ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ANGELO TONOLO

Sui sistemi isostatici con sforzi costanti di un mezzo elastico in equilibrio

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 1, nº 3 (1932), p. 277-282

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1932_2_1_3_277_0>

SUI SISTEMI ISOSTATICI CON SFORZI COSTANTI DI UN MEZZO ELASTICO IN EQUILIBRIO

di ANGELO TONOLO (Padova).

È noto che in ogni punto di un mezzo elastico in equilibrio, esistono sempre tre elementi piani ortogonali sollecitati normalmente dalle forze elastiche. Da questo fatto, non è lecito però asserire, come faceva LAMÉ ([1]), l'esistenza di un *sistema isostatico di superficie* (o più semplicemente, di un *sistema isostatico*), vale a dire di un triplo sistema di superficie mutuamente ortogonali dotate della proprietà fondamentale di essere sollecitate normalmente dalle forze elastiche.

WEINGARTEN ([2]) per il primo rilevò questo errore, e determinò le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza nel solido di un siffatto sistema.

Chiarito questo punto, resta pur sempre la grande importanza che ha nello studio dell'equilibrio elastico la conoscenza di sistemi isostatici che eventualmente il corpo può ammettere. Risulta infatti che ai diversi tipi di siffatti sistemi corrispondono casi di equilibrio notevoli per la legge che presiede alla distribuzione degli sforzi che si esercitano nel mezzo. Pertanto è ben degno di attenzione il problema di determinare tutti i possibili sistemi isostatici di un corpo elastico isotropo in equilibrio in assenza di forze di massa. A mia conoscenza questa quistione fu posta soltanto dal VITERBI, che comunicò i risultati in una Nota preventiva dei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei ([3]). Però, come l'Autore stesso ebbe a riconoscere, le conclusioni non sono totalmente esatte, onde il problema in discorso non ebbe completa soluzione.

Ho ripreso questo studio in particolare, limitandomi nella presente Nota a determinare tutti i sistemi isostatici le cui superficie sono soggette a sforzi che sono invariabili col mutare del punto al quale si riferiscono. Le conclusioni cui sono giunto sono:

a) Se i tre sforzi in discorso sono fra loro diversi, si ha un solo tipo di

---

([1]) G. LAMÉ: *Leçons sur les coordonnées curvilignes.* (Quinzième leçon, § CXLVIII).

([2]) J. WEINGARTEN: *Zur theorie der isostatischen Flächen.* (Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band XC (1880)).

([3]) A. VITERBI: *Sui casi d'equilibrio di un corpo elastico isotropo che ammettono sistemi isostatici di superficie.* (Rend. R. Accademia dei Lincei, vol. X, 1° sem. (1901)).

sistema isostatico, il quale è costituito da tre piani (mutuamente ortogonali), e gli sforzi non sono soggetti a nessuna restrizione.

b) Se due sforzi sono eguali, e distinti dal terzo, si ha pure un solo tipo di sistema isostatico, costituito da due famiglie di cilindri ortogonali (normalmente ai quali si sviluppano i due sforzi eguali) con le generatrici perpendicolari alla terza famiglia isostatica formata da piani paralleli, e sulla quale si sviluppa il terzo sforzo. Anche in tal caso gli sforzi non sono soggetti a nessun vincolo

c) Se i tre sforzi sono fra loro eguali, il sistema isostatico può essere qualunque, nel senso che non è soggetto ad alcuna restrizione, come pure lo sforzo che si sviluppa normalmente alle superficie del sistema.

1. - Preliminari. — Sia S un corpo elastico isotropo in equilibrio in assenza di forze di massa che ammette un sistema isostatico di superficie, i cui parametri indicheremo con x_1, x_2, x_3, e i cui sforzi con θ_1, θ_2, θ_3. In modo preciso θ_h indica lo sforzo unitario che si sviluppa normalmente alla superficie $x_h=\text{cost.}$ Introduciamo le nove *rotazioni di Ricci* γ_{hkl} (4) relative alle congruenze di linee costituite dalle reciproche intersezioni delle superficie isostatiche. Conviene, nel caso nostro, liberarsi dalla notazione a tre indici, e introdurre quella a due indici soltanto, ponendo

$$\varrho_{hk}=\gamma_{h+1\,h+2\,k}\,.$$

Sia, con referenza alle superficie $x_h=\text{cost.}$,

$$ds^2=H_1^2dx_1^2+H_2^2dx_2^2+H_3^2dx_3^2 \tag{1}$$

l'espressione del quadrato dell'elemento lineare dello spazio occupato dal corpo S. Abbiamo:

$$\varrho_{hh}=0, \qquad \varrho_{hh+1}=-\frac{1}{H_{h+1}}\frac{dH_{h+1}}{d\sigma_{h+2}}, \qquad \varrho_{hh+2}=\frac{1}{H_{h+2}}\frac{dH_{h+2}}{d\sigma_{h+1}}, \tag{2}$$

avendo indicato con $d\sigma_h$ l'elemento d'arco della linea che appartiene alla congruenza $x_{h+1}=\text{cost.}$, $x_{h+2}=\text{cost.}$, che denoteremo col simbolo $[h]$. Le equazioni di LAMÉ di equilibrio del corpo S sono allora le seguenti (5):

$$\frac{d\theta_h}{d\sigma_h}+(\theta_h-\theta_{h+1})\varrho_{h+2\,h+1}+(\theta_{h+2}-\theta_h)\varrho_{h+1\,h+2}=0. \tag{3}$$

A queste equazioni vanno aggiunte quelle (di LAMÉ) che vincolano fra loro le funzioni H_h, e che traducono il fatto che il nostro ds^2 è euclideo, e poi quelle

(4) Ora, e nel seguito, converremo che ogni indice apposto ad una lettera debba assumere i valori 1, 2, 3 successivamente. Converremo ancora di ritenere equivalenti gli indici che differiscono fra loro per tre, o per multipli di tre.

(5) G. LAMÉ: *Leçons.* (Quinzième leçon, § CXLVII). — A. TONOLO: *Forma intrinseca delle equazioni di equilibrio dei corpi elastici isotropi.* (Rend. R. Accademia dei Lincei, vol. XI, serie 6 (1930)).

di SAINT-VENANT, scritte nelle coordinate curvilinee x_h, e che legano fra loro i tre sforzi θ_h, e le funzioni H_h.

2. - Sistemi isostatici i cui sforzi θ_h sono costanti. — Si supponga che gli sforzi θ_h, pure variando coll'indice h siano invece invariabili rispetto al punto al quale si riferiscono. In tal caso le equazioni (3) diventano

$$(\theta_h-\theta_{h+1})\varrho_{h+2h+1}+(\theta_{h+2}-\theta_h)\varrho_{h+1h+2}=0. \tag{A}$$

A queste equazioni (A) associamo quelle che caratterizzano che il il nostro ds^2 è euclideo: conviene però scriverle facendovi figurare le rotazioni ϱ_{hk}. Esse sono

$$\text{(B)}\quad \begin{aligned} &\frac{d\varrho_{hh+1}}{d\sigma_{h+2}}-\frac{d\varrho_{hh+2}}{d\sigma_{h+1}}+\varrho_{h+1h+2}\varrho_{h+2h+1}-\varrho_{hh+1}^2-\varrho_{hh+2}^2=0,\\ &\frac{d\varrho_{h+1h+2}}{d\sigma_{h+1}}=-\varrho_{hh+2}(\varrho_{h+1h+2}+\varrho_{h+2h+1}),\end{aligned}$$

oppure

$$\frac{d\varrho_{h+2h+1}}{d\sigma_{h+2}}=\varrho_{hh+1}(\varrho_{h+2h+1}+\varrho_{h+1h+2}).$$

A questi due gruppi (A) e (B), aggiungiamo le equazioni di SAINT-VENANT, le quali nel caso nostro, si riducono a tre soltanto, e scritte per mezzo delle rotazioni ϱ_{hk}, sono:

$$(\theta_h-\theta_{h+1})\left(\frac{d\varrho_{hh+2}}{d\sigma_{h+1}}+\varrho_{hh+2}^2\right)+(\theta_{h+2}-\theta_h)\left(\frac{d\varrho_{hh+1}}{d\sigma_{h+2}}-\varrho_{hh+1}^2\right)=0. \tag{C}$$

Studiamo separatamente i tre casi: *a*) le θ_h sono fra loro diverse; *b*) due delle θ_h sono eguali, e distinte dalla terza; *c*) le θ_h sono fra loro eguali.

CASO *a*). *I tre sforzi θ_h sono diversi fra loro.* Conviene porre

$$\mu_h=\theta_h-\theta_{h+1}\neq 0, \tag{4}$$

$$\varrho_{h+1h+2}=-\varrho_h. \tag{5}$$

Allora le (A) dànno

$$\varrho_{h+2h+1}=\frac{\mu_{h+2}}{\mu_h}\varrho_h. \tag{6}$$

Le equazioni del gruppo (B) diventano:

$$\frac{d\varrho_{h+2}}{d\sigma_{h+2}}+\frac{\mu_h}{\mu_{h+1}}\frac{d\varrho_{h+1}}{d\sigma_{h+1}}+\frac{\mu_{h+2}}{\mu_h}\varrho_h^2+\left(\frac{\mu_h}{\mu_{h+1}}\varrho_{h+1}\right)^2+\varrho_{h+2}^2=0,$$

$$\frac{d\varrho_h}{d\sigma_{h+1}}=\frac{\mu_{h+2}-\mu_h}{\mu_{h+1}}\varrho_h\varrho_{h+1},$$

oppure

$$\frac{d\varrho_h}{d\sigma_{h+2}}=\frac{\mu_h-\mu_{h+2}}{\mu_{h+2}}\varrho_h\varrho_{h+2}.$$

Vedremo che non occorre effettuare la trasformazione del gruppo (C). Pigliamo in considerazione i due gruppi di equazioni

$$\frac{d\varrho_h}{d\sigma_{h+1}}=\frac{\mu_{h+2}-\mu_h}{\mu_{h+1}}\varrho_h\varrho_{h+1},\qquad \frac{d\varrho_h}{d\sigma_{h+2}}=\frac{\mu_h-\mu_{h+2}}{\mu_{h+2}}\varrho_h\varrho_{h+2}, \tag{7}$$

e scriviamone le condizioni di integrabilità.

A tale scopo deriviamo la prima equazione rispetto all'arco σ_{h+2}, e la seconda rispetto all'arco σ_{h+1}, e poi sottraghiamo le equazioni ottenute. La differenza delle derivate seconde

$$\frac{d^2\varrho}{d\sigma_{h+2}\,d\sigma_{h+1}}-\frac{d^2\varrho_h}{d\sigma_{h+1}\,d\sigma_{h+2}},$$

per formula nota, è eguale a

$$-(\varrho_{h+1h+1}+\varrho_{h+2h+2})\frac{d\varrho_h}{d\sigma_h}+\varrho_{hh+1}\frac{d\varrho_h}{d\sigma_{h+1}}+\varrho_{hh+2}\frac{d\varrho_h}{d\sigma_{h+2}},$$

cioè, nel caso nostro (si ricordi che $\varrho_{hh}=0$), è eguale a

$$\varrho_{hh+1}\frac{d\varrho_h}{d\sigma_{h+1}}+\varrho_{hh+2}\frac{d\varrho_h}{d\sigma_{h+2}}.$$

Concludiamo che l'equazione che si ottiene per derivazione ed eliminazione delle derivate seconde, contiene le μ_h, ϱ_h e $\frac{d\varrho_h}{d\sigma_k}$ con $h\neq k$. Allora queste derivate prime si possono pure eliminare in forza delle equazioni (7). Dopo qualche riduzione, si trova che le condizioni di integrabilità in discorso sono

$$(\theta_{h+1}+\theta_{h+2}-2\theta_h)(\theta_{h+2}-\theta_{h+1})\varrho_h\varrho_{h+1}\varrho_{h+2}=0.$$

Ora non può aversi per ogni valore dell'indice h

$$\theta_{h+1}+\theta_{h+2}-2\theta_h=0,$$

e nemmeno, beninteso, $\theta_{h+2}-\theta_{h+1}=0$ perchè i tre sforzi θ_h sono diversi fra loro. Quindi dobbiamo concludere che almeno una delle ϱ_h deve essere nulla. Per fissare le idee, sia $\varrho_1=0$. In tale ipotesi il primo gruppo delle equazioni (B) diventa

$$\begin{aligned}
&\frac{d\varrho_3}{d\sigma_3}+\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{d\varrho_2}{d\sigma_2}+\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\varrho_2\right)^2+\varrho_3^2=0,\\
&\frac{\mu_2}{\mu_3}\frac{d\varrho_3}{d\sigma_3}+\frac{\mu_1}{\mu_2}\varrho_2^2+\left(\frac{\mu_2}{\mu_3}\varrho_3\right)^2=0,\\
&\frac{d\varrho_2}{d\sigma_2}+\frac{\mu_2}{\mu_3}\varrho_3^2+\varrho_2^2=0.
\end{aligned}$$

Surrogando nella prima equazione le espressioni delle derivate $\frac{d\varrho_2}{d\sigma_2}$, $\frac{d\varrho_3}{d\sigma_3}$ ricavate dalle altre due equazioni, si ottiene

$$\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\varrho_2\right)^2+\varrho_3^2=0.$$

Concludiamo che deve essere anche

$$\varrho_2=0,\qquad \varrho_3=0.$$

Abbiamo pertanto ottenuto $\varrho_1=\varrho_2=\varrho_3=0$. Adunque tre rotazioni devono annullarsi, e le (6) ci dicono che devono annullarsi anche le altre tre. Le congruenze $[h]$ hanno nulle tutte le rotazioni ϱ_{hk}. Le (2) ci dànno allora

$$H_h=\varphi(x_h).$$

Cambiando parametri x_h, senza cambiare le linee stesse, e continuando ad indicarli con le stesse lettere, il nostro ds^2 assume la forma

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2.$$

Le superficie isostatiche $x_h = \text{cost.}$ sono pertanto piani mutuamente ortogonali.

Le equazioni (C) di SAINT-VENANT, per l'annullarsi di tutte le rotazioni ϱ_{hk}, sono identicamente soddisfatte qualunque sia il valore degli sforzi θ_h. I nostri ragionamenti portano quindi alla conclusione seguente:

In un mezzo elastico isotropo in equilibrio in assenza di forze di massa, vi può essere un solo tipo di sistema isostatico sulle superficie del quale si sviluppano sforzi costanti e fra loro diversi. Esso è costituito di tre piani, mutuamente ortogonali, i quali possono sopportare sforzi di qualsiasi valore.

CASO *b*). *Due sforzi θ_h sono eguali, e diversi dal terzo.* Per fissare le idee si supponga $\theta_1 = \theta_2 \neq \theta_3$. Allora, poichè $\theta_1 - \theta_3 \neq 0$ e $\theta_2 - \theta_3 \neq 0$, le equazioni (A) dànno subito

$$\varrho_{13} = 0, \qquad \varrho_{23} = 0, \qquad \varrho_{12} = \varrho_{21}.$$

Dal primo gruppo delle (B) si ricava

$$\frac{d\varrho_{12}}{d\sigma_3} - \varrho_{12}^2 = 0, \qquad -\frac{d\varrho_{21}}{d\sigma_3} - \varrho_{21}^2 = 0.$$

E quindi anche $\varrho_{12} = \varrho_{21} = 0$. Adunque la congruenza [3] è normale ($\varrho_{11} = \varrho_{22} = 0$), isotropa ($\varrho_{12} + \varrho_{21} = 0$), geodetica ($\varrho_{13} = \varrho_{23} = 0$).

Tali congruenze sono di due tipi soltanto:

1°) Rette concorrenti in un punto (proprio).

2°) Rette parallele.

Ne segue che le superficie isostatiche $x_3 = \text{cost.}$, o sono sfere concentriche, o sono piani paralleli.

Ma dobbiamo escludere il caso delle sfere. Infatti per l'annullarsi delle ϱ_{12}, ϱ_{21} segue dalle (2) che H_1 e H_2 sono funzioni soltanto delle variabili x_1, x_2, mentre l'annullarsi delle ϱ_{13} e ϱ_{23} ci assicura che H_3 è funzione della sola variabile x_3. Cangiando allora questo parametro, che continueremo ad indicarlo con la stessa lettera, il nostro ds^2 assume la forma

$$ds^2 = H_1^2 dx_1^2 + H_2^2 dx_2^2 + dx_3^2.$$

Ora dal gruppo (B) per $h = 3$ si ricava

$$\frac{d\varrho_{32}}{d\sigma_1} - \frac{d\varrho_{31}}{d\sigma_2} + \varrho_{31}^2 + \varrho_{32}^2 = 0 \tag{8}$$

la quale, per la formula di LIOUVILLE, ci dice che le superficie $x_3 = \text{cost.}$ hanno nulla la curvatura gaussiana. Pertanto queste superficie non possono essere sfere.

Le superficie isostatiche $x_3 = \text{cost.}$ sono quindi piani paralleli. Allora è noto ([6]) che ogni sistema di superficie triplamente ortogonale si completa con l'aggiunta di due famiglie di cilindri ortogonali con le generatrici perpendicolari ai piani e aventi per direttrici due famiglie di curve ortogonali tracciate sopra un fissato piano, ma del resto qualunque, del sistema $x_3 = \text{cost.}$ Questo è l'unico tipo di sistema isostatico che può esistere nel mezzo elastico dotato di sforzi costanti, dei quali due sono eguali fra loro, e diversi dal terzo. Notiamo che anche in tal caso le equazioni (C) di SAINT-VENANT si riducono a pure identità, qualunque sia il valore degli sforzi. Per $h = 1$, 2, ciò è manifesto, e per $h = 3$ in virtù della (8). I ragionamenti fatti portano a concludere quanto segue:

In un mezzo elastico isotropo in equilibrio in assenza di forza di massa, vi può essere un solo tipo di sistema isostatico sulle cui superficie si esercitano sforzi costanti, dei quali due sono eguali, e distinti dal terzo. Questo sistema è costituito di una famiglia di piani paralleli (normalmente ai quali si sviluppa lo sforzo diverso dagli altri due) e di due famiglie di cilindri ortogonali con le generatrici perpendicolari ai suddetti piani (normalmente ai quali si sviluppano gli sforzi che sono eguali).

Anche in questo sistema isostatico gli sforzi che si esercitano sulle superficie possono essere qualunque.

Con referenza a questo sistema, il ds^2 assume la forma

$$ds^2 = H_1^2 dx_1^2 + H_2^2 dx_2^2 + dx_3^2,$$

ove $H_1^2 dx_1^2 + H_2^2 dx_2^2$ *è una forma binaria a curvatura gaussiana nulla.*

CASO *c*). *I tre sforzi* θ_h *sono eguali fra loro.* In questo caso le equazioni (A) e (C) sono identità, qualunque siano le H_h, e pertanto il sistema isostatico e il valore comune degli sforzi, non è soggetto a nessuna restrizione e può pertanto essere qualunque.

([6]) G. DARBOUX: *Leçons sur les systèmes orthogonaux.* (Paris, Gauthier-Villars (1910)), chap. II.