Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Waclaw Sierpiński

Sur un problème de la théorie des relations

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 2, nº 3 (1933), p. 285-287

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1933_2_2_3_285_0>

SUR UN PROBLÈME DE LA THÉORIE DES RELATIONS

par WACLAW SIERPIŃSKI (Warszawa).

Le but de cette Note est de résoudre le problème suivant, posé récemment par M. KNASTER:

Existe-t-il une relation symétrique R, dont le champ E est non dénombrable, telle que dans tout sous-ensemble non dénombrable de E existent deux éléments différents α et β, tels que $\alpha R\beta$, et deux éléments différents γ et δ, tels que γ non $R\delta$.

Nous prouverons (à l'aide de l'axiome du choix) que *la réponse y est affirmative.*

Soit, en effet, E l'ensemble de tous les nombres ordinaux de première et de seconde classe de CANTOR. De l'axiome du choix résulte, comme on sait, qu'il existe une correspondance d'après laquelle à tout nombre ordinal $\alpha < \Omega$ correspond un nombre réel $r(\alpha)$, tel que $r(\alpha) \neq r(\beta)$, si $\alpha \neq \beta$.

Nous définirons maintenant dans le champ E la relation R par la convention suivante: nous dirons que deux éléments différents de E, α et β, sont en relation R, en écrivant

$$\alpha R\beta, \tag{1}$$

dans ce et seulement dans ce cas, où

$$r(\min(\alpha, \beta)) < r(\max(\alpha, \beta))$$

($\min(\alpha, \beta)$ et $\max(\alpha, \beta)$ désignant le plus petit, respectivement le plus grand de deux nombres ordinaux α et β).

Notre relation R est évidemment symétrique.

Nous prouverons qu'elle jouit des propriétés désirées.

Soit donc N un sous-ensemble non dénombrable de E. L'ensemble $r(N)$ de tous les nombres réels $r(\xi)$, tels que $\xi \varepsilon N$, est donc non dénombrable. Par conséquent il existe dans $r(N)$ des nombres $r(\alpha)$ et $r(\delta)$ tels, qu'il existe dans N une infinité non dénombrable N_1 d'éléments ξ, pour lesquels $r(\xi) > r(\alpha)$ et une infinité non dénombrable N_2 d'éléments ξ, pour lesquels $r(\xi) < r(\delta)$.

L'ensemble de tous les nombres ordinaux $\leqslant \alpha$ étant au plus dénombrable (puisque $\alpha < \Omega$), il existe dans N_1 un nombre ordinal $\beta > \alpha$. On a donc $\min(\alpha, \beta) = \alpha$

et max $(\alpha, \beta) = \beta$. Or, d'après $\beta \varepsilon N_1$ et d'après la définition de l'ensemble N_1, on a $r(\alpha) < r(\beta)$. On a donc la formule (2) qui prouve que $\alpha R \beta$.

Or, l'ensemble de tous les nombres ordinaux $\leqslant \delta$ étant au plus dénombrable, il existe dans N_2 un nombre $\gamma > \delta$: on a donc min $(\gamma, \delta) = \delta$ et max $(\gamma, \delta) = \gamma$; or, d'après la définition de l'ensemble N_2, on a $r(\gamma) < r(\delta)$. On a donc

$$r(\max(\gamma, \delta)) < r(\min(\gamma, \delta)),$$

ce qui prouve que γ non $R\delta$.

Notre assertion est ainsi démontrée.

Il me semble difficile à résoudre le problème de M. KNASTER pour un champ E dont la puissance est $> \aleph_1$ (par exemple pour $\overline{\overline{E}} = \aleph_2$).

Or, il est à remarquer que:

Il n'existe aucune relation symétrique R, dont le champ E est infini, telle que dans tout sous-ensemble infini de E il existe deux éléments différents a et b, tels que aRb et deux éléments différents c et d, tel que c non *Rd* (¹).

Soit, en effet, R une relation symétrique, dont le champ E est infini. Distinguons deux cas.

1) Il existe un sous-ensemble infini E_1 de E, tel que pour tout élément a de E_1 la relation aRx a lieu seulement pour un nombre fini (ou nul) d'éléments x de E_1.

Nous définirons par l'induction une suite infinie $a_1, a_2, a_3, \ldots$ d'éléments différents de E_1 et une suite infinie $E_2, E_3, \ldots$ de sous-ensembles infinis de E_1 comme il suit.

Soit a_1 un élément quelconque de E_1. Supposons maintenant que nous avons déjà défini l'élément a_n et le sous-ensemble E_n de E_1. D'après notre hypothèse l'ensemble de tous les éléments x de E_1, tels que $a_n R x$ est fini (ou vide); l'ensemble de tous les éléments x de E_n, autres que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et tels que a_n non Rx est donc infini: nous le désignerons par E_{n+1} et nous prendrons comme a_{n+1} un élément quelconque de E_{n+1}.

On a évidemment $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots$ et il en résulte tout de suite (d'après $a_n \varepsilon E_n$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$) que a_n non Ra_{n+k} pour n et k naturels. Donc, la relation R n'a pas lieu entre aucuns deux éléments différents de la suite infinie $a_1, a_2, \ldots$

2) L'hypothèse 1) n'a pas lieu.

Dans ce cas il est évident que quel que soit le sous-ensemble infini E_0 de E, il existe dans E_0 un élément a tel que la relation aRx a lieu pour une infinité des éléments x de E_0.

Nous définirons par l'induction une suite infinie d'éléments $a_1, a_2, a_3, \ldots$ et une suite infinie $E_1, E_2, E_3, \ldots$ de sous-ensembles infinis de E comme il suit.

Il résulte tout de suite de notre hypothèse qu'il existe un élément a_1 de E

(¹) J'apprends que ce théorème était aussi connu à M. A. LINDENBAUM.

et un sous-ensemble infini E_1 de E ne contenant pas a_1, tels que la relation $a_1 R x$ a lieu pour tout élément x de E_1.

Supposons maintenant que nous avons déjà défini l'élément a_n et le sous--ensemble infini E_n de E. D'après notre hypothèse il existe dans E_n un élément a_{n+1} et un sous-ensemble infini E_{n+1} de E_n ne contenant pas les éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$, tel que $a_{n+1} R x$ pour tout élément x de E_{n+1}. Les suites infinies $a_1, a_2, a_3, \ldots$ et $E_1, E_2, E_3, \ldots$ sont ainsi définies par l'induction et on a évidemment $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots$, d'où résulte sans peine (d'après $a_{n+1} \varepsilon E_n$) que $a_n R a_{n+k}$ pour n et k naturels. La relation R a donc lieu pour deux éléments quelconques de la suite infinie $a_1, a_2, a_3, \ldots$

Nous avons ainsi démontré que, quel que soit la relation symétrique R dont le champ E est infini, il existe dans E une suite infinie d'éléments différents, telle que ou bien la relation R a lieu entre deux termes différents quelconques de cette suite, ou bien la relation R n'a pas lieu entre aucuns deux termes de cette suite

Notre assertion est ainsi démontrée.