ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ANTONIO ROITI

Sul movimento dei liquidi

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 1re série, tome 1 (1871), p. 193-240

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1871_1_1__193_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUL MOVIMENTO DEI LIQUIDI

Le equazioni del movimento dei fluidi, nelle quali è tenuto conto degli attriti, furono stabilite tempo addietro da NAVIER (1), da POISSON (2), da STOKES (3) ed ultimamente anche da O. E. MEYER (4) e da STEFAN (5), e da tutti, sebbene con ipotesi diverse, furono trovate identiche, almeno per quanto riguarda i liquidi. Ma i casi sperimentali che finora si sono trattati, deducendone la teoria completa da quelle equazioni generali, sono ben pochi.

COULOMB (6) sospese un disco ad un filo metallico e lo fece oscillare nel proprio piano, attorno al proprio centro, prima nell'aria e poi nell'acqua. Dalla diminuzione di velocità ne dedusse la resistenza dovuta all'attrito. Più tardi MORITZ (7) ripetè queste esperienze principalmente per determinare come vi influisca la temperatura.

In questo modo si può misurare l'insieme della resistenza; ma quando si voglia riferirla all'attrito dei singoli strati del liquido, o dedurla dalle equazioni generali, il calcolo necessario è molto complicato per sè ed anche perchè bisogna tener conto della forma del vaso. Tuttavia un calcolo simile fu eseguito da HELMHOLTZ (8), nell'ipotesi di velocità

(1) Mémoires de l'Académie des sciences. VI. 1823.

(2) Journal de l'école polytéchnique. Cahier 20. XIII. 1831.

(3) Transactions of the Cambridge phylosophical society. VIII. 1849.

(4) Crelle' s Journal. LIX. 1861.

(5) Wiener Berichte. XLVI. 2.

(6) Mémoires de l'Institut national. III.

(7) Poggendorff' s Annalen. LXX.

(8) Wiener Berichte. XL. 1860.

piccolissime, pel caso di una sfera cava riempita di liquido, che oscillava attorno ad un suo diametro; e le esperienze relative furono istituite da PIOTROWSKI.

Il caso del disco studiato da COULOMB fu poi ripreso da O. E. MEYER, e fu trattato molto diffusamente tanto dal lato matematico (1), quanto da quello della esperienza (2), ma sempre nell'ipotesi di velocità piccolissime.

POISEUILLE (3) ed HAGEN (4), e dopo di loro molti altri, seguirono un altro metodo sperimentale che consiste nel misurare la quantità di liquido che in un dato tempo sgorga da un tubo orizzontale sotto pressione costante. Da queste esperienze POISEUILLE dedusse le sue leggi sullo scolo dei liquidi, che sono registrate nei trattati di fisica; ma le riscontrò vere soltanto per tubi sottilissimi ed aventi lunghezze superiori a certi limiti. Per questo caso l' integrazione delle equazioni differenziali fu eseguita da STOKES ed anche da HELMHOLTZ nell'ipotesi del movimento rettilineo ed uniforme, e diede risultati conformi a quelli ottenuti empiricamente da POISEUILLE.

ED. HAGENBACH (5) è ritornato sul soggetto: ha dedotto col calcolo la formola empirica di POISEUILLE pei tubi capillari, ed ha poi tentato di spiegare come pei tubi più ampi quella formola non valga, mettendo in conto una *resistenza* ch'egli chiama *di scuotimento,* e che dipenderebbe dalla natura e dal diametro del tubo e sarebbe proporzionale al quadrato della velocità.

Con tutti questi lavori e molti altri affatto simili si è determinata la cosiddetta *costante di viscosità,* o di *attrito interno,* la quale ha, secondo O. E. MEYER, il seguente significato fisico.

(1) Crelle's Journal. LIX.
(2) Poggendorff' s Annalen. CXIII.
(3) Mémoires des savants étrangers. IX. 1846.
(4) Pogg. Ann. XLVI. — Abhandl. d. Berliner Akad. 1854.
(5) Poggendorff' s Annalen. CIX. 1860.

Sopra un piano orizzontale si muova una massa liquida avente per altezza l'unità lineare, e si muova in guisa che tutte le particelle di uno stesso strato orizzontale abbiano la stessa velocità, che lo strato più basso stia fermo e che il più alto percorra l'unità lineare nell'unità di tempo: l'attrito che si esercita fra due strati contigui è la costante di attrito interno.

Ora se si rifletta con HELMHOLTZ che a priori si potrebbe attribuire a questa quantità uno qualunque degli infiniti valori positivi, reca sorpresa il vedere che i numeri ottenuti per essa da esperienze così diverse e da diversi sperimentatori sieno, almeno per l'acqua, qual più qual meno concordanti.

Ma le equazioni generali non furono integrate e corroborate più direttamente dall'esperienza che nella verificazione, entro certi limiti, delle leggi di POISEUILLE e in un confronto di O. E. MEYER che dà un errore $< \frac{1}{40}$ della quantità osservata.

Non sarà perciò privo di interesse il nuovo caso che ho preso ad indagare, come oggetto di studio.

Si tratta sempre del movimento di un liquido entro un tubo cilindrico: ma del movimento *vario,* qual è quello di una colonna liquida terminata che obbedendo alla gravità scende entro un tubo, posto verticalmente. Invece poi di misurare la quantità di liquido che passa in un dato tempo per una sezione, si viene a misurare direttamente lo spazio percorso da una particella nei tempi successivi: anzi si viene ad ottenere una curva continua che ha per ascisse i tempi e per ordinate gli spazi percorsi.

L'integrazione delle equazioni generali fu da me eseguita collo stesso metodo che servì al Prof. BETTI [1] per determinare la temperatura di un cilindro. L'*unica* approssimazione

[1] « Alcune determinazioni delle temperature variabili di un cilindro ». Pisa, Tip. Nistri 1868.

a cui ebbi ricorso fu di considerare il movimento rettilineo; mentre tanto HELMHOLTZ per la sfera cava, quanto MEYER pel disco ammisero le velocità così piccole da poterne trascurare le seconde potenze di fronte alle prime. Di più MEYER suppose il movimento simmetrico attorno all'asse di oscillazione, suppose la velocità angolare costante sopra uno stesso piano orizzontale; insomma considerò le particelle liquide come animate dalla sola componente angolare, e questa come funzione dalla sola distanza dal disco.

Il metodo sperimentale da me impiegato consente una esattezza molto maggiore di quella fin qui raggiunta. Infatti MEYER dovette considerare il vaso come infinito ed il disco infinitamente sottile, ma poi per avere miglior accordo fece per quest'ultima circostanza una correzione ai calcoli; un'altra correzione gli fu necessaria per tener conto della resistenza interna del filo (1): e d'altro canto col metodo di COULOMB riesce indispensabile una determinazione preliminare del momento di elasticità del filo, e del momento d'inerzia del sistema.

Col mio metodo si può contare sul mezzo millimetro, e quindi si ha la certezza che l'errore *relativo* è $< \frac{1}{400}$, e può riuscire anche molto minore se si considerano, come è possibile, spazi maggiori di 200.^{mm}

L'unica ipotesi che il movimento sia rettilineo mi pare più plausibile che nel caso di POISEUILLE, perchè il liquido non deve passare nel tubo da recipienti ampi: ed infatti trovo confermate le due prime leggi di POISEUILLE, che danno una relazione fra la lunghezza del tubo, la pressione e la quantità d'acqua, anche per un tubo del diametro di 4,^{mm}11, mentre col suo metodo non si possono verificare che per diametri $<$0,^{mm}7; dovendo altrimenti ricorrere a lunghezze impossi-

(1) WILH. WEBER. Poggendorff's Annalen. XXIV. — E. WARBURG. Berl. Monatsber. Juli 1869. N. Cimento T. XXVI. p. 255.

bili. Non ho potuto verificare la terza legge che riguarda i diametri: ma intendo di occuparmene in seguito.

D'altra parte ho trovato che la equazione data dalla teoria fra lo spazio ed il tempo, non può in verun modo rappresentare la curva sperimentale.

Sarei dunque indotto a concludere che, se anche le equazioni generali dell'idrodinamica sono conformi alla realtà per velocità piccolissime, come d'altronde si presume a priori, esse sono in difetto quando è rapido il movimento che anima le particelle liquide. Ma prima di pronunciare assolutamente un tale giudizio, mi riservo di proseguire questi miei studi.

I.

Teoria.

§. 1. Le influenze che si esercitano sul movimento di una colonna liquida terminata, quando scende entro un cannello verticale aperto ai due capi, si possono ridurre alle seguenti:

1. — Gravità;

2. — Viscosità interna del liquido e attrito fra esso e la parete solida del tubo;

3. — Differenza della pressione atmosferica sulle due superficie che terminano la colonna liquida;

4. — Azione capillare di queste due superficie;

5. — Quantità di movimento ceduta all'aria, ed attriti dell'aria medesima.

Nel calcolo seguente è tenuto conto soltanto delle due prime azioni: la terza è affatto trascurabile, quando si considera una colonna liquida che non arriva al metro in lunghezza: quanto alle due ultime, converrà fare le esperienze in guisa da eliminarle.

§. 2. Nell'ipotesi che il movimento delle particelle liquide sia rettilineo, e prendendo l'asse delle x nella direzione del movimento, le equazioni generali dell'idrodinamica diventano:

$$g-\frac{1}{h}\frac{dp}{dx}=\frac{du}{dt}+u\frac{du}{dx}-k^2\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right)$$

$$-\frac{1}{h}\frac{dp}{dy}=-\frac{1}{h}\frac{dp}{dz}=0,$$

e quella dell'incompressibilità si riduce a:

$$\frac{du}{dx}=0,$$

dove g è l'accelerazione dovuta alla gravità, h è la densità del liquido, p ed u sono la pressione e la velocità nel punto (x,y,z) al tempo t, k^2 è il coefficiente di viscosità diviso per la densità del liquido.

Dunque p sarà funzione della sola x e del tempo, u sarà funzione di y, z, t, che soddisfa all'equazione:

$$g-\frac{1}{h}\frac{dp}{dx}=\frac{du}{dt}-k^2\left(\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right).$$

Se il liquido si muove in un cilindro circolare, il cui asse sia verticale, il moto dev' essere simmetrico intorno all'asse e perciò ponendo $r^2=y^2+z^2$, l'equazione precedente può scriversi:

$$g-\frac{1}{h}\frac{dp}{dx}=\frac{du}{dt}-k^2\left(\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}\right);$$

la quale, avendo il primo membro funzione della x ed il secondo della r, ed essendo x ed r indipendenti, sarà soddisfatta assieme alle due:

$$\text{(I.)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad g-\frac{1}{h}\frac{dp}{dx}=\varphi(t)$$

$$\frac{du}{dt}-k^2\left(\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}\right)=\varphi(t),$$

ove $\varphi(t)$ è una funzione della sola t.

Per determinare $\varphi(t)$ s'integri la prima fra x_0 ed x_σ, ordinate dei vertici dei due menischi, ove si esercita la sola pressione atmosferica p_0, e si otterrà:

$$0 = [g - \varphi(t)](x_\sigma - x_0),$$

per cui:

$$\varphi(t) = g.$$

Se si considera il movimento del cilindro liquido che ha per basi le sezioni del tubo tangenti ai vertici dei menischi, il problema è dunque ridotto alla ricerca della funzione u che soddisfi alle seguenti condizioni:

1) . . . In tutto il cerchio sezione del cilindro ed in tutto il tempo che si considera dall'origine del movimento, sia:

$$\frac{du}{dt} - k^2\left(\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr}\right) = g.$$

2) . . . Sul contorno di questo cerchio di raggio R sia:

$$\left(\lambda\frac{du}{dr} + u\right)_{r=R} = 0,$$

ove λ è una costante che dipende dalla natura del liquido e della parete solida, ed è precisamente $\lambda = \frac{k^2}{hE}$ essendo E la *costante di attrito esterno* (1).

3) . . . Che sia $u=0$ per $t=0$, cominciando a contare il tempo dall'istante in cui si abbandona la colonna liquida.

(1) O. E. Meyer, Ueber die Reibung der Flüssigkeiten, Giornale di Crelle, Vol. 59 pag. 239.

Con queste condizioni la funzione è completamente determinata [1].

Per trovarne l'espressione analitica si moltiplichi la 1) per $w\,ds\,dt$, essendo w una funzione continua e monodroma di r e di t, che diviene infinita per il solo sistema di valori $(r'\ t')$, e s'integri a tutta la sezione s e a tutto il tempo da o a $t'-\varepsilon$. Si avrà:

$$\int_s (wu)_{t'-\varepsilon} ds - \int_s w_0 u_0 ds + k^2 \int_0^{t'-\varepsilon} dt \int_c \left(u \frac{dw}{dr} - w \frac{du}{dr} \right) dc -$$

$$- \int_0^{t'-\varepsilon} dt \int_s u \left\{ \frac{dw}{dt} + k^2 \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right\} ds = g \int_0^{t'-\varepsilon} dt \int_s w\,ds,$$

dove il terzo integrale va esteso a tutto il contorno c della sezione.

Prendendo w in guisa che sia:

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad \frac{dw}{dt} + k^2 \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = 0$$

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad \left(\lambda \frac{dw}{dr} + w \right)_{r=R} = 0,$$

l'equazione precedente sarà ridotta a:

$$(\alpha) \quad \ldots\ldots \quad \int_s (w\,u)_{t'-\varepsilon} ds = g \int_0^{t'-\varepsilon} dt \int_s w\,ds.$$

[1] E. Betti « Sopra la determinazione delle temperature nei corpi solidi omogenei ». Volumi dell'Acc. dei XL. Serie III. T. I. P. II.

La w soddisfi inoltre alla condizione che:
(3) . . . col diminuire di ε converga a zero per qualunque valore di r, fuori che per r compreso fra $r'-\rho$ ed $r'+\rho$ nel qual intervallo sia uguale ad $\frac{1}{\rho}$; e sarà:

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_S (uw)_{t'-\varepsilon}\,ds=\int_0^{2\pi}d\theta\int_{r'-\rho}^{r'+\rho}u\frac{1}{\rho}\,r\,dr$$

e prendendo ρ piccolissimo, u si potrà considerare come costante durante l'integrazione ed uguale al valore u' che assume alla distanza r' dal centro. Si avrà quindi:

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_S (wu)_{t'-\varepsilon}\,ds=2\pi\,u'\lim_{\rho=0}\int_{r'-\rho}^{r'+\rho}\frac{r\,dr}{\rho}=4\pi r'u'.$$

Per cui la (α) diventa:

$$(\beta).\ .\ .\ .\ .\ .\ 2r'u'=g\lim_{\varepsilon=0}\int_0^{t'-\varepsilon}dt\int_0^R wr\,dr.$$

Cerchiamo ora l'espressione di w. Soddisfa alla (1) se si prende della forma:

$$\sum_0^\infty c_n I_0(\mu_n r)e^{-k^2\mu_n^2(t'-t)}$$

ove $I_m(z)$ è la funzione di Bessel che soddisfa all'equazione:

$$\frac{d^2 I_m}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dI_m}{dz}+\left(1-\frac{m^2}{z^2}\right)I_m=0$$

e che si mantiene finita per tutti i valori finiti della variabile.

Soddisfa anche alla (2) se per le μ_n si prendono le radici tutte reali ed in numero infinito dell' equazione:

$$(4)\ \ldots\ldots\ \left\{\lambda\frac{dI_0(\mu_n r)}{dr}+I_0(\mu_n r)\right\}_{r=R}=0.$$

Si determinano poi i coefficienti c_n in modo che la serie:

$$(\gamma)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ w'=\sum c_n I_0(\mu_n r),$$

che corrisponde al valore t' di t, sia $=0$ per ogni valore di r fuori che tra $r'-\rho$ ed $r'+\rho$ nel qual intervallo sia $=\frac{1}{\rho}$; ed allora la w soddisfarà alla condizione (3). A tal fine si osservi che:

$$\int_0^R rI_0(\mu_m r)I_0(\mu_n r)dr=0 \qquad \text{per } m \lessgtr n$$

e che:

$$\int_0^R rI_0^2(\mu_n r)dr=\frac{R^2 I_0^2(\mu_n R)}{2}\left(1+\frac{1}{\lambda^2\mu_n^2}\right)$$

e si otterrà dalla (γ):

$$c_n = \frac{2\lambda^2\mu_n^2 \int_0^R r w' I_0(\mu_n r) dr}{R^2 I_0^2(\mu_n R)\,(1+\lambda^2\mu_n^2)}$$

$$= \frac{2\lambda^2\mu_n^2}{R^2 I_0^2(\mu_n R)(1+\lambda^2\mu_n^2)} \lim \int_{r'-\rho}^{r'+\rho} \frac{I_0(\mu_n r) r dr}{\rho}$$

$$= \frac{4\lambda^2\mu_n^2 r' I_0(\mu_n r')}{R^2 I_0^2(\mu_n R)(1+\lambda^2\mu_n^2)}.$$

Per cui la funzione:

$$w = \frac{4\lambda^2 r'}{R^2} \sum \frac{\mu_n^2 I_0(\mu_n r) I_0(\mu_n r')\, e^{-k^2\mu_n^2(t'-t)}}{I_0^2(\mu_n R)(1+\lambda^2\mu_n^2)}$$

soddisfa a tutte le condizioni poste; e sostituita nella (β), dà:

$$u' = g\frac{2\lambda^2}{R^2} \sum \frac{\mu_n^2 I_0(\mu_n r') \int_0^R I_0(\mu_n r)\, r\, dr}{I_0^2(\mu_n R)(1+\lambda^2\mu_n^2)} \lim \int_0^{t'-\varepsilon} e^{-k^2\mu_n^2(t'-t)}\, dt;$$

ma essendo:

$$\lim \int_0^{t'-\varepsilon} e^{-k^2\mu^2(t'-t)}\, dt = \frac{1-e^{-k^2\mu_n^2 t'}}{k^2\mu_n^2},$$

$$\int_0^R I_0(\mu_n r) r dr = \frac{R\, I_1(\mu_n R)}{\mu_n},$$

sarà, tralasciando gli apici:

$$\text{(II.)} \;.\;.\; u = g\frac{2\lambda^2}{k^2 R}\sum \frac{I_1(\mu_n R) I_0(\mu_n r)}{\mu_n I_0^2(\mu_n R)(1+\lambda^2\mu_n^2)}\left(1-e^{-k^2\mu_n^2 t}\right).$$

Da cui per avere la relazione fra lo spazio x ed il tempo t basterà integrare, e ponendo la condizione che per $t=o$ sia $x=o$ ed indicando con x_1 lo spazio percorso dalle particelle che si trovano sull'asse del cilindro, si giungerà finalmente alla formola:

$$\text{(III)} \;.\;.\;.\; x_1 = g\frac{2\lambda^2}{Rk^4}\sum_0^\infty \frac{I_1(\mu_n R)(k^2\mu_n^2 t + e^{-k^2\mu_n^2 t} - 1)}{\mu_n^3 I_0^2(\mu_n R)(1+\lambda^2\mu_n^2)}$$

ove le μ_n sono le infinite radici disposte per ordine crescente della equazione (4) la quale, osservando che:

$$\frac{dI_0(\mu r)}{dr} = -\mu I_1(\mu r),$$

si riduce alla seguente:

$$(5) \;.\;.\;.\;.\; \lambda\mu I_1(\mu R) = I_0(\mu R).$$

§. 3. Per procedere ai calcoli numerici necessari pel confronto della teoria coll' esperienza, bisogna distinguere il caso in cui il liquido bagna il tubo da quello in cui non lo bagna. Nel primo caso, quando l' aderenza del liquido alla parete sia perfetta, è evidente che lo strato esterno vi rimane costantemente attaccato e che quindi si deve considerare infinito l'attrito fra di esso e la parete solida, ossia si deve porre $\lambda = 0$. In tal caso dunque la (II.) assume la forma:

$$\text{(IV.)} \quad \ldots \quad u = \frac{2g}{k^2 R} \sum_{0}^{\infty} \frac{1 - e^{-k^2 \mu_n^2 t}}{\mu_n^3 I_1(\mu_n R)} I_0(\mu_n r)$$

e la (III.) diventa:

$$\text{(V.)} \quad \ldots \quad x = 2gt \frac{R^2}{k^2} \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{z_n^3 I_1(z_n)} + 2g \frac{R^4}{k^4} \sum_{0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{k^2}{R^2} z_n^2 t} - 1}{z_n^5 I_1(z_n)}$$

dove con z_n sono indicate le radici dell'equazione.:

$$(6) \quad \ldots \ldots \quad I_0(z) = 0$$

a cui si riduce la (5) in questo caso.

Dalle tavole calcolate da Hansen e riprodotte da Lommel [1] ho tratto per interpolazione i seguenti valori:

$z_0 = 2{,}404.82$	$I_1(z_0) = +0{,}519.143$
$z_1 = 5{,}520.10$	$I_1(z_1) = -0{,}340.263$
$z_2 = 8{,}653.7$	$I_1(z_2) = +0{,}271.452$
$z_3 = 11{,}791.6$	$I_1(z_3) = -0{,}232.457$
$z_4 = 14{,}931.0$	$I_1(z_4) = +0{,}206.545$
$z_5 = 18{,}071.1$	$I_1(z_5) = -0{,}187.728.$

[1] E. Lommel, « Studien über die Bessel 'schen Functionen » Leipzig 1868.

E qui le tavole finiscono; ma si possono sommare le serie contenute nella (V.) anche senza calcolare altre radici della (6); poichè per z molto grande si ha:

$$I_0(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)\ ,\ I_1(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\operatorname{sen}\left(z-\frac{\pi}{4}\right),$$

e quindi a partire da quel termine pel quale la differenza risulti trascurabile, invece della serie, p. e:

$$(a)\ .\ .\ .\ .\ .\ \sum_{0}^{\infty}\frac{1}{z_n I_1(z_n)}$$

si può prendere il valore dell' altra:

$$(b)..\sqrt{2}\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{\sqrt{4m+3}}=4\sqrt{2}\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(8n+3)\sqrt{8n+7}\left(1+\sqrt{1+\frac{4}{8n+3}}\right)}$$
$$=4\sqrt{2}\sum_{0}^{\infty}v_n$$

per calcolare la quale ho avuto ricorso al metodo di Kummer [1].

Esso, com'è noto, consiste nel trovare una funzione p_n di n tale che sia $\lim\limits_{n=\infty} p_n v_n=0$ e l'espressione $q_n=p_n\frac{v_n}{v_{n+1}}-p_{n+1}$ tenda continuamente ad 1 al crescere di n; trovata questa funzione p_n, il valore del resto della serie a termini positivi $\sum v_n$ è compreso fra $v_n\,p_n$ e $\frac{v_n\,p_n}{q_n}$. Ora la funzione p_n si sa

[1] G. Novi « Algebra Superiore ». Firenze 1863, pag. 298.

sempre trovare quando si abbia lo sviluppo di $\frac{v_n}{v_{n+1}}$ per le potenze negative di n, che nel nostro caso è:

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = 1 + \frac{3}{2}\frac{1}{n} - \frac{9}{16}\frac{1}{n^2} + \frac{17}{128}\frac{1}{n^3} - \quad . \quad . \quad .$$

per cui risulta:

$$p_n = 2n + \frac{3}{4} + \frac{1}{16}\frac{1}{n} + \ldots$$

D' altro canto ho riscontrato che si può sostituire la (b) alla (a) a partire dal settimo termine, senza che l' errore influisca sulla prima cifra decimale di x, che è quanto richiedesi pel confronto coi risultati delle esperienze. Dunque per avere la somma della (a) basterà aggiungere ai suoi primi sei termini il resto della (b) costituito dai termini che seguono v_5 e lo stesso termine $v_5 \times 4\sqrt{2}$.

Questo resto è compreso fra $v_5 p_5 = 0{,}021.742$ e $\frac{v_5 p_5}{q_5} = 0{,}021.649$; e per essere:

$$\frac{1}{z_1 I_1(z_1)} = -0{,}532.40 \qquad \frac{1}{z_0 I_0(z_1)} = 0{,}801.00$$

$$\frac{1}{z_5 I_1(z_5)} = -0{,}364.82 \qquad \frac{1}{z_2 I_1(z_2)} = 0{,}425.70$$

$$\frac{1}{z_3 I_1(z_3)} = -0{,}294.77 \qquad \frac{1}{z_4 I_1(z_4)} = 0{,}324.26$$

$$-1{,}191.99 \qquad v_5 4\sqrt{2} = 0{,}018.18$$

$$v_5 p_5 4\sqrt{2} = 0{,}122.99$$

$$+1{,}692.11$$

$$-1{,}191.99$$

si ricava approssimativamente $\sum_0^\infty \frac{1}{z_n I_1(z_n)} = 0{,}500.12$

e con tutto rigore:

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{z_n I_1(z_n)} = \frac{1}{2}$$

appunto come risulta dal verificare se la (IV.) soddisfa alla condizione 1).

In modo analogo ho trovato:

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{z_n^3 I_1(z_n)} = \frac{1}{8}, \quad \sum_{0}^{\infty} \frac{1}{z_n^5 I_1(z_n)} = 0{,}023.\ 438.$$

Dunque la (V.) diventa:

$$\text{(VI.)} \quad . \quad . \quad . \quad x = \frac{R^2 g t}{k^2\ 4} - \frac{R^4}{k^4} 4g \sum_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen h}\left(\frac{k^2 z_n^2 t}{R^2\ 2}\right) e^{-\frac{k^2}{R^2}\frac{z_n^2 t}{2}}}{z_n^5 I_1(z_n)}$$

e questa formola dà la legge della caduta del liquido entro un tubo verticale che venga da lui bagnato, coll' unica ipotesi che la componente orizzontale della velocità sia trascurabile.

§. 4. Pel caso che il tubo non venga bagnato e che il liquido scivoli lungo la parete, pel caso cioè che λ abbia un valore finito, non si potrebbe ridurre in numeri la (III.) che con estrema difficoltà, dovendo introdurre in essa le radici della (5) che contiene il coefficiente letterale incognito λ. Ma pel caso particolare che l'attrito del liquido contro la parete sia minore della viscosità interna, il calcolo si può fare nel seguente modo.

Rammento che:

$$I_0(z)=\sum_m(-1)^m\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}}{(m!)^2}\ ,\quad I_1(z)=\frac{z}{2}\sum_m(-1)^m\ \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}}{(m!)\,(m+1)!}$$

ossia, arrestandosi ai primi termini:

$$I_0(\mu R)=1-\frac{\mu^2R^2}{4}\ ,\quad I_1(\mu R)=\frac{\mu R}{2}\ .$$

Allora la (5) diventa:

$$\lambda\mu=\frac{1-\frac{\mu^2R^2}{4}}{\frac{\mu R}{2}}\ ,\ \text{ossia}\ \ \mu^2=\frac{4}{R(2\lambda+R)}\ ,$$

da cui colla stessa approssimazione:

$$\lambda^2\mu^2=\frac{1-\frac{\mu^2R^2}{2}}{\frac{\mu^2R^2}{4}}=\frac{2\lambda-R}{R}$$

$$1+\lambda^2\mu^2=\frac{2\lambda}{R}\ ,\qquad I_0(\mu R)=\frac{2\lambda}{2\lambda+R}$$

$$\frac{2\,\lambda}{R\,k^2\mu^2\,I_0(\mu R)\,(1+\lambda^2\mu^2)}=\frac{R(2\lambda+R)^2}{2^3\,\lambda\,k^2}$$

$$\frac{2\,\lambda}{R\,k^4\mu^4\,I_0(\mu R)\,(1+\lambda^2\mu^2)}=\frac{R^2(2\lambda+R)^3}{2^5\,\lambda\,k^4}$$

e la (III.), che si può anche scrivere:

$$x=\frac{2g\lambda}{Rk^2}\,t\sum_n\frac{1}{\mu_n^2 I_0(\mu_n R)(1+\lambda^2\mu_n^2)}+\frac{2g\lambda}{Rk^4}\sum_n\frac{e^{-k^2\mu_n^2 t}-1}{\mu_n^4 I_0(\mu_n R)(1+\lambda^2\mu_n^2)},$$

si riduce a:

$$x=g\,\frac{R(2\lambda+R)^2}{2^3\lambda k^2}\,t+g\,\frac{R^2(2\lambda+R)^3}{2^5\lambda k^4}\left[e^{-\frac{4k^2t}{R(2\lambda+R)}}-1\right];$$

od ancora a:

$$\text{(VII.)}\ \ldots\ x=g\,\frac{R\lambda}{2k^2}\,t+g\,\frac{R^2\lambda^2}{(2k^2)^2}\left(e^{-\frac{2k^2}{R\lambda}t}-1\right)$$

se si osserva che trascurando anche $\frac{\mu^2R^2}{4}$, si può pure trascurare $\frac{R}{2\lambda}$ di fronte alla unità.

Qui si può avvertire che l'equazione (VII.) sarà tanto più prossima al vero quanto minore sarà la quantità trascurata $\frac{R}{2\lambda}$ e quindi, a parità delle altre circostanze, quanto sarà maggiore λ. Affinchè poi sia $\lambda>1$, dovrà essere $\frac{k^2}{\lambda}<k^2$, ossia l'attrito esterno minore, come si disse, della viscosità interna.

§. 5. Il Prof. Betti mi ha additato che si può giungere alla (VII.) per altra via, e che essa corrisponde al caso in cui l'accelerazione in ogni istante si supponga uguale su tutti i punti di una sezione o, in altre parole, che la colonna liquida scorra entro il tubo come uno stantuffo solido.

Infatti siano x_0 ed x_1 le coordinate degli estremi di un filetto e $x_1 - x_0 = X = cost.$ per qualunque r. Supponiamo uguali le velocità e le accelerazioni nei punti corrispondenti delle differenti sezioni. Moltiplichiamo la:

$$1) \ldots\ldots g - \frac{1}{h}\frac{dp}{dx} = \frac{du}{dt} - k^2\left(\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right)$$

per dx e integriamo tra x_0 e x_1. Avremo:

$$Xg = X\frac{du}{dt} - k^2X\left(\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right).$$

Moltiplichiamo per $dy\ dz$ e integriamo a tutta la sezione; avremo:

$$\pi g R^2 = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{du}{dt} r\, dr\, d\theta - k^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{du}{dr}\right)_R R\, d\theta$$

Ma $\frac{du}{dr} = -\frac{u}{\lambda}$ alla superficie, onde:

$$\pi g R^2 = 2\pi \int_0^R \frac{du}{dt} r\, dr + \frac{2\pi k^2 R}{\lambda} u.$$

Supponiamo l' accelerazione costante in una sezione, e avremo:

$$g = \frac{du}{dt} + \frac{2k^2}{\lambda R} u,$$

$$dt = \frac{du}{g - \frac{2k^2}{\lambda R} u}.$$

Integriamo fra $t = o$ e t, supponiamo $u = o$ per $t = o$, ed otterremo:

$$t = -\frac{\lambda R}{2k^2} \log \frac{g - \frac{2k^2}{\lambda R} u}{g}$$

$$g - \frac{2k^2}{\lambda R} u = g\, e^{-\frac{2k^2}{\lambda R} t}.$$

Integriamo nuovamente tra $t = o$ e t, supponiamo $x = o$ per $t = o$, ed otterremo:

$$gt - \frac{2k^2}{\lambda R} x = -g \frac{\lambda R}{2k^2} \left(e^{-\frac{2k^2}{\lambda R} t} - 1 \right)$$

(VII.) . . . $$x = g \frac{\lambda R}{2k^2} t + g \frac{\lambda^2 R^2}{(2k^2)^2} \left(e^{-\frac{2k^2 t}{\lambda R}} - 1 \right).$$

II.

Esperienze (*).

§. 6. Il menisco superiore di una colonna di acqua in un cannello di vetro, che sia posto entro l'apparecchio d'ingrandimento di Duboscq, produce sopra un diaframma collocato a distanza conveniente un'immagine quale è disegnata nella *fig.* 1.ª *(Tav. I.)* Ma, pel loro diverso potere refrangente, non si possono mettere contemporaneamente in fuoco le due parti del tubo che sono separate dal menisco. Supponiamo dunque che sia ben netta l'immagine prodotta dall'acqua, ed allora la striscia corrispondente alla parte del tubo ov'è aria, sarà meno illuminata ed avrà contorni più sfumati.

Ora si disponga davanti al diaframma una lastra opaca, ed in essa sia praticata una piccola fenditura (larga un millimetro circa), in modo che coincida appunto coll'immagine dell'asse del tubo. Sul diaframma si vedrà un filo illuminato, interrotto da un tratto oscuro corrispondente al menisco, e la parte superiore dell'imagine *(acqua)* sarà più intensa dell'inferiore.

Se finalmente si fa muovere il diaframma con una legge conosciuta, mentre il menisco scende pel tubo con una legge sconosciuta; sul diaframma si disegnerà successivamente quell'interruzione oscura in corrispondenza alle varie altezze in cui successivamente si troverà il menisco entro il tubo. Se il diaframma è impressionabile alla luce, si potrà così ottenere una curva dalla quale dedurre la legge della caduta del liquido.

Tale è, in succinto, il metodo da me adoperato, simile in parte a quello del Prof. Felici per disegnare la superficie

(*) Eseguite nel Gabinetto di Fisica della R. Università di Pisa.

di capillarità dell' acqua che si trova in contatto di una parete piana [1].

Passo ora ai particolari.

§. 7. Se si immerge una estremità *A* di un cannello nell'acqua, e si aspira all'altra estremità *B* finchè l'acqua sia salita ad una certa altezza, e poi si estrae dal liquido la estremità *A* tenendo chiusa la *B*, la colonna d'acqua, com' è noto, non cade, purchè il cannello non sia troppo ampio. Anzi se in tali condizioni si continua ad aspirare, quella colonna liquida può condursi in un punto voluto del cannello, essendovi aria e sopra e sotto. Aperta repentinamente l'estremità *B*, il liquido scende.

Per aprire rapidamente senza che l' aria entri nel cannello da un foro minore della sua sezione, il che rallenterebbe nei primi istanti la corsa del liquido; e per aspirare gradatamente e condurre la colonna liquida ad un punto determinato, ho preso le seguenti disposizioni.

Ho introdotto e fissato con mastice a tenuta d'aria l'estremità *B*, *(fig 2.ª Tav. I.)* del cannello in una ghiera metallica alquanto più larga, aperta ai due capi ed avente da un lato una chiavetta che può metterla in comunicazione con un lungo tubo di gomma elastica, attraverso cui si possa aspirare. Contro l' orifizio superiore della ghiera è tenuto compresso da una molla un pezzo di lamiera cernierato in *C* e ricoperto sulla faccia inferiore da un pezzo di gomma elastica ottenuto dall' aprire uno di quei tubi rossi che ci vengono di Germania. Una leva, che fa forza in *D*, serve ad aprire repentinamente il tubo.

§. 8. Tubo e molla e leva sono raccomandati ad una robusta stanga, che appoggia sopra due mensole murate

[1] Nuovo Cimento, T. XXIII—IV. 1866.

negli stipiti della finestra, ove è collocato il portaluce coll'apparecchio d'ingrandimento.

Ed affinchè il tubo possa centrarsi e disporsi esattamente verticale, sotto alla ghiera è aggiunta una lastra di metallo che può adattarsi stabilmente con viti sul pezzo di noce *E F*, il quale viene attraversato dal cannello, e mediante due fori *E*, *F*, posti e conformati come indica la figura, si può infilare in due viti saldate sulla lastra di ottone *G K*, e fissarvelo con due galletti. La lastra *G K* è poi stretta contro la stanga da due viti *I*, *I'*, e può scorrere orizzontalmente. La stanga può spostarsi girando sulle sue costole, mercè delle lastroline a cuneo che si pongono sulle mensole.

Così si possono imprimere al tubo tutti gli spostamenti necessari perchè riesca verticale, ed il suo asse incontri l'asse ottico dell'apparecchio d'ingrandimento.

§. 9. Raccomandato al muro ed assolutamente immobile è il tavolino sopra cui è collocato il diaframma e gli altri congegni che descriverò fra poco. — Intanto sarà bene che parli del diaframma impressionabile alla luce e del genere di movimento che gli ho dato affinchè potesse accogliere la curva della caduta.

Poteva attaccarlo ad un pendolo che oscillasse in un piano perpendicolare all'asse del cono di proiezione; e così avrei potuto calcolare il tempo decorso fra due posizioni successive del menisco. Ma sarebbe stato difficile mantenere sempre in uno stesso piano il diaframma che oscillava, sarebbe stato incomodo nel disegno ottenuto riferire tutti i punti della curva ad un punto lontano come avrebbe dovuto essere il centro di sospensione del pendolo, e d'altro canto la legge di oscillazione di cotal pendolo composto non è così semplice da prestarsi ad un calcolo spedito dei vari tempi decorsi.

Ho dunque rinunciato a tale idea e mi sono appigliato al partito di far ruotare il diaframma con moto uniforme attorno ad un punto dell'asse ottico, in guisa che rimanesse sempre

perpendicolare a questo asse. Ebbi quindi ricorso all'apparecchio di rotazione costruito dal Poggiali di Firenze, che serve al Prof. Felici a mostrare in lezione come il metallo del suono reso da una corda dipenda dalla sua legge di oscillazione (1). E con questo apparecchio feci alcuni tentativi prendendo per diaframma della carta preparata all'ioduro ammonico ed indicata nei trattati di fotografia come istantanea.

Tagliava la carta in dischi, e dopo averla sensibilizzata nel bagno di nitrato argentico, l'applicava sopra un disco di cartone che si poteva fissare al pernio dell'apparecchio.

Ma siffatti tentativi ebbero esito infelicissimo, perchè anche con una velocità moderata, sulla carta rimaneva appena una nebulosità che non poteva dare verun lume sull'andamento del fenomeno. E non mi studiai neppure di trovar mezzo per aumentare la sensibilità di quella carta, perchè mi si presentarono altri inconvenienti che rendevano questo metodo affatto inservibile. Il disco di cartone, per quanto si tenesse stretto fra due piani prima di adoperarlo, era sempre incurvato: la carta preparata non si poteva distendere senza rughe: e nell'asciugarsi avrebbe deformato l'immagine rimastavi quando era umida.

§. 10. Fui dunque costretto di ricorrere ad uno strato di collodione disteso sopra una lastra di vetro. Feci tagliare una lastra da specchio sottile in forma di quadrato col lato di circa 25 cent.; e con legno leggiero feci costruire una croce a braccia uguali, avente nel centro una ghiera metallica per fissarla sul pernio dell'apparecchio di ruotazione, ed avente a ciascuna delle quattro estremità un cuscinetto di gomma indurita (ebanite) per ricevere la lastra da specchio, ed un nottolino dello stesso materiale per tenervela premuta. Un pezzetto di metallo poteva scorrere lungo un braccio della

(1) Annali delle Università Toscane T. IX. — N. Cimento T. XXVI.

croce per portare il centro di gravità del sistema sull'asse di rotazione.

Quantunque la macchina, così caricata, non ruotasse che lentamente ed irregolarmente, pure feci alcune prove a questo modo, servendomi di collodione Laverdet, d'una soluzione di nitrato argentico al 10 per 100 per sensibilizzarlo, e per sviluppare l'immagine di una soluzione di solfato ferroso debolmente acido.

Una curva si otteneva, ma riusciva irregolare e troppo aperta a motivo della poca velocità data alla lastra. Non poteva certo servire al confronto colla teoria.

§. 11. Quell'apparecchio di rotazione non è atto, se molto carico, a ricevere la velocità necessaria, che è di circa quattro giri al secondo, e d'altronde riesce molto arduo il conseguire ogni volta la coincidenza del centro di gravità della lastra coll'asse di rotazione, senza di che è impossibile ottenere un movimento uniforme.

Pensai dunque di rendere indipendente dalla regolarità del movimento la determinazione del tempo, e vi riuscii facendo vibrare un corista, munito di indice, davanti alla fenditura che lascia giungere alla lastra la striscia luminosa.

Se il diapason vibra in un piano verticale per modo che l'indice, disposto ad angolo retto colla fenditura, si muova nella direzione di questa; la sua ombra disegna sulla lastra una curva sinuosa, ogni periodo della quale corrisponde evidentemente ad una oscillazione completa; e l'arco compreso fra due punti consecutivi d'intersezione di questa curva colla circonferenza, che verrebbe descritta dall' indice in riposo, rappresenta evidentemente la durata di una oscillazione semplice, e nel mio caso $\frac{1}{870}$ di secondo, perchè il corista adoperato dava un la_3 normale.

Con tale artificio ho potuto utilizzare un vecchio apparecchio costrutto da Breguet e capace di grandissime velocità, quantunque abbia guasti i roteggi pel lungo uso, e sia ora ben lungi dal muoversi uniformemente.

§. 12. Ho disposto ed assicurato questo apparecchio sul tavolino raccomandato al muro, dinanzi al sistema di lenti in guisa che il suo asse coincidesse coll'asse ottico e che la faccia anteriore della lastra da specchio si trovasse a circa 75 cent. dal cannello di vetro. Ho scelto questa distanza per ottenere proiettato entro la lastra tutto il campo ottico, ed avere ben netti i contorni dell'immagine.

L'intero apparecchio di rotazione è coperto da una cassetta infissa nel tavolino e formata da una intelaiatura di legno, entro cui possono scorrere dei cartoni neri, che proteggono la lastra dalla luce esterna, e che costituiscono le pareti della cassetta, ad eccezione di quella posta fra la lastra ed il cannello, la quale è fissa ed è di legno con una interruzione verticale larga circa 4 cent. Questa interruzione viene coperta da due lastre metalliche annerite, mobili e cogli spigoli che si guardano ben taglienti e rettilinei: essi formano i contorni della fenditura che dà passaggio alla luce, e che con questa disposizione si può spostare e modificare a seconda dei casi.

Dietro alla fenditura scorre un'altra lamina metallica annerita, per proteggere la lastra impressionabile, mentre colle viti si aggiusta il portaluce affinchè i raggi prendano la direzione conveniente.

§. 13. Il sistema di lenti di Duboscq è eccellente, non ha sensibili aberrazioni di sfericità, si potrebbe con piena fiducia considerare l'immagine da esso proiettata sulla lastra come geometricamente simile all'oggetto, quando questa fosse esattamente normale all'asse ottico. Ma al mio scopo non basta avere un'immagine simile, è necessario conoscere con ogni precisione il rapporto delle sue dimensioni a quelle dell'oggetto, rapporto che varia colla distanza dal fuoco alla lastra, cosicchè mi converrebbe farne la determinazione volta per volta con grave pericolo di errore.

Ho dunquo pensato di dividere il cannello in millimetri col fluoruro silicico, ed allora tal divisione rimane disegnata

sulla lastra sotto forma di tante circonferenze concentriche ad intervalli corrispondenti ad un millimetro; talchè, se anche la lastra non fosse esattamente perpendicolare all'asse ottico, non ne deriverebbe alcun errore. Di più si ha il vantaggio di non dover aggiungere nulla col compasso al disegno fatto dalla luce, e ciò con grande guadagno di precisione. La divisione del tubo non si limita a quella parte che viene investita dai raggi, ma si prolunga molto al di là, per avere agio di misurare sollecitamente ad ogni esperienza la lunghezza della colonna liquida.

§. 14. Il diametro del campo ottico corrisponde a poco più di 60^{mm}; ma ciò non toglie che il metodo sperimentale serva anche quando si voglia studiare il fenomeno per un tratto molto più lungo.

A tal fine io mi son valso dello spediente di tendere fra le branche del corista ed attraverso la fenditura che dà passaggio alla luce, un filo il quale disegna sulla lastra una circonferenza benissimo distinta da tutte le altre. Poi percorrendo la graduazione del cannello colla punta d'uno spillo ho determinato il segno che sul tubo corrisponde a quel filo. Fatta la prima esperienza che dà la curva della caduta pei primi 60^{mm}, ho portato in una seconda esperienza il menisco inferiore della colonna a 60^{mm} sopra al segno dianzi marcato e così, conoscendo dalla prima esperienza il tempo impiegato ad arrivare a quel segno, ho potuto avere in un'altra lastra la curva dei successivi 60^{mm}. Continuando in tal guisa, il fenomeno si può studiare per un tratto qualunque, purchè compatibile colla lunghezza del tubo. — In tre lastre diverse io ho impressa la curva per 180^{mm} circa.

§. 15. Mi rimane a descrivere il congegno per regolare il tempo della esposizione della lastra, che per tentativi ho trovato dover essere, almeno pel primo tratto di curva, circa un ottavo di secondo, e che deve cominciare alcuni

istanti prima del movimento della colonna liquida. Queste condizioni sono necessarie affinchè nell' immagine si abbia il punto di partenza del menisco, ed affinchè uno stesso punto della lastra preparata non giunga due volte sotto l' azione della luce.

Un' asta di legno *(fig.* 3.ª *Tav. I.)* attraversa il tavolino in corrispondenza al fuoco del sistema di lenti, e vi è imperniata in *R* in guisa da oscillare in un piano perpendicolare all'asse ottico. Lungo la parte inferiore di questo doppio pendolo si può fissare all' altezza che più conviene una rotella di piombo *S*, e moderare così la durata di una oscillazione. La parte superiore dell'asta arriva sotto l'ultima lente del sistema: quivi, in *T*, è attraversata da un bastoncino metallico parallelo all'asse, piegato ad angolo retto e portante un disco annerito *U*. Nella posizione d'equilibrio del pendolo il disco perclude la via ai raggi luminosi, e mercè quel bastoncino metallico può seguire la lente quando essa si fa mnovere per porre in fuoco.

La stessa leva *ML (fig.* 2.ª*)* che serve ad aprire il cannello, serve anche mediante un' appendice *LHNQ* a spostare il pendolo e quindi a illuminare la lastra preparata. I pezzi sono così disposti che lasciando cadere da qualche altezza il peso *P*, esso per mezzo di una fune fa agire con impeto la leva, la quale sposta prima il pendolo sollecitandolo in *Q*, poi apre il tubo in *D* (il disegno rappresenta questo momento) ed abbandona a sè il pendolo, che ritorna alla sua posizion di riposo e vi è trattenuto da una piccola molla a scatto *Z*. Tutto ciò avviene in un ottavo di secondo circa, pel primo tratto della curva; ma per gli altri bisogna via via rallentare la ruotazione della macchina ed abbassare la rotella *S*.

§. 16. Alcune parole per raccontare come si succedevano le varie operazioni che costituiscono l'esperienza.

Le lastre sono ben pulite: il bagno d'argento è nella

bacinella, il lume è acceso, tutto è pronto nello stanzino da fotografia attiguo alla sala d' ottica, ove è montato il mio apparecchio.

Il cannello è verticale, tutto è ben centrato, il diapason ha i suoi indici, la fenditura è chiusa, una faccia laterale della cassetta è aperta, la macchina è carica.

Verificato tutto ciò, entro nello stanzino a distendere il collodione sulla lastra e a metterla in bagno. Poi vengo nella sala e pel tubo di gomma elastica, che comunica col cannello di vetro, aspiro colla bocca il liquido, tenendo sempre la mano al robinetto. Con un poco di esercizio si arriva ad aspirare quel tanto di liquido che si vuole e a condurre il menisco inferiore in un punto determinato, talchè un indice del corista rimanga illuminato dai raggi che attraversano l' acqua. Se il liquido bagna il cannello, bisogna levare la goccia che rimane al capo inferiore coll'aiuto di un filo di vetro e di carta bibula. Un termometro è immerso nel bicchiere d' onde ho aspirato l'acqua. Fatto ciò, leggo sul tubo la lunghezza della colonna liquida, e ritorno a levare di bagno la lastra ed a porla nel telaio; mentre un altro sta nella sala per tener chiuso ogni spiraglio e levare ad un mio cenno la carta bibula che è in fondo al cannello.

Ritorno nella sala, fisso la lastra sopra l' asse di rotazione, metto in movimento la macchina, chiudo la cassetta. Mentre la macchina prende la sua velocità, sposto il pendolo, raddrizzo il cono luminoso facendo coincidere l'immagine del cannello colla fenditura chiusa: lascio il pendolo, attacco il corista, e in quel punto chi m' aiuta apre la fenditura: lascio andare il peso — un lampo — e l'impressione è avvenuta. Si richiude la fenditura, si ferma la macchina. Tolgo la lastra e vado nello stanzino a sviluppare col solfato ferroso e a rinforzare, quando occorre, con una debole soluzione di nitrato argentico.

Tutte queste operazioni richiedono poco tempo: la lastra non si è asciugata che nei giorni di caldo eccessivo, quando i fotografi stessi non potevano lavorare.

III.

Discussione.

§. 17. La tavola II. qui unita è la copia di una positiva fotografica tratta da una delle esperienze or ora descritte.

La curva *abcde*... è quella tracciata dai raggi luminosi contenuti nel piano verticale dell' asse ottico e successivamente tangenti al menisco che rivolgeva la propria concavità verso il basso (e nell' immagine verso l' alto, perchè l'immagine è capovolta); talchè nel primo istante della caduta si disegnava la retta $a'a''$, la quale da a verso a' era fortemente illuminata perchè in corrispondenza all'acqua: al di sotto (nel disegno al disopra) di a era per un certo intervallo affatto oscura in grazia della riflessione totale subita dai raggi sulla superficie inclinata del menisco, e poi era debolmente illuminata in corrispondenza all' aria, e la luce bastava appena ad impressionare il collodione.

Nell' istante in cui s' imprimeva la retta $a'a''$ il diapason si trovava nella fase rappresentata dal punto o, perchè collocato dalla parte dell' acqua, ove riceveva luce sufficiente ad imprimere sulla prova l' ombra degli indici.

La distanza fra un massimo ed un minimo di una delle curve sinuose (fra α e β) corrisponde alla durata di una oscillazione semplice e perciò, come dissi, ad $\frac{1}{870}$ di secondo: cosicchè per avere il tempo decorso dal principio della caduta, quando il menisco si trovava in a, all' istante in cui era sceso per es. di 9^{mm}, e si trovava perciò in b, basta contare quante sinuosità sono comprese fra a e b. Si concluderà dunque che la colonna liquida, nelle circostanze in cui fu presa la fotografia, impiegava $\frac{40}{870}$ di secondo a scendere di $9.^{mm}$

Non si deve spingere l' approssimazione più in là di mezza oscillazione e di mezzo millimetro, altrimenti la lettura riesce incerta, e d'altra parte le frazioni minori sono comprese

nei limiti degli errori possibili, come esporrò in breve. Avverto però subito ch' io ho fatto le osservazioni direttamente sulla prova negativa, come quella che non fu soggetta a deformazioni, e che presenta maggior nettezza di contorni.

§. 18. Nel processo di calcolo esposto in principio, si segue il vertice del menisco, qui invece la curva ci dà la posizione dei successivi punti di contatto dei raggi luminosi colla superficie inferiore del liquido: ma ora mostrerò che questa circostanza non può portare che differenze affatto trascurabili.

Infatti rappresenti *(fig.* 4.ª*)* la *oy* l'asse del cannello e la

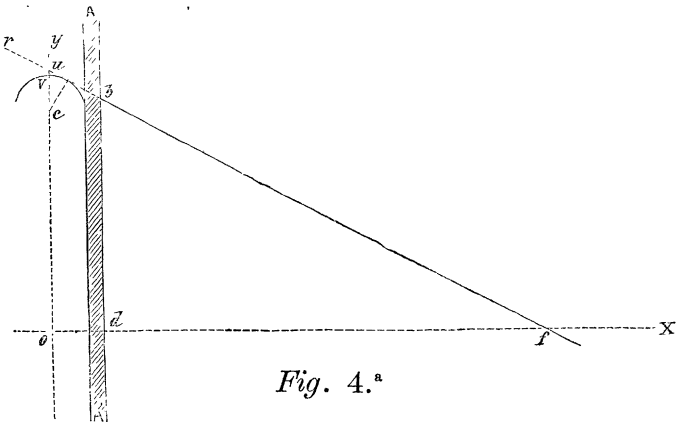

Fig. 4.ª

ox l' asse ottico, e la striscia AA' rappresenti la sezione longitudinale della parete di vetro; il punto *f* sia il fuoco della lente collettrice dei raggi riflessi dal portaluce, e sia *b* il punto estremo della graduazione che cade nel campo ottico: evidentemente l'errore per la circostanza accennata sarà massimo appunto in *b*.

Ora, supponendo che il raggio *rf* non venga deviato nell' attraversare il cannello, si verrà ad aggravare l'errore, e supponendo il menisco esattamente sferico e di raggio *cv*, uguale al raggio del cannello, non ci allontaneremo molto dal

vero. In tali ipotesi l'errore in discorso sarebbe rappresentato dalla porzione *vu* di *oy* compresa fra il vertice del menisco e la tangente condotta dal fuoco *f*, e passante pel punto estremo *b* del campo ottico.

Abbiamo:

$$\frac{cu}{cv}=\frac{bf}{df}=\frac{\sqrt{db^2+df^2}}{df}$$

d'onde:

$$vu=cu-cv=cv\left(\frac{\sqrt{bd^2+df^2}}{df}-1\right);$$

ma:

$$cv=2,06 \quad ; \quad bd=30 \quad ; \quad df=225;$$

dunque:

$$vu=2,06\left(\frac{\sqrt{900+50625}}{225}-1\right)=0^{mm},018,$$

errore affatto trascurabile: e si potrà quindi ritenere che la curva sia tutta disegnata da raggi che partano dal vertice del menisco.

§. 19. Ma non è così tenue l'errore proveniente da quest' altra circostanza.

La graduazione è segnata sulla retta *bd* e non sull' asse *oy* come si richiederebbe affinchè nella fotografia la curva incontrasse la circonferenza corrispondente al punto della divisione che dà l' altezza a cui si trova realmente il menisco. Se i raggi fossero paralleli fra loro, tornerebbe indifferente il luogo della graduazione, purchè fosse sopra una retta verticale. Ma nel nostro caso i raggi sono convergenti;

percui invece di disegnarsi la curva sopra la circonferenza corrispondente al punto *n* (*Fig.* 5.ª), che è all'altezza del ver-

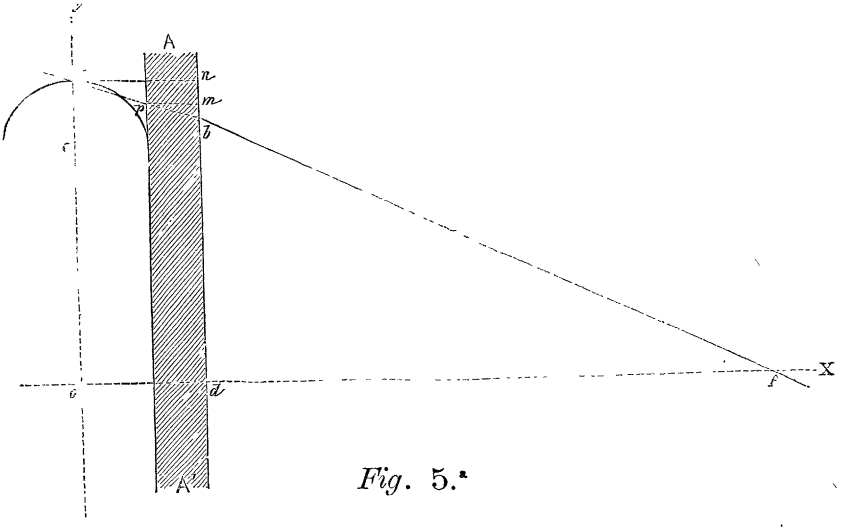

Fig. 5.ª

tice *v*, si disegnerà sulla circonferenza descritta dal punto *b*, e la differenza *nb* andrà diminuendo nell' avvicinarsi del menisco all'asse ottico, ed ivi sarà nulla.

Si tratta di determinare questa differenza *nb*. — Si ha:

$$nb = mb + mn$$

$$mb = pm \text{ tang } p = pm \frac{\text{sen} p}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 p}}$$

$$mn = vc \text{ tang } v = vc \frac{\text{sen } v}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 v}} ,$$

ma:

$$\frac{\text{sen} p}{\text{sen} f} = i , \qquad \frac{\text{sen} v}{\text{sen} p} = i'$$

indicando con i ed i' rispettivamente gli indici di refrazione fra il vetro e l'aria, e fra l'acqua ed il vetro; quindi:

$$\text{sen}p = i \text{ sen} f = i \frac{bd}{bf}$$

$$\text{sen}v = i' \text{ sen}p = i' \frac{mb}{pb};$$

e sostituendo:

$$mb = i \frac{pm.\ bd}{\sqrt{bf^2 - i^2 bd^2}} = i \frac{pm.\ pb}{\sqrt{bd^2(1-i^2)+df^2}}$$

$$mn = i' \frac{vc.mb}{\sqrt{pb^2 - i'^2 mb^2}} = i' \frac{vc.mb}{\sqrt{bm^2(1-i'^2)+pm^2}}.$$

D' onde coi valori:

$$pm = 2{,}5 \quad ; \quad bd = 225 \quad ; \quad i = \frac{1{,}000.29}{1{,}5};$$

$$vc = 2{,}06 \quad ; \quad i' = \frac{1{,}5}{1{,}33}$$

si trova:

$$mb = 0{,}2212$$
$$mn = 0{,}2058$$
$$nb = 0{,}4270.$$

L' errore quando si legge a 30mm dal centro è dunque di 0mm,43, e possiamo ammettere che a distanze minori sia proporzionale a queste distanze.

Da ciò risulta che, cominciando a contare lo spazio della

caduta dalla 30.ª circonferenza, e stando alla fotografia, si commetterà un errore via via crescente: la fotografia ci darà uno spazio di 15^{mm}, e sarà invece di 15,21, al centro ci darà 30, ed invece il menisco sarà sceso di $30^{mm},43$, e così di seguito finchè, oltrepassato il centro e ritornati alla 30.ª circonferenza, leggeremo 60, e saranno invece $60^{mm},85$. Per correggere questo errore ed avere lo spazio x, basterà dunque aggiungere allo spazio ξ dato dal disegno la quantità $\frac{0,427}{30}\xi$.

Così facendo, anche se si ha riguardo agli errori di lettura, si può con piena sicurezza rispondere del mezzo millimetro, almeno pei tratti della curva che non sono incontrati sotto angoli troppo ottusi dai raggi delle circonferenze concentriche.

§. 20. In fine dirò come ho determinato il punto della curva sinuosa corrispondente all'istante in cui il liquido parte dal riposo. Siccome la curva della caduta riesce tangente alla circonferenza che sarebbe descritta dal menisco in quiete, così il punto di partenza non si discerne bene, ed ho dovuto ricorrere al seguente artificio per determinarlo.

Colla formola $s=\frac{g\tau^2}{2}$ ho calcolato in 870^{esimi} di secondo quanto tempo τ si richiede a che un grave partendo dalla quiete cada *liberamente* di un millimetro, ed ho trovato $\tau_1=12,4$; poi ne ho dedotto il tempo impiegato a percorrere i due millimitri successivi e l'ho confrontato con quello corrispondente della mia esperienza, che si legge benissimo sul disegno. Il ritardo risultò affatto trascurabile, e quindi ho contato indietro 12,5 sinuosità a partire dall'istante in cui la caduta è di 1^{mm}, e là ho posto lo *zero* del tempo.

Ecco il calcolo.

Pel valore di g ho preso quello che si deduce dalla formola data da Sabine:

$$g = 9^m,780.09 + 0,050.80 \operatorname{sen}^2\varphi \quad (^1)$$

introducendovi per la latitudine di Pisa:

$$\varphi = 43^0.43' \ldots\ldots \quad (^2)$$

$$\log \operatorname{sen} 43^0\,43' = 0,839.536.3 - 1$$

$$\log \operatorname{sen}^2 43^0\,43' = 0,679.072.6 - 1$$

$$\log 50,80 = 1,705.863.7$$

$$1,384.936.3 \ldots\ldots 24,26$$

$$+9780,09$$

$$g = 9804,35$$

$$\tau_s = 870\sqrt{\frac{2s}{g}}$$

$$\log\sqrt{\frac{2}{g}} = 0,153.855.6 - 2$$

$$\log 870 = 2,939.519.3$$

$$1,093.374.9 \ldots\ldots \tau_1 = 12,40$$

$$\log\sqrt{3} = 0,238.560.6$$

$$1,331.935.5 \ldots\ldots \tau_3 = 21,47$$

$$\tau_3 - \tau_1 = 9,07$$

E dall'esperienza la stessa quantità risulta pochissimo maggiore di 9.

(1) A. Wüllner — « Lehrbuch der Experimentalphysik » Leipzig 1870. Vol. I. p. 134.

(2) Il P. Inghirami nella sua Memoria « Di una base trigonometrica misurata in Toscana nell'autunno 1817 ». Firenze 1818, assegna a Vicopisano la latitudine di 43°.42'. 11",1.

Da quanto precede risulta dunque che la curva sperimentale è l' espressione fedele del fenomeno, a meno di mezzo millimetro. Ora se le esperienze, come nel mio caso, abbracciano 200^{mm} di caduta, si vede che l'errore relativo non può essere che $\frac{1}{400}$; e si ridurrebbe ancora minore, volendo osservare tratti più lunghi. — Mi pare che in valutazioni di simil natura questa sia una precisione non comune, e che perciò il metodo ora descritto possa raccomandarsi per indagare alcuni fenomeni dell'idrodinamica, avvolti ancora in tante tenebre.

IV.

Confronto colla teoria.

§. 21. Le mie prime esperienze furono dirette a cercare le condizioni favorevoli nelle quali non influiscono sensibilmente le cause perturbatrici di cui è parola al §. 1.

Dalle considerazioni teoriche dei §§. 2, 3, 4 risulta che il movimento della colonna liquida non deve dipendere dalla sua lunghezza. Trovai invece che, servendomi di un cannello del diametro di 2^{mm}, la curva della caduta variava notevolmente colla lunghezza della colonna. Ora non saprei bene precisare la legge con cui variava, perchè non conservai le prove fotografiche di quelle prime esperienze, essendomi allora servito di cannelli non graduati. Ma senza dubbio una colonna più lunga scendeva più rapidamente di una più corta; e mi propongo di studiare in seguito questo fenomeno, il quale deve al certo dipendere dall' influenza dei menischi. Infatti se l'azione degli attriti è indipendente dalla lunghezza della colonna, ciò si spiega facilmente pensando che quell' azione, come la gravità, si esercita per tutta la massa; mentre che la tensione delle superficie capillari è in certo

qual modo proporzionale alla sola sezione del tubo ed indipendente affatto dalla massa, talchè il ritardo che essa cagiona deve riuscire tanto meno sensibile quanta maggiore è la quantità di moto propria a quella massa medesima.

Guidato da tali considerazioni, pensai che doveva via via scemare e finalmente rendersi trascurabile quest'azione perturbatrice dei menischi al crescere del diametro del tubo e della lunghezza della colonna liquida. Presi dunque ad esperimentare con tubi più larghi.

§. 22. Ne scelsi uno che aveva il diametro di 5^{mm}, 7 misurato osservando al microscopio le due sezioni estreme, e prendendo la media di molte osservazioni. Con questo cannello incontrai subito una difficoltà nel tener sospesa la colonna liquida.

Siccome aveva in mente di sperimentare prima sopra tubi che venissero bagnati dal liquido, così lavai quel tubo alla potassa e poi a grand'acqua e lo mantenni pieno d'acqua per ben ventiquattr'ore, unico mezzo perchè l'acqua vi aderisse. In tali circostanze la colonna restava sospesa perfettamente finchè terminava al capo inferiore; ma se io tentava di portare il menisco inferiore in un punto medio, vedeva tosto formarsi una goccia in basso ed ivi trasportarsi poco a poco tutto il liquido, scorrendo lungo la parete del cannello.

Feci la stessa prova con un altro tubo del diametro di 4^{mm}, 11, e con questo ottenni la sospensione della colonna liquida in qualunque punto, e trovai confermato che la legge della caduta era indipendente dalla sua lunghezza, perchè le curve provenienti da lunghezze di 170; 223; 390^{mm} erano affatto identiche [1].

[1] Mi si mosse il dubbio che questa prova non fosse sufficiente ad escludere l'influenza perturbatrice dei menischi; ed io allora feci sì che l'acqua formasse entro il cannello due colonne lunghe ciascuna 18 cent. circa, e separate da un tratto d'aria di 14 cent.; e feci disegnare la curva dall'ultimo menisco posto più

Il fatto che il movimento della colonna non varia al variare della lunghezza di essa, pare che dimostri eziandio essere insensibile l' influenza esercitata dagli attriti dell' aria. Ma non contento di ciò, tenendo la colonna d'acqua sempre di 90^{mm}, feci in uno stesso giorno tre diverse esperienze: la prima con un cannello lungo 80 cent., la seconda collo stesso cannello accorciato di 25 cent., la terza aggiungendo in fondo al cannello rimasto di 55 cent. un tubo di gomma elastica lungo 1^{m}, 40 e del diametro di 10^{mm} al più; e le tre curve ottenute coincidevano perfettamente.

Ma questo non prova ancora che l' aria non influisca affatto, nè saprei ideare un' esperienza che lo comprovasse direttamente.

Comunque sia, benchè il coefficiente d' attrito trovato per l'aria da O. E. Meyer sia molto grande se si pon mente alla sua densità, pure esso è sempre una frazione di quello ricavato per l' acqua, e tale circostanza potrebbe influire soltanto sulle cifre decimali.

D' altro canto non occorre nemmeno dire che la quantità di moto ceduta all'aria non può avere influenza sensibile.

§. 23. Ho istituito dunque il confronto fra le curve ottenute e la formola (VI.) del §. 3, introducendo in essa il valore:

$$k=\frac{n}{h}=\frac{1,299}{0,998612}=1,3008$$

in basso. — Così, in luogo di due superficie capillari, ve ne erano quattro: eppure la curva ottenuta era assolutamente identica a quella risultante dalle esperienze anteriori, almeno pei primi 65^{mm} di caduta. Questo artifizio parmi possa servire a correggere le curve provenienti da cannelli più stretti, nei quali non è insensibile l' azione capillare, e così dar campo a confrontare anche in questo caso la teoria colla esperienza.

determinato da O. E. Meyer [1] per l' acqua distillata a 18°, 9 C. e sono giunto ai seguenti numeri per $R=2,055$.

τ	ξ	x esper.	x calc.	Diff.
50	13,5	13,6	16,2	2,6
100	52,5	53,2	64,6	11,4
160	125,5	126,3	165,6	39,3
195	184,5	185,5	245,9	60,4

Ecco un saggio dei calcoli eseguiti per giungere ai numeri della penultima colonna:

$$\text{(VI.)}..x=\frac{g}{4}\frac{R^2}{k^2}\frac{\tau}{m}-2g\frac{R^4}{k^4}\sum_0^\infty\frac{1}{z_n^5 I_1(z_n)}+2g\frac{R^4}{k^4}\sum_0^\infty\frac{e^{-\frac{k^2}{R^2}\frac{\tau}{m}z_n^2}}{z_n^5 I_1(z_n)}$$

$$g=9804^{mm},35\,;\ R=2^{mm},055\,;\ k^2=\frac{1,299}{0,998.612}\,;\ m=870\,;\ \tau=160$$

$$\sum_0^\infty\frac{1}{z_n^5 I_1(z_n)}=0,023.438.....\left(\textit{Vedi}\ \S\ 3.^\circ\right).$$

Indicando con A il primo termine, con B il secondo e con C_n il termine generale dell' ultima serie nel secondo membro della (VI.), sarà:

[1] Poggendorff' s Annalen. CXIII. p. 399.

$$x = A + B + C_0 + C_1 + C_2 + \ldots\ldots$$

$$\log 0{,}998.612 = 0{,}999.396.8 - 1$$
$$\log 1 : 1{,}299 = 0{,}886.390.8 - 1$$
$$2 \log 2{,}055 = 0{,}625.623.6$$
$$0{,}511.411.2 = \log \frac{R^2}{k^2}$$
$$\log g = 3{,}991.418.8$$
$$\log 1 : m = 0{,}060.480.7 - 3$$
$$\log \tau : 4 = 1{,}602.060.0$$
$$3{,}165.370.7 \ldots A = +1463{,}43$$
$$2 \log R^2 : k^2 = 1{,}022.822.4$$
$$\log 2g = 4{,}292.448.8$$
$$\log 2gR^4 : k^4 = 5{,}315.271.2$$
$$\log 0{,}023.438 = 0{,}369.920.5 - 2$$
$$3{,}685.191.7 \ldots B = -4843{,}86$$

$$\log k^2 : R^2 = 0{,}488.588.8 - 1$$
$$\log 1 : m = 0{,}060.480.7 - 3$$
$$\log \tau = 2{,}204.120.0$$
$$\log \log e = 0{,}637.784.3 - 1$$
$$0{,}390.973.8 - 2 = \log \log e \frac{k^2}{R^2} \frac{\tau}{m}$$
$$2 \log z_0 = 0{,}762.165.2$$
$$0{,}153.139.0 - 1 \ldots\ldots 0{,}142.278.3$$
$$0{,}857.721.7 - 1 = \log e^{-\frac{k^2}{R^2} \frac{\tau z_0^2}{m}}$$
$$\log 2gR^4 : k^4 = 5{,}315.271.2$$
$$\log 1 : z_0^5 I_1(z_0) = 0{,}379.299.6 - 2$$
$$3{,}552.292.5 \ldots C_0 = +3566{,}91$$

$$\log \log e^{\frac{k^2}{R^2} \frac{\tau}{m}} = 0{,}390.973.8 - 2$$
$$2 \log z_1 = 1{,}483.893.8$$
$$0{,}874.867.6 - 1 \ldots 0{,}749.665.7$$
$$0{,}250.334.3 - 1$$
$$5{,}315.271.2$$
$$\log 1 : z_1^5 I_1(z_1) = 0{,}758.450.7 - 4$$
$$1{,}324.056.2 \ldots C_1 = -21{,}09$$
$$A + B + C_0 + C_1 = 165{,}39$$

$$A + B + C_0 + C_1 = + 165{,}39$$

$$\begin{array}{rl}
 & 0{,}390.973.8-2 \\
2\log z_2 = & 1{,}874.403.6 \\
\hline
 & 0{,}265.377.4 \ldots\ldots \; 1{,}842.372.3 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 0{,}157.627.7-2 \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 5{,}315.271.2 \\
\log 1 : z_2{}^5 I_1(z_2) = & \qquad\qquad\qquad\qquad 0{,}880.297.2-5 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 0{,}353.196.1-1 \;.\;. \quad C_2 = + \; 0{,}23 \\
\hline
 & \qquad\qquad\qquad\qquad \text{per } \tau = 160, \quad x = 165{,}62 \\
\hline\hline
\end{array}$$

Uno sguardo gettato sulla tavola precedente persuade tosto che la formola (VI.) non rappresenta la curva sperimentale, e non la rappresenta neppure attribuendo a k^2 un valore differente, tale per esempio che per un valore particolare di τ i due valori di x provenienti dal calcolo e dall' esperienza sieno identici. Allora le due curve teorica e sperimentale hanno a comune quel punto e poi si separano: le velocità date dalla teoria crescono più rapidamente che non quelle della esperienza [1].

§. 24. Quando si voglia persistere a ritenere conformi alla realtà le equazioni dell' idrodinamica, la sola ragione che si possa addurre per giustificare il disaccordo ora avvertito è che il movimento non avvenga in linea retta, come fu posto a base della integrazione.

E di fatto le particelle liquide sono animate anche da una velocità orizzontale, come si può convincersi osservando che la colonna nello scendere va poco a poco accorciandosi, lasciando indietro dell' acqua che scorre poi lungo la parete

[1] Non si può ascrivere tale disaccordo ad un ritardo proveniente dal modo di aprire il cannello (§. 7.), giacchè ho fatto cadere il peso *P* (*fig. 2.ª Tav. I.ª*) da altezze differenti, senza che si producesse una variazione nelle curve.

con una velocità incomparabilmente minore. Ma tale componente nella direzione del raggio dev' essere piccola in confronto della componente verticale, e non dovrebbe avere influenza tanto sensibile sopra la curva che rappresenta quest' ultima, specialmente quando si segua il movimento del menisco inferiore, il quale si deforma pochissimo.

Vengono in appoggio di questa opinione le conchiusioni che si traggono dalla esperienza seguente.

§. 25. Per diminuire la velocità della caduta ho assoggettato la colonna liquida ad una pressione sensibilmente costante dal basso all' alto. L' estremità inferiore del cannello comunicava con un recipiente della capacità di circa 20 litri, pieno d' aria compressa e munito di un manometro ad acqua che ne indicava la pressione interna, e si manteneva stazionario mentre l' acqua scendeva nel cannello graduato.

Per esser certo che in fondo al cannello non si formava una goccia, che avrebbe turbato l' andamento del fenomeno, l' ho innestato con un tappo di gomma elastica in una bottiglia di Woolf a due colli, che permetteva di osservarne continuamente l' estremità inferiore e che poteva essere tolta per lasciar campo di aspirare il liquido, o d' asciugare la goccia formatasi.

Con questa modificazione dell' apparecchio le operazioni riescono più complicate e di riuscita meno sicura. Ma non di meno si può giungere allo scopo e contare sopra una esattezza sufficiente. La curva della tavola III. fu ottenuta a questo modo, sempre collo stesso cannello che servì per la tavola II.

L' unica modificazione da fare alla formola teorica affinchè corrisponda a questo caso, è di sostituire a g l'espressione:

$$g - \frac{P}{hL}$$

ove P è la pressione esercitata sul menisco inferiore, h la densità del liquido, L la lunghezza della colonna che si considera.

Infatti integrando la (I.) del §. 2 fra x_0 e x_σ ordinate dei vertici dei menischi ove si esercitano le pressioni p_0 e p_σ, si ottiene appunto:

$$\varphi(t)=g-\frac{1}{h}\frac{p_\sigma-p_0}{x_\sigma-x_0}=g-\frac{1}{h}\frac{P}{L}$$

e in tal caso la equazione (IV.) del §. 3 che dà la velocità, si trasforma nella:

$$\text{(VIII.)} \ldots\ldots \quad u_1=\frac{2}{k^2}\left(g-\frac{P}{Lh}\right)\sum_0^\infty \frac{1-e^{-k^2\mu_n^2 t}}{R\mu_n^3 I_1(R\mu_n)} I_0(\mu_n r)$$

e da questa si ricava l'espressione della quantità Q_1 di liquido che è passata per una sezione del tubo dall'origine del tempo:

$$Q_1=2\pi h\int_0^R u_1 r dr=\frac{4\pi}{k^2}\left(gh-\frac{P}{L}\right)\sum_0^\infty \frac{1-e^{-k^2\mu_n^2 t}}{\mu_n^4}$$

$$=\frac{4\pi}{k^2}\left(gh-\frac{P}{L}\right)R^4\sum_0^\infty \frac{e^{-\frac{k^2}{R^2}z_n^2 t}-1}{z_n^4} \quad ; [z_n \text{ radici di } I_0(z)=o].$$

Quest' ultima formola si riduce poi a quella di Poiseuille:

$$Q = K \frac{P}{L} R^4$$

quando vi si faccia $g = o$ (Poiseuille teneva i tubi orizzontali), e $t = \infty$, ossia che il moto sia divenuto uniforme.

Ora osservando che si ha:

$$P = gh\,X$$

se X indica l'altezza del manometro ad acqua distillata; e confrontando la (VIII.) colla (IV.), si deduce che nell'ipotesi del moto rettilineo si deve avere in ogni istante:

$$\text{(IX.)} \quad \ldots\ldots \quad \frac{u}{u_1} = \frac{1}{1 - \frac{X}{L}},$$

la quale relazione corrisponde alle due prime leggi enunciate da Poiseuille pel moto uniforme, che cioè la quantità di liquido che passa in un certo tempo per un tubo capillare, sufficientemente lungo, sta in ragione diretta della pressione ed in ragione inversa della lunghezza del tubo.

La tavola III. è tratta da una esperienza in cui il manometro segnava $X = 295^{mm}$ d' acqua distillata, la lunghezza della colonna d' acqua distillata che scendeva nel cannello era $L = 391^{mm}$, e perciò se sussiste la legge espressa dalla (IX.), deve trovarsi per ogni valore di $t = \frac{\tau}{870}$:

$$\frac{u_1}{u} = \frac{x_1}{x} = 0{,}246.$$

Infatti:

τ		Tav. II.ª ξ	Tav. II.ª $x=\xi+\frac{0,497}{30}\xi$	Tav. III.ª ξ_1	Tav. III.ª x_1	$\frac{x_1}{x}$
40	(1)	9	9,13	2,25	2,27	0,248
60	(1)	20	20,28	4,8	4,87	0,241
90	(1)	43	43,61	10,6	10,75	0,246
105	(1)	56,8	57,61	14,0	14,20	0,246
115	(1)	67,5	68,46	16,75	16,98	0,248
125	(2)	79,5	79,66	19,75	19,92	0,247
160	(2)	125,5	126,31	31,8(?)	32,25	0,255
165	(3)	136	136,26	34	34,48	0,253
185	(3)	169	169,71	41	41,58	0,245
195	(3)	184,5	185,50	45	45,67	0,246

Così rimarrebbero confermate le due prime leggi di Poiseuille anche in un caso di moto vario e di un tubo del diametro di $4^{mm},11$, mentre egli non ha potuto col suo metodo verificarle che per tubi di diametro $< 0^{mm},7$.

Quest' accordo fra l' esperienza e la teoria, ottenuto nell' ipotesi del moto rettilineo, conferma che si poteva legittimamente trascurare la componente orizzontale della velocità; anzi è questo appunto il criterio di cui si servirono i Fisici, che si son dati a queste ricerche, per vedere se nelle condizioni in cui sperimentavano era ammissibile quell'ipotesi,

(1) Dal primo tratto di curva. (V. §. 14).
(2) Dal secondo tratto.
(3) Dal terzo tratto.
(?) Il punto della curva è molto vicino al centro, e perciò riesce incerta la lettura.

e se quindi potevano procedere alla verificazione della terza legge che riguarda i raggi, o alla determinazione delle costanti d' attrito.

Concludendo, risulterebbe dalle attuali esperienze che, se anche le equazioni generali dell' idrodinamica corrispondono al fatto nel caso di velocità piccolissime, esse sono in difetto quando la velocità sia notevole. Probabilmente il coefficiente k^2 non è costante come si ammette, ossia la resistenza d'attrito non è semplicemente proporzionale alla differenza di velocità di due strati contigui; ma su di ciò credo prematuro qualunque giudizio, e bisogna rimettersi ad ulteriori ricerche, nelle quali spero possa tornare di qualche utilità il nuovo metodo che qui ho descritto.

D. Antonio Roiti.

FINE DEL I. VOLUME

BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE