PIETRO BURGATTI

Sull'equazione $(a_1x+a_0)y''+(b_1x+b_0)y'-nb_1y=0$ e sopra un criterio per riconoscere la natura delle radici di $y_n(x)=0$

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 2e série, tome 1, nº 1-2 (1932), p. 165-172

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1932_2_1_1-2_165_0>

SULL' EQUAZIONE $(a_1x+a_0)y''+(b_1x+b_0)y'-nb_1y=0$ E SOPRA UN CRITERIO PER RICONOSCERE LA NATURA DELLE RADICI DI $y_n(x)=0$

di PIETRO BURGATTI (Bologna).

1. - LAGUERRE nei suoi bellissimi studi algebrici [1] si occupò dei criteri atti a riconoscere se l'equazione $y_n(x)=0$, in cui $y_n(x)$ è un polinomio di grado n soluzione di una equazione differenziale lineare e omogenea del second' ordine, ha o non tutte le radici reali. Ne trovò uno che è valido in alcuni casi; il solo, credo, che oggi si conosca. Ritengo utile darne qui una dimostrazione elementare.

Anche limitandosi alle $y_n(x)$ soddisfacenti alle semplici equazioni del tipo

$$(a_1x+a_0)y''+(b_1x+b_0)y'-nb_1y=0, \tag{1}$$

che ammettono sempre come soluzione un polinomio di grado n, il criterio di LAGUERRE non permette di riconoscere la realità delle radici di $y_n(x)=0$ in tutti i casi. Pertanto, data la difficoltà e l'importanza della questione, credo che riuscirà interessante la conoscenza del teorema che segue.

Indicheremo con δ il determinante $a_1b_0-a_0b_1$, che è un invariante rispetto al cambiamento di variabile $x=\alpha t+\beta$, giacchè in virtù della trasformazione risulta moltiplicato per α^2. Lo chiameremo *l'invariante lineare della* (1).

Orbene, *se $y_n(x)$ è il polinomio soddisfacente alla* (1), *l'equazione $y_n(x)=0$ ha tutte le radici reali quando l'invariante è positivo, oppure quando, essendo negativo, è in valore assoluto minore di a_1^2; ne ha invece delle complesse quando l'invariante è negativo, ma in valore assoluto maggiore di a_1^2*. Esistono delle radici reali multiple in corrispondenza ai casi di $|\delta|=a_1^2$, $=2a_1^2$ ecc. Quando sia $a_1=0$ basta la sola condizione $\delta<0$ per l'esistenza delle radici complesse.

La prima parte del teorema ($\delta>0$) si dimostra subito col criterio di LAGUERRE. La terza parte riguardante le radici complesse discende da una relazione ricorrente fra i polinomi $y_n(x)$. Presenta invece difficoltà che sembran gravi la dimostrazione della realità nel caso $|\delta|<a_1^2$. Io non le ho superate. Nondimeno non ho dubbio intorno alla verità del teorema, che è direttamente verificabile per $n=2, 3, 4$.

---

[1] *Oeuvres*, T. I, pag. 133 e seguenti.

2. - *Lemma.* Siano $a_1, a_2, \ldots, a_n$ le radici tutte reali dell'equazione $f(x)=0$ di grado n. Si ha per cose note

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{x-a_s}.$$

Posto $x=\alpha+i\beta$, si ottiene

$$\frac{f'(\alpha+i\beta)}{f(\alpha+i\beta)}=\sum_s\frac{(\alpha-a_s)-i\beta}{(\alpha-a_s)^2+\beta^2};$$

la quale dimostra che questo rapporto è della forma

$$A-i\beta B^2.$$

Si conclude pertanto: *se $f(x)=0$ ha tutte le radici reali, il coefficiente di i nel rapporto $\frac{f'(\alpha+i\beta)}{f(\alpha+i\beta)}$ ha segno contrario a β.*

3. - Supponiamo ora che $f(x)=0$ ammetta una sola coppia di radici complesse, $\alpha+i\beta$ e $\alpha-i\beta$; si avrà

$$f(x)=[(x-\alpha)^2+\beta^2]\,p(x),$$

in cui $p(x)=0$ ha tutte le radici reali.

Derivando due volte e ponendo $x=\alpha+i\beta$, si ottiene

$$f'(\alpha+i\beta)=2i\beta\cdot p(\alpha+i\beta)$$
$$f''(\alpha+i\beta)=4i\beta\cdot p'(\alpha+i\beta)+2p(\alpha+i\beta).$$

Facendo il rapporto risulta

$$\frac{f'(\alpha+i\beta)}{f''(\alpha+i\beta)}=\frac{i\beta}{2i\beta\,\frac{p'(\alpha+i\beta)}{p(\alpha+i\beta)}+1}. \tag{2}$$

Per il lemma precedente il rapporto $\frac{p'(\alpha+i\beta)}{p(\alpha+i\beta)}$ è della forma $A-i\beta B^2$; si ha perciò

$$\frac{f'(\alpha+i\beta)}{f''(\alpha+i\beta)}=\frac{i\beta}{2i\beta A+(1+2\beta^2B^2)},$$

in cui il coefficiente di i è, a meno d'un divisore positivo,

$$\beta(1+2\beta^2B^2).$$

Si conclude pertanto: *nell'ipotesi fatta il coefficiente di i nel rapporto $\frac{f'(\alpha+i\beta)}{f''(\alpha+i\beta)}$ ha lo stesso segno di β.*

Se dunque in un caso si trovasse che questo rapporto ha segno opposto a quello di β, bisognerebbe concludere che la $f(x)=0$ o ha tutte le radici reali o ne ha più di due immaginarie. Ma quest'ultimo caso è da escludere.

Ammettiamo infatti che abbia le radici $\alpha+i\beta$ e $a+ib$ distinte, e sia $\alpha+i\beta$ quella che ha, in valore assoluto, il maggior coefficiente immaginario ($\beta^2>b^2$). Per essa vale la (2). Allora poniamo

$$p(x)=[(x-a)^2+b^2]q(x),$$

in cui per l'ipotesi fatta $q(x)=0$ ha tutte le radici reali. Si deduce

$$\frac{p'(\alpha+i\beta)}{p(\alpha+i\beta)}=\frac{q'(\alpha+i\beta)}{q(\alpha+i\beta)}+2\frac{\alpha-a+i\beta}{(\alpha-a)^2+b^2-\beta^2+2i\beta(\alpha-a)}.$$

La parte immaginaria dell'ultima frazione è, a meno d'un fattor positivo,

$$-i\beta[(\alpha-a)^2+\beta^2-b^2];$$

cioè di segno contrario a β, ($\beta^2>b^2$), come la parte immaginaria di q'/q a norma del lemma stabilito. Ne segue che la parte immaginaria di $\frac{p'(\alpha+i\beta)}{p(\alpha+i\beta)}$ è ancora di segno contrario a β, come nelle considerazioni precedenti. *Se dunque $\alpha+i\beta$ è la radice di $f(x)=0$ che ha il maggior valore per β^2, il coefficiente di i nel rapporto $\frac{f'(\alpha+i\beta)}{f''(\alpha+i\beta)}$ ha lo stesso segno di β; talchè, se in un caso si trova che cotesto rapporto ha invece sempre il segno opposto a β si dovrà concludere che l'equazione $f(x)=0$ ha tutte le radici reali.*

Ora sia

$$pf''+qf'+rf=0$$

l'equazione differenziale a cui soddisfa la $f(x)$; si ricava

$$\frac{f'(\alpha+i\beta)}{f''(\alpha+i\beta)}=-\frac{p(\alpha+i\beta)}{q(\alpha+i\beta)}.$$

Se questo rapporto risulta di segno contrario a β, si concluderà che l'equazione $f(x)=0$ ha tutte le radici reali. Nel caso contrario non si potrà affermar nulla. È questo il *criterio di Laguerre.*

4. - Applichiamolo all'equazione $y_n(x)=0$, in cui $y_n(x)$ è il polinomio soddisfacente alla (1). Posto che $\alpha+i\beta$ sia una sua radice, si deduce dalla (1) stessa

$$\frac{y'(\alpha+i\beta)}{y''(\alpha+i\beta)}=-\frac{a_1(\alpha+i\beta)+a_0}{b_1(\alpha+i\beta)+b_0}$$
$$=\frac{(a_1\alpha+a_0)+i\beta a_1}{(b_1\alpha+b_0)+i\beta b_1}.$$

Il coefficiente di i, a meno d'un fattor positivo, è

$$\beta b_1(a_1\alpha+a_0)-\beta a_1(b_1\alpha+b_0)=-\beta\delta,$$

essendo δ l'invariante lineare. Ne consegue: *Se l'invariante è positivo, la equazione $y_n(x)=0$ ha tutte le radici reali.* È la prima parte del teorema enunciato.

Questo vale in particolare per i noti polinomi di LAGUERRE e per quelli di HERMITE, che soddisfano rispettivamente all'equazioni

$$xy''+(1-x)y'+ny=0$$
$$y''-xy'+ny=0.$$

Per il caso $\delta<0$ il criterio di LAGUERRE non dà nulla.

5. - Si possono determinare delle formule ricorrenti relative ai polinomi $y_n(x)$ con vari indici, senza conoscere nè la loro espressione nè la loro genesi, sfruttando cioè la sola equazione differenziale; cosa che non ho veduto fatta da altri autori in casi analoghi. Si vedrà la parte importante che ha l'invariante lineare.

Anzitutto poniamo per semplificare $t=x+\frac{b_0}{b_1}$; la (1) diventa

$$\left(\frac{a_1}{b_1}t-\frac{\delta}{b_1^2}\right)y''+ty'-ny=0$$

che scriveremo

(2) $$(c_0t-c_1)y''+ty'-ny=0 \qquad \left(c_0=\frac{a_1}{b_1},\quad c_1=\frac{\delta}{b_1^2}\right).$$

Introduciamo l'operatore

$$\mathcal{E}_n=(c_0t-c_1)\frac{d^2}{dt^2}+t\frac{d}{dt}-n,$$

per modo che la (2) si scrive semplicemente $\mathcal{E}_n(y_n)=0$. Si ottengono subito le due formule seguenti:

(3) $$\mathcal{E}_{n-1}(y_n)=y_n, \qquad \mathcal{E}_n(y_{n-1})=-y_{n-1}.$$

Derivando poi l'equazione differenziale si ottiene

$$(c_0t-c_1)y'''+(t+c_0)y''-(n-1)y'=0,$$

dalla quale si deduce

(4) $$\mathcal{E}_{n-1}(y_n')=-c_0y_n'', \qquad \mathcal{E}_n(y_n')=-c_0y_n''-y_n'.$$

Ora calcoliamo $\mathcal{E}_{n-1}[(at+b)y_n']$. Si trova

$$\mathcal{E}_{n-1}[(at+b)y_n']=(at+b)\mathcal{E}_{n-1}(y_n')+2a(c_0t-c_1)y_n''+aty_n',$$

che per la prima delle (4) diventa

$$\mathcal{E}_{n-1}[(at+b)y_n']=(ac_0t-bc_0-2ac_1)+aty_n'.$$

Se dunque si pone

$$bc_0+2ac_1=ac_1, \qquad \text{ossia} \qquad bc_0+ac_1=0,$$

il secondo membro, in virtù dell'equazione differenziale, si riduce a

$$any_n, \qquad \text{ossia a} \qquad an\mathcal{E}_{n-1}(y_n).$$

Ne consegue

$$\mathcal{E}_{n-1}[(at+b)y_n'-any_n]=0.$$

La condizione imposta equivale a $b=-hc_1$, $a=hc_0$, essendo h un fattore di proporzionalità; risulta dunque

$$\mathcal{E}_{n-1}[(c_0t-c_1)y_n'-nc_0y_n]=0.$$

Poichè la funzione dentro parentesi è un polinomio, dovrà essere necessariamente

$$(c_0t-c_1)y_n'-nc_0y_n=Ay_{n-1}.$$

Il fattore A risulta determinato considerando le più elevate potenze dei polinomi ([2]). Si trova

(5) $$(c_0t-c_1)y_n'=nc_0y_n-n[c_1+(n-1)c_0^2]y_{n-1}.$$

Tornando alla variabile x e alle primitive costanti, si ottiene

(5′) $$b_1(a_1x+a_0)y_n'=na_1b_1y_n-n[\delta+(n-1)a_1^2]y_{n-1},$$

che è appunto una *relazione ricorrente* ([3]).

Se ne può dedurre un'altra, dove non compariscono le derivate. Infatti, derivando la (5) e tenendo conto dell'equazione differenziale, si ottiene

$$ny_n=[t+(n-1)c_0]y_n'-n[c_1+(n-1)c_0^2]y'_{n-1}.$$

Usando ancora la (5) e quella che si deduce cambiando n in $n-1$, si possono far sparire le derivate prime. Dopo qualche semplificazione si trova

$$y_n-[t+2(n-1)c_0]y_{n-1}+(n-1)[c_1+(n-2)c_0^2]y_{n-2}=0;$$

la quale, passando alla primitiva variabile, diventa

(6) $$b_1^2y_n-b_1[b_1x+2(n-1)a_1-b_0]y_{n-1}+(n-1)[\delta+(n-2)a_1^2]y_{n-2}=0,$$

che è la *relazione ricorrente* cercata.

6. - Ora per tornare al nostro teorema facciamo due osservazioni preliminari. Per $n=2$ la soluzione polinomiale dell'equazione differenziale (2) è

$$y=t^2+2c_0t-c_1,$$

che ha radici reali se, supposto $c_1<0$, risulta $|c_1|\leqslant c_0^2$; radici complesse se $|c_1|>c_0^2$. Queste condizioni corrispondono a $\delta<0$ con $|\delta|\leqslant a_1^2$ nel primo caso; $\delta<0$ con $|\delta|>a_1^2$ nel secondo caso; e questo conformemente al teorema enun-

---

([2]) Il coefficiente della più alta potenza in y_n si suppone uguale a uno.

([3]) Manifestamente questa è valida anche per le soluzioni trascendenti della (1). Di qui il vantaggio della esposta deduzione.

ciato. Nel caso $c_0=0$ basta la condizione $c_1<0$, ossia $\delta<0$, perchè le radici siano immaginarie.

Per $n=3$ la soluzione polinomiale è

$$y=t^3+6c_0t^2+3(2c_0^2-c_1)t-4c_0c_1,$$

ed è facile verificare la verità del teorema. Posto $z=t+2c_0$, $2c_0^2+c_1=h$, l'equazione diventa

$$y=z^3-2hz+2c_0h=0,$$

il cui discreminante è $h^2(c_0^2-h)$. Se è $h<0$, oppure $h>0$ e $<c_0^2$ esistono radici complesse; se è $h>0$ e $\geqslant c_0^2$ le radici sono tutte reali. Queste condizioni corrispondono appunto a $\delta<0$ con $|\delta|\leqslant a_1^2$ nel caso della realità; a $\delta<0$ con $|\delta|>a_1^2$ nel caso opposto.

La seconda osservazione che occorre è questa, ed è del LAGUERRE: *Se* $f(x)=0$ *ha tutte le radici reali, anche* $(x-\zeta)f'(x)-nf(x)$ *ha tutte le radici reali qualunque sia* ζ. Possiamo darne una dimostrazione semplicissima. Per stare nel caso che c'interessa, consideriamo la funzione

$$(c_0t-c_1)^{-n}y_n(t),$$

che per ipotesi ha n radici reali, quelle che annullano $y_n(t)$; ne segue per il teorema di Rolle che la sua derivata

$$(c_0t-c_1)^{-n-1}[(c_0t-c_1)y_n'(t)-c_0ny_n(t)]$$

ha pure $n-1$ radici reali, e sono quelle che annullano [4]

$$(c_0t-c_1)y_n'(t)-c_0ny_n(t).$$

Ciò posto, considerando la relazione ricorrente (5) vediamo che se $y_{n-1}=0$ ha delle radici complesse queste appartengono a

$$(c_0t-c_1)y_n'-nc_0y_n=0;$$

epperò la $y_n=0$ non può avere tutte le radici reali, altrimenti si cadrebbe in contradizione con l'osservazione precedente. Ma per $n=2$, $n=3$ abbiam visto che le condizioni $\delta<0$, $|\delta|>a_1^2$ assicurano l'esistenza di radici complesse; perciò qualunque sia n l'equazione $y_n(x)=0$ avrà delle radici complesse quando sia $\delta<0$ e $|\delta|>a_1^2$; conformemente al teorema enunciato.

Riguardo alla realità delle radici nel caso $\delta<0$ e $|\delta|<a_1^2$, non pare che le relazioni ricorrenti possano fornirne una dimostrazione rigorosa.

---

(4) Se una radice della $y_n=0$ fosse $t=\frac{c_1}{c_0}$, si può scrivere $y_n-(c_0t-c_1)z(t)$ e verrebbe

$$F=(c_0t-c_1)y_n'-c_0ny_n=(c_0t-c_1)[(c_0t-c_1)z'-(n-1)z];$$

onde si vede che il teorema è ancora vero.

7. - Vogliamo infine indicare una relazione integrale che fa vedere sempre più l'importanza dell'*invariante lineare.*

Moltiplichiamo l'equazione differenziale (2) per il fattore

$$\varrho=(c_0t-c_1)^{\frac{c_1-c_0^2}{c_0^2}}\cdot e^{\frac{t}{c_0}}=(c_0t-c_1)^{\frac{\delta}{a_1^2}-1}\cdot e^{\frac{b_1t}{a_1}}.$$

Essa acquista la forma

$$\frac{d}{dt}[\varrho(c_0t-c_1)y_n']=n(c_0t-c_1)^{\frac{\delta}{a_1^2}-1}\cdot e^{\frac{b_1t}{a_1}}y_n(t),$$

ossia

$$\frac{d}{dt}\left[(c_0t-c_1)^{\frac{\delta}{a_1^2}}\cdot e^{\frac{b_1t}{a_1}}y_n'\right]=n(c_0t-c_1)^{\frac{\delta}{a_1^2}-1}\cdot e^{\frac{b_1t}{a_1}}y_n.$$

Scriviamo la stessa equazione cambiando n in m; poi moltiplichiamo la prima per y_m, la seconda per y_n e sottragghiamo; si ottiene

$$\frac{d}{dt}\left[(c_0t-c_1)^{\frac{\delta}{a_1^2}}\cdot e^{\frac{b_1t}{a_1}}(y_n'y_m-y_m'y_n\right]=(n-m)(c_0t-c_1)^{\frac{\delta}{a_1^2}-1}\cdot e^{\frac{b_1t}{a_1}}y_ny_m.$$

Se s'integra fra $-\infty$ e $\frac{c_0}{c_1}=\frac{\delta}{a_1b_1}$, quando sia $\delta>0$, si trova manifestamente

$$\int_{-\infty}^{\frac{\delta}{a_1b_1}}(c_0t-c_1)^{\frac{\delta}{a_1^2}-1}\cdot e^{\frac{b_1t}{a_1}}y_n(t)y_m(t)dt=0, \qquad (n\neq m)$$

ossia con la primitiva variabile

$$\int_{-\infty}^{-\frac{a_0}{a_1}}(a_1x+a_0)^{\frac{\delta}{a_1^2}-1}\cdot e^{\frac{b_1}{a_1}x}y_n(x)y_m(x)dx=0.$$

Se è $\delta<0$ questa formula non sussiste più. Si conclude pertanto: *quando l'invariante lineare è positivo, e solo in tal caso, le funzioni*

$$(a_1x+a_0)^{\frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{a_1^2}-1\right)}\cdot e^{\frac{b_1x}{2a_1}}y_n(x)$$

formano un sistema ortogonale. Si noti che questo teorema è valido per tutte le soluzioni della (1).

8. - Sarà utile far vedere che la seconda soluzione fondamentale della (1), non polinomiale, si ottiene in modo assai semplice. Derivando n volte la (1), si trova

$$(a_1x+a_0)y^{(n+2)}+(b_1x+b_0+na_0)y^{(n+1)}=0;$$

da cui

$$\log y^{(n+1)}=-\int\frac{b_1x+b_0+na_0}{a_1x+a_0}dx.$$

Di qui si deduce

$$y^{(n+1)}=A\,\frac{e^{-\frac{b_1}{a_1}x}}{(a_1x+a_0)^{n+\frac{\delta}{a_1}}},$$

e per una nota formula (5)

$$y(x)=\frac{A}{n!}\int_0^x\frac{(x-t)^n\,e^{-\frac{b_1}{a_1}t}}{(a_1t+a_0)^{n+\frac{\delta}{a_1}}}\,dt.$$

Questa è appunto la seconda soluzione non polinomiale.

---

(5) PINCHERLE: *Lezioni di calcolo,* pag. 472.