ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GUIDO FUBINI

Su un teorema di confronto per le equazioni del secondo ordine alle derivate ordinarie

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 2, no 3 (1933), p. 283-284
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1933_2_2_3_283_0>

SU UN TEOREMA DI CONFRONTO PER LE EQUAZIONI DEL SECONDO ORDINE ALLE DERIVATE ORDINARIE

di GUIDO FUBINI (Torino).

Se nell' equazione

$$(1) \qquad y''+py'+qy=0 \qquad (p,\ q \text{ funzioni della } x \text{ finite e continue})$$

poniamo $y=\lambda z$, troviamo, se $\lambda \neq 0$ è derivabile:

$$(2) \qquad z''+p_1 z'+q_1 z=0 \qquad \left(p_1=p+2\frac{\lambda'}{\lambda},\ q_1=q+p\frac{\lambda'}{\lambda}+\frac{\lambda''}{\lambda}\right).$$

Posto

$$(3) \qquad j=2p'+p^2-4q, \qquad j_1=2p_1'+p_1^2-4q_1 \qquad (\text{se } p \text{ ammette derivata})$$

ne deduciamo $j=j_1$; cosicchè la j è un invariante (per la trasformazione $y=\lambda z$). Sia data un' altra equazione analoga

$$(4) \qquad Y''+P(x)Y'+Q(x)Y=0$$

e il suo invariante $I=2P'+P^2-4Q$ soddisfi alla

$$(5) \qquad I<j \qquad (\text{per } a \leq x \leq b).$$

Esista una soluzione $y(x)$ della (1) nulla per $x=a$, $x=b$ e di segno invariabile per $a<x<b$; ed esista una soluzione Y della (4) non nulla in tutto l'intervallo $a \leq x \leq b$, *estremi inclusi.* Proveremo che ciò è assurdo.

Intanto potremo rendere $p_1=P$, ponendo

$$\lambda=e^{\frac{1}{2}\int (P-p)dx} \qquad (\text{se esistono le } P'',\ p'').$$

E potremo, cambiando, se necessario, y in $-y$ ed Y in $-Y$, supporre che per $a \leq x \leq b$ sia $Y>0$, e per $a<x<b$ sia $y>0$ e quindi anche $z>0$. Invece per $x=a$, $x=b$, la z, come la y, si annulleranno.

Se c è una costante, la curva $y=cz(x)$ soddisfa alla (2); cioè

$$(2)_{\text{bis}} \qquad (cz)''+p_1(cz)'+q_1(cz)=0.$$

E se noi, partendo dal valore $c=0$, diamo alla c valori positivi crescenti, finiremo col trovare un *primo* valore di c, per cui la curva $y=cz(x)$, che passa per i punti dell' asse delle x di ascissa a oppure b, ha un punto comune con la curva $y = Y(x)$. In tale punto le due curve evidentemente si toccheranno; $Y - y$ sarà nulla ed avrà un minimo. Cosicchè in tale punto

$$Y = cz; \qquad Y' = cz'; \qquad Y'' - cz'' \geqslant 0.$$

Ora, essendo $p_1 = P$, dalle $(2)_{\mathrm{bis}}$, (4) si trae:

$$(Y - cz)'' + (Q - q_1)Y = 0$$

ossia

$$(Y - cz)'' = (q_1 - Q)Y = \frac{1}{4}(I - j_1)Y = \frac{1}{4}(I - j)Y.$$

Essendo $Y > 0$, si deduce dalla (5) che il primo membro è negativo, contrariamente a quanto abbiamo già osservato.

Deduciamo da questa contraddizione:

Se l'invariante della (4) *è nell'intervallo* $a \leqslant x \leqslant b$ *minore di quello della* (1) *e se questa possiede una soluzione per cui* a, b *sono due zeri consecutivi, allora ogni soluzione della* (4) *ammette uno zero almeno appartenente all'intervallo* (a, b).

Il metodo qui usato è affatto analogo a quello usato dal TONELLI nel Boll. dell'Un. Mat. Italiana (1927) per lo studio delle soluzioni di una stessa equazione (1) ed è forse ancora più generale perchè non invoca la validità di alcun teorema di unicità, e si basa sul teorema relativo al minimo di una funzione di una sola variabile.

Resta da vedere se questo metodo sia anche applicabile ad equazioni non lineari, e se, invece di ricorrere al fascio di soluzioni $y = cz$ ($c = \text{cost.}$), si possa ricorrere, in casi più generali, ad altri sistemi di ∞^1 soluzioni; e io credo che lo stesso metodo sia applicabile anche in problemi relativi ad equazioni alle derivate parziali.