ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

AZEGLIO BEMPORAD

Sui gruppi di movimenti e similitudini nello spazio a 3, 4 e 5 dimensioni

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1re série, tome 8 (1899), exp. nº 2, p. 1-83

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1899_1_8__A2_0>

Dott. **AZEGLIO BEMPORAD**

SUI GRUPPI

DI

MOVIMENTI E SIMILITUDINI

NELLO SPAZIO A 3, 4 E 5 DIMENSIONI

Il lavoro classico sui gruppi di movimenti Euclidei nello spazio ordinario è una memoria del JORDAN pubblicata negli *Annali di matematica* del 1884 [1]). In questa memoria il Jordan, partendo dall'osservazione che i movimenti rigidi dello spazio sono operazioni suscettibili di composizione, determina tutti i possibili sistemi (continui e discontinui) di tali movimenti formanti gruppo fra loro.

Dei gruppi *continui* di movimenti e similitudini è poi trattato nell'opera fondamentale di LIE [2]) pel caso dello spazio a 3 e 4 dimensioni. Propriamente però nell'opera di Lie son trattati soltanto gruppi *simili* a quelli di movimenti e similitudini, precisamente i gruppi proiettivi che lasciano ferma una conica *reale* del piano (o iperpiano) all'infinito.

Ora è chiaro che se le due ricerche si equivalgono analiticamente, si viene a perdere nella ricerca del Lie il concetto ordinario di movimento, e vengono anzi a comprendersi sotto questo nome trasformazioni che non corrispondono a movimenti reali.

In quel che segue mi son proposto appunto di tornare ai concetti del Jordan, applicando la teoria generale di Lie alla

---

1) JORDAN. — *Mémoire sur les groupes de mouvements.* Annali di matematica 1884 (serie II, Tomo II).

2) LIE. — *Theorie der Transformationsgruppen.* Bd. III. Pag. 214, 247, 251.

determinazione dei vari tipi di gruppi *continui* di movimenti *reali* nello spazio ordinario e in quello a quattro dimensioni, ed estendendo poi le ricerche, per quanto mi è riuscito, allo spazio a 5 dimensioni. Non ho potuto servirmi per questa determinazione del metodo generale del *gruppo aggiunto* [1]), perchè appunto in questo metodo come in tutti i procedimenti generali di Lie, non si ha distinzione fra i gruppi reali ed immaginari.

Determino dunque dapprima, colla considerazione di spazi lineari invarianti, i tipi più generali di gruppi di rotazioni *ad un parametro* in S_n, (più particolarmente in S_{4m}, S_{4m+2}, S_{2m+1}) ed osservo un sistema di funzioni invariantive delle corrispondenti trasformazioni infinitesimali, che agevola la determinazione del tipo. Applico in seguito i risultati generali ai casi di $n=3, 4, 5$ per determinare i rimanenti tipi di gruppi di movimenti. La ricerca è però completa solo pei casi $n=3$, $n=4$ e pei gruppi di S_5 con 1, 2, 3, 4 e 9 rotazioni infinitesimali, non essendomi riuscito negli altri casi di discutere in modo semplice le relazioni di composizione. Ho determinato infine colle stesse limitazioni anche i gruppi reali di movimenti e similitudini in S_3, S_4, S_5.

In una recente memoria [2]) il Prof. Bianchi ha determinato tutti i possibili elementi lineari di spazî a tre dimensioni, che ammettono gruppi continui di movimenti reali (cioè di applicabilità in sè stessi), ottenendo per ciascun elemento lineare tutti i corrispondenti tipi distinti di gruppi. I risultati che qui ottengo intorno al gruppo delle rotazioni in S_4 collimano perfettamente coi risultati di questa memoria in quanto riguarda gli spazî a curvatura costante positiva.

---

[1]) Lie. — *Op. cit.*

[2]) *Memorie della Società italiana delle Scienze (detta dei XL).* Serie III. Tomo XI, 1897.

I.

Sul gruppo dei movimenti nello spazio ad n dimensioni

§. 1. — Definizioni.

Intendiamo il gruppo dei movimenti in S_n definito dalle formole:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x'_1 &= \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \ldots + \alpha_{1n} x_n + a_1 \\ x'_2 &= \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \ldots + \alpha_{2n} x_n + a_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_n &= \alpha_{n1} x_1 + \alpha_{n2} x_2 + \ldots + \alpha_{nn} x_n + a_n \end{aligned}\right.$$

colle $a_1, a_2, \ldots a_n$ costanti arbitrarie e le α_{ik} coefficienti di una *sostituzione ortogonale* a determinante 1, legate quindi dalle relazioni:

$$(\mathrm{A})\qquad \left\{\begin{aligned} &\alpha_{i1}^2 + \alpha_{i2}^2 + \ldots + \alpha_{in}^2 + 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \\ &\alpha_{i1}\alpha_{k1} + \alpha_{i2}\alpha_{k2} + \ldots + \alpha_{in}\alpha_{nn} = 0 \quad (i, k = 1, 2, \ldots n;\ i \neq k)\,. \end{aligned}\right.$$

Che queste trasformazioni formino gruppo risulta senz'altro dal fatto che il prodotto di due determinanti ortogonali uguali ad 1 è di nuovo un determinante ortogonale eguale ad 1. Il computo delle costanti mostra poi che si tratta di un gruppo ad $\dfrac{n\,(n+1)}{2}$ parametri in generale complessi. Noi ci limiteremo però a considerare le trasformazioni reali di questa forma, che costituiscono dunque un $G_{\frac{n\,(n+1)}{2}}$.

Ogni movimento (1) è composto di una *rotazione* intorno alla origine:

(2) $$x'_i = \alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \ldots + \alpha_{in} x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

e di una *traslazione:*

$$x'_i = x_i + a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots n)\,.$$

La determinazione dei tipi distinti di movimenti finiti (1) e di *movimenti infinitesimi* nel senso di Lie si riduce evidentemente alla risoluzione del problema analogo per le rotazioni.

Poichè il gruppo G delle rotazioni contiene insieme ad ogni rotazione la sua inversa, è senz'altro un gruppo di Lie generato da trasformazioni infinitesimali [1]). Per queste possiamo prendere le $\frac{n(n-1)}{2}$ *rotazioni infinitesime:*

$$X_{ik} = x_i \frac{\partial f}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (i, k = 1, 2 \ldots n;\ i < k)\,.$$

Queste infatti sono certo contenute in G, poichè le trasformazioni finite di tutti i gruppi ad un parametro generati dalle X_{ik} rientrano nella forma (2). Sono poi in numero di $\frac{n(n-1)}{2}$ linearmente indipendenti, dunque generano effettivamente tutto il gruppo G.

§. 2. — **Teoremi sulle rotazioni finite ed infinitesime.**

Ci proponiamo ora di determinare le forme canoniche delle rotazioni finite e infinitesime in S_n. Quantunque per le prime la questione sia già stata risoluta dal Jordan [2]) crediamo utile

---

[1]) Lie. — *Op. cit.,* III, pag. 566, Satz 2.

[2]) Jordan. — *Essai sur la géometrie à n dimensions.* Bulletin de la société Mathématique de France, 1875. Tomo III, n. 4, 5, 6.

riprendere la trattazione per l'intima connessione delle rotazioni finite colle infinitesime, e anche perchè nella dimostrazione del Jordan si nota qualche lacuna.

Chiamiamo *spazio assiale* di una rotazione finita o infinitesima lo spazio lineare per l'origine costituito dai punti invarianti (reali) di questa rotazione. Le equazioni di questo spazio per la rotazione finita (2), sono:

$$(\alpha)\quad \begin{cases} (\alpha_{11}-1)\,x_1+\alpha_{12}\,x_2+\ldots+\alpha_{1n}\,x_n=0 \\ \alpha_{21}\,x_1+(\alpha_{22}-1)\,x_2+\ldots+\alpha_{2n}\,x_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}\,x_1+\alpha_{n2}\,x_2+\ldots+(\alpha_{nn}-1)=0 \end{cases}$$

e per la rotazione infinitesima:

$$(3)\qquad \sum_{i,k}^{1,2..n}\beta_{ik}\,X_{ik}=\sum_{r}^{1,2..n}\xi_r\frac{\partial f}{\partial x_r}\qquad (i<k)$$

sono:

$$(\beta)\quad \begin{cases} \xi_1= \qquad\quad \beta_{12}\,x_2+\beta_{13}\,x_3+\ldots+\beta_{1n}\,x_n=0 \\ \xi_2=-\beta_{12}\,x_1 \qquad +\beta_{23}\,x_3+\ldots+\beta_{2n}\,x_n=0 \\ \xi_3=-\beta_{13}\,x_1-\beta_{23}\,x_2 \qquad +\ldots+\beta_{3n}\,x_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_n=-\beta_{1n}\,x_1-\beta_{2n}\,x_2-\ldots-\beta_{n-1,\,n}\,x_{n-1}=0\,. \end{cases}$$

Indicheremo con $[\alpha]$ e $[\beta]$ rispettivamente i determinanti dei sistemi (α) e (β). Si ha subito:

LEMMA 1. — *Qualunque rotazione (finita o infinitesima) di uno spazio con un numero dispari di dimensioni ammette uno spazio assiale per l'origine di dimensione* ≥ 1.

Infatti per una rotazione finita (2) basta osservare che se si moltiplica il determinante $\Delta=1$ dei *coseni di direzione* α_{ik} per $[\alpha]$ si ottiene $[\alpha]$ stesso con tutti gli elementi cangiati di segno.

Dunque

$$[\alpha] = (-1)^n [\alpha]$$

e per n dispari $[\alpha] = 0$, ciò che dimostra l'asserto.

Per la (3) poi basta ricordare che un determinante emisimmetrico d'ordine dispari è sempre nullo.

Se chiamiamo *rotazione simmetrica* una sostituzione ortogonale a determinante -1 (in quanto che può pensarsi come combinazione di una rotazione e di una *simmetria* rispetto ad un piano $x'_1 = x_1, \dots x'_{n-1} = x_{n-1}, x'_n = -x_n$), sussiste per queste rotazioni un teorema analogo al precedente, per quanto riguarda le trasformazioni finite, e per uno spazio di dimensione pari, cioè:

1_a — *Una rotazione simmetrica di uno spazio con un numero pari di dimensioni ammette uno spazio assiale per l'origine di dimensione* ≥ 1,

e si dimostra in modo affatto analogo.

1_b — *Lo spazio assiale di una rotazione infinitesima ha un numero pari o dispari di dimensioni, secondo che è pari o dispari la dimensione n dello spazio ambiente,* vale a dire è in generale un S_{n-2s}.

Infatti un determinante emisimmetrico è sempre di caratteristica pari.

Lemma 2. — *Con una rotazione reale di S_n si può trasformare un qualunque spazio lineare* **reale** *S_r per l'origine:*

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n-r,1} x_1 + a_{n-r,2} x_2 + \dots + a_{n-r,n} x_n = 0 \end{array} \right.$$

in uno spazio **coordinato** *d'ugual dimensione:*

$$x_1 = 0 \;, \quad x_2 = 0 \;, \dots \; x_{n-r} = 0 \quad {}^{1)}.$$

[1]) Se considerassimo anche rotazioni immaginarie, il teorema varrebbe anche per un S_r immaginario, purchè non tangente al *cono-sfera* per l'orig. $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0$, che si trasforma per qualunque rotazione in se stesso.

Se tra le a_{ih} passano le relazioni caratteristiche dei coseni di direzione:

$$\begin{cases} a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \ldots + a_{in}^2 = 1 \\ a_{i1}\, a_{k1} + a_{i2}\, a_{k2} + \ldots + a_{in}\, a_{kn} = 0 \end{cases}$$

(nel qual caso si parlerà di $n-r$ iperpiani (a) *mutuamente ortogonali*) la cosa risulta subito.

Infatti dalle relazioni:

$$a_{i1}\, a_{n-r+1,\,1} + a_{i2}\, a_{n-r+1,\,2} + \ldots + a_{in}\, a_{n-r+1,\,n} = 0 \quad (i = 1, \ldots n-r)$$

si potrà determinare (coll'arbitrarietà di r costanti, poichè le (a) si suppongono naturalmente indipendenti) un $(n-r+1)^{mo}$ iperpiano ortogonale agli $n-r$ iperpiani (a):

$$a_{n-r+1,\,1}\, x_1 + a_{n-r+1,\,2}\, x_2 + \ldots + a_{n-r+1,\,n}\, x_n = 0\,,$$

ed essendo le $a_{n-r+1,\,s}$ reali, si potrà anche supporre:

$$a_{n-r+1,\,1}^2 + a_{n-r+1,\,2}^2 + \ldots + a_{n-r+1,\,n}^2 = 1.$$

Così continuando, è chiaro che si può costruire coll'arbitrarietà di $r+(r-1)+\ldots+1 = \frac{r\,(r+1)}{2}$ parametri un'n-upla di iperpiani mutuamente ortogonali:

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n = 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \ldots + a_{nn}\, x_n = 0 \end{cases}$$

di cui fanno parte gli iperpiani (a), e potrà supporsi in ciascuno la somma dei quadrati dei coefficienti uguale ad 1. E allora colla rotazione:

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x'_n = a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + \ldots + a_{nn}\, x_n \end{cases}$$

lo spazio S_r si riduce appunto allo spazio coordinato:

$$x'_1 = 0 \ , \quad x'_2 = 0 \ , \ \dots \ x'_{n-r} = 0 \, .$$

Tutto è ridotto dunque a dimostrare che ad $n-r$ iperpiani (a) indipendenti per l'origine si possono sostituire $n-r$ iperpiani del loro *fascio* mutuamente ortogonali.

Per due iperpiani la cosa risulta subito. Supposto che sia possibile per $m-1$ iperpiani indipendenti, mostriamo che lo è pure per m. Consideriamo dunque m iperpiani:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m-1,1} x_1 + a_{m-1,2} x_2 + \dots + a_{m-1,n} x_n = 0 \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = 0 \end{cases}$$

di cui i primi $m-1$ siano mutuamente ortogonali, talchè si abbia:

$$\begin{cases} a_{i1} a_{k1} + a_{i2} a_{k2} + \dots + a_{in} a_{kn} = 0 & (i, k = 1 \dots m-1 \ , \ i \neq k) \\ a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \dots + a_{in}^2 = 1 & , \ (i = 1 \dots m) \ , \end{cases}$$

e facciamo vedere che, posto

$$a'_{mk} = a_{mk} + \lambda_1 a_{1k} + \lambda_2 a_{2k} + \dots + \lambda_{m-1} a_{m-1,k} \quad (k = 1 \dots n) \, ,$$

possono determinarsi le $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{m-1}$ in guisa che sia:

$$a_{i1} a'_{m1} + a_{i2} a'_{m2} + \dots + a_{in} a'_{m,n} = 0 \quad (i = 1, 2 \dots m-1).$$

E infatti per le supposte relazioni fra le

$$a_{i1} \ , \ a_{i2} \ , \ \dots \ a_{in} \qquad (i = 1 \dots m-1) \ ,$$

quest'ultimo sistema può scriversi:

$$a_{i1} a_{m1} + a_{i2} a_{m2} + \dots + a_{in} a_{mn} + \lambda_i = 0 \ , \quad (i = 1 \, .. \, m-1)$$

cosicchè ne vengono perfettamente determinate le λ.

TEOREMA. — *Le più generali rotazioni reali (finite o infinitesime) di uno spazio* S_n *con un numero dispari di dimensioni son simili a rotazioni dello spazio di dimensione pari immediatamente inferiore.*

E infatti una tale rotazione pel lemma 1 ammette certo un S_1 per l'origine di punti invarianti (se ha uno spazio assiale di dimensione $n-2s>1$ basta considerare in questo un S_1 qualunque per l'origine). Si può allora (lemma 2) trasformare la rotazione considerata in maniera da ridurre questo S_1 all' S_1 coordinato:

$$x_1=0 \ , \ x_2=0 \ , \ \ldots \ x_{n-1}=0 .$$

Dopo di ciò,

a) se la rotazione è finita (sia la (2)), facendo nei secondi membri $x_1=0$, $x_2=0, \ldots x_{n-1}=0$, deve risultarne $x'_1=0$, $x'_2=0, \ldots x'_{n-1}=0$, $x'_n=x_n$, qualunque sia x_n.

Ciò porta che sia:

$$\alpha_{n1}=\alpha_{n2}=\ldots .=\alpha_{n,\,n-1}=0 \quad , \quad \alpha_{nn}=0 .$$

La rotazione prende dunque colla detta trasformazione la forma:

$$\begin{cases} x'_1 \ = \alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\ldots+\alpha_{1,\,n-1}x_{n-1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x'_{n-1}=\alpha_{n-1,\,1}x_1+\alpha_{n-1,\,2}x_2+\ldots+\alpha_{n-1,\,n-1}x_{n-1} \\ x'_n \ = x_n \ , \end{cases}$$

e questa è precisamente una rotazione in S_{n-1}.

b) Per una rotazione infinitesima $\Sigma\,\beta_{ik}\,X_{ik}$ appare dalle prime $n-1$ delle (β) (dovendo risultare $\xi_1=0$, $\xi_2=0, \ldots .\ \xi_{n-1}=0$ per $x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}=0$ e x_n qualunque) che sarà:

$$\beta_{1n}=\beta_{2n}=\ldots=\beta_{n-1,\,n}=0 \ ,$$

talchè nella rotazione trasformata $X'f$ non compare affatto la variabile x_n. Si ha dunque ancora una rotazione di S_{n-1}.

Questo teorema è manifestamente un caso particolare dell'altro che si può dimostrare in modo affatto analogo: *Una rotazione reale finita o infinitesima di* S_n *che lasci fermi tutti i punti di un* S_r *per l'origine è simile ad una rotazione di* S_{n-r}.

Per le rotazioni infinitesime il teorema dimostrato può anche enunciarsi: *Ogni gruppo (reale) di rotazioni ad un parametro in* S_{2n+1} *è simile a un gruppo analogo in* S_{2n}.

Per le rotazioni finite si ha poi un teorema analogo per uno spazio di dimensione pari, se si considerano le rotazioni simmetriche, e si applica il lemma 1_a, e cioè: *La più generale rotazione simmetrica di* S_{2n} *è simile ad una rotazione simmetrica di* S_{2n-1}.

Una rotazione finita o infinitesima di S_{2n}, *per la quale il determinante* $[\alpha]$ *o* $[\beta]$ *risulti diverso da zero, non può esser simile a rotazioni di uno spazio di dimensione inferiore, cioè, come diremo, appartiene ad* S_{2n}.

E infatti, supposto per un momento che la rotazione R in discorso sia simile ad una rotazione R' dell' S_r $(x_1, x_2, \ldots x_r)$ con $r < 2n$, poichè quest'ultima ha certo in S_{2n} uno spazio assiale Σ, (lasciando invariati tutti i punti dell' S_{2n-r} $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots x_r = 0$), anche la rotazione proposta R avrà uno spazio assiale (il trasformato di Σ), ciò che contraddice all'ipotesi

$$[\alpha] \neq 0 \qquad \text{o} \ [\beta] \neq 0\,.$$

Dopo ciò basterà determinare i vari tipi distinti di rotazioni finite o infinitesime appartenenti ad S_{2n}. La questione è risoluta, come si vedrà, in ambedue i casi dalla considerazione degli iperpiani e degli S_{2n-2} invarianti per l'origine.

§. 3. — **Forma canonica delle rotazioni finite.**

Se $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_{2n} x_{2n} = 0$ è l'equazione di un iperpiano invariante per la rotazione finita:

$$x'_i = \alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \ldots + \alpha_{i,\,2n} x_{2n} \quad (i = 1, 2 \ldots . 2n) \tag{4}$$

dovrà essere identicamente (nelle x):

$$a_1 x'_1 + a_2 x'_2 + \ldots . + a_{2n} x'_{2n} = \lambda\,(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots . + a_{2n} x_{2n})$$

con λ costante, epperò:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_{11} a_1 + \alpha_{21} a_2 + \ldots + \alpha_{2n,\,1} a_{2n} = \lambda\, a_1 \\ \alpha_{12} a_1 + \alpha_{22} a_2 + \ldots + \alpha_{2n,\,2} a_{2n} = \lambda\, a_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha_{1,\,2n} a_1 + \alpha_{2,\,2n} a_2 + \ldots + \alpha_{2n,\,2n} a_{2n} = \lambda\, a_{2n}\,. \end{array}\right. \tag{5}$$

Perchè esistano valori non tutti nulli delle a che verifichino questo sistema, dev'essere:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{21} \ldots . & \alpha_{2n,\,1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} - \lambda \ldots . & \alpha_{2n,\,2} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ \alpha_{1,\,2n} & \alpha_{2,\,2n} \ldots . & \alpha_{2n,\,2n} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

e alle radici reali di questa equazione, e a queste soltanto, corrisponderanno iperpiani reali invarianti.

È facile verificare che queste radici reali non possono essere che ± 1. Ricordando infatti che se si scambiano nel determinante di una sostituzione ortogonale le linee e le colonne si ha daccapo una sostituzione ortogonale e che $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ è un invariante per una tale sostituzione, si avrà dalle (5) quadrando e sommando:

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{2n}^2 = \lambda^2\,(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{2n}^2)$$

Da cui appunto, se $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_{2n}^2 \neq 0$, (ciò che accade certo per iperpiani invarianti reali) segue $\lambda = \pm 1$.

Nel caso nostro però il segno inferiore non è ammissibile per l'ipotesi $[\alpha] \neq 0$; potrà aversi dunque al più la radice reale $\lambda = 1$ e tutte le altre saranno immaginarie coniugate [1]).

Se r è la caratteristica del determinante $\mathrm{D}(-1)$, esisteranno ∞^{2n-r} (in particolare nessuno se $r = 2n$) iperpiani reali invarianti formanti fascio intorno ad un S_r per l'origine, e se ne potranno prendere $2n - r$ mutuamente ortogonali come iperpiani coordinati:

$$x_{r+1} = 0 \ , \ x_{r+2} = 0 \ , \ \ldots . \ x_{2n} = 0 .$$

La rotazione considerata (4) prende così la forma:

$$\left\{\begin{array}{l} x'_1 = \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \ldots + \alpha_{1r} x_r \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ x'_r = \alpha_{r1} x_1 + \alpha_{r2} x_2 + \ldots + \alpha_{rr} x_r \\ x'_{r+1} = -x_{r+1} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ x'_{2n} = -x_{2n} , \end{array}\right.$$

costituendo le prime r formole una rotazione od una rotazione simmetrica (secondo che r è pari o dispari), *priva di iperpiani invarianti reali.* È chiaro allora che dev'esser sempre r pari, perchè un'equazione $\mathrm{D}'(\lambda) = 0$ di grado dispari ha sempre una radice reale.

---

[1]) Per un teorema di Brioschi semplificato da Faà di Bruno (*Journal de Liouville.* Tomo XIX, 253, 254) le radici immaginarie sono 2 a 2 reciproche. Questo teorema però non è esattamente enunciato per quanto riguarda le radici reali.

Dunque: *Ogni rotazione finita appartenente ad* S_{2n} *può ridursi alla forma:*

$$(6)\quad \begin{cases} x'_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1,2r}x_{2r} \\ x'_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2,2r}x_{2r} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x'_r = \alpha_{2r,1}x_1 + \alpha_{2r,2}x_2 + \ldots + \alpha_{2r,2r}x_{2r} \\ x'_{2r+1} = -x_{2r+1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x'_{2n} = -x_{2n}, \end{cases}$$

dove le prime $2r$ *formole costituiscono una rotazione appartenente ad* S_{2r} *con nessun* S_{2r-1} *reale invariante per l'origine.*

Questa rotazione avrà allora qualche S_{2r-2} reale invariante (intersezione di due S_{2r-1} invarianti immaginari coniugati). Riducendo le equazioni di un tale S_{2r-2} alla forma $\begin{cases} x_{2r-1} = 0 \\ x_{2r} = 0 \end{cases}$ (lemma 2), e introducendo queste equazioni nelle (6), dovrà risultarne $x'_{2r-1} = 0$, $x'_{2r} = 0$, qualunque siano $x_1, x_2, \ldots x_{2r-2}$, e perciò dev'essere:

$$\alpha_{2r-1,1} = \alpha_{2r-1,2} = \ldots = \alpha_{2r-1,2r-2} = 0\,, \quad \alpha^2_{2r-1,2r-1} + \alpha^2_{2r-1,2r} = 1$$

$$\alpha_{2r,1} = \alpha_{2r,2} = \ldots = \alpha_{2r,2r-2} = 0\,, \quad \alpha^2_{2r,2r-1} + \alpha^2_{2r,2r} = 1$$

$$\alpha_{2r-1,2r-1}\,\alpha_{2r,2r-1} + \alpha_{2r-1,2r}\,\alpha_{2r,2r} = 0\,.$$

Posto quindi
$$\alpha_{2r-1,2r-1} = \cos\alpha$$
$$\alpha_{2r-1,2r} = \operatorname{sen}\alpha\,,$$
sarà
$$\alpha_{2r,2r-1} = -\varepsilon\operatorname{sen}\alpha$$
$$\alpha_{2r,2r} = \varepsilon\cos\alpha\,,$$

indicando ε l'unità positiva o negativa, e la rotazione considerata di S_{2r} prenderà la forma:

$$(7)\quad \begin{cases} x'_i = a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 + \ldots . + a_{i,\,2r-2}\,x_{2r-2} \quad (i = 1, 2, \ldots 2r-2) \\ x'_{2r-1} = \quad x_{2r-1}\cos\alpha + \quad x_{2r}\operatorname{sen}\alpha \\ x'_{2r} = \ -\varepsilon\,x_{2r-1}\operatorname{sen}\alpha + \varepsilon\,x_{2r}\cos\alpha\,, \end{cases}$$

le prime $2r-2$ formole costituendo una rotazione o una rotazione simmetrica secondo che $\varepsilon = \pm 1$. Ma questa rotazione deve appartenere ad S_{2r-2} e per un teorema precedente una rotazione simmetrica non può mai appartenere ad uno spazio di dimensione pari. È dunque $\varepsilon = 1$ e le prime $2r-2$ formole della (7) costituiscono una rotazione appartenente ad S_{2r-2} senza iperpiani invarianti reali. Su questa può ripetersi lo stesso ragionamento e così si conclude che la (7) è simile ad una rotazione della forma:

$$(8)\qquad \begin{cases} x'_1 = x_1\cos\alpha - x_2\operatorname{sen}\alpha \\ x'_2 = x_1\operatorname{sen}\alpha + x_2\cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_3 = x_3\cos\beta - x'_4\cos\beta \\ x'_4 = x_3\operatorname{sen}\beta + x_4\cos\beta \end{cases} \quad \ldots . \quad \begin{cases} x'_{2r-1} = x_{2r-1}\cos\rho - x_{2r}\operatorname{sen}\rho \\ x'_{2r} \ \ = x_{2r-1}\operatorname{sen}\rho + x_{2r}\cos\rho\,. \end{cases}$$

Se si osserva poi che anche le formole:

$$\begin{cases} x'_{2r+1} = -x_{2r+1} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ x'_{2n} \ = -\ x_{2n} \end{cases} \qquad \begin{cases} x'_{2s+1} = x_{2s+1} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ x'_{2n} \ = x_{2n} \end{cases}$$

rientrano nella forma (8) per $\alpha = \beta = \ldots = \rho = \pi$ o per $\alpha = \beta = \ldots = \rho = 0$, si può concludere col teorema dovuto a Jordan:

Tutte le rotazioni finite reali di S_{2n} *sono simili a rotazioni della forma* (8) *con* $r \leq n$.

E se chiamiamo rotazione *elementare* di S_n una rotazione simile alla rotazione del piano $\begin{cases} x'_1 = x_1\cos\alpha - x_2\operatorname{sen}\alpha \\ x'_2 = x_1\operatorname{sen}\alpha + x_2\cos\alpha \end{cases}$, si ha che:

Ogni rotazione finita reale di S_n *è composta di rotazioni elementari in numero* $\leq \left[\frac{n}{2}\right]$ *intorno ad* S_{2n-2} *assiali mutuamente ortogonali.*

§. 4. — **Forma canonica delle rotazioni infinitesime e dei movimenti infinitesimi.**

Un risultato affatto analogo può stabilirsi per le rotazioni infinitesime.

Chiamiamo iperpiano invariante per l'origine rispetto alla trasformazione infinitesima Xf un iperpiano:

$$\varphi = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = 0$$

tale che sia $$X\varphi = \lambda \varphi \qquad \text{con } \lambda \text{ costante.}$$

Gli iperpiani determinati da questa condizione son tutti e soli gli iperpiani invarianti comuni alle ∞^1 trasformazioni finite del gruppo ad un parametro Xf (Lie I, pag. 112, Teor. 14).

Una rotazione infinitesima $Xf = \sum_{i,k}^{1\ldots 2n} \beta_{ik} X_{ik}$ $(i < k)$ *appartenente ad* S_{2n} *non può avere iperpiani invarianti reali.*

Se ne avesse uno infatti, prendendolo come iperpiano coordinato $x_{2n} = 0$, dovrebbe essere $X x_{2n} = \lambda x_{2n}$ cioè:

$$\xi_{2n} = -\beta_{1,2n} x_1 - \beta_{2,2n} x_2 - \ldots - \beta_{2n-1,2n} x_{2n-1} = \lambda x_{2n}$$

epperò necessariamente $\beta_{1,2n} = \beta_{2,2n} = \ldots = \beta_{2n-1,2n} = 0$, talchè nella espressione di Xf non figurerebbe la x_{2n} contro l'ipotesi che Xf appartenga ad S_{2n}.

D'altra parte la ricerca degli iperpiani invarianti per l'origine rispetto ad una rotazione infinitesima Xf conduce come per le rotazioni finite ad un'equazione $\Delta(\lambda) = 0$ di grado $2n$ in λ, alle cui radici corrispondono sempre iperpiani invarianti reali o immaginari coniugati.

Esistono certo dunque nel caso nostro due iperpiani invarianti immaginari coniugati:

$$\psi_1 = \varphi_1 + i\,\varphi_2 \quad , \quad \psi_2 = \varphi_1 - i\,\varphi_2$$

con φ_1, φ_2 reali. Essendo allora $X\psi_1 = \lambda_1 \psi_1$, $X\psi_2 = \lambda\,\psi_2$, è chiaro che ogni iperpiano del fascio $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$, cioè passante per l'S_{2n-2} reale $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, vien trasformato dalla Xf in un iperpiano del fascio stesso. Prendendo dunque questo S_{2n-2} reale (che riesce manifestamente invariante per tutte le trasformazioni finite del $G_1(Xf)$) come S_{2n-2} coordinato $x_{2n-1} = 0$, $x_{2n} = 0$, dovrà essere:

$$\begin{cases} X\,x_{2n-1} = \alpha\,x_{2n-1} + \beta\,x_{2n} = \xi_{2n-1} \\ X\,x_{2n} \quad = \gamma\,x_{2n-1} + \delta\,a_{2n} = \xi_{2n}\,. \end{cases}$$

Da cui segue, ricordando le espressioni di ξ_{2n-1} e ξ_{2n}

$$\beta_{1,\,2n-1} = \beta_{2,\,2n-1} = \ldots = \beta_{2n-2,\,2n-1} = 0$$

$$\beta_{1,\,2n} \quad = \beta_{2,\,2n} \quad = \ldots = \beta_{2n-2,\,2n} \quad = 0$$

$$\alpha = \delta = 0 \qquad \beta = -\gamma\,.$$

La Xf prende dunque la forma:

$$\sum_{i,k}^{1\ldots 2n-2} \beta_{ik}\,X_{ik} + \gamma\,X_{2n-1,\,2n}\,,$$

dove la prima sommatoria rappresenta una rotazione infinitesima appartenente ad S_{2n-2}. Su questa può ripetersi lo stesso ragionamento, talchè si conclude infine:

Ogni rotazione infinitesima reale di S_{2n} *è riducibile alla forma canonica:*

(9) $$\alpha_1\,X_{12} + \alpha_2\,X_{34} + \ldots + \alpha_n\,X_{2n-1,\,2n}$$

con $n-1$ *parametri essenziali.* (Propriamente abbiamo trovato questa forma per le rotazioni infinitesime *appartenenti* ad S_{2n}, ma le altre, appartenendo a spazi S_{2r} con $r < n$, si ottengono dalla forma precedente annullando $n - r$ delle α).

Per determinare dunque tutti i tipi distinti di rotazioni infinitesime basta far questa ricerca sulla serie (9). Appartengono intanto allo stesso tipo due rotazioni infinitesime della forma (9) i cui coefficienti α_i siano uguali (propriamente *proporzionali*) *a meno dell'ordine*. Infatti colle rotazioni:

$$(\alpha)\quad \begin{cases} x'_{2i-1} = x_{2k-1} & x'_{2k-1} = x_{2i-1} \\ x'_{2i} \;\;\;= x_{2k} & x'_{2k} \;\;\;= x_{2i} \end{cases}$$

si possono scambiar fra loro in (9) due rotazioni infinitesime qualunque $X_{2i-1,\,2i}$ e $X_{2k-1,\,2k}$.

Applicando tali rotazioni, può pensarsi che nella (9) le $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ siano disposte in ordine di grandezza decrescente, e si otterranno quindi tutti i tipi distinti di rotazioni infinitesime anche dalla forma ridotta:

$$(9^*) \qquad Xf = X_{12} + h_1 X_{34} + \ldots . + h_{n-1} X_{2n-1,\,2n}$$

$$\text{con} \qquad 1 \geq |h_1| \geq |h_2| \geq \ldots . \geq |h_{n-1}| .$$

A sistemi distinti di valori assoluti delle h corrispondono tipi distinti di rotazioni infinitesime. Basta per ciò far vedere che ogni rotazione R che trasformi una rotazione infinitesima (9) in una altra della stessa forma conserva il sistema di valori assoluti:

$$|\alpha_1| \,,\quad |\alpha_2| \,, \ldots . |\alpha_n| .$$

Per questo determiniamo innanzitutto la totalità delle rotazioni R che soddisfano alle condizioni richieste. Una tale rotazione, dovendo trasformare il sistema degli S_{2n-2} invarianti della prima trasformazione infinitesima in quelli della seconda, conserverà il sistema degli n S_{2n-2} coordinati:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad \cdots\cdots \quad \begin{cases} x_{2n-1} = 0 \\ x_{2n} \;\;\;= 0 . \end{cases}$$

E viceversa ogni rotazione che conservi questo sistema trasforma la (9) in un'altra rotazione infinitesima della stessa forma. Tutte queste rotazioni costituiscono un gruppo misto che può riguardarsi come prodotto di un gruppo discontinuo di $\pi(n)$ rotazioni finite (composte colla (α)), che permutino fra loro in tutti i modi possibili gli S_{2n-2}, e del gruppo G delle rotazioni che lasciano fermo ciascuno degli S_{2n-2}. Infatti ogni rotazione che conservi il sistema degli S_{2n-2} può riguardarsi come prodotto di una *particolare* rotazione che permuti gli S_{2n-2} nello stesso modo per una *conveniente* rotazione che li lascia ciascuno in se stesso.

Le rotazioni di G poi (come subito si vede in modo analogo a quello che ha condotto a stabilire la forma canonica (8) delle rotazioni finite, e solo ricordando che non hanno ora il vincolo di appartenere ad S_{2n}) hanno la forma:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \cos\alpha - x_2 \operatorname{sen}\alpha \\ x'_2 = (x_1 \operatorname{sen}\alpha + x_2 \cos\alpha)\,\varepsilon_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'_3 = x_3 \cos\beta - x_n \operatorname{sen}\beta \\ x'_4 = (x_3 \operatorname{sen}\beta + x_n \cos\beta)\,\varepsilon_2 \end{cases} \quad \cdots\cdots \quad \begin{cases} x'_{2n-1} = x_{2n-1} \cos\nu - x_{2n} \operatorname{sen}\nu \\ x'_{2n} \;\; = (x_{2n-1} \operatorname{sen}\nu + x_{2n} \cos\nu)\,\varepsilon_n \end{cases}$$

dove $\varepsilon_i = \pm 1 \quad \text{e} \quad \varepsilon_1\,\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n = 1.$

Possono riguardarsi quindi come composte delle rotazioni (β) del gruppo continuo di trasformazioni due a due permutabili

$$G_n \equiv (X_{12}, X_{34}, \ldots X_{2n-1,\,2n})$$

e delle trasformazioni del gruppo discontinuo di rotazioni:

$$(\gamma) \qquad x'_{2i} = \varepsilon_i\, x_{2i} \quad (i = 1 \ldots n) \quad \varepsilon_i = \pm 1 \;,\; \varepsilon_1\,\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n = 1.$$

Basta dunque esaminare successivamente quale effetto hanno le (α), le (β) e le (γ) sui valori assoluti $|\alpha_i|$, ed è chiaro che tutte lasciano questi valori inalterati salvo l'ordine (in particolare le (β), per la permutabilità notata, lasciano affatto invariata ogni rotazione infinitesima (9), essendo questa una rotazione infinitesima generica di G_n).

Risulta così che sono certo parametri essenziali della (9*) i valori assoluti delle h. Resta a vedere se sia anche essenziale il segno di qualche h.

Può intanto supporsi, se nella (9*) alcune delle h sono negative, che lo sia una sola. Infatti una rotazione (9*) con due h negative, ad es. h_{r-1}, h_{s-1}, può ridursi con una rotazione (γ) $x'_{2r} = -x_{2r}$, $x'_{2s} = -x_{2s}$ ad un'altra trasformazione simile con questi due coefficienti cangiati di segno e gli altri inalterati.

Un'osservazione analoga mostra che si può sempre supporre sia h_1 il coefficiente negativo. Tutto è ridotto dunque a vedere se sia essenziale il segno di h_1.

Ora questo segno non può cangiarsi che con rotazioni (γ), ed effettivamente se n è dispari, se si considera cioè uno spazio ambiente S_{4m+2}, si posson rendere colla rotazione:

$$x'_2 = -x_2 \ , \quad x'_6 = -x_6 \ , \ \ldots . \ x'_{2n} = -x_{2n}$$

tutti i coefficienti della (9*) negativi (se lo è anche h_1) e quindi appare che in questo caso il segno di h_1 non è essenziale. — Questo non si può invece per un S_{4m}, e quindi in questo caso il segno di h_1 è essenziale. Si conclude che:

Si ottengono tutti i tipi distinti di rotazioni infinitesime reali di S_{4m+2}, *e ciascuno una sola volta, facendo percorrere alle* $h_1, h_2 .. h_{2m}$ *nella trasformazione infinitesima:*

$$Xf = X_{12} + h_1 X_{34} + \ldots + h_{2m} X_{4m+1,\,4m+2}$$

tutti i possibili sistemi distinti di valori per cui

$$1 \geq h_1 \geq h_2 \geq \ldots \geq h_{2m} \geq 0 \,.$$

Si ottengono tutti i tipi distinti di rotazioni infinitesime reali di S_{4m}, *e ciascuno una sola volta, facendo percorrere alle* $h_1, h_2, \ldots h_{2m-1}$ *nelle trasformazioni infinitesime:*

$$X_1 f = X_{12} + h_1 X_{34} + h_2 X_{56} + \ldots + h_{2m-1} X_{4m-1,\,4m}$$

$$X_2 f = X_{12} - h_1 X_{34} + h_2 X_{56} + \ldots + h_{2m-1} X_{4m-1,\,4m}$$

tutti i possibili sistemi distinti di valori per cui:

$$1 \geq h_1 \geq h_2 \geq \ldots . \geq h_{2m-1} \geq 0 .$$

Infine:

In uno spazio di dimensione dispari S_{2n+1} *si ottengono tutti i tipi distinti di rotazioni infinitesime reali, facendo percorrere ad* $h_1, h_2, \ldots h_{n-1}$ *nella trasformazione infinitesima:*

$$X_{12} + h_1 X_{34} + \ldots + h_{n-1} X_{2 \, -1, \, 2n}$$

tutti i possibili sistemi distinti di valori per cui:

$$1 \geq h_1 \geq h_2 \geq \ldots . \geq h_{n-1} \geq 0 .$$

Infatti in questo caso non è certo essenziale il segno di h_1 potendosi sempre colla rotazione:

$$x'_3 = -x_3 \qquad x'_{2n+1} = -x_{2n+1}$$

passare dal caso $h_1 < 0$ al caso $h_1 > 0$.

Si ottengono subito ora anche i tipi distinti di *movimenti infinitesimi* più generali. Il più generale movimento infinitesimo di S_n ha la forma:

$$\lambda \, Xf + a_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots . + a_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

dove Xf indica una rotazione infinitesima e le λ, $a_1, a_2, \ldots a_n$ sono costanti. Mediante una rotazione preliminare (che cambia una *traslazione infinitesima* in un'altra traslazione) può pensarsi la Xf ridotta ad una delle forme canoniche trovate sopra. Sono da distinguere allora i due casi dello spazio di dimensione pari e dello spazio di dimensione dispari.

Nel primo caso se la rotazione Xf *appartiene* ad S_{2n}, se cioè tutte le h sono differenti da zero, si posson render nulle con una traslazione tutte le $a_1, a_2 \ldots a_{2n}$.

Dunque *il movimento infinitesimo più generale di un* S_{2n} *è una rotazione infinitesima.*

Se invece alcune delle h son nulle la riduzione indicata non può farsi che in parte e precisamente si può ottenere con una traslazione la forma:

$$\lambda\,[X_{12} + h_1 X_{34} + \ldots + h_{r-1} X_{2r-1,\,2r}] + \alpha_{2r+1} \frac{\partial f}{\partial x_{2r+1}} + \ldots + \alpha_{2n} \frac{\partial f}{\partial x_{2n}},$$

che a sua volta con una rotazione sulle $x_{2r+1} \ldots x_{2n}$ si riduce all'altra:

$$\lambda\,[X_{12} + h_1 X_{34} + \ldots + h_{r-1} X_{2r-1,\,2r}] + k \frac{\partial f}{\partial x_{2n}},$$

restando k un parametro essenziale.

In uno spazio di dimensione dispari infine il movimento infinitesimo più generale è riducibile alla forma:

$$\lambda\,[X_{12} + h_1 X_{34} + \ldots + h_{n-1} X_{2n-1,\,2n}] + k \frac{\partial f}{\partial x_{2n+1}}.$$

§. 5. — **Riduzione di una rotazione infinitesima alla forma canonica. — Invarianti.**

Data una rotazione infinitesima qualunque di S_{2n}:

$$\sum \beta_{ik} X_{ik} \tag{10}$$

un modo per determinare la forma canonica a cui può ridursi è già indicato dal procedimento generale.

Basta determinare gli S_{2n-2} invarianti, prendendo una coppia di iperpiani ortogonali per ciascuno, ed assumere i $2n$ iperpiani così ottenuti come nuovi iperpiani coordinati. Si riconosce subito però che non è necessaria l'effettiva trasformazione per determinare le costanti $h_1, h_2, \ldots h_{n-1}$. Se si scrive infatti l'equazione *caratteristica* $\Delta(\lambda) = 0$ per la trasformazione infinitesima:

$$Xf = k_1 X_{12} + k_2 X_{34} + \ldots + k_n X_{2n-1,\,2n}$$

appare subito che le radici di questa equazione sono

$$\pm k_1 i \ , \quad \pm k_2 i \ , \ \ldots . \pm k_n i .$$

Ora queste radici non cambiano per una trasformazione di coordinate, perchè la relazione $X\varphi = k i \varphi$ trae seco l'altra $X'\varphi' = k i \varphi'$, indicando $X'f$ e φ' le trasformate di Xf e φ mediante una rotazione qualunque. Data dunque la (10), basta determinare le radici della corrispondente equazione caratteristica:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & \beta_{12} & \beta_{13} \ldots & \beta_{1,2n} \\ -\beta_{12} & -\lambda & \beta_{23} \ldots & \beta_{2,2n} \\ -\beta_{12} & -\beta_{23} & -\lambda \ldots & \beta_{3,2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \\ -\beta_{1n} & -\beta_{2n} & -\beta_{3n} \ldots & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

e i rapporti dei moduli di queste radici (disposte in ordine di grandezza decrescente) forniranno subito le quantità $h_1, h_2, \ldots h_{n-1}$ salvo la questione del segno di h_1 (nel caso di un S_{4m}) che sarà subito decisa.

Per analogia con note denominazioni relative alle trasformazioni proiettive generali possiamo chiamare le $h_1, h_2, \ldots h_{n-1}$ *invarianti assoluti della rotazione infinitesima.*

La questione del segno di h_1 (nel caso di un S_{4m}) può decidersi colla considerazione di una particolare funzione invariantiva dei coefficienti β. Consideriamo l'espressione:

$$U(\beta) = \sum \pm \beta_{ik} \beta_{rs} \ldots \beta_{ut}$$

dove $i k \, r s \ldots u t$ s'intendono percorrere tutte le permutazioni degli indici $1, 2 \ldots 2r$ col vincolo $i < k$, $r < s$, $\ldots u < t$, e s'intende preso ogni volta il segno superiore o l'inferiore secondo che questa permutazione è di 1.ª e 2.ª classe. Si riconosce facilmente che questa espressione è appunto una funzione invariantiva dei coefficienti, talchè sarà in particolare:

$$\sum \pm \beta_{ik} \beta_{rs} \ldots \beta_{ut} = k_1 k_2 \ldots k_n ,$$

indicando $k_1\, k_2 \ldots k_n$ i coefficienti della rotazione infinitesima tipica trasformata della $\Sigma\, \beta_{ik}\, X_{ik}$, epperò per un S_{4m} sarà da prendere $h_1 \lesseqgtr 0$ secondo che risulterà $U(\beta) \lesseqgtr 0$.

Che la $U(\beta)$ sia una funzione invariantiva delle β risulta nel seguente modo. Applicando alla rotazione infinitesima:

$$Xf = k_1\, X_{12} + k_2\, X_{34} + \ldots . + k_n\, X_{2n-1,\, 2n}$$

la rotazione finita qualunque:

$$x'_i = \alpha_{i1}\, x_1 + \alpha_{i2}\, x_2 + \ldots + \alpha_{i,\, 2n}\, x_{2n} \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots 2n)$$

si ottiene per la rotazione infinitesima trasformata:

$$X'f = \sum_{i,k}^{1 \ldots 2n} (k_1\, D^{(1)}_{ik} + k_2\, D^{(2)}_{ik} + \ldots . + k_n\, D^{(n)}_{ik})\, X'_{ik} \quad (i < k)$$

indicando in generale $D^{(r)}_{ik}$ il minore di 2.° ordine comune alla matrice delle colonne $(2r-1)^{ma}$ e $2r^{ma}$ e alla matrice delle linee i^{ma} e k^{ma} nel determinante:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1,\, 2n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2,\, 2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{2n,\, 1} & \alpha_{2n,\, 2} & \ldots & \alpha_{2n,\, 2n} \end{vmatrix} .$$

Si ha cioè per la $X'f$:

$$\beta_{ik} = k_1\, D^{(1)}_{ik} + k_2\, D^{(2)}_{ik} + \ldots + k_n\, D^{(n)}_{ik} ,$$

e si tratta ora di vedere che la funzione $U(\beta)$ costruita con questi valori si riduce al prodotto $k_1\, k_2 \ldots k_{2n}$.

E infatti nello sviluppo di $U(\beta)$ questo prodotto compare col coefficiente:

$$\sum \pm\, D^{(1)}_{ik}\, D^{(2)}_{rs} \ldots D^{(n)}_{ut}$$

che è lo sviluppo di D per minori del 2.° ordine ed è quindi uguale ad 1. Tutti gli altri prodotti in cui le k non sono tutte distinte hanno invece per coefficienti gli sviluppi di determinanti con almeno 2 matrici di second'ordine eguali epperò certo nulli.

Un'altra funzione invariantiva delle β facile a riconoscersi è la somma dei quadrati delle β_{ik}.

E infatti colle stesse notazioni di sopra si ha:

$$V(\beta) = \sum_{i,k}^{1\dots 2n} \beta_{ik}^2 = k_1^2 \sum_{ik} D_{ik}^{(1)^2} + k_2^2 \sum_{ik} D_{ik}^{(2)^2} + \dots + k_n^2 \sum_{ik} D_{ik}^{(n)^2}$$
$$+ 2 \sum_{rs} k_r\, k_s \sum_{ik} D_{ik}^{(r)} D_{ik}^{(s)}.$$

Ma notoriamente in un determinante ortogonale la somma dei quadrati dei minori estratti da una matrice qualunque è $=1$, mentre la somma dei prodotti dei determinanti omologhi estratti da due matrici distinte è $=0$. Resta dunque:

$$V(\beta) = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_n^2$$

come si era enunciato.

Nel caso $2n = 4$ i due invarianti:

$$U(\beta) = \beta_{12}\,\beta_{34} - \beta_{13}\,\beta_{24} + \beta_{14}\,\beta_{23}$$
$$V(\beta) = \beta_{12}^2 + \beta_{13}^2 + \beta_{14}^2 + \beta_{23}^2 + \beta_{24}^2 + \beta_{34}^2$$

sono già sufficienti per determinare il tipo a cui appartiene la rotazione infinitesima $\sum_{i,k}^{1..4} \beta_{ik}\, X_{ik}$ di S_n, poichè le relazioni:

$$k_1^2 + k_2^2 = V(\beta)$$
$$k_1\, k_2 = U(\beta)$$

determinano k_1 e k_2.

Chiaramente per la proprietà invariantiva dimostrata le espressioni $U(\beta)$, $V(\beta)$ sono due invarianti del *gruppo aggiunto* Γ sulle variabili β relativo al $G_{\frac{n(n-1)}{2}}$ delle rotazioni [1]).

---

[1]) Lie. — I, 270. III, 667 e segg.

Ora dalla coincidenza delle due espressioni:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \beta_{12} & \beta_{13} & \dots & \beta_{1,2n} \\ -\beta_{12} & -\lambda & \beta_{23} & \dots & \beta_{2,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\beta_{1,2n} & -\beta_{2,2n} & -\beta_{3,2n} & \dots & -\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2+k_1^2)\,(\lambda^2+k_2^2)\dots(\lambda^2+k_n^2)$$

appare che l'espressione indicata con $U(\beta)$ è una delle radici del termine indipendente da λ nello sviluppo del primo membro ossia del determinante emisimmetrico delle β, (precisamente il *pfaffiano* $(1, 2 \dots n)$ corrispondente a questo determinante [1])). Dunque il determinante stesso $[U(\beta)]^2$ sarà un invariante del gruppo aggiunto.

Similmente è un invariante (e precisamente $= V(\beta)$) il coefficiente di λ^{2n-2} nello sviluppo stesso, e *altre $n-2$ funzioni invariantive analoghe sono fornite dai coefficienti delle altre potenze di* λ (esclusa la λ^{2n}) *cioè dalle somme dei minori principali dei vari ordini (pari) nel determinante delle* β.

Questi n invarianti del gruppo aggiunto che possiamo indicare con $U_1(\beta)$, $U_2(\beta)$, ... $U_n(\beta)$ costituiscono poi effettivamente un sistema completo di invarianti *indipendenti* del gruppo, cioè un sistema completo di soluzioni del sistema di equazioni alle derivate parziali lineari ed omogenee:

$$(11) \qquad E_1 f = 0 \;,\; E_2 f = 0 \;,\; \dots \; E_{\frac{n(n-1)}{2}} f = 0$$

($E_1 f$, $E_2 f$, ... $E_{\frac{n(n-1)}{2}} f$ indicando le trasformazioni infinitesime generatrici del gruppo aggiunto).

E infatti secondo la teoria generale di Lie esistono nel gruppo $G_{\frac{n(n-1)}{2}}$ delle rotazioni tanti tipi distinti di trasformazioni infinitesime *generiche,* quante *varietà invarianti di prima specie* pel corrispondente gruppo aggiunto Γ sulle variabili omo-

[1]) Pascal. — *Determinanti,* pag. 79.

genee β_{ik} (giacchè ciascuna di queste varietà stabilisce con un suo punto generico un determinato tipo di G_1 in $G_{\frac{n(n-1)}{2}}$).

Poichè dunque abbiamo riconosciuto esistere soltanto ∞^{n-1} tipi distinti di rotazioni infinitesime reali, se ne deduce che rispetto al gruppo aggiunto esisteranno soltanto ∞^{n-1} varietà invarianti distinte reali, e quindi solo n soluzioni indipendenti del sistema (11) (non $n-1$ poichè per determinare le varietà invarianti, causa la condizione dell'*omogeneità* delle β deve aggiungersi alle (11) l'equazione $\sum_{i,k} \beta_{ik} \frac{\partial f}{\partial \beta_{ik}} = 0 \quad (i, k = 1 \ldots 2n;\ i < k)$).

Il sistema (11) non ha dunque certamente più di n soluzioni indipendenti. Che poi siano indipendenti le $U_1, U_2, \ldots U_n$ segue senz'altro dal fatto che, variando le β, assumono ∞^n sistemi di valori distinti in corrispondenza agli ∞^{n-1} tipi di rotazioni infinitesime.

Rimane così determinato il sistema completo delle soluzioni del sistema (11) cioè, per esteso, del sistema:

$$E_\mu f = \sum_{i,k}^{1 \ldots \frac{n(n-1)}{2}} c_{i\mu k}\, e_i \frac{\partial f}{\partial e_k} = 0 \qquad \left(\mu = 1, 2 \ldots \frac{n(n-1)}{2}\right)$$

dove le $c_{i\mu k}$ sono le costanti di composizione del gruppo delle rotazioni (± 1 o 0).

II.

Applicazione ai gruppi di movimenti e similitudini nello spazio ordinario

Come *Trasformazioni infinitesime generatrici* del gruppo G_7 dei movimenti e delle similitudini in S_3 possiamo prendere le tre rotazioni infinitesime intorno a tre assi ortogonali x, y, z:

$$X_1f = y\frac{\partial f}{\partial x} - z\frac{\partial f}{\partial y}\,,\quad X_2f = z\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial z}\,,\quad X_3f = x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial z}\,,$$

le tre traslazioni infinitesime lungo gli assi stessi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,,\quad \frac{\partial f}{\partial y}\,,\quad \frac{\partial f}{\partial z}$$

e la similitudine infinitesima rispetto all'origine:

$$X_4f = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z}\,.$$

a) Gruppi di rotazioni ad un parametro. — Secondo la teoria generale che precede i tipi di rotazioni infinitesime reali in S_3 sono gli stessi che in S_2, dunque il più generale gruppo di rotazioni ad un parametro è quello generato dalla trasformazione infinitesima X_3f, che ha per formole finite:

$$x' = x\cos t - y \operatorname{sen} t$$
$$y' = x \operatorname{sen} t + y\cos t\,.$$

b) Gruppi di rotazioni a due parametri. — Dette Y_1f, Y_2f le rotazioni infinitesime generatrici del gruppo, potremo porre (con una rotazione preliminare che riduca la Y_1 al tipo X_1):

$$\begin{cases} Y_1f = X_1f \\ Y_2f = \lambda\, X_2f + \mu\, X_3f. \end{cases}$$

Ora si ha, formando l'espressione alternata (Y_1, Y_2):

$$(Y_1, Y_2) = -\lambda\, X_3f + \mu\, X_2f.$$

Questa, non potendo essere $\lambda = \mu = 0$, deve coincidere colla Y_2, ciò che porta $\lambda^2+\mu^2=0$, $\lambda = \pm \mu i$.

Non esistono dunque in S_3 *gruppi reali di rotazioni a due parametri.*

c) Gruppi di rotazioni a tre parametri. — Il gruppo totale delle rotazioni:

2 $$(X_1\ ,\ X_2\ ,\ X_3).$$

Traslazioni infinitesime formanti gruppo con una rotazioue infinitesima.

a) una sola traslazione infinitesima. Se $Y_1f = X_3$ è la rotazione infinitesima e $Y_2f = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \alpha_3 \frac{\partial f}{\partial z}$ la traslazione infinitesima, dovrà essere $(Y_1, Y_2) = \lambda\, Y_2f$, cioè:

$$-\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \left(\alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \alpha_3 \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

da cui per la realità:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0\ ,\ \lambda = 0.$$

Si ha quindi il G_2 di trasformazioni 2 a 2 permutabili formato da *tutti i movimenti elicoidali attorno all'asse* z:

3 $$\left(x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

colle formole finite:

$$x' = x\cos t - y \operatorname{sen} t \ , \quad y' = x \operatorname{sen} t + y\cos t \ , \quad z' = z + kt$$

con t e k parametri arbitrari.

b) con due traslazioni infinitesime. Si può porre:

$$Y_1 f = X_3 \ , \ Y_2 f = a_1 \frac{\partial f}{\partial x} + a_2 \frac{\partial f}{\partial y} \ , \ Y_3 f = b_1 \frac{\partial f}{\partial x} + b_2 \frac{\partial f}{\partial y} + b_3 \frac{\partial f}{\partial z} \ .$$

Si ha allora $(Y_1, Y_2) = -a_1 \frac{\partial f}{\partial y} + a_2 \frac{\partial f}{\partial x}$. Non potendo essere $a_1 = a_2 = 0$ questa trasformazione infinitesima dev' esser combinazione delle Y_2, Y_3, epperò è necessariamente $b_3 = 0$. Si ha così il G_3:

4 $$\left(x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} \ , \ \frac{\partial f}{\partial x} \ , \ \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

di tutti i movimenti *complanari* al piano $z = 0$ (o se si vuole il gruppo totale dei movimenti in S_2) colle formole finite:

$$\begin{cases} x' = x\cos t - y \operatorname{sen} t + a \\ y' = x \operatorname{sen} t + y \cos t + b \ . \end{cases}$$

c) con tutte le traslazioni. Si ha il G_4:

5 $$\left(x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} \ , \ \frac{\partial f}{\partial x} \ , \ \frac{\partial f}{\partial y} \ , \ \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

di tutti i movimenti elicoidali attorno ad un sistema ∞^2 di assi paralleli, colle formole finite:

$$x' = x\cos t - y \operatorname{sen} t + a \ , \quad y' = x \operatorname{sen} t + y \cos t + b \ , \quad z' = z + c.$$

Traslazioni infinitesime formanti gruppo col G_3 delle rotazioni. Si trova unicamente il gruppo totale G_6 dei movimenti:

6 $$\left(X_1 \ , \ X_2 \ , \ X_3 \ , \ \frac{\partial f}{\partial x} \ , \ \frac{\partial f}{\partial y} \ , \ \frac{\partial f}{\partial z}\right) .$$

Gruppi di movimenti più generali contenenti trasformazioni infinitesime elicoidali.

I più generali gruppi di movimenti contengono (in modo essenziale) fra le trasformazioni infinitesime generatrici, oltre alle rotazioni e traslazioni infinitesime isolate, altre trasformazioni infinitesime composte di rotazioni e traslazioni che chiameremo *trasformazioni infinitesime elicoidali.*

Troveremo questi gruppi più generali cercando quali nuovi tipi si ottengono da quelli già trovati col *prolungarne* le rotazioni infinitesime, mediante l'aggiunta di traslazioni infinitesime $\mathrm{T}f = \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \alpha_3 \frac{\partial f}{\partial z}$.

Così verremo a trovare effettivamente tutti i più generali tipi di gruppi di movimenti in S_3, perchè, come tosto si vede, da ogni gruppo siffatto, togliendo i *prolungamenti* delle rotazioni infinitesime, si ottiene daccapo un gruppo, che rientrerà quindi necessariamente nei tipi di gruppi già determinati:

a) in corrispondenza al G_1 **1** troveremo i vari tipi di trasformazioni infinitesime elicoidali. La trasformazione infinitesima:

$$X_3 + \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \alpha_3 \frac{\partial f}{\partial z}$$

può ridursi con una traslazione sulle x, y alla forma:

7 $$X_3 + a \frac{\partial f}{\partial z} = x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} + a \frac{\partial f}{\partial z} ,$$

che non è ulteriormente riducibile (con soli movimenti), vale a dire contiene in a un parametro essenziale. Questa trasformazione infinitesima genera il gruppo ad un parametro dei *movimenti elicoidali d'egual passo attorno ad un asse* colle formole finite:

$$x' = x \cos t - y \operatorname{sen} t \ , \ \ y' = x \operatorname{sen} t + y \cos t \ , \ \ z' = z + at \qquad (a = \text{cost.})$$

b) in corrispondenza al G_3 **2** non si trova alcun nuovo tipo. Se si cercano infatti i G_3 della forma:

$$\begin{cases} Y_1f = X_1f + \alpha_1 \dfrac{\partial f}{\partial x} + \alpha_2 \dfrac{\partial f}{\partial y} + \alpha_3 \dfrac{\partial f}{\partial z} \\[2ex] Y_2f = X_2f + \beta_1 \dfrac{\partial f}{\partial x} + \beta_2 \dfrac{\partial f}{\partial y} + \beta_3 \dfrac{\partial f}{\partial z} \\[2ex] Y_3f = X_3f + \gamma_1 \dfrac{\partial f}{\partial x} + \gamma_2 \dfrac{\partial f}{\partial y} + \gamma_3 \dfrac{\partial f}{\partial z}, \end{cases}$$

si ha subito:

$$\begin{cases} (Y_1\ Y_2) = -X_3 + \alpha_3 \dfrac{\partial f}{\partial x} + \beta_3 \dfrac{\partial f}{\partial y} - (\alpha_1+\beta_2) \dfrac{\partial f}{\partial z} \\[2ex] (Y_2\ Y_3) = -X_1 + \beta_1 \dfrac{\partial f}{\partial y} + \gamma_1 \dfrac{\partial f}{\partial z} - (\beta_2+\gamma_3) \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] (Y_3\ Y_1) = -X_2 + \gamma_2 \dfrac{\partial f}{\partial z} + \alpha_2 \dfrac{\partial f}{\partial x} - (\gamma_3+\alpha_1) \dfrac{\partial f}{\partial z}, \end{cases}$$

da cui le relazioni:

$$\begin{cases} \alpha_3 = -\gamma_1, & \beta_2+\gamma_3 = \alpha_1, & \alpha_2 = -\beta_1 \\ \beta_3 = -\gamma_2, & \beta_1 = -\alpha_2, & \gamma_3+\alpha_1 = \beta_2 \\ \alpha_1+\beta_2 = \gamma_3, & \gamma_1 = -\alpha_3, & \gamma_2 = -\beta_3. \end{cases}$$

Di qui si ricava $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 0$, che insieme alle altre relazioni danno:

$$\begin{cases} Y_1f = (y+\alpha_3) \dfrac{\partial f}{\partial z} - (z+\beta_1) \dfrac{\partial f}{\partial y} \\[2ex] Y_2f = (z+\beta_1) \dfrac{\partial f}{\partial x} - (x+\gamma_2) \dfrac{\partial f}{\partial z} \\[2ex] Y_3f = (x+\gamma_2) \dfrac{\partial f}{\partial y} - (y+\alpha_3) \dfrac{\partial f}{\partial x}, \end{cases}$$

e queste si riducono subito con una traslazione alle X_1, X_2, X_3.

c) dal G_3 **4** si ha il nuovo tipo:

8 $$\left(x\frac{\partial f}{\partial y}-y\frac{\partial f}{\partial x}+a\frac{\partial f}{\partial z}\,,\ \frac{\partial f}{\partial x}\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

di tutti i movimenti elicoidali d'egual passo attorno ad ∞^2 assi paralleli. I tipi **3, 5** non conducono a nuovi gruppi.

Aggiungendo infine ai precedenti i tre tipi di gruppi di pure traslazioni:

9, 10, 11 $$\frac{\partial f}{\partial x}\,,\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}\right),\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}\,,\ \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

si vede che esistono soli *undici* tipi distinti di gruppi continui di movimenti.

Gruppi di movimenti e similitudini.

Ogni sottogruppo di G_7 che non sia un gruppo Γ di puri movimenti può ridursi alla forma:

$$(Y_1\,,\ Y_2,\,\ldots,\ Y_m\,,\ Uf)$$

dove $(Y_1, Y_2\ldots, Y_m)$ è uno dei gruppi Γ anzidetti o l'identità, e la Uf contiene la trasformazione infinitesima $X_4 f$.

a) il gruppo Γ *è l'identità.* La trasformazione infinitesima:

$$Uf=a_1X_1+a_2X_2+a_3X_3+a_4X_4+b_1\frac{\partial f}{\partial x}+b_2\frac{\partial f}{\partial y}+b_3\frac{\partial f}{\partial z}$$

(dove $a_4 \neq 0$) si riduce con una rotazione alla forma:

$$X_4+a\,X_3+b_1\frac{\partial f}{\partial x}+b_2\frac{\partial f}{\partial y}+b_3\frac{\partial f}{\partial z}=$$
$$=(x-ay+b_1)\frac{\partial f}{\partial x}+(x+ax+b_2)\frac{\partial f}{\partial y}+(z+b_3)\frac{\partial f}{\partial z}\,.$$

Poichè ora nelle relazioni:

$$x-ay+b_1=x'-ay'\ ,\quad y+ax+b_2=y'+ax'\ ,\quad z+b_3=z'$$

il determinante dei coefficienti delle x, y (e così delle x', y') è diverso da zero, si può con una traslazione rendere $b_1 = b_2 = b_3 = 0$.

Si ha dunque come rappresentante del più generale *gruppo ad un parametro di* G_7 il G_1 generato dalla trasformazione infinitesima:

$$\mathbf{12} \quad X_3 + cX_4 = (cx - y)\frac{\partial f}{\partial x} + (cy + x)\frac{\partial f}{\partial y} + (cz)\frac{\partial f}{\partial z} \quad (\text{con } c \neq 0)$$

a cui corrispondono le formole finite:

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} x' = e^{ct}\,(x\cos t - y \operatorname{sen} t) \\ y' = e^{ct}\,(x \operatorname{sen} t + y\cos t) \\ z' = e^{ct}\,. \end{cases}$$

Il parametro c può supporsi positivo, perchè tale si può sempre rendere, se non è, colla rotazione:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \\ z' = -z\,. \end{cases}$$

Il valore assoluto di c è però essenziale, perchè le trasformazioni di G_7 che conservano la forma **12** (cioè l'origine e l'asse z):

$$\begin{cases} x' = k\,(x\cos\alpha - y \operatorname{sen}\alpha)\,\varepsilon \\ y' = k\,(x \operatorname{sen}\alpha + y\cos\alpha) \\ z' = k\,z\,\varepsilon \end{cases}$$

conservano anche il valore assoluto di c.

Le traiettorie di questo gruppo sono spirali cilindro coniche disposte sui coni di rotazione intorno all'asse z con vertice nella origine e tutte d'egual parametro c. Possiamo chiamare le trasformazioni (α) *roto-similitudini* intorno all'asse z e all'origine. La relazione mutua di queste traiettorie è meglio chiarita dalla seguente proprietà geometrica:

Tutte le traiettorie uscenti da un contorno iniziale assegnato ad arbitrio incontrano sotto un angolo ω *costante per ciascuna i successivi contorni generati dal primo, e la superficie spirale che le contiene forma coi successivi piani meridiani* (per l'asse z) *un angolo* Ω *che si mantiene pure costante nei punti di ciascuna traiettoria.* La dimostrazione si ha subito colla considerazione di un conveniente sistema di coordinate curvilinee sulle dette superficie spirali, applicando note formole di geometria differenziale.

b) il gruppo Γ *è il gruppo* **I** *di rotazioni,* cioè:

$$\Gamma \equiv (X_3) \;,\; Uf = X_4 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + b_1 \frac{\partial f}{\partial x} + b_2 \frac{\partial f}{\partial y} + b_3 \frac{\partial f}{\partial z} \,.$$

Si ha

$$(X_3\, Uf) = -a_1 X_2 + a_2 X_1 - b_1 \frac{\partial f}{\partial y} + b_2 \frac{\partial f}{\partial x}$$

da cui $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$. Si può rendere inoltre con una traslazione lungo l'asse z anche $b_3 = 0$, e si ha quindi il G_2 di trasformazioni 2 a 2 permutabili:

13 $$(X_3 \,,\, X_4)$$

composto di tutte le possibili roto-similitudini attorno allo stesso asse e collo stesso centro.

c) $\Gamma \equiv (X_1, X_2, X_3)\,,\; Uf = X_4 + b_1 \dfrac{\partial f}{\partial x} + b_2 \dfrac{\partial f}{\partial y} + b_3 \dfrac{\partial f}{\partial z}\,.$

Si ottiene il G_4:

14 $$(X_1, X_2, X_3, X_4)$$

di tutte le roto-similitudini intorno all'origine.

d) $\Gamma \equiv \left(X_3 \,,\, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right),\; Uf = X_4 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + b_1 \dfrac{\partial f}{\partial x} + b_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}\,.$

Si ottiene il G_3:

15 $$\left(X_3 \,,\, X_4 \,,\, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

di tutte le roto-similitudini collo stesso asse z.

e) $\Gamma \equiv \left(X_3\,,\ \frac{\partial f}{\partial x}\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}\right),\ Uf = X_4 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + b_3 \frac{\partial f}{\partial z}.$

Si ottiene il G_4:

16 $$\left(X_3\,,\ X_4\,,\ \frac{\partial f}{\partial x}\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

di tutte le roto-similitudini col centro in un punto qualunque del piano $z = 0$ e con assi paralleli all' asse z.

f) $\Gamma \equiv \left(X_3\,,\ \frac{\partial f}{\partial x}\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}\,,\ \frac{\partial f}{\partial z}\right),\ Uf = X_4 + a_1 X_1 + a_2 X_2.$

Si ha il G_5:

17 $$\left(X_3\,,\ X_4\,,\ \frac{\partial f}{\partial x}\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}\,,\ \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

di tutte le roto-similitudini con assi paralleli.

g) $\Gamma \equiv \left(X_1, X_2, X_3, \frac{\partial f}{\partial x}\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}\,,\ \frac{\partial f}{\partial z}\right),\ Uf = X_4.$ Si ha il G_7:

18 di tutti i movimenti e delle similitudini.

h) $\Gamma \equiv X_3 + a\frac{\partial f}{\partial z}\,,\ Uf = X_4 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + b_1 \frac{\partial f}{\partial x} + b_2 \frac{\partial f}{\partial y} + b_3 \frac{\partial f}{\partial z}.$

La relazione di composizione porta subito $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$. Si può rendere poi con una traslazione anche $b_3 = 0$. Restano così i gruppi $\left(X_3 + a\frac{\partial f}{\partial z}\,,\ X_4\right)$, dove si può anche rendere $a = 1$ con una similitudine rispetto all' origine. Si ha dunque un solo tipo di G_2 di trasformazioni 2 a 2 permutabili:

19 $$\left(X_3 + \frac{\partial f}{\partial z}\,,\ X_4\right)$$

che si distingue dal G_2 **13** in ciò che le roto-similitudini non hanno tutte il centro nell' origine, ma il centro varia in relazione col passo c lungo l'asse z (e precisamente la sua z è $-\frac{1}{c}\Big)$.

$$i)\ \Gamma \equiv \left(X_3 + a\frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right), \ Uf = X_4 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + b_3 \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Si ha il G_3:

20 $$\left(X_3 + \frac{\partial f}{\partial z}, X_4, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

$$l)\ \Gamma \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right), \quad Uf = X_4 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + b_1 \frac{\partial f}{\partial x} + b_2 \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Si ha il G_2:

21 $$\left(X_2 + c X_4, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

di tutte le roto-similitudini d'ugual parametro c collo stesso asse z.

$$m)\ \Gamma \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad Uf = X_4 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + b_3 \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Si ha il G_3:

22 $$\left(X_3 + c X_4, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

di tutte le roto-similitudini d'ugual parametro c con assi paralleli e i centri nel piano $z = 0$.

$$n)\ \Gamma \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right), \quad Uf = X_4 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3.$$

Si ha il G_4:

23 $$\left(X_3 + c X_4, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

di tutte le roto-similitudini d'ugual parametro c con assi paralleli.

Questi sono dunque tutti i tipi distinti di sottogruppi di G_7. È da osservare però che nei gruppi **7, 8** considerati come di G_7 il parametro a può ridursi all'unità (con una similitudine rispetto all'origine).

Distinguendo questi varî tipi in relazione al numero dei parametri, abbiamo trovato in G_7:

4	tipi di gruppi	ad 1	parametro:	**1, 7, 9, 12.**
5	„ „	a 2	parametri:	**3, 10, 13, 19, 21.**
6	„ „	3	„	**2, 4, 8, 11, 15, 22.**
5	„ „	4	„	**5, 14, 16, 20, 23.**
1	„ „	5	„	**17.**
1	„ „	6	„	**6.**
1	„ „	7	„	**18.**

III.

Del gruppo G_{11} dei movimenti e similitudini in S_4

§. 1. — Gruppi di rotazioni ad un parametro.

Secondo il risultato generale si ottengono tutti i possibili tipi di rotazioni infinitesime reali in S_4, e ciascuno una volta soltanto, facendo percorrere ad h in

$$X_{12} + h\,X_{34}$$

tutti i valori da -1 ad 1 gli estremi inclusi. Di tutte queste trasformazioni la sola X_{12} non appartiene ad S_4 ma ad S_2. Son già determinati dunque i *gruppi di rotazioni ad un parametro* e troviamo per le corrispondenti formole finite:

$$\left\{\begin{array}{ll} x'_1 = x_1 \cos t - x_2 \operatorname{sen} t & \qquad x'_3 = x_3 \cos h t - x_4 \operatorname{sen} h t \\ x'_2 = x_1 \operatorname{sen} t - x_2 \cos t & \qquad x'_4 = x_3 \operatorname{sen} h t + x_4 \cos h t\,. \end{array}\right.$$

Per la determinazione degli altri sottogruppi del gruppo G_6 delle rotazioni poniamo per comodo di notazione:

$$X_{23} = X_1 \;,\;\; X_{31} = X_2 \;,\;\; X_{12} = X_3$$

$$X_{14} = X_4 \;,\;\; X_{24} = X_5 \;,\;\; X_{34} = X_6$$

e osserviamo che si ha per le corrispondenti espressioni alternate:

$$(\alpha)\quad \begin{cases} (X_1\ X_2) = -X_3\ , & (X_2\ X_3) = -X_1\ , & (X_1\ X_2) = -X_3 \\ (X_1\ X_4) = 0\ , & (X_2\ X_5) = 0\ , & (X_3\ X_6) = 0 \\ (X_2\ X_4) = X_6\ , & (X_3\ X_5) = X_4\ , & (X_1\ X_6) = X_5 \\ (X_3\ X_4) = -X_5\ , & (X_1\ X_5) = -X_6\ , & (X_2\ X_6) = -X_4 \\ (X_4\ X_5) = -X_3\ , & (X_5\ X_6) = -X_1\ , & (X_6\ X_4) = -X_2\,. \end{cases}$$

§. 2. — **Gruppi a due parametri.**

Le trasformazioni infinitesime generatrici di un G_2 di rotazioni in S_4 posson pensarsi ridotte con una rotazione preliminare alla forma:

$$\begin{cases} Y_1 f = X_3 + k\, X_6 \\ Y_2 f = e_1\, X_1 + e_2\, X_2 + e_4\, X_4 + e_5\, X_5 + e_6\, X_6\,. \end{cases}$$

Si ha per le (α):

$$(Y_1\ Y_2) = (e_2 + k\, e_5)\, X_1 - (e_1 + k\, e_4)\, X_2 + (e_5 + k\, e_2)\, X_4 - (e_4 + k\, e_1)\, X_5\,,$$

ma dev'essere inoltre per la proprietà di gruppo $(Y_1\ Y_2) = \lambda\, Y_1 + \mu\, Y_2$ con λ, μ costanti. — Si hanno dunque le relazioni:

$$\begin{cases} e_2 + k\, e_5 = \mu\, e_1 \\ -e_1 - k\, e_4 = \mu\, e_2 \\ 0 = \lambda \\ e_5 + k\, e_2 = \mu\, e_4 \\ -e_4 - k\, e_1 = \mu\, e_5 \\ 0 = \mu\, e_6 + k\, \lambda\,. \end{cases}$$

Poichè il determinante della prima, seconda, quarta e quinta equazione:

$$D = \begin{vmatrix} -\mu & 1 & 0 & k \\ -1 & -\mu & -k & 0 \\ 0 & k & -\mu & 1 \\ -k & 0 & -1 & -\mu \end{vmatrix} = \mu^4 + 2\mu^2(1+k^2) + (1-k^2)^2$$

non ha radici μ reali che per $k = \varepsilon$, si conclude che per ogni altro valore di k, sarà per un G_2 reale $e_1 = e_2 = e_4 = e_5 = 0$ e resterà solo e_6 arbitraria. Ciò dà il G_2 di rotazioni due a due permutabili:

2 $$(X_3 \ , \ X_6) .$$

Nel caso escluso $k = \varepsilon$ si ottiene $\mu = 0$, $e_5 = -\varepsilon e_2$, $e_4 = -\varepsilon e_1$, e_6 arbitraria. Si hanno così gli ∞^2 G_2 ancora di trasformazioni permutabili:

(β) $$(X_3 + \varepsilon X_6 \ , \ X_1 - \varepsilon X_4 + k(X_2 - \varepsilon X_5) + k' X_6) .$$

Risulta subito però che tutti i gruppi (β) sono simili ai gruppi **2**. Perciò basta far vedere che in ogni tal gruppo (β) esistono due rotazioni infinitesime appartenenti ad S_2, che cioè ammettono un S_2 assiale.

E infatti la trasformazione infinitesima generica di un G_2 (β) può scriversi:

$$\lambda(X_3 + \varepsilon X_6) + X_1 - \varepsilon X_4 + k(X_2 - \varepsilon X_5) + k' X_6 =$$

$$= [-\lambda x_2 + k x_3 + \varepsilon x_4] \frac{\partial f}{\partial x_1} + [\lambda x_1 - x_3 + k \varepsilon x_4] \frac{\partial f}{\partial x_2} + [-k x_1 + x_2 - (k' + \lambda \varepsilon) x_4] \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

$$+ [-\varepsilon x_1 - k \varepsilon x_2 + (k' + \lambda \varepsilon) x_3] \frac{\partial f}{\partial x_4} .$$

Si ha dunque per il determinante indicato in generale con [β]:

$$[\beta] = \begin{vmatrix} 0 & -\lambda - k' & k & \varepsilon \\ \lambda + k' & 0 & -1 & k\varepsilon \\ -k & 1 & 0 & -\lambda\varepsilon \\ -\varepsilon & -k\varepsilon & \lambda\varepsilon & 0 \end{vmatrix} = [\lambda^2 + \lambda k' - (1+k^2)]^2$$

ed è manifesto che l'equazione $[\beta]=0$, qualunque sieno i valori reali k, k', ha due radici reali e distinte.

Queste radici abbasseranno poi necessariamente $[\beta]$ alla caratteristica 2, perchè un determinante emisimmetrico è sempre di caratteristica pari.

Si conclude dunque che:

Esiste un unico tipo di G_2 *reali di rotazioni in* S_4, *e si può prendere come rappresentante del tipo il* G_2:

$$(X_3\ ,\ X_6)\ .$$

§. 3. — **Gruppi a tre parametri.**

a) G_3 *contenenti* G_2 *reali.*

Si potrà porre per le trasformazioni infinitesime generatrici del gruppo:

$$Y_1 f = X_3\ ,\quad Y_2 f = X_6\ ,\quad Y_3 f = e_1 X_1 + e_2 X_2 + e_4 X_4 + e_5 X_5\ .$$

Avendosi:

$$(Y_1\, Y_3) = -e_1 X_2 + e_2 X_1 - e_4 X_5 + e_5 X_4\ ,$$

questa trasformazione infinitesima deve coincidere salvo un fattore μ colla Y_3, epperò per la realità $e_1 = e_2 = e_4 = e_5 = 0$. Si conclude dunque che:

Non esistono in S_4 *dei* G_3 *di rotazioni reali contenenti un* G_2 *reale.*

b) G_3 *non contenenti un* G_2 *reale.*

Si riconosce facilmente che un tale G_3 può ridursi in ogni caso alla composizione tipica:

$$\text{(A)}\quad (Y_1\, Y_2) = Y_3 f\ ,\quad (Y_2\, Y_3) = Y_1 f\ ,\quad (Y_3\, Y_1) = Y_2 f\ .$$

Sarà intanto, dette $Y_1 f$, $Y_2 f$, $Y_3 f$ le trasformazioni infinitesime generatrici del gruppo:

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} (Y_1\ Y_2) = \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \lambda_3 Y_3 \\ (Y_2\ Y_3) = \mu_1 Y_1 + \mu_2 Y_2 + \mu_3 Y_3 \\ (Y_3\ Y_1) = \nu_1 Y_1 + \nu_2 Y_2 + \nu_3 Y_3 \end{cases}$$

con λ_3, μ_1, ν_2 diverse da zero, altrimenti si avrebbero subito dei G_2 reali. Può prendersi dunque in particolare $\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \lambda_3 Y_3$ come nuova Y_3, cioè supporre $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Dalla nota relazione di Jacobi:

$$\big((Y_1\ Y_2)\,,\ Y_3\big) + \big((Y_2\ Y_3)\,,\ Y_1\big) + \big((Y_3\ Y_1)\,,\ Y_2\big) = 0$$

si ottiene (essendo $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$):

$$(\beta)\qquad \begin{cases} -\mu_2 + \nu_1 = 0 \\ \mu_3 \nu_1 - \mu_1 \nu_3 = 0 \\ \mu_3 \nu_2 - \mu_2 \nu_3 = 0\,. \end{cases}$$

Se oltre μ_1 sono anche μ_2, μ_3 diverse da zero, dalle due ultime relazioni (β) segue:

$$\nu_1 = k\,\mu_1\ ,\quad \nu_2 = k\,\mu_2\ ,\quad \nu_3 = k\,\mu_3 \quad \text{cioè} \quad (Y_3\ Y_1) = k\,(Y_2\ Y_3)$$

per modo che il gruppo conterebbe un G_2 reale, il primo gruppo derivato. È dunque o $\mu_2 = 0$ o $\mu_3 = 0$.

Nella prima ipotesi segue dalle (β) $\nu_1 = \nu_3 = \mu_3 = 0$, talchè si ha la composizione:

$$(\gamma)\qquad (Y_1\,Y_2) = \mu_3\,Y_3\ ,\quad (Y_2\,Y_3) = \mu_1\,Y_1\ ,\quad (Y_3\,Y_1) = \mu_2\,Y_2\,.$$

Nella seconda ipotesi segue dalle (β), $\nu_3 = 0$, $\nu_1 = \mu_2$, talchè si ha:

$$(Y_2\ Y_3) = \mu_1\,Y_1 + \mu_2\,Y_2$$
$$(Y_3\ Y_1) = \mu_2\,Y_1 + \nu_2\,Y_2\,.$$

Si può prendere allora (poichè $\mu_1 \neq 0$) la $\mu_1\,Y_1 + \mu_2\,Y_2$ come nuova Y_1 (con che resterà sempre $(Y_1\,Y_2) = \lambda\,Y_3$), e così rendendosi $\mu_2 = 0$, si ottiene di nuovo la composizione (γ) (con $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \neq 0$).

Resta tuttavia a vedere se un gruppo di tale composizione può aver sottogruppi reali. Per questo osserviamo che, prese due trasformazioni infinitesime $U_1 f = a_1 Y_1 + a_2 Y_2 + a_3 Y_3$, $U_2 f = b_1 Y_1 + b_2 Y_2 + b_3 Y_3$ del gruppo, si ha:

$$(U_1\, U_2) = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\, \mu_1 X_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\, \mu_2 X_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, \mu_3 X_3$$

talchè dovrà essere, perchè $U_1 f$, $U_2 f$ generino un G_2,

$$(\delta) \qquad (a_2 b_3 - a_3 b_2)\, \mu_1 = \lambda\, a_1 + \mu\, b_1 \ , \quad (a_3 b_1 - a_1 b_3)\, \mu_2 = \lambda\, a_2 + \mu\, b_2$$
$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)\, \mu_3 = \lambda\, a_3 + \mu\, b_3 \, .$$

Se riguardiamo ora le (a_1, a_2, a_3) (b_1, b_2, b_3) come coordinate omogenee di due punti in un piano, le $a_2 b_3 - a_3 b_2, \ldots\ldots$ sono le coordinate $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3$ della loro congiungente, epperò i primi membri delle (δ) le coordinate del polo di questa retta rispetto alla conica (inviluppo) $\mu_1 \xi_1^2 + \mu_2 \xi_2^2 + \mu_3 \xi_3^2 = 0$.

Le (δ) esprimono dunque che la retta immagine di un G_2 deve contenere il suo polo rispetto alla conica anzidetta, cioè deve essere una tangente.

Ora, se le μ_1, μ_2, μ_3 non hanno tutte lo stesso segno, esistono tangenti reali e quindi G_2 reali nel G_3 (γ). Nel caso nostro dunque le μ_1, μ_2, μ_3 devono avere ugual segno, che si può supporre poi positivo, bastando se occorre cangiar di segno alle Y_1, Y_2, Y_3. Prendiamo allora come trasformazioni generatrici del gruppo:

$$h_1 Y_1 \ , \quad h_2 Y_2 \ , \quad h_3 Y_3 \, ,$$

determinando le h dalle condizioni:

$$\mu_3 h_1 h_2 = h_3 \ , \quad \mu_1 h_2 h_3 = h_1 \ , \quad \mu_2 h_3 h_1 = h_2 \, ,$$

o, ciò che è lo stesso, dalle altre:

$$(\varepsilon) \qquad h_3 = \mu_3 h_1 h_2 \ , \quad \mu_1 \mu_3 h_2^2 = 1 \ , \quad \mu_2 \mu_3 h_1^2 = 1 \, .$$

È chiaro che con questo il gruppo (γ) si riduce appunto alla composizione $(U_1 U_2) = U_3 f$, $(U_2 U_3) = U_1 f$, $(U_3 U_1) = U_2 f$, e in modo reale, perchè dalle (ε) si hanno valori reali per le h, avendo μ_1, μ_2, μ_3 lo stesso segno [1]).

Applicando ciò al caso nostro, potremo supporre un qualunque G_3 di rotazioni *reali* di S_4 ridotto alla composizione tipica (A). Con una rotazione preliminare, che non altera la composizione, si può supporre le Y_1 ridotta alla forma tipica $\mu\,(X_3 + k\,X_6)$, talchè ponendo:

$$\left\{\begin{aligned} Y_1 f &= X_3 + k\,X_6 \\ Y_2 f &= e_1\,X_1 + e_2\,X_2 + \dots + e_6\,X_6 \\ Y_3 f &= e'_1 X_1 + e'_2 X_2 + \dots + e'_6\,X_6, \end{aligned}\right.$$

avremo la composizione:

$$(Y_1 Y_2) = \lambda\,Y_3\ , \quad (Y_2 Y_3) = \lambda\,Y_1\ , \quad (Y_3 Y_1) = \lambda\,Y_2$$

dove λ indica un conveniente fattore costante.

Si hanno così, formando effettivamente le espressioni $(Y_i\,Y_k)$ i tre sistemi di relazioni:

$$(\alpha)\left\{\begin{aligned} e_2 + k\,e_5 &= \lambda\,e'_1 \\ -e_1 - k\,e_4 &= \lambda\,e'_2 \\ 0 &= \lambda\,e'_3 \\ e_5 + k\,e_2 &= \lambda\,e'_4 \\ -e_4 - k\,e_1 &= \lambda\,e'_5 \\ 0 &= \lambda\,e'_6 \end{aligned}\right. \qquad (\beta)\left\{\begin{aligned} e_3\,e'_2 - e_2\,e'_3 + e_6\,e'_5 - e_5\,e'_6 &= 0 \\ e_1\,e'_3 - e_3\,e'_1 + e_4\,e'_6 - e_6\,e'_4 &= 0 \\ e_2\,e'_1 - e_1\,e'_2 + e_5\,e'_4 - e_4\,e'_5 &= \lambda \\ e_6\,e'_2 - e_2\,e'_6 + e_3\,e'_5 - e_5\,e'_3 &= 0 \\ e_4\,e'_3 - e_3\,e'_4 + e_1\,e'_6 - e_6\,e'_1 &= 0 \\ e_5\,e'_1 - e_1\,e'_5 + e_2\,e'_4 - e_4\,e'_2 &= \lambda\,k \end{aligned}\right. \qquad (\gamma)\left\{\begin{aligned} e'_2 + k\,e'_5 &= -\lambda\,e_1 \\ -e'_1 - k\,e'_4 &= -\lambda\,e_2 \\ 0 &= -\lambda\,e_3 \\ e'_5 + k\,e'_2 &= -\lambda\,e_4 \\ -e'_4 - k\,e'_1 &= -\lambda\,e_5 \\ 0 &= -\lambda\,e_6\,. \end{aligned}\right.$$

---

[1]) Questo resultato trovasi enunciato senza dimostrazione nella memoria citata dal prof. Bianchi (§. 13 in fine).

Da (α) e (γ), essendo $\lambda \neq 0$, si ha $e_3 = e_6 = e'_3 = e'_6 = 0$, che introdotte nel sistema (β) lo riducono alle due equazioni:

$$\begin{cases} e_2\, e'_1 - e_1\, e'_2 + e_5\, e'_4 - e_4\, e'_5 = \lambda \\ e_5\, e'_1 - e_1\, e'_5 + e_2\, e'_4 - e_4\, e'_2 = \lambda k . \end{cases}$$

Sostituendo in queste le espressioni di e'_1, e'_2, e'_3, e'_4 ricavate dalle (α), ed eliminando λ si ottiene:

$$(e_1\, e_4 + e_2\, e_5)\,(1 - k^2) = 0\,,$$

da cui $\qquad$ o $\; k = \varepsilon \;$ o $\; e_1\, e_4 + e_2\, e_5 = 0\,.$

1.ª IPOTESI: $k = \varepsilon$. Introducendo questo valore in (α) e (γ) ed eliminando le e', si ottiene il sistema:

$$(\delta) \qquad \begin{cases} 2\,(e_1 + \varepsilon\, e_4) = \lambda^2 e_1 \\ 2\,(e_2 + \nu\, e_5) = \lambda^2 e_2 \\ 2\,(e_4 + \varepsilon\, e_1) = \lambda^2 e_4 \\ 2\,(e_5 + \varepsilon\, e_2) = \lambda^2 e_5 \end{cases}$$

che, affinchè sia qualche e_i diversa da zero, (come è necessario) dà per λ l'equazione:

$$(2 - \lambda^2)^2 = 4 \quad , \quad 2 - \lambda^2 = 2\,\varepsilon'$$

e infine, non potendo essere $\lambda = 0$, dà $\lambda^2 = 4$.

Si ha allora $\qquad e_4 = \varepsilon\, e_1 \;,\; e_5 = \varepsilon\, e_2$

e per le (α) anche $\qquad e'_4 = \varepsilon\, e'_1 \;,\; e'_5 = \varepsilon\, e'_2 .$

Si hanno così i due tipi di G_3 reali:

3 $\qquad (X_1 + \varepsilon\, X_4 \;,\; X_2 + \varepsilon\, X_5 \;,\; X_3 + \varepsilon\, X_6)$

distinti fra loro, anzi ciascuno *invariante nel gruppo totale delle rotazioni.*

2.ª IPOTESI: $\qquad e_1\, e_4 + e_2\, e_5 = 0 \;,\; k \neq \pm 1 .$

Eliminando ancora le e' fra le (α), (γ) si ha:

$$(\delta^*)\qquad \left\{\begin{aligned} &e_1(1+k^2-\lambda^2)+2\,k\,e_4=0\\ &e_2(1+k^3-\lambda^2)+2\,k\,e_5=0\\ &e_4(1+k^2-\lambda^2)+2\,k\,e_1=0\\ &e_5(1+k^2-\lambda^2)+2\,k\,e_2=0\,. \end{aligned}\right.$$

Dev' esser dunque, affinchè le $e_1 \ldots e_6$ non siano tutte nulle:

$$(1+k^2-\lambda^2)^2 - 4\,k^2 = 0$$

cioè

$$\lambda^2 = (1-k\,\varepsilon)^2\,.$$

Sostituendo in (δ^*), se $k \neq 0$, si ottengono le $\left\{\begin{aligned} e_4 &= -\varepsilon\, e_1\\ e_5 &= -\varepsilon\, e_2 \end{aligned}\right.$ che introdotte nella $e_1\,e_4+e_2\,e_5=0$ danno $e_1^2+e_2^2=0$, cioè per la realità $e_1=e_2=0$, e quindi anche $e_4=e_5=0$. Questa ipotesi non conduce dunque ad alcun G_3 reale, salvo il caso $k=0$, che resta da esaminare.

Per $k=0$, e quindi $\lambda=\varepsilon$, le (α) e le (γ) forniscono:

$$e_2 = \varepsilon\, e'_1\ ,\quad -e_1 = \varepsilon\, e'_2\ ,\quad e_5 = \varepsilon\, e'_4\ ,\quad -e_4 = \varepsilon\, e'_5\,,$$

che introdotte nella terza delle (β) danno:

$$(\beta^*)\qquad e_1^2+e_2^2+e_3^2+e_4^2=1\,.$$

Si ha inoltre dalla $e_1\,e_4+e_2\,e_5=0$, *supposte* e_1 *ed* e_5 *diverse da zero,* $e_2=\lambda\,e_1$, $e_4=-\lambda\,e_5$ (λ indicando una nuova costante) e queste introdotte in (β^*) forniscono:

$$e_1=\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{1+\lambda^2}}\ ,\quad e_5=\frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+\lambda^2}}\ ,\quad e_2=\frac{\lambda\operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{1+\lambda^2}}\ ,\quad e_4=\frac{-\lambda\cos\varphi}{\sqrt{1+\lambda^2}}\,,$$

φ indicando un angolo ausiliario.

Si ottengono così (essendo il parametro λ soltanto apparente) gli ∞^1 G_3 della forma:

$$(X_3\ ,\ \operatorname{sen}\varphi\,X_1+\cos\varphi\,X_5\ ,\ \operatorname{sen}\varphi\,X_2-\cos\varphi\,X_4)\,.$$

e questi mediante la rotazione:

$$\begin{cases} x'_3 = x_3 \operatorname{sen} \varphi + x_4 \cos \varphi \\ x'_4 = -x_3 \cos \varphi + x_4 \operatorname{sen} \varphi \end{cases}$$

si riducono all'unico tipo:

4 $$(X_1 \,,\; X_2 \,,\; X_3)$$

cioè al G_3 delle rotazioni in S_3.

Nei casi esclusi ($e_1 = 0$ o $e_5 = 0$) si torna sempre con trasformazioni analoghe al tipo **4.**

§. 4. — Gruppi a quattro parametri.

Ogni G_4 reale contiene dei G_3 reali. Si sa infatti [1]) che il gruppo derivato di un G_4 possiede al più tre parametri. Se è precisamente un G_3, questo è senz'altro un G_3 reale. Se poi è un G_2 o un G_1 o l'identità, poichè un numero qualunque di trasformazioni infinitesime aggiunte al primo gruppo derivato generano sempre un gruppo, si può ottenere in ogni caso un G_3 reale di G_4.

Basta cercare dunque i G_4 reali che si ottengono aggiungendo una rotazione infinitesima generica ai tre tipi di G_3 reali determinati.

Poichè i primi due tipi di G_3, come si è notato, sono invarianti in G_6, qualunque rotazione infinitesima forma con essi un G_4. In ogni caso però questa rotazione infinitesima potrà ridursi alla forma $X_3 + k X_6$ con una rotazione che lascia invariato il G_3 in discorso.

Si hanno così i due tipi di G_4:

5 $$(X_1 + \varepsilon X_4 \,,\; X_2 + \varepsilon X_5 \,,\; X_3 \,,\; X_6) \,.$$

[1]) Lie. — III, pag. 723, Satz 19.

Il G_3 delle rotazioni di S_3 non è contenuto invece, come subito si verifica, in nessun G_4 reale.

§. 5. — Non esistono G_5 di rotazioni reali.

Siano ora $Y_i = \sum_k^{1\ldots 6} e_{ik} X_k$ $(i = 1, 2 \ldots . 5)$ le trasformazioni infinitesime generatrici di un G_5 di rotazioni.

È facile riconoscere che non possono esser tutte reali.

Osserviamo per questo che, dovendo essere le Y_i linearmente indipendenti, sarà diverso da zero uno dei minori della matrice delle e_{ik}. È indifferente quale sia. Supposto sia quello che si ottiene sopprimendo la prima colonna della detta matrice, si potranno esprimere linearmente le X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 per le Y_i e per la X_1. Posto che risulti:

$$X_i = \sum_k^{1\ldots 5} e'_{ik} Y_k - a_i X_1 \ , \quad (i = 2, 3 \ldots . 6)$$

si potranno prendere come trasformazioni infinitesime generatrici del gruppo le

$$X_2 + a_2 X_1 \ , \ X_3 + a_3 X_1 \ , \ X_4 + a_4 X_1 \ , \ X_5 + a_5 X_1 \ , \ X_6 + a_6 X_1 .$$

Poichè allora l'espressione alternata delle due prime trasformazioni infinitesime è composta delle sole X_1, X_2, X_3, queste due trasformazioni infinitesime formano necessariamente un G_2.

Ma si è visto che non esistono G_2 di rotazioni reali *appartenenti ad* S_3, dunque non esistono neppure G_5 di rotazioni reali in S_4 [1]).

[1]) Il teorema può estendersi anche agli spazi con un numero qualunque (anche dispari) di dimensioni, cioè: *Non esistono nel gruppo totale* G_r *delle rotazioni in uno spazio qualunque dei* G_{r-1} *reali.*

E la dimostrazione è affatto analoga.

Ai tipi precedenti è da aggiungere infine il gruppo totale delle rotazioni:

6 $$(X_1\,,\ X_2\,,\ X_3\,,\ X_4\,,\ X_5\,,\ X_6).$$

§. 6. — **Movimenti non Euclidei di un** S_3 **a curvatura costante positiva.**

Il gruppo G_6 delle rotazioni in S_4 permuta transitivamente in sè stessa ciascuna *ipersfera* con centro nell'origine secondo un gruppo Γ_6 dato dalle stesse formole di G_6, ove si ponga:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=K^2.$$

Questo gruppo Γ_6 è manifestamente il *gruppo dei movimenti non euclidei* dello spazio a curvatura costante positiva $\frac{1}{K^2}$. I tipi distinti di gruppi formati da questi movimenti sono, come si è visto,

a) una serie ∞^1 di gruppi ad un parametro X_3+kX_6, di cui il solo gruppo X_3 è comune allo spazio ordinario a curvatura nulla.

b) il gruppo a 2 parametri (X_3, X_6).

c) il gruppo a 3 parametri (X_1, X_2, X_3) comune anche allo spazio ordinario.

d) i due gruppi $(X_1+\varepsilon X_4, X_2+\varepsilon X_5, X_3+\varepsilon X_6)$ che comprendono le due serie di movimenti non Euclidei noti sotto il nome di *scorrimenti* (*Schiebungen*) *di 1.ª e 2.ª specie.*

e) il gruppo a 4 parametri $(X_1+\varepsilon X_4, X_2+\varepsilon X\,, X_3, X_6)$.

f) il gruppo totale dei movimenti $(X_1, X_2\ldots, X_6)$.

Si ritrovano immediatamente le proprietà note [1]), *che tutti gli scorrimenti di una specie son permutabili cogli scorrimenti dell'altra specie, (non però fra loro), che mediante la loro combina-*

---

[1]) F. Klein. — *Zur Nicht-Euklidischen Geometrie.* — Mathematische Annalen. Bd. 37, 1890, pag. 544.

zione possono ottenersi tutti gli altri movimenti non euclidei ecc. Ci limiteremo qui a ritrovare le formole degli scorrimenti finiti:

$$(1)\quad \begin{cases} x'_1 = A\,x_1 - B\,x_2 - C\,x_3 - D\,x_4 \\ x'_2 = B\,x_1 + A\,x_2 - D\,x_3 + C\,x_4 \\ x'_3 = C\,x_1 + D\,x_2 + A\,x_3 - B\,x_4 \\ x'_4 = D\,x_1 - C\,x_2 + B\,x_3 + A\,x_4 \end{cases} \quad \text{(per gli scorrimenti di prima specie)}$$

e

$$(2)\quad \begin{cases} x'_1 = A\,x_1 - B\,x_2 - C\,x_3 - D\,x_4 \\ x'_2 = B\,x_1 + A\,x_2 + D\,x_3 - C\,x_4 \\ x'_3 = C\,x_1 - D\,x_2 + A\,x_3 + B\,x_4 \\ x'_4 = D\,x_1 + C\,x_2 - B\,x_3 + A\,x_4 \end{cases} \quad \text{(per gli scorrimenti di seconda specie)}$$

dove:

$$(3)\qquad A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1\,.$$

Essendo tutti gli *scorrimenti infinitesimi* di prima specie riducibili al tipo X_3+X_6, il tipo più generale di scorrimento finito sarà dato dalla trasformazione finita generica del corrispondente G_1, cioè dalle formole:

$$(\alpha)\quad \begin{cases} x'_1 = x_1 \cos\alpha - x_2 \operatorname{sen}\alpha \\ x'_2 = x_2 \operatorname{sen}\alpha + x_2 \cos\alpha \\ x'_3 = x_3 \cos\alpha - x_4 \operatorname{sen}\alpha \\ x'_4 = x_3 \operatorname{sen}\alpha + x_4 \cos\alpha\,. \end{cases}$$

Il più generale scorrimento sarà dunque il trasformato di (α) mediante il più generale movimento dello spazio ellittico considerato:

$$(4)\qquad x_i = \alpha_{i1}\,y_1 + \alpha_{i2}\,y_2 + \alpha_{i3}\,y_3 + \alpha_{i4}\,y_4 \quad (i = 1, 2, 3, 4)\,.$$

Effettuando la trasformazione si ottiene, indicando con D_{ik} il minore delle colonne i^{ma}, k^{ma} nella matrice $\left\|\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \end{matrix}\right\|$:

$$\left\{\begin{aligned}
y'_1 &= y_1 \cos\alpha - y_2 (D_{12}+D_{34}) \operatorname{sen}\alpha + y_3 (D_{24}-D_{13}) \operatorname{sen}\alpha - y_4 (D_{14}+D_{23}) \operatorname{sen}\alpha \\
y'_2 &= y_1 (D_{12}+D_{34}) \operatorname{sen}\alpha + y_2 \cos\alpha - y_3 (D_{23}+D_{14}) \operatorname{sen}\alpha + y_4 (D_{13}-D_{24}) \operatorname{sen}\alpha \\
y'_3 &= y_1 (D_{13}-D_{24}) \operatorname{sen}\alpha + y_2 (D_{23}+D_{14}) \operatorname{sen}\alpha + y_3 \cos\alpha - y_4 (D_{12}+D_{34}) \operatorname{sen}\alpha \\
y'_4 &= y_1 (D_{14}+D_{23}) \operatorname{sen}\alpha + y_2 (D_{24}-D_{13}) \operatorname{sen}\alpha + y_3 (D_{12}+D_{34}) \operatorname{sen}\alpha + y_4 \cos\alpha
\end{aligned}\right.$$

che ha precisamente la forma (1), essendo anche verificata la (3) per le relazioni che legano i coseni di direzione α_{ik}.

Con un procedimento affatto analogo si otterrebbe la forma (2) degli scorrimenti di seconda specie trasformando colle (4) lo scorrimento tipo:

$$(\beta) \qquad \left\{\begin{aligned}
x'_1 &= x_1 \cos\alpha - x_2 \operatorname{sen}\alpha \\
x'_2 &= x_1 \operatorname{sen}\alpha + x_2 \cos\alpha \\
x'_3 &= x_3 \cos\alpha + x_4 \operatorname{sen}\alpha \\
x'_4 &= -x_3 \operatorname{sen}\alpha + x_4 \cos\alpha .
\end{aligned}\right.$$

I risultati ottenuti per i gruppi di movimenti dello spazio ellittico in se stesso concordano, come si è accennato in principio, coi risultati della memoria citata del Prof. Bianchi *sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti*. Risulta in effetto da questa memoria che uno spazio a curvatura costante positiva fra i due tipi possibili di G_2 di movimenti *reali* ammette solo il tipo con trasformazioni due a due permutabili, e similmente che ammette un sol tipo di G_3 intransitivi, e che fra i 9 tipi possibili di G_3 transitivi reali ammette solo il tipo IX isomorfo e quindi simile ai due G_3 di scorrimenti. Finalmente questo spazio ammette anche un solo tipo di G_4, contenente come sottogruppo il G_3 del tipo IX, e non ammette nessun G_5.

§. 7. — Traslazioni formanti gruppo coi gruppi di rotazioni.

Se si considerano le formole finite di un gruppo di traslazioni in S_4:

$$(1) \qquad x'_i = x_i + \alpha_{i1} t_1 + \alpha_{i2} t_2 + \alpha_{i3} t_3 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

(a 1, 2 o 3 parametri secondo che la caratteristica della matrice delle α_{ik} è 1, 2 o 3) è chiaro che per ogni punto determinato $x_i = x_i^{(0)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ queste formole rappresentano al variare dei parametri t_i uno spazio lineare (S_1 o S_2 o S_3) che, secondo le denominazioni generali, è la *varietà minima invariante rispetto al gruppo* corrispondente al punto in discorso.

Viceversa, dato un S_1 o S_2 o S_3, vi è un gruppo di traslazioni perfettamente determinato (un G_1 o un G_2 o un G_3), che ammette questo spazio come varietà minima invariante. Per averne le formole finite basta scrivere le equazioni di questo spazio sotto la forma parametrica (1), dove x'_i siano le coordinate correnti e x_i le coordinate di un punto fisso dello spazio stesso. Le trasformazioni infinitesime generatrici del gruppo sono poi le

$$Y_1 f = \sum_{i=1}^{i=4} \alpha_{i1} \frac{\partial f}{\partial x_i} \,, \quad Y_2 f = \sum_{i=1}^{i=4} \alpha_{i2} \frac{\partial f}{\partial x_i} \,, \quad Y_3 f = \sum_{i=1}^{i=4} \alpha_{i3} \frac{\partial f}{\partial x_i} \,.$$

Da tutto ciò segue in particolare che *ogni gruppo di traslazioni è perfettamente caratterizzato dallo spazio lineare invariante minimo per l'origine* (o per un determinato punto qualunque).

Questa considerazione può applicarsi alla ricerca delle traslazioni formanti gruppo con un dato gruppo Γ di rotazioni. Perchè Γ formi gruppo con un gruppo G di traslazioni è necessario e sufficiente che tutte le trasformazioni di Γ trasformino G in se stesso (dovendo G riuscire invariante nel gruppo composto $G . \Gamma$), epperò che lascino invariato lo spazio caratteristico di G per l'origine. Determinati dunque gli spazi lineari invarianti (per l'origine) comuni a tutte le rotazioni di Γ, si avranno nei gruppi G di traslazioni corrispondenti a questi spazi tutti e soli i gruppi di traslazioni formanti gruppo con Γ.

Cominciando allora dai gruppi Γ ad un parametro, ricordiamo il teorema di Lie [1]:

Un sistema di equazioni:

$$\Omega_1(x_1, x_2, \dots x_n) = 0 \,, \dots . \Omega_{n-m}(x_1, x_2, \dots x_n) = 0 \tag{2}$$

ammette allora e solo allora le trasformazioni di un gruppo ad un parametro Xf, *quando ammetta la trasformazione infinitesima* Xf, *cioè quando tutte le* $n-m$ *espressioni* $X\Omega_k$ *si annullino per* $\Omega_1 = 0, \dots . \Omega_{n-m} = 0$.

Nel caso particolare che la Xf sia una rotazione infinitesima (più in generale una trasformazione lineare omogenea) e per un sistema di equazioni (2) lineari omogenee (in generale omogenee di un grado qualunque) l'espressione analitica della condizione enunciata nel teorema è che si abbia:

$$X\Omega_k = a_{k1}\Omega_1 + \dots + a_{k,\,n-m}\Omega_{n-m} \qquad (k = 1 \dots n-m)$$

colle a_{ki} costanti.

In particolare dunque per S_4: *Gli iperpiani per l'origine:*

$$\varphi = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$$

invarianti per tutte le rotazioni di un gruppo Xf *devono soddisfare la condizione:*

$$X\varphi = \lambda\varphi\,; \tag{3}$$

e gli S_2 *invarianti* $\varphi = 0$, $\psi = 0$ *devono soddisfare le condizioni:*

$$X\varphi = \lambda\varphi + \mu\psi \,, \quad X\psi = \lambda_1\varphi + \mu_1\psi \tag{4}$$

colle λ, μ *costanti.*

---

[1]) *Transformationsgruppen.* I, pag. 112, Teor. 14.

Per gli S_1 invarianti si può procedere più semplicemente nel modo che segue. Scritte le equazioni di un tale S_1 sotto la forma $x_i = \lambda\, \alpha_i$ (con λ parametro variabile dei punti dell' S_1 e le α_i costanti), dovrà risultare per una rotazione finita qualunque $x'_i = \sum a_{ik}\, x_k$ (R) del gruppo Xf:

$$[x'_i]_{x_i=\lambda\, \alpha_i} = \lambda_1\, \alpha_i\,,$$

dove λ_1 dipenderà in generale dal parametro t della R ma non dalle x. Sarà cioè per qualunque valore di t:

$$\left[x_i + t\,\mathrm{X}\,x_i + \frac{t^2}{1\,.\,2}\,\mathrm{X}^2\,x_i + \ldots\right]_{x_i=\lambda\, \alpha_i} = \lambda_1\, \alpha_i\,,$$

epperò anche derivando rapporto a t e facendo $t = 0$:

$$[\mathrm{X}\,x_i]_{x_i=\alpha_i} = \lambda_0\, \alpha_i \tag{5}$$

con λ_0 costante, relazione che determina le α_i.

Anche per gli S_2 invarianti la ricerca è semplificata dall'osservare che *un* S_2 *reale per l'origine invariante per una rotazione infinitesima* Xf *è sempre intersezione di due iperpiani immaginari coniugati invarianti.*

Prendendo infatti due iperpiani ortogonali per S_2 come nuovi iperpiani assiali $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, per la rotazione infinitesima X$'f$ trasformata della Xf dovrà aversi in virtù delle (3):

$$\mathrm{X}'x_3 = \alpha\, x_3 + \beta\, x_4 \quad , \quad \mathrm{X}'_4 = \gamma\, x_3 + \delta\, x_4$$

dove (come si notò in generale per gli S_{2n-2} invarianti di una rotazione infinitesima di S_{2n}) sarà $\alpha = \delta = 0$, $\gamma = -\beta$, talchè:

$$x_3 + i\, x_4 = 0 \quad , \quad x_3 - i\, x_4 = 0$$

sono precisamente due iperpiani invarianti immaginari coniugati per S_2.

Nella determinazione degli iperpiani invarianti gioverà dunque tener conto anche degli iperpiani immaginari.

Applicando la condizione (3) alla rotazione infinitesima $X_3f+k\,X_6f$, e discutendo il corrispondente sistema lineare per le α_i, si hanno i risultati seguenti:

Per la $X_3f+k\,X_6f$ con $k \neq 0, \varepsilon$: *due coppie di iperpiani invarianti immaginari coniugati:*

$$x_1 + i\,x_2 = 0 \qquad x_3 + i\,x_4 = 0$$
$$x_1 - i\,x_2 = 0 \qquad x_3 - i\,x_4 = 0\,.$$

Per la X_3f: *una coppia di iperpiani immaginari e un fascio di iperpiani reali.*

$$x_1 + i\,x_2 = 0$$
$$x_1 - i\,x_2 = 0 \qquad a\,x_3+b\,x_4 = 0.$$

Per la $X_3f+\varepsilon\,X_6f$: *due fasci di iperpiani immaginari coniugati:*

$$a\,(x_1+i\,x_2) + b\,(x_3+i\,\varepsilon\,x_4) = 0 \qquad a\,(x_1 - i\,x_2) + b\,(x_3 - i\,x_3) = 0$$

dove a, b dovranno supporsi complessi per poter ottenere tutti gli iperpiani invarianti immaginari.

Gli S_2 invarianti, conformemente all'ultima osservazione, saranno per la $X_3+k\,X_6$, con $k \neq \varepsilon$, i due

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0\,, \end{cases}$$

per la $X_3+\varepsilon\,X_6$ la serie ∞^2:

$$\begin{cases} (a_1 + i\,a_2)\,(x_1+ i\,x_2) + (b_1 + i\,b_2)\,(x_3+ i\,\varepsilon\,x_4) = 0 \\ (a_1 - i\,a_2)\,(x_1 - i\,x_2) + (b_1 - i\,b_2)\,(x_3 - i\,\varepsilon\,x_4) = 0 \end{cases}$$

cioè:

$$\begin{cases} (a_1^2+a_2^2)\,x_1 + (b_1\,a_1 + b_2\,a_2)\,x_3 + \varepsilon\,(b_1\,a_2 - a_2\,b_1)\,x_4 = 0 \\ (a_1^2+a_2^2)\,x_2 + (b_2\,a_1 - a_2\,b_1)\,x_3 + \varepsilon\,(b_1\,a_1 + b_2\,a_2)\,x_4 = 0 \end{cases}$$

o infine più semplicemente, cambiando rotazioni:

$$\begin{cases} \lambda\, x_1 + a\, x_3 + b\, x_4 = 0 \\ \lambda\, x_2 - b\varepsilon x_3 + a\varepsilon x_4 = 0\,. \end{cases}$$

Finalmente, per gli S_1 invarianti, dalle relazioni:

$$(5^*) \qquad [X_3(x_i) + k\, X_6(x_i)]_{x_i = \alpha_i} = \lambda\, \alpha_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

si ha subito che esistono S_1 invarianti reali per la sola $X_3 f$, e precisamente il fascio di S_1:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ a\, x_3 + b\, x_4 = 0\,. \end{cases}$$

Venendo allora al nostro problema (determinare le traslazioni infinitesime formanti gruppo con gruppi di rotazioni) e ponendo per brevità $p_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2 \ldots 4)$, avremo che:

a) può aggiungersi un G_1 di traslazioni reali soltanto alla X_3, e si ha precisamente la serie ∞^1 di G_2 (con trasformazioni due a due permutabili):

$$\text{(A)} \qquad (X_3\,,\ a p_3 + b p_4)$$

b) può aggiungersi un G_2 di traslazioni a qualunque rotazione infinitesima, e precisamente si ottengono i G_3:

$$\text{(B)} \qquad (X_3 + k\, X_6, p_1, p_2)\ ,\quad (X_3 + k\, X_6, p_3, p_4)$$

e per $k = \varepsilon$ la serie ∞^2 di G_3:

$$\text{(C)} \qquad (X_3 + \varepsilon\, X_6\ ,\ a p_1 - b p_2 + \lambda p_3\ ,\ \varepsilon\, b p_1 + \varepsilon\, a p_2 + \lambda p_4)$$

c) può aggiungersi un G_3 di traslazioni alla sola $X_3 f$, e si ha precisamente la serie ∞^1 di G_4:

$$\text{(D)} \qquad (X_3 f\ ,\ p_1\ ,\ p_2\ ,\ a p_3 + b p_4)\,.$$

Resta a prendere fra questi tipi possibili di gruppi quelli effettivamente distinti cioè non simili nel gruppo totale G_{10} dei movimenti.

Osserviamo per questo che nella serie (A) la traslazione infinitesima ap_3+bp_4 con una rotazione sulle x_3, x_4, che non altera la X_3f, può ridursi alla forma p_3.

Similmente la seconda delle due serie (B) di G_3 si riduce alla prima colla rotazione:

$$x'_1 = x_3 \ , \quad x'_2 = x_4 \ , \quad x'_3 = x_1 \ , \quad x'_4 = x_2 \, ,$$

salvo il caso $k=0$ in cui si hanno due G_3 effettivamente distinti (essendo soltanto il secondo di trasformazioni 2 a 2 permutabili).

Nella serie (C) si può anzitutto supporre $\lambda=1$, perchè il caso $\lambda=0$ è simile all'altro $a=b=0$. Si osserva poi che colla rotazione:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \cos\alpha - x_2 \operatorname{sen}\alpha \\ x'_2 = x_1 \operatorname{sen}\alpha + x_2 \cos\alpha \end{cases}$$

(che non altera la $X_3+\varepsilon X_6$) si ottiene:

$$p_3 + a\,p_1 - b\,p_2 = p'_3 + (a\cos\alpha + b\operatorname{sen}\alpha)\,p'_1 + (a\operatorname{sen}\alpha - b\cos\alpha)\,p'_2$$

talchè ponendo, come si può sempre, tang $\alpha = \dfrac{b}{a}$, il nuovo coefficiente b' risulta nullo. Basta cercare dunque i G_3 distinti della serie:

$$(X_3 + \varepsilon X_6 \ , \quad p_3 + a\,p_1 \ , \quad p_4 + a\,\varepsilon p_2)\, .$$

Ma anche qui il parametro a non è essenziale, perchè colla rotazione:

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 \cos\alpha + x'_3 \operatorname{sen}\alpha \\ x_2 = -x'_2 \operatorname{sen}\alpha + x'_3 \cos\alpha \\ x_3 = x'_2 \cos\alpha + \varepsilon x'_4 \operatorname{sen}\alpha \\ x_4 = -\varepsilon x'_2 \operatorname{sen}\alpha + x'_4 \cos\alpha \end{cases} \qquad \text{con tang } \alpha = a$$

ci si riduce in ogni caso al gruppo:

$$(X_3 + \varepsilon X_6 , p_1 , p_2)$$

che rientra poi nella serie (B) per $k = \varepsilon$.

Si hanno dunque in conclusione soltanto i seguenti tipi distinti di G_2, G_3, G_4, G_5:

7 $$(X_3 , p_3)$$

8 $$(X_3 + k X_6 , p_3 , p_4) \qquad |k| \leq 1$$

9 $$(X_3 , p_1 , p_2) \quad \text{(gruppo di movimenti di } S_2\text{)}$$

10 $$(X_3 , p_1 , p_2 , p_3)$$

11 $$(X_3 + k X_6 , p_1 , p_2 , p_3 , p_4) \qquad |k| \leq 1 .$$

Passando al gruppo di rotazioni a due parametri (X_3, X_6), le traslazioni che possono aggiungersi a questo in guisa da ottenere di nuovo un gruppo devono formar gruppo separatamente colle X_3 e X_6 e con ogni altra rotazione infinitesima del gruppo. Ciò dà solo il G_4 e il G_6:

12 $$(X_3 , X_6 , p_1 , p_2)$$

13 $$(X_3 , X_6 , p_1 , p_2 , p_3 , p_4) .$$

Con una considerazione analoga il G_3 (X_1, X_2, X_3) conduce ai tipi di G_4, G_6 e G_7:

14 $$(X_1 , X_2 , X_3 , p_4)$$

15 $$(X_1 , X_2 , X_3 , p_1 , p_2 , p_3) \quad \text{(gruppo di mov. di } S_3\text{)}$$

16 $$(X_1 , X_2 , X_3 , p_1 , p_2 , p_3 , p_4) .$$

Invece pei G_3 $(X_1 + \varepsilon X_4 , X_2 + \varepsilon X_5 , X_3 + \varepsilon X_6)$, esprimendo la condizione affinchè le

$$\begin{cases} p_3 + a\, p_1 + b\, p_2 \\ p_4 - b \varepsilon p_1 + a \varepsilon p_2 , \end{cases}$$

formanti gruppo colla $X_3+\varepsilon X_6$, formino gruppo anche colle $X_1+\varepsilon X_4$, $X_2+\varepsilon X_5$, si trova che dovrebbe essere $a^2+b^2=-1$. Questi G_3 conducono dunque unicamente ai G_7:

17 $$(X_1+\varepsilon X_4\,,\ X_2+\varepsilon X_5\,,\ X_3+\varepsilon X_6\,,\ p_1, p_2, p_3, p_4).$$

E così finalmente in corrispondenza ai G_4 **5**, considerando che questi G_4 contengono i G_3 ora esaminati, si trovano unicamente i tipi di G_8:

18 $$(X_1+\varepsilon X_4\,,\ X_2+\varepsilon X_5\,,\ X_3\,,\ X_6\,,\ p_1, p_2, p_3, p_4)\,,$$

e infine in corrispondenza al G_6 totale delle rotazioni, il G_{10} totale dei movimenti:

19 $$(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, p_1, p_2, p_3, p_4).$$

§. 8. — Gruppi di movimenti più generali con trasformazioni infinitesime elicoidali.

Otterremo al solito i rimanenti gruppi di movimenti in S_4, cercando quali nuovi tipi si ottengono dai precedenti mediante *prolungamento* delle rotazioni infinitesime con traslazioni infinitesime.

Cominciamo a determinare i vari tipi di trasformazioni infinitesime elicoidali X_3+kX_6+Tf.

Escluso il caso $k=0$, questa trasformazione infinitesima si riduce sempre colla traslazione:

$$x'_1=x_1+a_2\,,\quad x'_2=x_2-a_1\,,\quad x'_3=x_3+\frac{a_4}{k}\,,\quad x'_4=a_4-\frac{a_3}{k}$$

alla forma X_3+kX_6.

Nel caso escluso con una traslazione sulle x_1, x_2 e una rotazione sulle x_3, x_4 si ottengono gli ∞^1 tipi:

20 $$X_3+a\,p_3$$

dove il parametro a può supporsi positivo (bastando in caso contrario applicare la rotazione $\left\{\begin{matrix} x'_3 = -x_3 \\ x'_4 = -x_4 \end{matrix}\right)$, ma non può ridursi ulteriormente, perchè questo dovrebbe ottenersi con movimenti in S_3 ciò che non è possibile.

In corrispondenza al G_2 **2** dobbiamo cercare i tipi distinti di G_2 della forma:

$$(X_3 + Tf\ ,\ X_6 + T'f).$$

Una traslazione preliminare permette di supporre:

$$T'f = a_1 p_1 + a_2 p_2\ ,\quad Tf = a_3 p_3 + a_4 p_4\ ,$$

dopo di che la relazione di composizione:

$$(X_3\ ,\ T'f) = (X_6\ ,\ Tf)$$

porta $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$, talchè si torna al G_2 **2.**

Così in corrispondenza ai G_3 **3** dovremo considerare i G_3 della forma:

$$(X_1 + \varepsilon X_4 + Tf\ ,\ X_2 + \varepsilon X_5 + T'f\ ,\ X_3 + \varepsilon X_6 + T''f)\ .$$

Con una traslazione preliminare possiamo supporre $T''f = 0$. Dovrà essere allora per le relazioni di composizione:

$$(X_3 + \varepsilon X_6\ ,\ Tf) = -2\,T'f\ ,\ (X_3 + \varepsilon X_6\ ,\ T'f) = 2\,Tf\ ,$$

cioè:

$$\begin{aligned} a_2 p_1 - a_1 p_2 + \varepsilon\,(a_4 p_3 - a_3 p_4) &= -2\,(a'_1 p_1 + a'_2 p_2 + a'_3 p_3 + a'_4 p_4) \\ a'_2 p_1 - a'_1 p_2 + \varepsilon\,(a'_4 p_3 - a'_3 p_4) &= 2\,(a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4)\ , \end{aligned}$$

da cui subito:

$$a_i = a'_i = 0 \quad (i = 1, \ldots 4)\ .$$

Pel G_3 $(X_1+T_1f,\ X_2+T_2f,\ X_3+T_3f)$ si osserverà che con una traslazione preliminare in S_3 si ottiene la forma:

$$(X_1 + a_1 p_4\ ,\ X_2 + a_2 p_4\ ,\ X_3 + a_3 p_4)\,,$$

e dopo ciò le relazioni di composizione portano $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Infine pel G_4 **5** per quanto è già stato detto riguardo al G_3 **3** ci si può limitare alla discussione della forma:

$$(X_1 + \varepsilon X_4\ ,\ X_2 + \varepsilon X_4\ ,\ X_3 + \varepsilon X_6\ ,\ X_3 - \varepsilon X_6 + Tf)\,,$$

dopo di che le relazioni di composizione portano $Tf = 0$.

Con ragionamenti analoghi pei successivi tipi si trovano soltanto in corrispondenza ai gruppi **7, 9, 10** i nuovi tipi:

21 $\qquad (X_3 + a\,p_3\ ,\ p_4)$

22 $\qquad (X_3 + a\,p_3\ ,\ p_1\ ,\ p_2) \qquad (a \geq 0)$

23 $\qquad (X_3 + a\,p_3\ ,\ p_1\ ,\ p_2\ ,\ p_4)$.

Oltre ai tipi di gruppi continui di movimenti di S_4 così determinati non vi sono che i gruppi di pure traslazioni di cui posson prendersi come rappresentanti:

24, 25, 26, 27 $\quad p_1\ ,\ (p_1, p_2)\ \ (p_1, p_2, p_3)\ \ (p_1, p_2, p_3, p_4)$.

§. 9. — Gruppi di movimenti e similitudini.

Detta $X_7f = x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \dfrac{\partial f}{\partial x_3} + x_4 \dfrac{\partial f}{\partial x_4}$ la *similitudine* infinitesima rispetto all'origine, osserveremo che, come in S_3, ogni gruppo di movimenti e similitudini (non composto di puri movimenti) può ridursi alla forma:

$$(Y_1f\ ,\ Y_2f\ ,\ \ldots\ Y_mf\ ,\ Uf)$$

dove $(Y_1f,\ Y_2f,\ \ldots Y_mf)$ rappresenta uno dei tipi Γ di gruppi di movimenti già determinati oppure l'*identità*, ed Uf è una trasformazione infinitesima contenente essenzialmente la $X_7 f$.

1.° Γ è l'identità, $Uf = X_7 f + a_1 X_1 + \ldots + a_6 X_6 + b_1 p_1 + \ldots + b_4 p_4$. Si ha per esteso:

$$Uf = (x_1 + a_2 x_3 - a_3 x_2 - a_4 x_4 + b_1) \frac{\partial f}{\partial x_1} + (x_2 + a_3 x_1 - a_1 x_3 - a_5 x_4 + b_2) \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

$$+ (x_3 + a_1 x_2 - a_2 x_1 - a_6 x_4 + b_3) \frac{\partial f}{\partial x_3} + (x_4 + a_4 x_1 + a_5 x_2 + a_6 x_3 + b_4) \frac{\partial f}{\partial x_4}.$$

Ponendo:

$$\begin{cases} x_1 + a_2 x_3 - a_3 x_2 - a_4 x_4 + b_1 = x'_1 + a_2 x'_3 - a_3 x'_2 - a_4 x'_4 \\ x_2 + a_3 x_1 - a_1 x_3 - a_5 x_4 + b_2 = x'_2 + a_3 x'_1 - a_1 x'_3 - a_5 x'_4 \\ x_3 + a_1 x_2 - a_2 x_1 - a_6 x_4 + b_3 = x'_3 + a_1 x'_2 - a_2 x'_1 - a_6 x'_4 \\ x_4 + a_4 x_1 + a_5 x_2 + a_6 x_3 + b_4 = x'_4 + a_4 x'_1 + a_5 x'_2 + a_6 x'_3, \end{cases}$$

poichè il determinante dei coefficienti delle x (o delle x', che è lo stesso) è in ogni caso diverso da zero, si conclude che con una traslazione possono annullarsi tutte le b_i.

Con una rotazione poi, che non altera la $X_7 f$, si può ridurre la rotazione infinitesima $a_1 X_1 + \ldots + a_6 X_6$ alla forma tipica $X_3 + h X_6$ e si ha così:

$$Uf = X_3 + h X_6 + k X_7. \tag{1}$$

Per vedere su questa se i parametri h e k sono essenziali cerchiamo le trasformazioni che portano Uf in

$$U'f = X_3 + h' X_6 + k' X_7.$$

Queste trasformazioni dovranno conservare gli S_2 invarianti:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

comuni alla Uf ed $U'f$. Perciò le loro formole finite saranno:

$$\mathrm{T)}\qquad \left\{\begin{aligned} x'_1 &= k\ (x_1 \cos \alpha - x_2 \operatorname{sen} \alpha) \\ x'_2 &= k\varepsilon\ (x_1 \operatorname{sen} \alpha + x_2 \cos \alpha) \\ x'_3 &= k\ (x_3 \cos \beta - x_4 \operatorname{sen} \beta) \\ x'_4 &= k\varepsilon\ (x_3 \operatorname{sen} \beta + x_4 \cos \beta) \end{aligned}\right.$$

composte, se occorre colla:

$$\mathrm{T^*)}\qquad x'_1 = x_3\ ,\quad x'_2 = x_4\ ,\quad x'_3 = x_1\ ,\quad x'_4 = x_2 .$$

Le T) a lor volta son composte delle trasformazioni finite g del gruppo G (di trasformazioni due a due permutabili):

$$(\mathrm{X}_3\ ,\ \mathrm{X}_6\ ,\ \mathrm{X}_7)$$

combinate eventualmente colla

$$\mathrm{T^{**})}\qquad x'_2 = -x_2\ ,\quad x'_4 = -x_4 .$$

Ora le g per la permutabilità notata in G lasciano invariata la (1) che è una trasformazione infinitesima del gruppo. La T* scambia fra loro le $\mathrm{X}_3, \mathrm{X}_6$, cosicchè può ancora supporsi come prima $|h| \leq 1$. Infine la T** cambia il segno alla $\mathrm{X}_3 + h\,\mathrm{X}_6$, dunque può supporsi $k > 0$.

Si hanno così gli ∞^2 tipi distinti di G_1:

28 $$\mathrm{X}_3 + h\,\mathrm{X}_6 + k\,\mathrm{X}_7 \qquad |h| \leq 1,\ k > 0 .$$

2.° $\Gamma \equiv \mathrm{X}_3 + k\,\mathrm{X}_6$, $\mathrm{U}f = \mathrm{X}_7 + a_1\,\mathrm{X}_1 + a_2\,\mathrm{X}_2 + a_4\,\mathrm{X}_4 + a_5\,\mathrm{X}_5 + a_6\,\mathrm{X}_6 + $ $+ b_1\,p_1 + b_2\,p_2 + b_3\,p_3 + b_4\,p_4$. L'espressione alternata:

$$(\mathrm{X}_3 + k\,\mathrm{X}_6,\ \mathrm{U}f) = (a_2 + k\,a_5)\,\mathrm{X}_1 - (a_1 + k\,a_4)\,\mathrm{X}_2 +$$

$$+ (a_5 + k\,a_2)\,\mathrm{X}_4 - (a_1 + k\,a_1)\,\mathrm{X}_5 + b_2 p_1 - b_1 p_2 + k\,(b_4 p_3 - b_3 p_4)$$

non contenendo nè la $\mathrm{X}_3 f$ nè la $\mathrm{X}_7 f$, è necessariamente nulla.

Dev' esser dunque:

$$\begin{cases} a_2 + k\,a_5 = 0 & b_1 = 0 \\ a_1 + k\,a_4 = 0 & b_2 = 0 \\ a_5 + k\,a_2 = 0 & k\,b_3 = 0 \\ a_4 + k\,a_1 = 0 & k\,b_4 = 0\,. \end{cases}$$

Per k reale diverso da ε le a_1, a_2, a_4, a_5 son dunque nulle e così pure le b, salvo il caso $k=0$ in cui è solo $b_1 = b_2 = 0$.

Escluso per ora questo caso, resta $Uf = X_7 + a\,X_6$, dove il parametro a come sappiamo è essenziale, ma può supporsi positivo, applicando eventualmente la rotazione $\begin{cases} x'_1 = -x_1 \\ x'_3 = -x_3 \end{cases}$, che non altera la X_7 e cangia solo di segno la $X_3 + k\,X_6$. Si ha così il G_2:

29 $$(X_3 + k\,X_6\,,\ X_7 + a\,X_6) \quad (0 < |k| < 1,\ a \geq 0)\,.$$

Nel caso escluso, $k=0$, con una rotazione sulle x_3, x_4 può rendersi $b_3 = 0$ e con una similitudine rispetto all' origine $b_4 = 1$. Resta quindi il G_2:

30 $$\left(X_3\,,\ X_7 + a\,X_6 + \frac{\partial f}{\partial x_4}\right) \quad (a \geq 0)\,.$$

Per $k = \varepsilon$ infine si ha $b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 0$ e inoltre:

$$a_4 = -\varepsilon\,a_1\ ,\quad a_5 = -\varepsilon\,a_2.$$

$$Y_1 f = X_3 + \varepsilon\,X_6\ ,\ Y_2 f = X_7 + a_1(X_1 - \varepsilon\,X_4) + a_2(X_2 - \varepsilon\,X_5) + a_6\,X_6$$

dove resta a vedere se i parametri a_1, a_2, a_6 siano essenziali. Poichè la $X_3 + \varepsilon\,X_6$ è unica del suo tipo in questo gruppo, dovremo cercare come vengono trasformati i parametri a_1, a_2, a_6 dalle trasformazioni di G_{11} che lasciano inalterata la $X_3 + \varepsilon\,X_6$, cioè al solito delle trasformazioni:

$$\text{T)}\quad \begin{cases} x_1 = k\,(x'_1 \cos\alpha - x'_2 \operatorname{sen}\alpha) \\ x_2 = k\,(x'_1 \operatorname{sen}\alpha + x'_2 \cos\alpha) \\ x_3 = k\,(x'_3 \cos\beta - x'_4 \operatorname{sen}\beta) \\ x_4 = k\,(x'_3 \operatorname{sen}\beta + x'_4 \cos\beta) \end{cases}$$

combinate eventualmente colla $x'_2 = -x_2$, $x'_4 = -x_4$ e colla:

$$\text{T*)}\qquad x'_1 = x_3 \;,\quad x'_2 = x_4 \;,\quad x'_3 = x_1 \;,\quad x'_4 = x_2 \,.$$

Quest'ultima può trascurarsi, perchè non fa che scambiar tra loro le X_3, X_6 e così le X_1, X_4 e le X_2, X_5 senza alterare il valore dei parametri. Per la T poi la Y_2 diviene:

$$X_7 + (a_1 \cos(\alpha - \beta\varepsilon) + a_2 \operatorname{sen}(\alpha - \beta\varepsilon))\,(X_1 - \varepsilon X_4) +$$
$$+ (-a_1 \operatorname{sen}(\alpha - \beta\varepsilon) + a_2 \cos(\alpha - \beta\varepsilon))\,(X_2 - \varepsilon X_5) + a_6 X_6\,.$$

Può rendersi dunque $a'_2 = 0$, prendendo $\operatorname{tang}(\alpha - \beta\varepsilon) = \frac{a_2}{a_1}$.

Dopo ciò il valore assoluto di a'_1 resta certo un parametro essenziale (e così di a_6) perchè come si vede tutte le trasformazioni che conservano al G_2 la forma in questione conservano il valore di $a_1^2 + a_2^2$ e così pure il valore assoluto di a_6. Si può però supporre $a'_1 > 0$, applicando se occorre la rotazione $x'_2 = -x_2$, $x'_4 = -x_4$ che non altera la $X_3 + \varepsilon X_6$. Si ottiene così la serie ∞^2 di G_2:

31 $\qquad (X_3 + \varepsilon X_6 \;,\;\; X_7 + a\,(X_1 - \varepsilon X_4) + b\,X_6) \quad (a \geq 0)\,.$

3.° $\Gamma \equiv (X_3, X_6)$, $Uf = X_7 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_4 X_4 + a_5 X_5 + Tf$.

Poichè ancora le operazioni alternate (X_3, Uf), (X_6, Uf) non contengono nè la X_3, nè la X_6, nè la X_7, dev'essere:

$$(X_3, Uf) = 0 \quad (X_6, Uf) = 0\,.$$

Questo porta:

$$Tf = 0 \;,\quad a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = 0\,.$$

Resta cioè unicamente il G_3 di trasformazioni 2 a 2 permutabili:

32 $\qquad (X_3 \;,\;\; X_6 \;,\;\; X_7)\,.$

Con discussioni analoghe dai successivi tipi di gruppi di movimenti si ottengono i nuovi tipi di *gruppi ampliati:*

33 $(X_1+\varepsilon X_4 \,,\ X_2+\varepsilon X_5 \,,\ X_3+\varepsilon X_6 \,,\ X_7+a X_6) \qquad (a \geq 0)$

34 $(X_1 \,,\ X_2 \,,\ X_3 \,,\ X_7)$

35 $(X_1+\varepsilon X_4 \,,\ X_2+\varepsilon X_5 \,,\ X_3 \,,\ X_6 \,,\ X_7)$

36 $(X_1 \,,\ X_2 \,,\ X_3 \,,\ X_4 \,,\ X_5 \,,\ X_6 \,,\ X_7)$

(gruppo dei movimenti non Euclidei e delle similitudini):

37 $(X_3 \,,\ p_3 \,,\ X_7+p_4)$

38 $(X_3 \,,\ X_7+a X_6+p_3 \,,\ p_1 \,,\ p_2) \qquad (a \geq 0)$

39 $(X_3+k X_6 \,,\ X_7+a X_6 \,,\ p_1 \,,\ p_2) \qquad (|k| \leq 1, a \geq 0)$

40 $(X_3 \,,\ X_7+a X_6 \,,\ p_3 \,,\ p_4) \qquad (a \geq 0)$

41 $(X_3 \,,\ X_7+p_4 \,,\ p_1 \,,\ p_2 \,,\ p_3)$

42 $X_3+k X_6 \,,\ X_7+a X_6 \,,\ p_1 \,,\ p_2 \,,\ p_3 \,,\ p_4) \qquad (a \geq 0)$

43 $X_3+\varepsilon X_6 \,,\ X_7 + a (X_1 - \varepsilon X_4) + b X_6 \,,\ p_1 \,,\ p_2 \,,\ p_3 \,,\ p_4)$

44 $(X_3 \,,\ X_6 \,,\ X_7+p_3 \,,\ p_1 \,,\ p_2)$

45 $(X_3 \,,\ X_6 \,,\ X_7 \,,\ p_1 \,,\ p_2 \,,\ p_3 \,,\ p_4)$

46 $(X_1 \,,\ X_2 \,,\ X_3 \,,\ X_7 \,,\ p_4)$

47 $(X_1 \,,\ X_2 \,,\ X_3 \,,\ X_7 + p_4 \,,\ p_1 \,,\ p_2 \,,\ p_3)$

48 $(X_1 \,,\ X_2 \,,\ X_3 \,,\ X_7 \,,\ p_1 \,,\ p_2 \,,\ p_3 \,,\ p_4)$

49 $(X_1+\varepsilon X_4 \,,\ X_2+\varepsilon X_5 \,,\ X_3+\varepsilon X_6 \,,\ X_7+a X_6 \,,\ p_1 \,,\ p_2 \,,\ p_3 \,,\ p_4)$

50 $(X_1+\varepsilon X_4 \,,\ X_2+\varepsilon X_5 \,,\ X_3 \,,\ X_6 \,,\ X_7 \,,\ p_1 \,,\ p_2 \,,\ p_3 \,,\ p_4)$

51 $(X_1 \,,\ X_2 \ldots . X_7 \,,\ p_1 \ldots p_4)$

gruppo totale dei movimenti e similitudini.

Ai tipi **20, 21, 22, 23** non corrisponde nessun gruppo ampliato perchè, essendo $a \neq 0$, l'espressione alternata $(X_3+a\,p_3,\ Uf)$ contiene essenzialmente p_3 senza contenere la X_3. Dai tipi **24, ... 27** si hanno invece i gruppi ampliati.

52	$(p_1\ ,\ X_7+a\,X_6)$	$(a \geq 0)$
53	$(p\ ,\ p_2\ ,\ X_3+h\,X_6+k\,X_7)$	$(\lvert h\rvert \leq 1, k>0)$
54	$(p_1\ ,\ p_2\ ,\ p_3\ ,\ X_7+a\,X_3)$	$(a \geq 0)$
55	$(p_1\ ,\ p_2\ ,\ p_3\ ,\ p_4\ ,\ X_3+h\,X_6+k\,X_7)$	$(\lvert h\rvert \leq 1\ , k>0)$.

Sono così determinati tutti i tipi reali di gruppi di movimenti e similitudini in S_4. È da osservare però che nei gruppi **20, 21, 22, 23** (considerati come sottogruppi di G_{11}) il parametro a può ridursi ad 1 con una similitudine rispetto all'origine. In ordine al numero dei parametri si hanno dunque in G_{11}:

4	tipi di	G_1	reali:	**1, 20, 24, 28.**
8	„	G_2	„	**2, 7, 21, 25, 29, 30, 31, 52.**
9	„	G_3	„	**3, 4, 8, 9, 22, 26, 32, 37, 53.**
12	„	G_4	„	**5, 10, 12, 14, 23, 27, 33, 34, 38, 39, 40, 54.**
6	„	G_5	„	**11, 35, 41, 44, 46, 55.**
5	„	G_6	„	**6, 13, 15, 42, 43.**
5	„	G_7	„	**16, 17, 36, 45, 47.**
3	„	G_8	„	**18, 48, 49.**
1	„	G_9	„	**50.**
1	„	G_{10}	„	**19.**
1	„	G_{11}	„	**51.**

IV.

Sul gruppo dei movimenti e delle similitudini in S_5

Trasformazioni infinitesime generatrici:

$$X_1f = X_{23}\ ,\quad X_2f = X_{31}\ ,\quad X_3f = X_{12}\ ,\quad X_4f = X_{14}\ ,\quad X_5 = X_{24}$$

$$X_6f = X_{34}\ ,\quad X_7f = X_{15}\ ,\quad X_8f = X_{25}\ ,\quad X_9f = X_{35}\ ,\quad X_{10}f = X_{45}$$

$$X_{11}f = x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + x_5\frac{\partial f}{\partial x_5}\,,\ p_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,,\ p_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}\,,\ p_3 = \frac{\partial f}{\partial x_3}\,,\ p_4 = \frac{\partial f}{\partial x_4}\,,\ p_5 = \frac{\partial f}{\partial x_5}\,.$$

Gruppi di rotazioni. — Per le rotazioni infinitesime oltre alle relazioni di composizione che sussistono fra le $X_1, X_2 \ldots X_6$ (le stesse che in S_4) si hanno le altre:

$$(X_1 X_7) = 0\ ,\quad (X_1 X_8) = -X_9\ ,\quad (X_1 X_9) = X_8\ ,\quad (X_1 X_{10}) = 0$$

$$(X_2 X_8) = 0\ ,\quad (X_2 X_9) = -X_7\ ,\quad (X_2 X_7) = X_9\ ,\quad (X_2 X_{10}) = 0$$

$$(X_3 X_9) = 0\ ,\quad (X_3 X_7) = -X_8\ ,\quad (X_3 X_8) = X_7\ ,\quad (X_3 X_{10}) = 0$$

$$(X_4 X_7) = -X_{10}\ ,\quad (X_4 X_8) = 0\ ,\quad (X_4 X_9) = 0\ ,\quad (X_4 X_{10}) = X_7$$

$$(X_5 X_8) = -X_{10}\ ,\quad (X_5 X_9) = 0\ ,\quad (X_5 X_7) = 0\ ,\quad (X_5 X_{10}) = X_8$$

$$(X_6 X_9) = -X_{10}\ ,\quad (X_6 X_7) = 0\ ,\quad (X_6 X_8) = 0\ ,\quad (X_6 X_{10}) = X_9$$

$$(X_7\ X_8) = -X_3\ ,\quad (X_8\ X_9) = -X_1\ ,\quad (X_9\ X_7) = -X_2$$

$$(X_7 X_{10}) = -X_4\ ,\quad (X_8 X_{10}) = -X_5\ ,\quad (X_9 X_{10}) = -X_6\,.$$

a) Gruppi ad un parametro. — Son tutti riducibili per quanto si è visto in generale ai gruppi ad un parametro di S_4:

1 $$X_3 + k\, X_6 .$$

Qui però può supporsi $k > 0$, bastando applicare se occorre la rotazione:

$$x'_4 = -x_4 \quad , \quad x'_5 = -x_5 .$$

b) Gruppi a due parametri:

$$\begin{cases} Y_1 f = X_3 + k\, X_6 \\ Y_2 f = e_1\, X_1 + e_2\, X_2 + e_4\, X_4 + \ldots + e_{10}\, X_{10} . \end{cases}$$

Si ha:

$$(Y_1\, Y_2) = (e_2 + k\, e_5)\, X_1 - (e_1 + k\, e_4)\, X_2 + (e_5 + k\, e_2)\, X_4 - (e_4 + k\, e_1)\, X_5 + \\ + e_8\, X_7 - e_7\, X_8 + k\, (e_{10}\, X_9 - e_9\, X_{10}) .$$

Questa espressione, perchè le Y_1, Y_2 generino un G_2 dev'esser combinazione delle stesse Y_1, Y_2, ma non contenendo la X_3 coinciderà salvo un fattore μ colla Y_2, sarà cioè:

$$\begin{array}{llll} 1) & e_2 + k\, e_5 = \mu\, e_1 & 5) & e_8 = \mu\, e_7 \\ 2) & -e_1 - k\, e_4 = \mu\, e_2 & 6) & -e_7 = \mu\, e_8 \\ 3) & e_5 + k\, e_2 = \mu\, e_4 & 7) & k\, e_{10} = \mu\, e_9 \\ 4) & -e_4 - k\, e_1 = \mu\, e_5 & 8) & -k\, e_9 = \mu\, e_{10} . \end{array}$$

$$\mu\, e_6 = 0 .$$

Dalle 5), 6) non potendo essere $\mu = i\,\varepsilon$ segue $e_7 = e_8 = 0$. Dalle 7), 8) parimente se k, μ non sono ambedue nulle si ha $e_9 = e_{10} = 0$, talchè si ottiene un G_2 dell'S_4 (x_1, x_2, x_3, x_4) epperò riducibile al tipo:

2 $$(X_3 \; , \; X_6) .$$

Per $k = \mu = 0$ restano e_9, e_{10} arbitrarie $e_1 = e_2 = e_4 = e_5 = 0$, talchè si hanno i G_2:

$$(X_3 \ , \ X_6 + e_9 X_9 + e_{10} X_{10}) .$$

Ma la $X_6 + e_9 X_9 + e_{10} X_{10}$ rotazione infinitesima generica dell' S_3 (x_3, x_4, x_5) può ridursi con una rotazione di questo spazio che non altera la X_3 alla forma X_6, talchè si torna al tipo **2.**

c) Gruppi a tre parametri.

1.° G_3 *contenenti un* G_2. Si può porre:

$$\begin{cases} Y_1 f = X_3 \ , \ Y_2 f = X_6 \\ Y_3 f = e_1 X_1 + e_2 X_2 + e_4 X_4 + e_5 X_5 + e_7 X_7 + \ldots + e_{10} X_{10} . \end{cases}$$

Dev' essere:

$$(Y_1 Y_3) = e_2 X_1 - e_1 X_2 + e_5 X_4 - e_4 X_5 + e_8 X_7 - e_7 X_8 = \mu Y_3 f$$
$$(Y_2 Y_3) = e_5 X_1 - e_1 X_5 + e_2 X_4 - e_4 X_2 + e_{10} X_9 - e_9 X_{10} = \nu Y_3 f$$

da cui per la realità:

$$e_1 = e_2 = \ldots = e_9 = e_{10} = 0 .$$

Non esistono dunque in S_5 (come in S_4) *dei* G_3 *contenenti* G_2.

Il teorema si può estendere come segue: *Nel gruppo delle rotazioni di* S_{2n} o S_{2n+1} *non esiste alcun* G_{n+1} *reale contenente il gruppo* G_n *di rotazioni 2 a 2 permutabili:*

$$(X_{12} \ , \ X_{34} \ , \ldots X_{2n-1 \, , \, 2n}) \ [1].$$

2.° G_3 *non contenenti* G_2 *reali.* — Potranno ridursi alla composizione:

$$(Y_1 Y_2) = \mu Y_3 f \ , \ (Y_2 Y_3) = \mu Y_1 f \ , \ (Y_3 Y_1) = \mu Y_2 f$$

con μ reale e diverso da zero.

---

[1]) Questo teorema comprende anche l'altro noto che non esistono G_2 di rotazioni reali nello spazio ordinario

Posto:

$$Y_1 f = X_3 + k X_6 \quad , \quad Y_2 f = \sum_{i=1}^{i=10} e_i X_i \quad , \quad Y_3 f = \sum_{i=1}^{i=10} e'_i X_i$$

dovrà essere:

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} e_2 + k e_5 = \mu e'_1 \quad , & 0 = \mu e'_5 \\ -e_1 - k e_4 = \mu e'_2 \quad , & e_8 = \mu e'_7 \\ 0 = \mu e'_3 \quad , & -e_7 = \mu e'_8 \\ e_5 + k e_2 = \mu e'_4 \quad , & k e_{10} = \mu e'_9 \\ -e_4 - k e_1 = \mu e'_5 \quad , & -k e_9 = \mu e'_{10} \end{cases}$$

$$(\beta) \qquad \begin{cases} -e'_2 - k e'_5 = \mu e_1 \quad , & 0 = \mu e_6 \\ e'_1 + k e'_4 = \mu e_2 \quad , & -e_8 = \mu e_7 \\ 0 = \mu e_3 \quad , & e_7 = \mu e_8 \\ -e'_5 - k e'_2 = \mu e_4 \quad , & -k e_{10} = \mu e_9 \\ e'_4 + k e'_1 = \mu e_5 \quad , & k e_9 = \mu e_{10} . \end{cases}$$

Essendo $\mu \neq 0$, si ha subito di qui $e_3 = e_6 = e'_3 = e'_6 = 0$, per cui il sistema (γ) ricavato dalla terza relazione di composizione si riduce a

$$(\gamma) \begin{cases} -e_8 e'_9 + e_9 e'_8 = 0 \quad , & -e_4 e'_2 + e_2 e'_4 - e_1 e'_5 + e_5 e'_1 - e_9 e'_{10} + e_{10} e'_9 = \mu k \\ -e_9 e'_7 + e_7 e'_9 = 0 \quad , & -e_2 e'_9 + e_9 e'_2 + e_4 e'_{10} - e_{10} e'_4 = 0 \\ -e_1 e'_2 + e_2 e'_1 - e_4 e'_5 + e_5 e'_4 - e_7 e'_8 + e_8 e'_7 = \mu \quad , & e_1 e'_9 - e_9 e'_1 + e_5 e'_{10} - e_{10} e'_5 = 0 \\ -e_7 e'_{10} + e_{10} e'_7 = 0 \quad , & e_2 e'_7 - e_7 e'_2 + e_8 e'_1 - e_1 e'_8 = 0 \\ -e_8 e'_{10} + e_{10} e'_8 = 0 \quad , & -e_4 e'_7 + e_7 e'_4 - e_5 e'_8 + e_8 e'_5 = 0 . \end{cases}$$

Eliminando fra le (α), (β) le e', come si può perchè $\mu \neq 0$, si ottiene:

$$(\delta)\quad \begin{cases} (1-\mu^2)\, e_1 + k\,(2\, e_4 + k\, e_1) = 0 \quad , & (1-\mu^2)\, e_7 = 0 \\ (1-\mu^2)\, e_2 + k\,(2\, e_5 + k\, e_1) = 0 \quad , & (1-\mu^2)\, e_8 = 0 \\ (1-\mu^2)\, e_4 + k\,(2\, e_1 + k\, e_4) = 0 \quad , & (k^2-\mu^2)\, e_9 = 0 \\ (1-\mu^2)\, e_5 + k\,(2\, e_2 + k\, e_5) = 0 \quad , & (k^2-\mu^2)\, e_{10} = 0 \,. \end{cases}$$

Se $e_7 = e_8 = e_9 = e_{10} = 0$ è anche $e'_7 = e'_8 = e'_9 = e'_{10} = 0$, talchè si torna ai tipi noti di S_4:

3 $(X_1 \;,\; X_2 \;,\; X_3)$

4 $(X_1 + \varepsilon\, X_4 \;,\; X_2 + \varepsilon\, X_5 \;,\; X_3 + \varepsilon\, X_6)$

dove per una osservazione precedente può anche supporsi $\varepsilon = 1$.

Per un G_3 non appartenente ad S_4 deve aversi dunque:

$$\text{o} \quad \mu = \varepsilon \qquad \text{o} \quad \mu = k\,\varepsilon \,.$$

1.ª IPOTESI, $\mu = \varepsilon$. Si ha da (δ):

$$(\delta^*)\quad \begin{cases} k\,(2\, e_4 + k\, e_1) = 0 & \\ k\,(2\, e_5 + k\, e_2) = 0 & (k^2-1)\, e_9 = 0 \\ k\,(2\, e_1 + k\, e_4) = 0 & (k^2-1)\, e_{10} = 0 \\ k\,(2\, e_2 + k\, e_5) = 0 & \end{cases}$$

Anche qui si presentano due ipotesi o $k = \varepsilon'$ o $e_9 = e_{10} = 0$.

a) $k = \varepsilon'$. Le (δ^*) danno $e_1 = e_2 = e_4 = e_5 = 0$ e quindi anche $e'_1 = e'_2 = e'_4 = e'_5 = 0$. Introducendo questi valori nelle (γ) e facendovi inoltre $e'_7 = \varepsilon\, e_8$, $e'_8 = -\varepsilon\, e_7$, $e'_9 = \varepsilon\,\varepsilon'\, e_{10}$, $e'_{10} = -\varepsilon\,\varepsilon'\, e_9$ si ottengono per e_7, e_8, e_9, e_{10} le relazioni:

$$e_7^2 + e_8^2 = 1 \qquad\qquad e_9^2 + e_{10}^2 = 1$$

$$e_8\, e_{10} + \varepsilon'\, e_7\, e_9 = 0 \quad , \quad e_7\, e_{10} - \varepsilon'\, e_8\, e_9 = 0 \,,$$

che sono incompatibili perchè le due ultime avendo per determinante (nelle e_{10}, e_9) $-\varepsilon'\,(e_7^2 + e_8^2) = -\varepsilon'$ danno $e_9 = e_{10} = 0$ contro la seconda.

b) $k \neq \varepsilon'$, $e_9 = e_{10} = e'_9 = e'_{10} = 0$:

$$e'_7 = \varepsilon\, e_8 \quad , \quad e'_8 = -\varepsilon\, e_7 . \tag{3}$$

Sono da distinguere ancora due casi:

(b_1) $k = 0$. Le (δ) sono identicamente verificate e resta

$$\left\{\begin{array}{ll} e'_1 = \varepsilon\, e_2 & e'_2 = -\varepsilon\, e_1 \\ e'_4 = \varepsilon\, e_5 & e'_5 = -\varepsilon\, e_4 . \end{array}\right. \tag{4}$$

Le (3), (4) introdotte in (γ) danno:

$$\left\{\begin{array}{c} e_1^2 + e_2^2 + e_4^2 + e_5^2 + e_7^2 + e_8^2 = 1 \\ e_1\, e_4 + e_2\, e_5 = 0 \\ e_1\, e_7 + e_2\, e_8 = 0 \\ -e_4\, e_8 + e_7\, e_5 = 0 . \end{array}\right. \tag{γ^*}$$

Se scriviamo ora le equazioni degli spazi assiali della $Y_2 f$ e della $Y_3 f$:

$$\text{(I)} \left\{\begin{array}{c} e_2\, x_3 - e_4\, x_4 - e_7\, x_5 = 0 \\ e_1\, x_3 + e_5\, x_4 + e_8\, x_5 = 0 \\ e_1\, x_2 - e_2\, x_1 = 0 \\ e_4\, x_1 + e_5\, x_2 = 0 \\ e_7\, x_1 + e_8\, x_2 = 0 \end{array}\right. \qquad \text{(II)} \left\{\begin{array}{c} e_1\, x_3 + e_5\, x_4 + e_8\, x_5 = 0 \\ e_2\, x_3 - e_4\, x_4 - e_7\, x_5 = 0 \\ e_1\, x_1 + e_2\, x_8 = 0 \\ e_5\, x_1 - e_4\, x_2 = 0 \\ e_8\, x_1 - e_7\, x_2 = 0 , \end{array}\right.$$

è chiaro che per le 3 ultime della (γ) tanto le (I) che le (II) si riducono a due sole indipendenti. Supposto che sia $e_1 \neq 0$ (e una delle 6 costanti $e_1 \ldots e_8$ dev' esser bene diversa da zero) possiamo prendere come equazioni degli spazi assiali in discorso:

$$\text{(I*)} \left\{\begin{array}{c} e_1\, x_3 + e_5\, x_2 + e_8\, x_5 = 0 \\ e_1\, x_2 - e_2\, x_1 = 0 \end{array}\right. \qquad \text{(II*)} \left\{\begin{array}{c} e_1\, x_3 + e_5\, x_4 + e_8\, x_5 = 0 \\ e_1\, x_1 + e_2\, x_2 = 0 . \end{array}\right.$$

Essendo i due iperpiani $e_1 x_2 - e_2 x_1 = 0$, $e_1 x_1 + e_2 x_2 = 0$ fra loro ortogonali, possiamo prenderli come nuovi iperpiani coordinati $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ (con una rotazione che non altera la $Y_1 f = X_3$).

Similmente essendo il piano $e_1 x_3 + e_5 x_4 + e_8 x_5 = 0$ ortogonale ai due $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, possiamo con una rotazione sulle x_3, x_4, x_5 che non altera la X_1 prenderlo come nuovo iperpiano coordinato $x_3 = 0$. Con ciò veniamo a trasformare il G_3 considerato in un altro simile dove è ancora $e_1 \neq 0$ ma $e_2 = e_5 = e_8 = 0$ e per le (γ^*) anche $e_4 = e_7 = 0$.

Si ritrova dunque il G_3 **3.**

(b_2) $k \neq 0, \varepsilon'$. Il sistema (δ) dà o $k = 2\varepsilon'$ o $e_1 = e_2 = e_4 = e_5 = 0$. In quest'ultima ipotesi sarebbe anche $e'_1 = e'_2 = e'_4 = e'_5 = 0$ talchè si avrebbe un G_3 della forma $(X_3 + k X_6, X_7, X_8)$ e dovrebbe essere $k = 0$, contro l'ipotesi. Il valore $k = 2\varepsilon'$ poi è senz'altro da escludere se vogliamo limitarci a valori di k inferiori in valore assoluto all'unità.

2.ª IPOTESI, $\mu = k\varepsilon$. — Possiamo supporre senz'altro $k \neq \varepsilon'$ altrimenti si ricadrebbe nella prima ipotesi $\mu = \pm 1$. È dunque $e_7 = e_8 = e'_7 = e'_8 = 0$. Il sistema (δ) poi diviene:

$$2k e_4 + e_1 = 0 \qquad 2k e_5 + e_2 = 0$$

$$2k e_1 + e_4 = 0 \qquad 2k e_4 + e_5 = 0$$

e fornisce quindi o $k = \dfrac{\varepsilon'}{2}$ ovvero $e_1 = e_2 = e_4 = e_5 = 0$.

Quest'ultima ipotesi, portando anche $e'_1 = e'_2 = e'_4 = e'_5 = 0$, condurrebbe ad un G_3 della forma $(X_3 + k X_6, X_9, X_{10})$ che non può sussistere (essendo $(X_9 X_{10}) = -X_6$) se non per $k = \infty$, e per questo valore poi si ottiene di nuovo il gruppo delle rotazioni di S_3.

Per $k = \dfrac{\varepsilon'}{2}$ si ha invece:

$$e_4 = -\varepsilon' e_1 , \quad e_5 = -\varepsilon' e_2 , \quad e'_9 = \varepsilon e_{10} , \quad e'_{10} = -\varepsilon e_9$$

e dalle (α):

$$e'_1 = \varepsilon\varepsilon' e_2 , \quad e'_2 = -\varepsilon\varepsilon' e_1 , \quad e'_4 = -\varepsilon e_2 , \quad e'_5 = \varepsilon e_1 .$$

Questi valori introdotti nelle (γ) forniscono:

$$e_1^2 + e_2^2 = \frac{1}{4}\ ,\quad e_9^2 + e_{10}^2 = \frac{3}{4}\ ,$$

talchè si può porre:

$$e_1 = \frac{1}{2}\ \mathrm{sen}\,\varphi\ ,\quad e_2 = \frac{1}{2}\ \cos\varphi$$

$$e_9 = \frac{\sqrt{3}}{2}\ \mathrm{sen}\,\psi\ ,\quad e_{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ \cos\psi\,,$$

e si avrà:

$$Y_1 f = X_3 + \frac{\varepsilon'}{2}\ X_6$$

$$Y_2 f = \frac{1}{2}\ \mathrm{sen}\,\varphi\,(X_1 - \varepsilon' X_4) + \frac{1}{2}\ \cos\varphi\,(X_2 - \varepsilon' X_5) + \frac{\sqrt{3}}{2}\ (\mathrm{sen}\,\psi\ X_9 + \cos\psi\ X_{10})$$

$$Y_3 f = \frac{\varepsilon\varepsilon'}{2}\ \cos\varphi\,(X_1 - \varepsilon' X_4) - \frac{\varepsilon\varepsilon'}{2}\ \mathrm{sen}\,\varphi\,(X_2 - \varepsilon' X_5) + \frac{\sqrt{3}}{2}\ (\cos\psi\ X_9 - \mathrm{sen}\,\psi\ X_{10})\,.$$

Come subito si vede, posson prendersi come trasformazioni infinitesime generatrici del gruppo le

$$X_3 + \frac{\varepsilon'}{2} X_6\ ,\quad X_1 - \varepsilon' X_4 + \sqrt{3}\ (\mathrm{sen}\,\varphi\ X_{10} + \varepsilon' \cos\varphi\ X_9)$$

$$X_2 - \varepsilon' X_5 + \sqrt{3}\ (\cos\varphi\ X_{10} - \varepsilon'\ \mathrm{sen}\,\varphi\ X_9)$$

(indicando φ un nuovo parametro).

Queste trasformazioni infinitesime stabiliscono certo un tipo di G_3 distinto dai due già trovati in S_4. Infatti nei due tipi anzidetti la trasformazione infinitesima generica è del tipo X_3 o $X_3 + \varepsilon X_6$ rispettivamente [1]), mentre nel G_3 attuale compare la $X_3 + \frac{\varepsilon'}{2} X_6$, che è di tipo diverso.

---

[1]) Come subito si riconosce applicando le considerazioni fatte in generale sulla riduzione di una rotazione infinitesima alla forma tipica.

Resta solo a vedere se il segno ε' e il parametro φ siano essenziali. Per un'osservazione già fatta appartenendo le $X_3+\frac{1}{2}X_6$, $X_3-\frac{1}{2}X_6$ ad uno stesso tipo in S_5, possiamo supporre senz'altro $\varepsilon'=-1$, vale a dire porre:

$$Y_1f = X_3 - \frac{1}{2}X_6 \ , \quad Y_2f = X_1 + X_4 + \sqrt{3}\,(\operatorname{sen}\varphi\, X_{10} - \cos\varphi\, X_9)$$

$$Y_3f = X_2 + X_5 + \sqrt{3}\,(\cos\varphi\, X_{10} + \operatorname{sen}\varphi\, X_9)\ .$$

Si può osservare ora in primo luogo che come nei due precedenti tipi di G_3 anche in questo: *Tutte le trasformazioni infinitesime del gruppo appartengono allo stesso tipo.* Basta per questo mostrare che nella trasformazione infinitesima tipica $Z_1f=k_1X_3+k_2X_6$ corrispondente alla trasformazione infinitesima generica del gruppo $Z_2f=\mu_1\,Y_1f+\mu_2\,Y_2f+\mu_3\,Y_3f$ è costantemente $|k_1|=2\,|k_2|$. E infatti, secondo il metodo generale per la determinazione del tipo di una trasformazione infinitesima, detti $D(\lambda)$, $\Delta(\lambda)$ i primi membri delle equazioni caratteristiche delle Z_1, Z_2, dall'identità $D(\lambda)=\Delta(\lambda)$ cioè:

$$\begin{vmatrix} -\lambda\,, & \mu_1\,, & -\mu_3\,, & -\mu_2\,, & 0 \\ -\mu_1\,, & -\lambda\,, & \mu_2\,, & -\mu_3\,, & 0 \\ \mu_3\,, & -\mu_2\,, & -\lambda\,, & \frac{\mu_1}{2}\,, & \sqrt{3}\,(\mu_3\operatorname{sen}\varphi-\mu_2\cos\varphi) \\ \mu_2\,, & \mu_3\,, & -\frac{\mu_1}{2}\,, & -\lambda\,, & \sqrt{3}\,(\mu_2\operatorname{sen}\varphi+\mu_3\cos\varphi) \\ 0\,, & 0\,, & \sqrt{3}\,(\mu_2\cos\varphi-\mu_3\operatorname{sen}\varphi)\,, & -\sqrt{3}\,(\mu_2\operatorname{sen}\varphi+\mu_3\cos\varphi)\,, & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda\,(\lambda^2+k_1^2)\,(\lambda^2+k_2^2)$$

si ricava:

$$k_1^2+k_2^2 = 5\left(\mu_2^2+\mu_3^2+\frac{\mu_1^2}{4}\right) = 5\,A$$

$$k_1^2\,k_2^2 = 4\left(\mu_2^2+\mu_3^2+\frac{\mu_1^2}{4}\right)^2 = 4\,A^2$$

dove A non può esser nulla, epperò come si diceva $|k_1|=2\,|k_2|$.

Per decidere ora se il parametro φ è essenziale, cerchiamo in generale le rotazioni che trasformano il gruppo Y_1, Y_2, Y_3 nel gruppo:

$$Y'_1 = X - \frac{1}{2} X_6 \ , \quad Y'_2 = X_1 + X_4 + \sqrt{3}\,(X_{10} \operatorname{sen} \psi - X_9 \cos \psi)$$

$$Y'_3 = X_2 + X_5 + \sqrt{3}\,(X_{10} \cos \psi + X_9 \operatorname{sen} \psi)$$

(dove ψ indica un altro valore del parametro φ), conservando la $X_3 - \frac{1}{2} X_6$. Le rotazioni che godono di quest'ultima proprietà sono tutte e sole le rotazioni della forma:

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} x_1 = (x'_1 \cos \alpha + x'_2 \operatorname{sen} \alpha) \\ x_2 = (-x'_1 \operatorname{sen} \alpha + x'_2 \cos \alpha)\,\varepsilon \\ x_3 = (x'_3 \cos \beta + x'_4 \operatorname{sen} \beta) \\ x_4 = (-x'_3 \operatorname{sen} \beta + x'_4 \cos \beta)\,\varepsilon \\ x_5 = \quad x'_5 . \end{cases}$$

Una tale rotazione deve trasformare le Y_1, Y_2, Y_3 in tre rotazioni della forma:

$$Z_1 = Y'_1 \ , \quad Z_2 = \lambda\, Y'_1 + \mu\, Y'_2 + \nu\, Y'_3 \ , \quad Z_3 = \rho\, Y'_1 + \sigma\, Y'_2 + \tau\, Y'_3$$

in modo che sia conservata la composizione del gruppo.

Dovrà esser quindi:

$$(Z_1 Z_2) = -\frac{1}{2} Z_3 \ , \quad (Z_2 Z_3) = -2 Z_1 \ , \quad (Z_3 Z_1) = -\frac{1}{2} Z_2$$

da cui subito:

$$\lambda = \rho = 0 \ , \quad \sigma = -\nu \ , \quad \tau = \mu \ , \quad \mu^2 + \nu^2 = 1 .$$

Posto dunque:

$$\mu = \cos \omega \quad , \quad \nu = \operatorname{sen} \omega$$

sarà:

$$Z_2 = \cos \omega\, Y'_2 + \operatorname{sen} \omega\, Y'_3 \ , \quad Z_3 = -\operatorname{sen} \omega\, Y'_2 + \cos \omega\, Y'_3$$

Questo è il modo più generale di ottenere l'isomorfismo oloedrico colle condizioni poste. Per stabilire allora se si può con una rotazione (α) trasformare il gruppo (Y_1, Y_2, Y_3) in (Y'_1, Y'_2, Y'_3) trasformiamo effettivamente le $Y_2 Y_3$ colla (α) e identifichiamo le espressioni che ne risultano colle Z_2, Z_3.

Si ottengono in tal modo le relazioni:

$$\begin{aligned} \varepsilon.\cos(\alpha+\beta) &= \cos\omega \\ \varepsilon \operatorname{sen}(\alpha+\beta) &= \operatorname{sen}\omega \\ \operatorname{sen}(\varphi\varepsilon-\beta) &= \operatorname{sen}(\omega+\psi) \\ \cos(\varphi\varepsilon-\beta) &= \cos(\omega+\psi) \end{aligned}$$

che forniscono i valori più generali di α e β per cui la rotazione (α) trasforma il primo G_3 nel secondo, conservando la $X_3 - \frac{1}{2} X_6$. In particolare si vede che prendendo $\omega = 0$, $\beta = \varepsilon\varphi$, $\alpha = -\varepsilon\varphi$ può sempre rendersi $\psi = 0$.

Si conclude dunque che tutti i G_3 (1) sono simili all'unico:

5 $$\left(X_3 - \frac{1}{2} X_6 \ , \ X_1 + X_4 + \sqrt{3} X_{10} \ , \ X_2 + X_5 - \sqrt{3} X_9\right)$$

appartenente ad S_5.

d) Gruppi a 4 parametri. — Ci serviamo al solito della proprietà che ogni G_4 reale contiene dei G_3 reali.

Supponendo dapprimo che questo G_3 sia del tipo X_1, X_2, X_3 potremo porre:

$$Y_1 = X_1 \ , \ Y_2 = X_2 \ , \ Y_3 = X_3 \ , \ Y_4 = e_4 X_4 + e_5 X_5 + \ldots + e_{10} X_{10} .$$

Dalle tre relazioni di composizione che legano la Y_4 si ottiene:

$$\begin{cases} e_6 = \mu\, e_5 \\ -e_5 = \mu\, e_6 \end{cases} \begin{cases} -e_8 = \mu\, e_9 \\ e_9 = \mu\, e_8 \end{cases} \begin{cases} -e_6 = \mu'\, e_4 \\ e_4 = \mu'\, e_6 \end{cases} \begin{cases} -e_9 = \mu'\, e_7 \\ e_7 = \mu'\, e_9 \end{cases} \begin{cases} -e_4 = \mu''\, e_5 \\ e_5 = \mu''\, e_4 \end{cases} \begin{cases} -e_7 = \mu''\, e_8 \\ e_8 = \mu''\, e_7 \end{cases}$$

da cui per la realità di μ, μ', μ'' segue $e_4 = e_5 = \ldots = e_9 = 0$.

Resta quindi $Y_4 = X_{10}$, che essendo permutabile colle X_1, X_2, X_3 dà effettivamente un G_4:

6 $$(X_1 \,,\; X_2 \,,\; X_3 \,,\; X_{10})$$

appartenente ad S_5, coll'ultima trasformazione infinitesima eccezionale nel gruppo.

Similmente in corrispondenza al G_3 **4** potremo porre:

$$Y_1 = X_1 + X_4 \,,\quad Y_2 = X_2 + X_5 \,,\quad Y_3 = X_3 + X_6$$

$$Y_4 = e_4 X_4 + e_5 X_5 + \dots + e_{10} X_{10} .$$

Avendosi:

$$(Y_1 Y_2) = -e_5 Y_4 + e_6 Y_2 + e_9 X_8 - e_8 X_9 + e_{10} X_7 - e_7 X_{10} ,$$

dev' essere:

$$\begin{cases} e_9 = \mu\, e_8 \\ -e_8 = \mu\, e_9 \end{cases} \qquad \begin{cases} e_{10} = \mu\, e_7 \\ -e_7 = \mu\, e_{10} \end{cases}$$

cioè, per la realità di μ, $e_7 = e_8 = e_9 = e_{10} = 0$. Si ritrova dunque il tipo di G_4 appartenente ad S_4:

7 $$(X_1 + X_2 \,,\; X_2 + X_3 \,,\; X_3 \,,\; X_6).$$

Infine in corrispondenza al G_3 **4**, porremo:

$$\begin{cases} Y_1 = X_3 - \dfrac{1}{2} X_6 \\ Y_2 = X_1 + X_4 + \sqrt{3}\, X_{10} \\ Y_3 = X_2 + X_5 - \sqrt{3}\, X_9 \\ Y_4 = e_4 X_4 + e_5 X_5 + \dots + e_{10} X_{10} . \end{cases}$$

Si ha:

$$(Y_1\, Y_4) = -e_4\, X_5 + e_5\, X_4 - e_7\, X_8 + e_8\, X_7 + \frac{1}{2}\,(e_4\, X_2 - e_5\, X_1 + e_9\, X_{10} - e_{10}\, X_9)\,.$$

Poichè in questa non compare la X_3, così sarà:

$$(Y_1\, Y_4) = \mu\, Y_2 + \nu\, Y_3 + \rho\, Y_4\,;$$

si hanno cioè le relazioni:

$$\mu = -\frac{1}{2}\, e_5 \;,\quad \nu = \frac{1}{2}\, e_4 \;,\quad \mu + \rho\, e_4 = e_5 \;,\quad \nu + \rho\, e_5 = -e_4 \;,\quad \rho\, e_6 = 0$$

$$\rho\, e_7 = e_8 \;,\quad \rho\, e_8 = -e_7 \;\text{—}\; \nu\sqrt{3} + \rho\, e_9 = -\frac{1}{2}\, e_{10} \;,\quad \mu\sqrt{3} + \rho\, e_{10} = \frac{1}{2}\, e_9\,.$$

Per la realità di ρ si ha subito $e_7 = e_8 = 0$. L'equazione per e_6 dà poi o $e_6 = 0$ o $\rho = 0$. In quest'ultima ipotesi è $\mu = e_5$, $\nu = -e_4$ che confrontate colle due prime danno $\mu = \nu = e_4 = e_5 = 0$, dopo di che per le ultime due anche $e_9 = e_{10} = 0$. Si ha quindi $Y_4 = X_6$ che dà luogo effettivamente al G_4:

8 $$(X_1 + X_4 + \sqrt{3}\, X_{10} \;,\; X_2 + X_5 - \sqrt{3}\, X_9 \;,\; X_3 \;,\; X_6)$$

appartenente ad S_5. L'altra ipotesi $e_6 = 0$ non conduce a G_4 reali.

Rimangono così determinati tutti i gruppi di G_1, G_2, G_3, G_4 di rotazioni in S_5

Pei gruppi di rotazioni con più di quattro parametri la ricerca è più difficile per la mancanza di teoremi sulla composizione dei gruppi reali. Teoricamente però basta in ogni caso la discussione delle relazioni di composizione.

Più facile è dimostrare *teoremi di non esistenza*. Così per es. si riconosce che

Non esistono in S_5 *dei* G_5 *di rotazioni reali con sottogruppi a due o più parametri, non esistono gruppi contenenti il* G_6 *delle* *rotazioni di* S_4. *Non esistono gruppi di rotazioni reali con 9 parametri* [1]) *ecc.*

In corrispondenza agli **8** tipi determinati di gruppi di rotazioni sarebbe facile costruire i gruppi *prolungati* con traslazioni infinitesime e *ampliati* colla similitudine infinitesima $X_{11}f$. — Omettiamo questa ricerca perchè non potrebbe riuscire completa e non richiede procedimenti diversi da quelli che hanno servito per S_3 ed S_4.

NOTA. — Continuando le ricerche su questi gruppi di rotazioni di S_5 con più di 4 parametri, ho potuto stabilire che non esistono nemmeno gruppi reali con 8 parametri. — La ricerca rimane dunque limitata ai gruppi con 5, 6 e 7 parametri.

---

[1]) Dimostrazione analoga a quella che ha servito per dimostrare la non esistenza di G_5 reali di rotazioni in S_4.