^2 \alpha]$$

$$G_v' = -\frac{\cos \alpha}{4c_4} [c_{3,1} (\cos^2 \alpha - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha) + 3c_{3,3} \operatorname{sen}^2 \alpha] = \bar{g}'.$$

Nella nota del Prof. RONCHI sul caso assiale questo luogo non viene considerato perchè esso si riduce a  $l'g'=0$  ossia agli assi coordinati. Infatti  $g'=0$  è l'asintoto e tutte le frange tagliano verticalmente l'asse  $l'=0$ .

Si possono considerare altri due luoghi, uno delle tangenti parallele a  $l$  (perpendicolari al piano di simmetria del sistema ottico) e una delle tangenti parallele a  $g$  (parallele al piano di simmetria).

Il primo luogo ha per equazione:

$$3l^2 + 2 \operatorname{tg} \alpha l g + g^2 + \frac{c_{3,1}}{2c_4} \operatorname{tg} \alpha l + \frac{c_{3,1}}{2c_4} g + \frac{\left(c_{2,0} - \frac{y}{2D_0^2}\right)}{2c_4} = 0.$$

Essa è una ellisse o una iperbole a seconda che

$$\operatorname{tg}^2 \alpha \leq 3 \quad \text{ossia} \quad \alpha \leq \frac{\pi}{3} \quad (=60^\circ).$$

Il centro della conica è:

$$L_0 = 0, \quad G_0 = -\frac{c_{3,1}}{4c_4}$$

ossia è indipendente dall'orientazione del reticolo. Gli assi sono orientati secondo  $\frac{\alpha}{2}$  e  $\frac{\alpha + \pi}{2}$ .

I semiassi sono

$$\left. \begin{array}{l} \lambda^2 \\ \gamma^2 \end{array} \right\} = \frac{2 \left( c_{2,2} - \frac{y}{2D_0^2} \right) - c_{3,1}^2}{4c_4(3 - \operatorname{tg}^2 \alpha)} (-2 \mp \sec \alpha)$$

che per  $\alpha=0$  dà gli assi noti nel rapporto 1 a  $\sqrt{3}$ . È da notare che la conica può anche essere immaginaria, nel qual caso essa manca totalmente nell'interferogramma.

Il luogo delle tangenti parallele al piano di simmetria è

$$l^2 + 2 \cotg \alpha g + 3g^2 + \frac{c_{3,1}}{2c_4} \cotg \alpha l + \frac{3c_{3,3}}{2c_4} g + \frac{(c_{2,2} - \frac{y}{2D_0^2})}{2c_4} = 0$$

che è una elisse, una coppia di rette o una iperbole a seconda che  $\alpha \cong \frac{\pi}{6}$  ( $30^\circ$ ).

Gli assi sono orientati a  $90^\circ$  con quelli della conica precedente e cioè a  $\alpha + \frac{3\pi}{4}$  ed  $\alpha + \frac{5\pi}{4}$ .

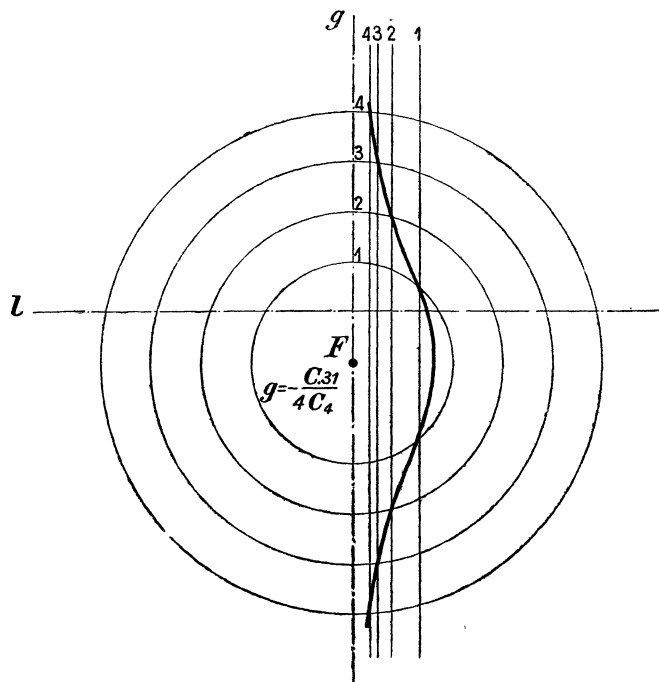


Fig. 1.

Le coordinate del centro sono

$$L_v = \frac{3(c_{3,3} - c_{3,1})}{4c_4(3 - \tg^2 \alpha)} \cotg \alpha$$

$$G_v = - \frac{3(c_{3,3} - c_{3,1}) \cotg^2 \alpha}{4c_4(3 - \cotg^2 \alpha)}$$

Rimane così esaurito anche lo studio dei luoghi notevoli del complesso delle frange.

Termino presentando le fig. 1 e 2 che mostrano la generazione proiettiva delle frange nei due casi che si possono presentare per  $\alpha=0$  o  $\alpha=\frac{\pi}{2}$ . L'aspetto della fig. 1 si ha quando nell'equazione parametrica che rappresenta il fascio parallelo di rette non vi è mai alcuna singolarità (il coefficiente di  $l$  non si annulla mai),

L'aspetto della fig. 2 si ha quando tale singolarità esiste.

Si ritrovano le cubiche caratteristiche osservabili anche sull'asse.

Introducendo una rotazione, il punto principale viene a distanza finita e le frange si distorcono. La frangia d'ordine zero diviene una serpentina passante

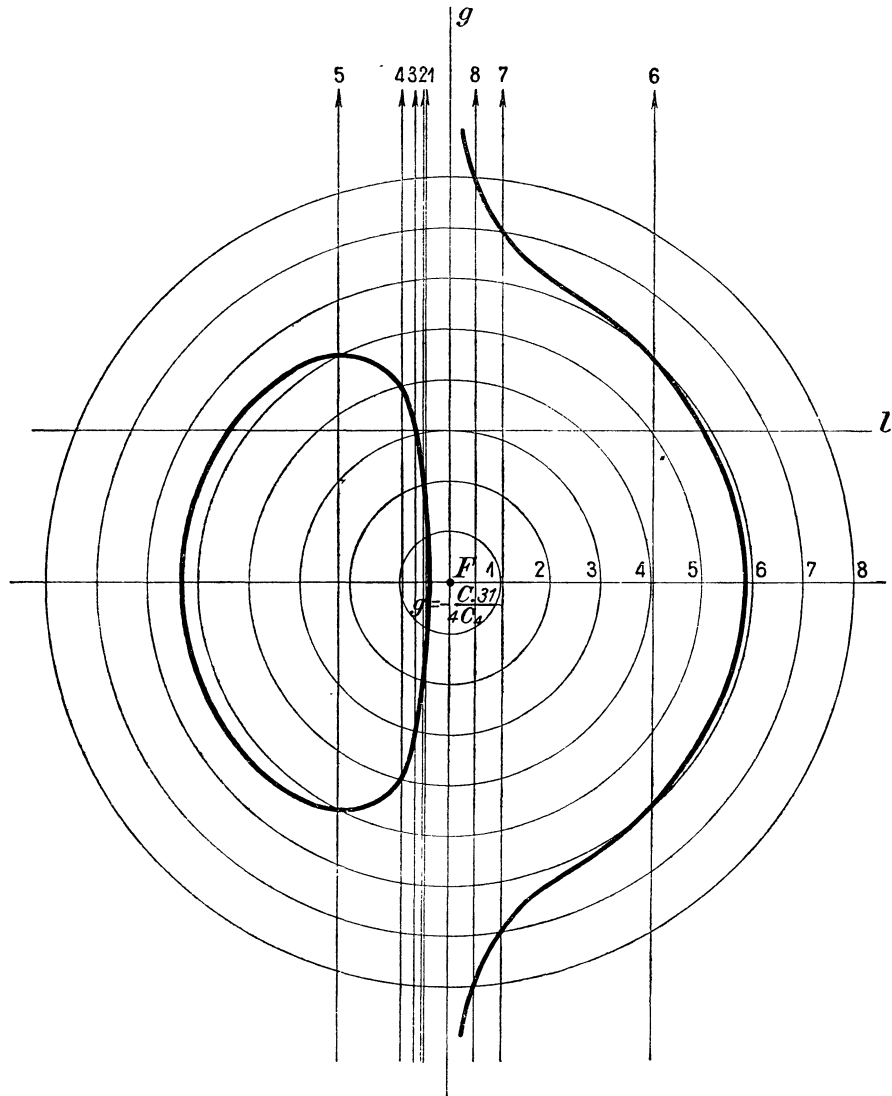


Fig. 2.

per l'origine, come si può facilmente vedere dalla sua equazione, e le altre frange ne seguono l'andamento. L'aspetto che si vede è quello delle fig. 58, p. 98 del volume del Prof. RONCHI: *La prova dei sistemi ottici* (1).

(1) Bologna, Zanichelli, 1925.