Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

G. B. Pacella

Sopra una classe infinita di superficie razionali

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1re série, tome 14 (1922), exp. nº 5, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1922_1_14__A5_0>

Dott. G. B. PACELLA

SOPRA UNA CLASSE INFINITA

DI

SUPERFICIE RAZIONALI

ESTRATTO DALLA TESI DI LAUREA

Nello studio d'una proiezione gobba della superficie del IV ordine con conica doppia, che facemmo per la ricerca dei sistemi omoloidici di tali superficie, ci occorse notare una proprietà che, oltre a fornirci una nuova generazione della superficie, ci lasciò prevedere possibile la generazione di infinite superficie razionali appartenenti a due famiglie diverse e delle quali quelle del 3.° e 4.° ordine sono i primi elementi. Il presente lavoro ha per iscopo questa generalizzazione. Basterà considerare però una sola delle due classi di superficie (*) e noi ci fermeremo su quella a cui appartiene la superficie del 4.° ordine. Procederemo alla rappresentazione piana della superficie supponendone l'esistenza: indi, servendoci delle proprietà della rappresentazione, passeremo alla costruzione della superficie stessa.

(*) Si può notare già qui che ove si conceda l'esistenza di una superficie $\left(\overset{k}{c}, \overset{k}{r}, \overset{k}{t}\right)_{2(k+1)-1}$ con k intero positivo e dove r e t sono due rette d'un piano appoggiate alla conica c, si passa immediatamente ad una superficie $\left(\overset{k+1}{c'}, \overset{k}{r'}, \overset{k}{t'}\right)_{2(k+1)}$ con la trasformazione (2, 2) che risulta assumendo la c come conica fondamentale del 1.° sistema omoloidico e generico il punto fondamentale.

Rappresentazione piana della superficie.

Per ottenere la rappresentazione piana di una superficie di ordine $2(k+1)$ avente una conica $(k+1)$ *pla* e due rette *kple* complanari ed appoggiate alla conica ne facciamo la proiezione gobba su un piano α pigliando per direttrice la conica c e la retta r; e l'imagine d'una sezione piana sarà l'intersezione con α della rigata che ha per direttrici la sezione piana, la c e la r. Questa rigata, che è dell'ordine $2(k+2)$ poichè si staccano $2(k+1)$ piani, un cono dell'ordine $2(k+1)$ e k coni del 2.° ordine, ha le direttrici r e c $(k+2)$*ple* e la t *kpla* e perciò taglierà ulteriormente la superficie di cui c'interessiamo in una curva del $2(k+1)$*mo* ordine, che è costituita da rette, in generale distinte, e che sono tutte e sole le rette semplici della superficie che si appoggiano alla retta r (*). Indicando con R e T le traccie di r e t con S_1 e S_2 le traccie della conica multipla, con $A_1, A_2, \ldots A_{2(k+1)}$ quelle delle rette dianzi dette, possiamo dire che le sezioni piane risultano rappresentate da curve del tipo

$$\left(\overset{k+2}{R}, \overset{k+2}{S_1}, \overset{k+2}{S_1}, \overset{k}{T}, \overset{1}{A_1}, \overset{1}{A_2}, \ldots \overset{1}{A}_{2(k+1)}\right)_{2(k+2)};$$

ma poichè una curva generica di tal tipo non rappresenta una sezione piana della nostra superficie, si presenta il problema della ricerca delle condizioni che debbono verificarsi perchè cio accada: conduciamo perciò un piano per r, esso determina sulla superficie una curva residua, dell'ordine

---

(*) In generale perchè si suppone che la superficie $\left(\overset{k+1}{c}, \overset{k}{r}, \overset{k}{t}\right)_{2(k+1)}$ non abbia altre particolarità.

$k+2$, con un punto $(k+1)$*plo* sulla conica multipla, curva che vien rappresentata dalla traccia su α del piano che la contiene. A questo punto osserviamo che le $k+1$ tangenti alla curva nel punto multiplo segneranno $k+1$, punti sulla traccia anzidetta e perciò una curva imagine di sezione piana che passi per uno di questi punti bisognerà passi per gli altri (*). Un'altra condizione discende dalle considerazioni seguenti: il punto k*plo* che una sezione piana ha sulla r viene rappresentata dalle k traccie delle rette che partono da quel punto, giacciono nei k piani tangenti alla superficie in esso e si appoggiano alla c; è chiaro anche qui che l'imagine di una sezione piana che passi per uno di tali traccie passera per le rimanenti $k-1$ e può altresì verificarsi che le k traccie sono sulle coniche per S_1, S_2 e tangenti in R alla retta l che è l'intersezione con α del piano per r tangente alla c.

S'è già detto che una retta di α per R rappresenta l'ulteriore intersezione con la superficie del piano individuato dalla retta e da r; la retta multipla perciò avrà per imagine una $\left(\overset{k+1}{R}\ \overset{k+2}{S_1}\ \overset{k+2}{S_2}\ \overset{1}{A_1},\dots \overset{1}{A}_{2(k+1)}\right)_{2k+3}$ e cioè una $\left(\overset{k+1}{R}\ \overset{k+1}{S_1}\ \overset{k+1}{S_2}\ \overset{1}{A_1},\dots \overset{1}{A}_{2(k+1)}\right)_{2(k+1)}$ perchè $S_1\,S_2$ se ne stacca; per questa curva va osservato, poichè ha importanza anohe per l'applicazione che se ne farà in seguito, che dei $k+1$ rami che essa ha in R, k sono ordinatamente tangenti alle traccie dei piani tangenti alla superficie in R, l'altro è tangente alla retta l (**).

(*) Questi $k+1$ punti, al variare nel fascio R della retta che li contiene, descrivono l'imagine della conica $(k+1)$*pla*.

(**) I primi k rami sono tangenti ai piani nominati perchè R, che è della retta k*pla* ed è in α, viene rappresentato dai k punti infinitamente vicini ad R che son contemporaneamente sulla superficie su α; il significato del punto infinitamente vicino ad R su l si vedrà meglio in seguito.

Ci occuperemo ora della sezione della superficie col piano rappresentativo. Allo scopo notiamo che la retta RS_1 ha con la superficie una sola intersezione distinta da quelle che ha in R ed in S_1 e che questo punto d'intersezione U ha per imagine tutta la retta RS_1; poichè un fatto analogo capita per la retta RS_2 di cui si indica con V il punto analogo ad U, la sezione della superficie con α sarà la curva residua di una certa imagine di sezione piana di cui fa parte la coppia di rette RS_1 ed RS_2. Per individuarla, giacchè tutti i piani del fascio UV dànno sezioni le cui imagini si spezzano in tal modo, basterà tener presente che i k rami della curva residua di dianzi dovranno nel nostro caso toccare in R i k rami che vi ha l'imagine di r (quando si escluda il ramo di questa che tocca la l), perchè allora il piano segante passerà per UV ed R e coinciderà con α. Indicheremo con

$$\sum = \left(\overset{k}{R}\ \overset{k+1}{S_1}\ \overset{k+1}{S_2}\ \overset{k}{T}\ \overset{1}{A},\ldots \overset{1}{A}_{2(k+1)}\right)_{2(k+1)}$$

la curva così determinata e con

$$\Gamma = \left(\overset{k+1}{R}\ \overset{k+1}{S_1}\ \overset{k+1}{S_2}\ \overset{k}{T}\ A_1 \ldots A_{2(k+1)}\right)_{2(k+1)}$$

l'imagine di r.

Facciamo su α un'altra proiezione gobba della stessa superficie mutando solamente la retta r, direttrice delle rigate ausiliarie, nell'altra retta *kpla* t; per la perfetta simmetria della superficie rapporto ad r ed a t, la nuova rappresentazione si otterrà dalla precedente col permutare R e T. Fra le due rappresentazioni intercederà sicuramente una trasformazione cremoniana, noi però non c'indugeremo sulla natura di questa, perchè con considerazioni geometriche fatte sulla superficie, riusciremo a determinare una semplice ed importante relazione fra due punti del piano che corrispondono nelle due rappresentazioni ad uno stesso punto della superficie.

L'operazione che facciamo per determinare nelle due rappresentazioni le imagini di un punto della superficie riducesi alla costruzione delle due rette per quel punto appartenenti alla quadrica (rtc), e sono proprio le traccie di queste due generatrici che ci forniscono due punti corrispondenti nelle due rappresentazioni: la coppia di punti imagini di uno stesso punto della superficie giace su una conica per le traccie RTS_1S_2 della quartica rtc base del fascio. Così ad un punto di α considerato della prima rappresentazione corrisponde uno ben determinato della seconda sulla stessa conica del fascio RTS_1S_2 individuata dal primo punto, e se il primo, considerato come sopra, descrive la conica il secondo si muove sulla stessa curva: nella corrispondenza del piano in sè determinata dalle due rappresentazioni le coniche del fascio RTS_1S_2 sono unite.

Su ognuna di queste coniche poi esisterà una proiettività perchè la corrispondenza della conica in sè è subordinata ad una trasformazione birazionale, ma conviene stabilir ciò per altra via perchè a noi interessa la natura della proiettività in parola. Consideriamo perciò una quadrica qualunque per rtc, essa determina sulla superficie una conica L che ha per imagine nelle due rappresentazioni la L' secondo cui α taglia la quadrica stessa, e, come sappiamo, un punto generico P di L ha per imagini nelle due rappresentazioni i punti P_1 e P_2 segnati su L' dalle due generatrici della quadrica per P. Indicando con O il punto rt, con $\bar{P}$ la traccia su α della OP è facile verificare che RP_1 e TP_2 si tagliano in $\bar{P}$, e allora se P si muove su L il punto $\bar{P}$ descrive su α la proiezione da O della conica L ed i punti P_1 e P_2 si muovono su L' con relazione proiettiva. I punti in cui la conica obiettiva L incontra la sua imagine sono i punti uniti della proiettività esistenti su L', ma ciò oltre che dedursi dal modo stesso con cui abbiamo individuata la proiettività risulta anche dall'osservare che quei due punti appartengono alla sezione della superficie con α, poichè è evidente che i punti della Σ sono punti uniti della trasformazione (*).

Se si conosce perciò la sezione della superficie con α, si ottengono i due punti uniti della proiettività di una conica del fascio $R\,T S_1 S_2$, purchè questa non sia una delle $2(k+1)$ individuate dai punti $A_1, A_2, \ldots A_{2(q+1)}$, pigliando le ulteriori intersezioni della conica e di Σ; poichè inoltre l'unico punto distinto da quelli fondamentali in cui una conica del fascio dianzi nominato incontra Γ, imagine di r nella prima rappresentazione, ha per corrispondente il punto R(**) resta pienamente determinata la proiettività esistente su una conica qualunque poichè su ognuna si conoscono i due punti uniti ed una coppia di punti corrispondenti.

Questa relazione permette di passare da una rappresentazione all'altra.

(*) È da notarsi che la Σ non è l'unica curva di punti uniti della trasformazione perchè la conica proiezione di c da O su α è ancora essa di punti uniti; che quel ramo speciale di Γ, di cui si è parlato nella nota (**) a pag. 5, tocchi in R questa conica si deduce dal fatto che il punto in cui l'imagine della conica γ, ulteriore della superficie col cono $O\,C$, si appoggia ad r deve essere infinitamente vicino ad R e sull'imagine di γ.

(**) Nella seconda rappresentazione l'immagine di r è data dall'intorno di R.

Costruzione della superficie.

Ci serviamo qui delle esposte relazioni che intercedono fra le due rappresentazioni per costruire una superficie $\left(\overset{k}{r}\,\overset{k}{t}\,\overset{k+1}{c}\right)_{2(k+1)}$ della quale così verrà implicitamente dimostrata l'esistenza.

Una conica c fori un piano α in S_1 ed S_2, due rette r e t, d'uno stesso piano, appoggiate alla conica in M ed N taglino α in R e T; in α sia data una curva Γ, irriducibile, del tipo $\left(\overset{k+1}{R}\,\overset{k+1}{S_1}\,\overset{k+1}{S_2}\,\overset{k}{T}\,\overset{1}{A_1}\ldots\overset{1}{A}_{2(k+1)}\right)_{2(k-1)}$(*) e tale che uno solo dei suoi rami in R sia tangente al cono che dal punto rt proietta c; si dia poi un'altra curva $\Sigma \equiv \left(\overset{k}{R}\,\overset{k+1}{S_1}\,\overset{k+1}{S_2}\,\overset{k}{T}\,\overset{1}{A_1}\ldots\overset{1}{A}_{2(k+1)}\right)_{2(k+1)}$ anche essa irriducibile, e tale che i suoi k rami in R siano ordinatamente tangenti a quelli che in quel punto ha la curva Γ e sui quali non s'è fatta alcuna ipotesi, e si osservi che queste due curve non hanno nessuna intersezione fuori dei punti fondamentali. Sul piano α concepiamo due piani punteggiati sovrapposti α_1 ed α_2: Poichè una conica qualunque per $R_1\,T_1\,S_1, S_2$ taglia in due punti Σ ed in un solo punto Γ, considerando i due primi come uniti, quest'ultimo in α_1 e corrispondente di R di α_2, rimarrà determinata sulla conica una corrispondenza proiettiva. Ciò premesso dato un punto qualunque di α, costruiamo la conica del fascio per esso e cerchiamo su questo il corrispondente del punto dato servendoci della proiettività stabilita, pel primo punto poi conduciamo la retta appoggiata ad r ed

(*) I punti $A_1\,A_2\ldots A_{2(k+1)}$ sono presi ad arbitrio.

a c non passante per M, pel secondo conduciamo quella appoggiata a t ed a c, ma non nel punto N, e dimostriamo che il luogo del punto d'incontro delle rette considerate, al variare del primo su α_1, è una superficie razionale dell'ordine $2(k+1)$ con t ed r *kple* e c $(k+1)$*pla*.

Poichè infatti la Σ appartiene alla superficie, se nel piano non esistono altre curve di punti uniti, la superficie generata sarà irriducibile e dell'ordine $2(k+1)$ come la sua sezione con α.

Per esaminar bene la questione ammettiamo esista un punto unito fuori di Σ, sulla conica del fascio, per esso vi saranno tre punti uniti e lo sarà allora anche R, il che è impossibile a meno che l'ulteriore intersezione di Γ e di questa conica non cada anch'essa in R. Le $k+1$ coniche tangenti in R ordinatamente ai $k+1$ rami di Γ realizzano quest'ultima condizione, su una sola di esse però, su quella tangente al ramo di Γ che non tocca Σ cioè, si riscontrano tre punti uniti distinti, e però questo è l'unico luogo di punti uniti che nasce dalla nostra trasformazione. Ricordando che il ramo di Γ che non tocca Σ è tangente al cono che dal punto (rt) proietta la c, risulta che la conica di punti uniti è proprio la sezione col piano α di esso cono e perciò i punti di questa particolare conica del fascio RTS_1S_2 non daranno luogo ad una curva della superficie di cui c'interessiamo, ma individueranno tutto il cono (rtc): La superficie che viene data dalla nostra costruzione si scinde dunque in due luoghi distinti, uno dell'ordine $2(k+1)$ ed un cono del secondo ordine (ed i punti della superficie che corrispondono a quelli della conica di punti uniti si otterranno col concetto di limite).

Dimostriamo ora che la retta r è *kpla* per la superficie irriducibile. Per un punto Q, scelto ad arbitrio su Γ, conduciamo la retta che si appoggia a c e ad r; il punto Q' in cui si appoggia ad r appartiene alla superficie perchè la retta r, su cui è Q', si appoggia alla t, alla conica c e passa per R che è il corrispondente in α_2 di qualunque punto di Γ considerato in α_1; il numero dei punti di Γ dai quali partono rette che si appoggiano a c, e ad r in Q' dànno la multiplicità della r stessa perchè esse rette sono tutte e sole quelle che incontrano in Q' la r considerata come partente da R ed appoggiata a t ed a c. Basterà quindi contare le intersezioni di Γ con la conica di α proiezione di c da Q', e osservare che questa conica taglia Γ in k punti variabili per dedurre che la r è k*pla*.

A questo punto sarà facile dimostrare che la conica c è $(k+1)$*pla*.

Un piano τ per r segherà α in una retta d, la conica c in E oltre che in M, $S_1 S_2$ in F, la Σ in $k+2$ punti di d oltre R, la superficie in una curva di ordine $k+2$ oltre r: la retta per un punto X di d ed appoggiata alla r e alla c è la retta XE, per cui i punti della superficie provenienti da quelli della retta d (del piano α_1) saranno su τ, ed inoltre, poichè le rette del fascio E stabiliscono la corrispondenza biunivoca fra i punti di d e quelli della curva di ordine $k+2$, questa curva avrà in E un punto $(k+1)$*plo*. Risulta quello che si voleva dimostrare considerando che il luogo di E, al variare di τ nel fascio r, è proprio la conica c. Aggiungiamo che il $(k+2)$*mo* punto d'intersezione di EM con la curva razionale detta non può cadere fuori di M chè altrimenti il piano della conica si staccherebbe dalla superficie il che è impossibile perchè la sezione di essa con α è una curva irriducibile, la $S_1 S_2$ poi è l'imagine di M nella prima rappresentazione.

Parleremo ora della retta t.

Per determinare la multiplicità di questa retta, di cui T è l'imagine in α_1, dobbiamo stabilire alcuni elementi relativi alla curva Δ che rappresenta la stessa t in α_2. La Δ che è il luogo del punto di α_2 corrispondente di T sulla conica variabile del fascio $R\,T S_1 S_2$, ed è perciò razionale, ha in R un punto *kplo* perchè k sono le coniche del fascio sulle quali al punto T di α_1 corrisponde il punto R di α_2, (sono le k coniche ordinatamente tangenti in T ai k rami che ivi ha la curva Γ); per questa ragione una conica che passi solamente per $T S_1 S_2$ incontrerà Δ in $k+1$ punti e le coniche di questa rete che toccano in T un solo ramo di Δ incontreranno questa in k punti variabili.

Ed ora basterà considerare le coniche per $T S_1 S_2$ che toccano in T quel ramo di Δ tangente alla traccia su α del cono $(c\,t\,r)$(*) perchè il problema che ora c'interessa risulti senz'altro identico a quello già risoluto quando ricercammo la multiciplicità della retta r.

Anche la t dunque è *kpla*.

(*) Che la Δ abbia in T un tal ramo risulta dal tener presente che il cono $(c\,t\,r)$ sega la superficie in una conica appoggiata a t, e che questa è rappresentata sia in α_1 sia in α_2 dalla conica per T traccia del cono $(c\,t\,r)$.

Ricerca delle rette semplici.

La proiettività ch'esiste su ogni conica del fascio RTS_1S_2 diventa degenere per quelle individuate da uno dei punti $A_1, A_2, \ldots$ perchè A_1, per esempio, sulla conica per esso, è un punto unito in quanto appartiene a Σ, corrisponde ad R perchè è anche sulla curva Γ. Perciò al punto A_1 di α_1 corrisponderà un punto qualunque della conica del fascio per esso, ed allora la retta a_1 che parte da A_1 e si appoggia alla conica multipla ed alla r apparterrà tutta alla superficie. Si noti che a_1 è sghemba con t. La conica considerata dianzi incontrerà Σ in un altro punto A'_1, e la retta per esso appoggiata a t ed a c apparterrà ancora alla superficie perchè incontrando la retta a_1 costruita in precedenza ha $2(k+1)+1$ punti sulla superficie. Le stesse considerazioni ripetute per i punti $A_2 \ldots A_{2(k+1)}$ ci forniscono altrettante coppie di rette che godono di proprietà analoghe a quella precedente.

Sulla superficie non vi sono altre rette appoggiate ad r oppure a t perchè, dall'esame dell'intersezione della superficie con la rigata che ha per direttrici una sezione piana della precedente, la c e la r, risulta che le rette semplici della superficie, distinte o successive ed appoggiate ad r, sono tante da costituire una curva dell'ordine $2(k+1)$, e noi, con le considerazioni precedenti, abbiamo già ottenuto $2(k+1)$ rette appoggiate alla r; lo stesso ragionamento può ripetersi per le rette appoggiate a t.

Sulla superficie esistono rette sghembe con le rette multiple?

Una retta della superficie che non si appoggi ad r nè a t, quando si assumano per direttrici fisse la r e la c, sarà rappresentata da una conica per la sua stessa traccia, per R, S_1 ed S_2, perchè la sua imagine sarà segnata su α_1 dalla quadrica per r, per la retta stessa e per c poichè è chiaro che se esiste la retta dovrà appoggiarsi alla conica multipla; ma essendo le sezioni piane della superficie rappresentate dalle

$$\left(\overset{k+2}{R}\ \overset{k+2}{S_1}\ \overset{k+2}{S_2}\ \overset{k}{T}\ \overset{1}{A_1}\ldots\overset{1}{A}_{2(k+1)}\right)_{2(k+2)},$$

è necessario che la conica passi per $k+1$ dei punti A, il che non può essere per $k>1$ senza che ne restino vincolati i punti $A_1, A_2, \ldots A_{2(k+1)}$. Il risultato è che per $k>1$ la superficie non ha rette sghembe con le due rette k*ple*, cosa che differenzia la superficie del IV ordine con conica doppia da quelle analoghe degli ordini superiori di cui abbiamo parlato.