

ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

EDMUND LANDAU

Eine Frage über trigonometrische Polynome

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2^e série, tome 2, n° 2
(1933), p. 209-210

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1933_2_2_2_209_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1933, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze* » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EINE FRAGE ÜBER TRIGONOMETRISCHE POLYNOME

Von EDMUND LANDAU (Göttingen).

Vor langer Zeit (vergl. mein Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, S. 245-258 und S. 891-893, sowie zwei ältere dort zitierte Arbeiten von mir) interessierte mich (wegen einer zahlentheoretischen Anwendung) folgende Frage.

Es sei $n \geq 2$ ganz. Welches ist die untere Grenze P_n von

$$\frac{\sum_{\nu=0}^n a_\nu}{a_1 - a_0}$$

für alle Funktionen

$$g(\varphi) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu \cos \nu\varphi$$

mit

$$0 < a_0 < a_1, \quad a_\nu \geq 0 \quad \text{für} \quad 2 \leq \nu \leq n,$$

die für alle reellen φ der Bedingung

$$g(\varphi) \geq 0$$

genügen?

Offenbar ist

$$P_{n+1} \leq P_n \quad \text{für} \quad n \geq 2.$$

Ich zeigte damals

$$P_2 \leq 7$$

durch das Beispiel

$$g(\varphi) = 17 + 24 \cos \varphi + 8 \cos 2\varphi = (3 + 4 \cos \varphi)^2$$

und

$$P_3 \leq 6$$

durch das Beispiel

$$g(\varphi) = 5 + 8 \cos \varphi + 4 \cos 2\varphi + \cos 3\varphi = (1 + \cos \varphi)(1 + 2 \cos \varphi)^2.$$

Ich bewies ferner auf zwei Seiten

$$P_2 \geq 7$$

(also $P_2=7$), erwähnte (S. 190 der auf S. 891 zitierten Arbeit 34) ohne Angabe des langwierigen Beweises, dass sich

$$P_3 \geq 6$$

(also $P_3=6$) beweisen lässt, konnte aber P_n für kein $n > 3$ bestimmen.

Heute werde ich auf einer Zeile

$$P_2 \geq 7,$$

auf drei Zeilen

$$P_5 \geq 6,$$

also

$$P_3 = P_4 = P_5 = 6$$

beweisen. Es ist erstaunlich, wie wenig von den Voraussetzungen zum Nachweis der Behauptungen gebraucht wird, die offenbar

$$(1) \quad 8a_0 - 6a_1 + a_2 \geq 0 \quad \text{für } n=2,$$

$$(2) \quad 7a_0 - 5a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \geq 0 \quad \text{für } n=5$$

lauten.

Beweis von (1):

$$8a_0 - 6a_1 + a_2 = 8g\left(\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right) \geq 0.$$

Beweis von (2):

$$\begin{aligned} & 7a_0 - 5a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\ & \geq 3(a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5) + 4\left(a_0 - \frac{1}{2}a_1 - \frac{1}{2}a_2 + a_3 - \frac{1}{2}a_4 - \frac{1}{2}a_5\right) \\ & = 3g(\pi) + 4g\left(\frac{2\pi}{3}\right) \geq 0. \end{aligned}$$

Die Schwierigkeit fängt also erst bei $n=6$ an. Herr SCHUR (Handbuch, S. 251-252) hatte

$$P_6 \leq \frac{648}{109} (< 6),$$

Herr TOEPLITZ (Handbuch, S. 891-893) hatte

$$P_6 > 5,49$$

bewiesen. Die Bestimmung von P_6 lässt sich in endlicher Zeit erzwingen. Vielleicht gelingt sie einem Leser auf wenigen Zeilen oder wenigen Seiten.