

*quatrième série - tome 41      fascicule 1      janvier-février 2008*

*ANNALES  
SCIENTIFIQUES  
de  
L'ÉCOLE  
NORMALE  
SUPÉRIEURE*

Patrice LE CALVEZ

*Points périodiques des homéomorphismes du plan et points fixes*

---

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

# POURQUOI LES POINTS PÉRIODIQUES DES HOMÉOMORPHISMES DU PLAN TOURNENT-ILS AUTOUR DE CERTAINS POINTS FIXES ?

PAR PATRICE LE CALVEZ

---

RÉSUMÉ. – Soit  $f$  un homéomorphisme du plan qui préserve l'orientation et qui a un point périodique  $z^*$  de période  $q \geq 2$ . Nous montrons qu'il existe un point fixe  $z$  tel que le nombre d'enlacement de  $z^*$  et  $z$  ne soit pas nul. En d'autres termes, le nombre de rotation de l'orbite de  $z^*$  dans l'anneau  $\mathbb{R}^2 \setminus \{z\}$  est un élément non nul de  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Ceci donne une réponse positive à une question posée par John Franks.

ABSTRACT. – Let  $f$  be an orientation-preserving homeomorphism of the euclidean plane  $\mathbb{R}^2$  that has a periodic point  $z^*$  of period  $q \geq 2$ . We prove the existence of a fixed point  $z$  such that the linking number between  $z^*$  and  $z$  is different from zero. That means that the rotation number of  $z^*$  in the annulus  $\mathbb{R}^2 \setminus \{z\}$  is a non-zero element of  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . This gives a positive answer to a question asked by John Franks.

## Introduction

Commençons par rappeler le théorème classique suivant de L. E. J. Brouwer [4] :

THÉORÈME A. – *Un homéomorphisme du plan qui préserve l'orientation et qui a un point périodique  $z^*$  de période  $q \geq 2$  a au moins un point fixe.*

La conclusion du théorème est plus précise, puisque Brouwer construit un lacet le long duquel l'indice du champ de vecteurs  $\xi: z \mapsto f(z) - z$  est bien défini et égal à 1. La preuve permet donc de localiser le point fixe. Le fait que ce point puisse être choisi « pas trop loin » de l'orbite  $O(z^*)$  peut se déduire directement du résultat d'existence. Plus précisément, si  $U$  est une partie ouverte connexe bornée de  $\mathbb{R}^2$  qui contient  $O(z^*)$  et si  $W$  est la réunion de  $U$ , de  $f(U)$  et de toutes les composantes connexes bornées de  $\mathbb{R}^2 \setminus (U \cup f(U))$ , alors  $f$  admet

un point fixe dans  $W$ . Remarquons que  $W$  est la plus petite partie ouverte connexe et simplement connexe qui contient  $U$  et  $f(U)$ . Expliquons pourquoi  $f$  a un point fixe dans  $W$ . Considérons pour cela l'ensemble fermé invariant  $X$ , formé des points fixes de  $f$  qui ne sont pas dans  $W$ , notons  $\widetilde{M}$  le revêtement universel de  $M = \mathbb{R}^2 \setminus X$  et  $\widetilde{\pi}: \widetilde{M} \rightarrow M$  la projection de revêtement. Puisque  $W$  est connexe et simplement connexe, toute composante connexe de  $\widetilde{\pi}^{-1}(W)$  est homéomorphe à  $W$ . Si  $\widetilde{W}$  est une telle composante, il existe un unique relèvement  $\widetilde{f}$  de  $f|_M$  à  $\widetilde{M}$  tel que  $\widetilde{f}(\widetilde{\pi}^{-1}(U) \cap \widetilde{W}) = \widetilde{\pi}^{-1}(f(U)) \cap \widetilde{W}$ . Remarquons maintenant que l'unique antécédent  $\widetilde{z}^*$  de  $z^*$  qui est dans  $\widetilde{W}$  est un point périodique de  $\widetilde{f}$  et que sa période est  $q$ . L'homéomorphisme  $\widetilde{f}$  a donc un point fixe et ce point se projette en un point fixe de  $f$  appartenant à  $W$ .

Un raisonnement plus sophistiqué, utilisant en particulier la théorie de classification des homéomorphismes de surfaces de Nielsen-Thurston, a permis à J.-M. Gambaudo [7] (voir également B. Kolev [12]) de prouver l'existence d'un point fixe  $z$  *enlacé* à  $O(z^*)$  au sens suivant : il n'existe pas de courbe fermée simple  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2 \setminus (O(z^*) \cup \{z\})$  librement homotope à  $f(\Gamma)$  dans  $\mathbb{R}^2 \setminus (O(z^*) \cup \{z\})$  telle que la composante connexe bornée de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  contienne  $O(z^*)$  et la composante connexe non bornée contienne  $z$ .

Nous allons améliorer dans cet article le résultat de Gambaudo en expliquant pourquoi  $z$  peut être choisi de telle façon que  $z^*$  « tourne autour » de  $z$ . Commençons par introduire le *nombre d'enlacement*  $L_{f,z^*}(z)$ . On sait, d'après Kneser [11], qu'un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  préserve l'orientation si et seulement s'il est isotope à l'identité. Choisissons donc une isotopie  $I = (f_t)_{t \in [0,1]}$ , issue de l'identité et aboutissant à  $f = f_1$ , et prolongeons cette isotopie sur  $\mathbb{R}$  par la relation de périodicité  $f_{t+1} = f_t \circ f$ . Munissons  $\mathbb{R}^2$  de son orientation usuelle et le cercle unité  $S^1 = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|z\| = 1\}$  de l'orientation induite. Si  $z$  est un point fixe de  $f$ , l'application

$$t \mapsto \frac{f_t(z^*) - f_t(z)}{\|f_t(z^*) - f_t(z)\|}$$

définit, par passage au quotient, une application continue entre le cercle  $\mathbb{R}/q\mathbb{Z}$ , orienté suivant les  $t$  croissants, et  $S^1$ . Le degré de cette application est le *nombre d'enlacement réel*  $\ell_{I,z^*}(z)$  défini par l'isotopie. On sait, toujours d'après Kneser, que l'ensemble des homéomorphismes du plan qui préservent l'orientation, muni de la  $C^0$ -topologie, se rétracte sur l'ensemble des rotations. Si  $\ell_{I',z^*}(z)$  est le nombre d'enlacement réel défini par une autre isotopie  $I' = (f'_t)_{t \in [0,1]}$ , il existe donc un entier  $k \in \mathbb{Z}$ , tel que  $\ell_{I',z^*}(z) = \ell_{I,z^*}(z) + kq$ . De plus, cet entier est nul si et seulement si  $I$  est homotope, à extrémités fixées, à  $I'$ . Le nombre d'enlacement  $L_{f,z^*}(z) = \ell_{I,z^*}(z) + q\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  est donc indépendant de l'isotopie choisie.

On peut également interpréter  $\ell_{I,z^*}(z)$  de la façon suivante. Notons  $\check{A}_z$  le revêtement universel de l'anneau  $A_z = \mathbb{R}^2 \setminus \{z\}$  et  $\check{\pi}_z: \check{A}_z \rightarrow A_z$  la projection de revêtement ; notons également  $\check{T}_z: \check{A}_z \rightarrow \check{A}_z$  l'automorphisme de revêtement défini naturellement par le cercle orienté de centre  $z$  et de rayon 1. Écrivons  $\tau_{t,z}$  pour la translation de vecteur  $z - f_t(z)$  et posons  $f_{t,z} = \tau_{t,z} \circ f_t$ . L'isotopie  $I_z = (f_{t,z})_{t \in [0,1]}$  est homotope à  $I$  et fixe  $z$ , elle se relève donc en une isotopie  $(\check{f}_{t,z})_{t \in [0,1]}$  de  $\check{A}_z$  issue de l'identité. Il existe alors un entier  $p \in \mathbb{Z}$ , qui n'est rien d'autre que  $\ell_{I,z^*}(z)$ , tel que pour tout  $\check{z}^* \in \check{\pi}_z^{-1}(\{z^*\})$ , on ait  $\check{f}_{1,z}^q(\check{z}^*) = \check{T}_z^p(\check{z}^*)$ . Ainsi,  $L_{f,z^*}(z)/q \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  est le nombre de rotation du point  $z^*$  dans l'anneau  $A_z$ .

J. Franks pose dans [3] la question suivante :

QUESTION. – *Peut-on trouver un point fixe  $z$  tel que  $L_{f,z^*}(z) \neq 0$  ?*

Le résultat est évident si  $f$  est le temps 1 d'un flot  $(f_t)_{t \in \mathbb{R}}$ . En effet, l'orbite de  $z^*$  (pour le flot) est une courbe fermée simple  $\Gamma$  invariante par  $f$ , formée de points périodiques ayant tous même période  $q$ . La théorie du nombre de rotation des homéomorphismes du cercle nous dit que le nombre de rotation réel de  $f|_\Gamma$  défini par l'isotopie  $(f_t|_\Gamma)_{t \in [0,1]}$  est un nombre rationnel  $p/q$ , où  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q$  sont premiers entre eux. Le classique théorème de point fixe de Brouwer nous dit que  $f$  a au moins un point fixe  $z$  dans la composante connexe bornée de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ . Remarquons maintenant que le nombre d'enlacement  $\ell_{I,z^*}(z)$  défini par l'isotopie  $I = (f_t)_{t \in [0,1]}$  est égal à  $p$ .

Le cas où  $f$  est proche de l'identité a été traité par C. Bonatti et B. Kolev dans [2], plus précisément, le cas où  $f - \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$  est une application contractante. Si on pose  $f_t = tf + (1-t)\text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ , on a une isotopie naturelle  $I = (f_t)_{t \in [0,1]}$ . Les auteurs prouvent l'existence d'un point fixe  $z$  tel que  $0 < |\ell_{I,z^*}(z)| < q$  (voir également A. Dehove [5] pour une interprétation différente).

Enfin, le cas de petite période a été traité par J. Guaschi dans [8]. Utilisant la théorie de Nielsen-Thurston et des arguments algébriques fins, Guaschi donne une réponse positive à la question de Franks dans le cas où  $q \leq 4$ .

Le but de cet article est de répondre à la question de Franks en toute généralité. Nous prouverons donc :

THÉORÈME B. – *Soit  $f$  un homéomorphisme du plan qui préserve l'orientation. Pour tout point périodique  $z^*$  de période  $q \geq 2$ , il existe un point fixe  $z$  tel que  $L_{f,z^*}(z) \neq 0$ .*

Nous allons donner un exemple simple d'application du théorème. Soit  $f$  un homéomorphisme du plan qui préserve l'orientation et qui vérifie :

- (i)  $f$  préserve une mesure  $\sigma$ -finie à support total ;
- (ii) il existe une compactification de  $\mathbb{R}^2$  par l'ajout du cercle  $S^1$ , pour laquelle  $f$  se prolonge en un homéomorphisme  $\bar{f}$  de  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \sqcup S^1$  qui fixe tout point de  $S^1$ .

On peut penser, par exemple, au temps 1 d'une isotopie  $I = (f_t)_{t \in [0,1]}$  issue de l'identité qui relève une isotopie  $(F_t)_{t \in [0,1]}$  issue de l'identité sur une surface orientable compacte de genre  $g \geq 1$ , telle que  $F_1$  préserve une mesure finie à support total. On peut déduire du théorème B que si  $f$  a un point périodique  $z^*$  de période  $q \geq 2$ , alors  $f$  a des points périodiques de périodes arbitrairement grandes.

En effet, on choisit un point fixe  $z$  tel que  $L_{f,z^*}(z) \neq 0$ . On peut écrire le revêtement universel de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{z\}$  sous la forme  $\bar{A}_z = \check{A}_z \sqcup \mathbb{R}$  et considérer le relèvement  $\check{f}_z$  de  $f|_{A_z}$  à  $\check{A}_z$  dont le prolongement  $\bar{f}_z$  à  $\bar{A}_z$  fixe tous les points de  $\mathbb{R}$ . On sait qu'il existe  $p \notin q\mathbb{Z}$  tel que  $\check{f}_z^q(\check{z}^*) = \check{T}_z^p(\check{z}^*)$ , pour tout  $\check{z}^* \in \check{\pi}_z^{-1}(\{z^*\})$ . L'hypothèse (i) implique que  $f_z$  vérifie la condition d'intersection suivante : toute courbe fermée simple de  $A_z$  non homotope à zéro rencontre son image par  $f_z$ . Par une variante du théorème de Poincaré-Birkhoff essentiellement due à Franks (voir par exemple [1]), on en déduit que pour tout nombre rationnel  $r/s$  entre 0 et  $p/q$ , écrit sous forme irréductible, il existe un point  $z'$  tel que  $\check{f}_z^s(z') = \check{T}_z^r(z')$ , point qui se plonge dans  $A_z$  en un point périodique de  $f$  dont la période est  $s$ .

On peut espérer des applications futures du théorème B, ou au moins de la méthode permettant de l'obtenir, à l'étude des homéomorphismes de surfaces. En effet, rappelons par

exemple que J. Franks, M. Handel et G. Parshawi utilisent le résultat de Gambaudo, cité plus haut, dans leur article récent sur les points fixes des actions abéliennes sur la sphère [6].

J'ai bénéficié d'utiles conversations avec Frédéric Le Roux, que je tiens à remercier. Je remercie également le rapporteur de cet article pour ses très nombreuses remarques, en particulier pour sa suggestion d'établir des résultats d'indices sur les isotopies locales (propositions 3.3 et 3.4).

## 1. Notations, définitions

Nous introduirons dans cette longue section la plupart des objets que nous utiliserons dans l'article. Nous rappellerons les propriétés classiques de ces objets.

On écrira respectivement  $\bar{X}$ ,  $\text{Int}(X)$ ,  $\partial X$  pour l'adhérence, l'intérieur et la frontière d'une partie  $X$  d'un espace topologique  $E$ . On dira qu'une partie  $Y \subset E$  *sépare* deux parties connexes  $X_1$  et  $X_2$  si  $Y$  est disjoint de  $X_1$  et  $X_2$  et si  $X_1$  et  $X_2$  sont dans des composantes connexes différentes de  $E \setminus Y$ .

On notera  $p_1 : (x, y) \mapsto x$  et  $p_2 : (x, y) \mapsto y$  les deux projections définies sur  $\mathbb{R}^2$ . On munira ce plan de sa structure euclidienne usuelle et, pour tout  $r > 0$ , on posera  $\mathbf{D}_r = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|z\| < r\}$  et  $\bar{\mathbf{D}}_r = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|z\| \leq r\}$ . On notera  $S^1 = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|z\| = 1\}$ . Le revêtement universel de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  est le plan  $\mathbb{R}^2$ ; on notera

$$\begin{aligned} \Pi : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ (x, y) &\mapsto (e^{-y} \cos 2\pi x, e^{-y} \sin 2\pi x) \end{aligned}$$

la projection de revêtement et on définira l'automorphisme de revêtement

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + 1, y). \end{aligned}$$

On posera  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ .

### 1.1. Surfaces

On appellera *surface* toute variété topologique séparée orientable  $M$  de dimension 2. On dira que  $M$  est un *plan* (resp. *anneau*, *sphère*) si  $M$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^2$  (resp.  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,  $S^2$ ). On appellera *disque ouvert* (resp. *disque fermé*) d'une surface  $M$  toute partie homéomorphe à  $\mathbf{D}_1$  (resp. à  $\bar{\mathbf{D}}_1$ ).

Si  $M$  est une surface, on notera  $\text{Homéo}^+(M)$  l'ensemble des homéomorphismes de  $M$  qui préservent l'orientation. Pour tout  $f \in \text{Homéo}^+(M)$ , on notera  $\text{Fix}(f)$  l'ensemble des points fixes de  $f$ . On appellera disque *attractif* (resp. *répulsif*) de  $f$  tout disque fermé  $D \subset M$  tel que  $f(D) \subset \text{Int}(D)$  (resp.  $f^{-1}(D) \subset \text{Int}(D)$ ). On dira que  $z \in \text{Fix}(f)$  est un *puits* (resp. une *source*) de  $f$ , s'il existe un disque attractif (resp. répulsif)  $D$  tel que  $\bigcap_{k \geq 0} f^k(D) = \{z\}$  (resp.  $\bigcap_{k \geq 0} f^{-k}(D) = \{z\}$ ).

### 1.2. Arcs

On appellera *arc* une application continue  $\gamma$  d'un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  vers une surface  $M$ , ou plus précisément, une classe d'équivalence d'applications par reparamétrage préservant l'orientation. On utilisera souvent, par abus de langage, le mot arc pour désigner l'image de l'arc, en faisant bien attention qu'il n'y ait pas d'ambiguïté.

Si  $\gamma_1 : I_1 \rightarrow M$  et  $\gamma_2 : I_2 \rightarrow M$  sont deux arcs tels que

$$\sup I_1 \in I_1, \quad \inf I_2 \in I_2, \quad \gamma_1(\sup I_1) = \gamma_2(\inf I_2),$$

on notera  $\gamma_1\gamma_2$  l'arc naturellement défini par assemblage de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ . On notera de façon analogue  $\gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_k$  l'assemblage de  $k$  arcs.

On appellera *lacet basé en  $z$*  tout arc  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  tel que  $\gamma(0) = \gamma(1) = z$ . On paramétrera également un lacet par  $S^1$ .

On appellera *droite* (resp. *demi-droite négative*, *demi-droite positive*, *segment*, *cercle*) d'une surface  $M$  tout plongement topologique propre de  $\mathbb{R}$  (resp.  $]-\infty, 0]$ ,  $[0, +\infty[$ ,  $[0, 1]$ ,  $S^1$ ), plus précisément, toute classe d'équivalence d'un tel plongement par reparamétrage préservant l'orientation. Un tel objet est alors déterminé par son image et une orientation. On utilisera, là encore, le mot droite, demi-droite, segment ou cercle, pour désigner l'image du plongement.

Si  $\Gamma$  est une droite de  $\mathbb{R}^2$ , le théorème de Schoenflies nous dit qu'il existe  $h \in \text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$  tel que  $h \circ \Gamma(t) = (0, t)$ . L'ensemble  $h^{-1}(]0, +\infty[ \times \mathbb{R})$  est une composante connexe de  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  indépendante de  $h$ , qui sera notée  $D(\Gamma)$ ; l'ensemble  $h^{-1}(]-\infty, 0[ \times \mathbb{R})$  est l'autre composante, elle sera notée  $G(\Gamma)$ .

### 1.3. Isotopies

Rappelons qu'une isotopie  $I = (f_t)_{t \in [0,1]}$  sur une surface  $M$  est une famille  $(f_t)_{t \in [0,1]}$  d'homéomorphismes de  $M$  telle que les applications  $(z, t) \mapsto f_t(z)$  et  $(z, t) \mapsto f_t^{-1}(z)$  soient continues sur  $M \times [0, 1]$ . On peut définir alors l'isotopie réciproque  $I^{-1} = (f_t^{-1})_{t \in [0,1]}$ .

Deux isotopies  $I^0 = (f_t^0)_{t \in [0,1]}$  et  $I^1 = (f_t^1)_{t \in [0,1]}$  sont *homotopes* s'il existe une famille  $(f_{t,s})_{(t,s) \in [0,1]^2}$  d'homéomorphismes de  $M$  telle que :

- $f_{t,0} = f_t^0$  pour tout  $t \in [0, 1]$  ;
- $f_{t,1} = f_t^1$  pour tout  $t \in [0, 1]$  ;
- les applications  $(z, t, s) \mapsto f_{t,s}(z)$  et  $(z, t, s) \mapsto f_{t,s}^{-1}(z)$  sont continues sur  $M \times [0, 1]^2$ .

Soient  $I = (f_t)_{t \in [0,1]}$  une isotopie sur une surface  $M$  et  $I' = (f'_t)_{t \in [0,1]}$  une isotopie sur une surface  $M'$ . On dira que  $I$  et  $I'$  sont *conjuguées* s'il existe un homéomorphisme  $h : M \rightarrow M'$  tel que  $f'_t = h \circ f_t \circ h^{-1}$ , pour tout  $t \in [0, 1]$ .

Soit  $(I_k)_{1 \leq k \leq k_0}$  une famille d'isotopies issues de l'identité sur une surface  $M$  ; on peut définir par assemblage l'isotopie  $I_1 I_2 \dots I_{k_0} = (f_t)_{t \in [0,1]}$  de la façon suivante : on écrit  $I_k = (f_t^k)_{t \in [0,1]}$  et on pose

$$f^t(z) = f_{k_0 t - k + 1}^k \circ f_1^{k-1} \circ f_1^{k-2} \circ \dots \circ f_1^1(z) \quad \text{si} \quad \frac{k-1}{k_0} \leq t \leq \frac{k}{k_0}.$$

On peut interpréter également une isotopie comme une application continue  $t \mapsto f_t$  de  $[0, 1]$  dans l'espace  $\text{Homéo}(M)$  des homéomorphismes de  $M$  muni de la  $C^0$ -topologie, c'est-à-dire de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, tant des homéomorphismes que de leur réciproque. Rappelons des résultats classiques sur le sujet.

L'ensemble des homéomorphismes de la sphère  $S^2$  isotopes à l'identité coïncide avec  $\text{Homéo}^+(S^2)$ . On peut construire une rétraction forte par déformation de l'espace  $\text{Homéo}^+(S^2)$ , muni de la  $C^0$ -topologie, sur  $\text{SO}(3, \mathbb{R})$  (voir H. Kneser [11]). Son groupe fondamental est  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . On sait également que  $\text{Homéo}^+(S^2)$  est localement contractile (voir E. Dyer et M.-E. Hamstrom [9]).

L'ensemble des homéomorphismes de  $\mathbb{R}^2$  isotopes à l'identité coïncide avec  $\text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$ . Muni de la  $C^0$ -topologie, il est également localement contractile et on peut construire une rétraction forte par déformation sur  $\text{SO}(2, \mathbb{R})$ . Son groupe fondamental est infini cyclique. Considérons l'isotopie  $R_\infty = (r_t)_{t \in [0,1]}$ , où  $r_t$  est la rotation d'angle  $-2\pi t$ , c'est-à-dire

$$r_t(x, y) = (\cos 2\pi t x + \sin 2\pi t y, -\sin 2\pi t x + \cos 2\pi t y).$$

Si  $I = (f_t)_{t \in [0,1]}$  est une isotopie issue de l'identité, et  $k \in \mathbb{Z}$  un entier, on peut définir par assemblage l'isotopie  $R_\infty^k I$ . Si  $I' = (f'_t)_{t \in [0,1]}$  est une isotopie issue de l'identité et aboutissant au même homéomorphisme  $f'_1 = f_1$ , il existe alors un unique entier  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $I'$  soit homotope à  $R_\infty^k I$ .

L'ensemble des homéomorphismes de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  isotopes à l'identité est formé des homéomorphismes  $f \in \text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$  qui fixent les deux bouts. Là encore, si  $I = (f_t)_{t \in [0,1]}$  et  $I' = (f'_t)_{t \in [0,1]}$  sont deux isotopies sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  issues de l'identité et aboutissant au même homéomorphisme  $f'_1 = f_1$ , il existe un unique entier  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $I'$  soit homotope à  $R_\infty^k I$ .

Si  $X \subset \mathbb{R}^2$  a exactement deux éléments, l'espace des homéomorphismes de  $\mathbb{R}^2 \setminus X$  isotopes à l'identité est formé des homéomorphismes  $f \in \text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2 \setminus X)$  qui fixent les trois bouts, il est simplement connexe. Deux isotopies  $I = (f_t)_{t \in [0,1]}$  et  $I' = (f'_t)_{t \in [0,1]}$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus X$  issues de l'identité et aboutissant au même homéomorphisme  $f'_1 = f_1$  sont homotopes.

Pour toute isotopie  $I = (f_t)_{t \in [0,1]}$  sur  $M$ , on notera  $\text{Fix}(I) = \bigcap_{t \in [0,1]} \text{Fix}(f_t)$  l'ensemble des points fixes de  $I$  et on appellera *trajectoire* de  $z \in M$  l'arc  $I(z) : t \mapsto f_t(z)$ .

#### 1.4. Isotopies locales

Soient  $W$  et  $W'$  deux voisinages d'un point  $z_0$  d'une surface orientée  $M$  et  $f : W \rightarrow W'$  un homéomorphisme préservant l'orientation, qui fixe  $z_0$ . On appellera *isotopie locale de  $f$  en  $z_0$*  toute famille  $I = (f_t)_{t \in [0,1]}$ , telle que :

- chaque  $f_t$  soit un homéomorphisme d'un voisinage  $V_t \subset W$  de  $z_0$  dans un voisinage  $V'_t \subset W'$  de  $z_0$  ;
- les parties  $\{(z, t) \in M \times [0, 1] \mid z \in V_t\}$  et  $\{(z, t) \in M \times [0, 1] \mid z \in V'_t\}$  soient ouvertes dans  $M \times [0, 1]$  ;
- l'application  $(z, t) \rightarrow f_t(z)$  soit continue sur  $\{(z, t) \in M \times [0, 1] \mid z \in V_t\}$  ;
- l'application  $(z, t) \rightarrow f_t^{-1}(z)$  soit continue sur  $\{(z, t) \in M \times [0, 1] \mid z \in V'_t\}$  ;
- on ait  $f_0 = \text{Id}_{V_0}$  et  $f_1 = f|_{V_1}$  ;
- pour tout  $t \in [0, 1]$ , on ait  $f_t(z_0) = z_0$ .

On peut définir, là encore, l'isotopie réciproque  $I^{-1} = (f_t^{-1})_{t \in [0,1]}$ . De même, si  $(I_k)_{1 \leq k \leq k_0}$  est une famille d'isotopies locales en  $z_0$ , on peut définir, quitte à restreindre le domaine de définition, l'isotopie locale  $I_1 I_2 \dots I_{k_0}$  par la même formule que dans le cas global.

Soient  $\widehat{W}$  et  $\widehat{W}'$  deux voisinages d'un point  $\widehat{z}_0$  d'une surface orientée  $\widehat{M}$  et  $\widehat{f} : \widehat{W} \rightarrow \widehat{W}'$  un homéomorphisme préservant l'orientation. On dira qu'une isotopie locale  $\widehat{I} = (\widehat{f}_t)_{t \in [0,1]}$  de  $\widehat{f}$  en  $\widehat{z}_0$  est *conjuguée à  $I$*  s'il existe un voisinage  $U$  de  $z_0$  dans  $M$ , un voisinage  $\widehat{U}$  de  $\widehat{z}_0$

dans  $\widehat{M}$  et un homéomorphisme  $h : U \rightarrow \widehat{U}$  préservant les orientations, tels que l'égalité  $f_t(z) = h^{-1} \circ \widehat{f}_t \circ h(z)$  ait un sens et soit vérifiée pour tout  $t \in [0, 1]$  et pour tout  $z \in U$ . Les classes de conjugaison des isotopies locales de l'identité en  $z_0$  sont caractérisées par leur *nombre de rotation*. Choisissons un disque fermé  $D \subset M$  contenant  $z_0$  en son intérieur. Si  $J$  est une isotopie locale de l'identité en  $z_0$ , alors pour tout point  $z \in D \setminus \{z_0\}$  assez proche de  $z_0$ , la trajectoire  $J(z)$  est un lacet inclus dans  $D \setminus \{z_0\}$ . Il existe un entier  $k \in \mathbb{Z}$  tel que cette trajectoire soit librement homotope dans  $D \setminus \{z_0\}$  à  $(\partial D)^k$ . L'entier  $k$  ne dépend que de l'isotopie  $J$ , c'est le nombre de rotation  $k = \rho(J, z_0)$  de  $J$ . Ainsi, par exemple, l'isotopie  $R_\infty$  définie plus haut se prolonge naturellement en une isotopie de la sphère  $\mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\}$  et on a  $\rho(R_\infty, \infty) = 1$ . Par contre, on a  $\rho(R_\infty, 0) = -1$ . Si  $J$  est une isotopie locale de l'identité en  $z_0$  on peut naturellement définir par assemblage l'isotopie locale  $JI$  de  $f$  en  $z_0$ . Notons que  $JI$  peut être conjuguée à une isotopie homotope à  $I$ , même si  $\rho(J, z_0) \neq 0$ . C'est le cas si  $z_0$  est un puits ou une source de  $f$ . En effet, dans le cas d'un puits on peut toujours supposer, quitte à conjuguer  $f$ , que  $z_0$  est le bout supérieur de l'anneau  $\mathbf{T}^1 \times \mathbb{R}$  et que  $f(x, y) = (x, y + 1)$ . Pour toute isotopie locale  $I$  de  $f$  en  $z_0$ , il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $I$  soit homotope à  $I_k = (f_t^k)_{t \in [0, 1]}$ , où  $f_t^k(x, y) = (x + (kt + \mathbb{Z}), y + t)$ . Le nombre de rotation en  $z_0$  de l'isotopie  $J = (g_t)_{t \in [0, 1]}$ , où  $g_t(x, y) = (x + (t + \mathbb{Z}), y)$ , est égal à 1. Pour montrer que  $JI$  est conjuguée à  $I$ , à homotopie près, il suffit de montrer que  $JI_k$  est conjuguée à  $I_k$ , à homotopie près. Posons  $H(x, y) = (x + y, y)$  et remarquons que  $H \circ f_t^k \circ H^{-1}(x, y) = f_t^{k+1}(x, y)$ . On laisse au lecteur le soin de vérifier que  $I_{k+1}$  est homotope à  $JI_k$ .

### 1.5. Feuilletages

Si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage topologique orienté sur une surface orientée  $M$ , on notera  $\phi_z$  la feuille passant par un point  $z \in M$ , on notera également  $\phi_z^-$  et  $\phi_z^+$  les demi-feuilles négatives et positives (contenant l'extrémité  $z$ ). On dira qu'un disque ouvert  $V$  est un *voisinage trivialisant* s'il existe un homéomorphisme  $h : V \rightarrow ]0, 1[^2$  préservant l'orientation, qui envoie le feuilletage restreint  $\mathcal{F}|_V$  sur le feuilletage vertical orienté de haut en bas. On dira alors que  $h$  est une *carte trivialisante*. On dira qu'un arc  $\gamma : I \rightarrow M$  est *positivement transverse* à  $\mathcal{F}$  si, pour tout  $t_0 \in I$ , il existe une carte trivialisante  $h : V \rightarrow ]0, 1[^2$ , telle que l'application  $p_1 \circ h \circ \gamma$  soit définie et strictement croissante au voisinage de  $t_0$ . Rappelons qu'une feuille  $\phi$  est *errante* s'il existe un arc  $\gamma : ]0, 1[ \rightarrow M$  positivement transverse à  $\mathcal{F}$  rencontrant  $\phi$ , ne rencontrant aucune feuille fermée et ne rencontrant aucune feuille en plus d'un point. L'ensemble  $\alpha$ -limite, de même que l'ensemble  $\omega$ -limite, d'une feuille  $\phi$  sont réunions de feuilles non errantes. Ainsi, si toute feuille de  $\mathcal{F}$  est errante, les ensembles limites sont vides et donc toute feuille est une droite. La théorie de Poincaré-Bendixson nous dit qu'un flot de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  sans point fixe n'a que des points errants (voir par exemple [17]). La preuve est encore valable pour un feuilletage topologique : un feuilletage de  $\mathbb{R}^2$  n'a que des feuilles errantes. Plus précisément tout arc positivement transverse à  $\mathcal{F}$  rencontre toute feuille en au plus un point. Rappelons également qu'il n'existe aucun lacet qui est positivement transverse à  $\mathcal{F}$ .

Supposons que  $M$  ait un bout isolé  $z$ . On dira que  $z$  est un *puits* (resp. une *source*) de  $\mathcal{F}$  s'il existe une partie ouverte  $U \subset M$  dont  $z$  est un bout, et un homéomorphisme  $h : U \rightarrow \mathbf{D}_1 \setminus \{0\}$  envoyant le bout  $z$  sur le bout 0 et le feuilletage  $\mathcal{F}|_U$  sur le feuilletage radial de  $\mathbf{D}_1 \setminus \{0\}$  dont les feuilles sont dirigées vers 0 (resp. vers l'extérieur).



Dans le cas où  $M$  est le complémentaire d'une partie finie  $X$  d'une sphère topologique  $S$ , on peut voir  $\mathcal{F}$  comme un feuilletage singulier sur  $S$  dont les singularités sont les points de  $X$ . Rappelons des résultats classiques sur la dynamique de flots sur les surfaces qui se généralisent naturellement au cas des feuilletages, en notant  $\alpha(\phi)$  et  $\omega(\phi)$  les ensembles  $\alpha$ -limite et  $\omega$ -limite, dans  $S$ , d'une feuille  $\phi$  (voir encore [17]).

Toute feuille  $\phi$  qui n'est pas fermée est disjointe de son ensemble  $\omega$ -limite. Elle est donc contenue dans une composante connexe  $W$  de  $S \setminus \omega(\phi)$ , composante qui est simplement connexe puisque  $\omega(\phi)$  est connexe. Le complémentaire de  $W$  est une partie fermée connexe remplie (i.e. de complémentaire connexe) qui sera notée  $\bar{\omega}(\phi)$  et appelée *ensemble  $\omega$ -limite rempli*. On définit de façon analogue  $\bar{\alpha}(\phi)$ . Il y a trois possibilités :

- $\bar{\omega}(\phi) = \omega(\phi)$  se réduit à une singularité ;
- $\omega(\phi)$  est une feuille fermée  $\phi'$  et  $\bar{\omega}(\phi)$  est le disque fermé bordé par  $\phi'$  qui ne contient pas  $\phi$  ;
- $\omega(\phi)$  est formé de singularités et de feuilles  $\phi'$  joignant deux singularités (éventuellement égales).

Dans chacun des cas,  $\omega(\phi) = \partial\bar{\omega}(\phi)$ . Dans les deux derniers cas, on peut être plus précis. On a l'alternative suivante :

- pour tout  $\phi' \subset \omega(\phi)$ , pour tout point  $z \in \phi'$  et pour tout voisinage trivialisant  $V$  de  $z$ , les points de  $V$  qui sont à gauche de la feuille de  $\mathcal{F}_V$  passant par  $z$  appartiennent à  $\bar{\omega}(\phi)$  contrairement aux points situés à droite ;
- pour tout  $\phi' \subset \omega(\phi)$ , pour tout point  $z \in \phi'$  et pour tout voisinage trivialisant  $V$  de  $z$ , les points de  $V$  qui sont à droite de la feuille de  $\mathcal{F}_V$  passant par  $z$  appartiennent à  $\bar{\omega}(\phi)$  contrairement aux points situés à gauche.

On en déduit que l'une des assertions suivantes est vraie :

- tout arc positivement transverse à  $\mathcal{F}$  issu d'un point  $z \in \bar{\omega}(\phi)$  est inclus dans  $\bar{\omega}(\phi)$  ;
- tout arc positivement transverse à  $\mathcal{F}$  issu d'un point  $z \notin \bar{\omega}(\phi)$  est disjoint de  $\bar{\omega}(\phi)$ .

Rappelons également que l'une des assertions suivantes est vraie, si  $\phi$  n'est pas fermée :

- les ensembles  $\bar{\omega}(\phi)$  et  $\bar{\alpha}(\phi)$  se réduisent au même point ;
- les ensembles  $\bar{\omega}(\phi)$  et  $\bar{\alpha}(\phi)$  sont disjoints.

Enfin, remarquons que  $\bar{\omega}(\phi)$  et  $\bar{\alpha}(\phi)$  contiennent chacun au moins une singularité.

## 1.6. Indices

Soient  $W$  et  $W'$  deux voisinages d'un point  $z_0$  d'une surface orientée  $M$  et  $f : W \rightarrow W'$  un homéomorphisme préservant l'orientation, qui fixe  $z_0$ . Supposons de plus que  $z_0$  est un point fixe isolé. Rappelons comment on définit l'*indice de Lefschetz*  $i(f, z_0)$ . Soit  $V \subset W$  un disque ouvert contenant  $z_0$  et  $h : V \rightarrow \mathbf{D}_1$  un homéomorphisme qui envoie  $z_0$  sur 0 et qui préserve les orientations. Si  $r$  est assez petit, l'homéomorphisme  $f_h = h \circ f \circ h^{-1}$  est bien défini sur  $\mathbf{D}_r$  et n'a pas de point fixe autre que 0. Soit  $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbf{D}_r \setminus \{0\}$  un lacet librement homotope à  $\partial\mathbf{D}_r$  dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Le degré de l'application

$$\theta \mapsto \frac{f_h \circ \gamma(\theta) - \gamma(\theta)}{\|f_h \circ \gamma(\theta) - \gamma(\theta)\|}$$

ne dépend pas du lacet choisi, puisque tous ces lacets sont homotopes dans  $\mathbf{D}_r \setminus \{0\}$ . Il ne dépend pas non plus de  $h$ , c'est un invariant de conjugaison locale qu'on notera  $i(f, z_0)$ . Remarquons que  $i(f^{-1}, z_0) = i(f, z_0)$ . Rappelons également que si  $f \in \text{Homéo}^+(S^2)$  a un nombre fini de points fixes, la formule de Lefschetz nous dit que  $\sum_{z \in \text{Fix}(f)} i(f, z) = 2$ .

Définissons maintenant l'indice  $i(I, z_0)$  d'une isotopie locale  $I$  de  $f$  en  $z_0$ , qui n'est rien d'autre que l'indice partiel introduit par F. Le Roux dans [16]. Soit  $V \subset W$  un disque ouvert contenant  $z$  et  $h: V \rightarrow \mathbf{D}$  un homéomorphisme qui envoie  $z_0$  sur 0 et qui préserve les orientations. Si  $r$  est assez petit, l'isotopie  $(f_{h,t})_{t \in [0,1]} = (h \circ f_t \circ h^{-1})_{t \in [0,1]}$  est bien définie sur  $\mathbf{D}_r$  et  $f_{h,1} = f_h$  n'a pas de point fixe. L'isotopie  $(f_{h,t})_{t \in [0,1]}$  se relève au revêtement universel, par  $\Pi: (x, y) \mapsto (e^{-y} \cos 2\pi x, e^{-y} \sin 2\pi x)$ , en une isotopie  $(\check{f}_{h,t})_{t \in [0,1]}$  issue de l'identité, définie sur  $\mathbb{R} \times ]-\ln r, +\infty[$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $\check{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times ]-\ln r, +\infty[$  un arc joignant un point  $\check{z}$  à  $T(\check{z})$ . L'application

$$t \mapsto \frac{\check{f}_{h,t} \circ \check{\gamma}(t) - \check{\gamma}(t)}{\|\check{f}_{h,t} \circ \check{\gamma}(t) - \check{\gamma}(t)\|}$$

passé au quotient et définit une application continue du cercle  $[0, 1]/0 \sim 1$ , orienté suivant les  $t$  croissants, vers  $S^1$ . Les arcs  $\check{\gamma}$  considérés étant tous homotopes, le degré de cette application ne dépend pas de l'arc. Il ne dépend que de la classe d'homotopie locale. On peut remarquer également que ce degré ne dépend pas de  $h$ , c'est un invariant de conjugaison locale qu'on notera  $i(I, z_0)$ . Remarquons que  $i(I^{-1}, z_0) = i(I, z_0)$ .

Le lien entre l'indice de Lefschetz  $i(f, z_0)$  et les indices d'isotopies  $i(I, z_0)$  est exprimé dans le résultat suivant de F. Le Roux [16] :

**PROPOSITION 1.1.** – *Soient  $W$  et  $W'$  deux voisinages d'un point  $z_0$  d'une surface orientée  $M$  et  $f: W \rightarrow W'$  un homéomorphisme préservant l'orientation ayant  $z_0$  comme point fixe isolé. Soit  $I$  une isotopie locale de  $f$  en  $z_0$  et  $J$  une isotopie locale de l'identité en  $z_0$  de nombre de rotation 1. Si  $i(f, z_0) \neq 1$ , il existe  $k_0 \in \mathbb{Z}$  tel que*

$$i(J^k I, z_0) = \begin{cases} i(f, z_0) - 1 & \text{si } k = k_0, \\ 0 & \text{si } k \neq k_0. \end{cases}$$

**REMARQUE 1.2.** – En fait, si  $i(f, z_0) = 1$ , alors pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on a  $i(J^k I, z_0) = 0$  (on donnera la raison dans la section 3). On comprend mieux ce que signifie ces résultats d'indices si, au lieu de considérer des homéomorphismes, on considère des difféomorphismes et des chemins continus de difféomorphismes pour la  $C^1$ -topologie. On peut dans ce cas éclater le point fixe  $z_0$  et le remplacer par le cercle  $S_{z_0}$  des demi-droites en  $z_0$ . L'application linéaire tangente  $Tf(z_0)$  définit un homéomorphisme de  $S_{z_0}$ . La famille  $Tf_t(z_0)$  nous donne une isotopie de l'identité à  $Tf(z_0)$  dans l'espace des homéomorphismes du cercle, ce qui permet de définir le nombre de rotation réel  $\rho$  de  $Tf(z_0)$ . Si ce nombre n'est pas nul, l'indice  $i(I, z_0)$  est nul. Si  $Tf(z_0)$  n'a pas de valeur propre réelle positive, on sait que  $i(f, z_0) = 1$  et que  $i(J^k I, z_0) = 0$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ . Si, par contre  $Tf(z_0)$  a une valeur propre réelle positive, alors  $\rho$  est entier et  $i(J^k I, z_0) \neq 0$  si  $k \neq -\rho$ . Dans le cas où  $z_0$  est un point selle sans réflexion, on a  $i(f, z_0) = -1$  et  $i(J^{-\rho} I, z_0) = -2$ .

Pour conclure cette sous-section sur les indices, rappelons ce qu'est l'indice de Poincaré-Hopf d'un feuilletage topologique  $\mathcal{F}$  en une singularité (dans le cas où le feuilletage est lisse, il s'agit du classique indice de Poincaré-Hopf du champ de vecteurs tangent). Supposons que  $M$  ait un bout isolé  $z_0$ . Soient  $U \subset M$  un anneau dont  $z_0$  est un bout et  $h: U \rightarrow \mathbf{D}_1 \setminus \{0\}$  un homéomorphisme qui envoie  $z_0$  sur 0 et qui préserve les orientations. Soit  $\gamma: S^1 \rightarrow \mathbf{D}_1 \setminus \{0\}$  un lacet librement homotope à  $\partial\mathbf{D}_1$  dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . On peut recouvrir l'image du lacet par une famille finie  $(V_i)_{i \in I}$  de voisinages trivialisants du feuilletage  $\mathcal{F}_h$  de  $\mathbf{D}_1 \setminus \{0\}$ , image par  $h$  du feuilletage  $\mathcal{F}|_U$ . Pour tout point  $z \in V_i$ , on note  $\phi_{V_i, z}^+$  et  $\phi_{V_i, z}^-$  les demi-feuilles positives et négatives du feuilletage restreint  $\mathcal{F}_h|_{V_i}$ . On peut alors construire une application continue  $\psi$  sur l'image de  $\gamma$ , à valeurs dans  $\mathbf{D}_1 \setminus \{0\}$ , telle que  $\psi(z) \in \phi_{V_i, z}^+ \setminus \{z\}$  pour tout  $i \in I$  et tout  $z \in V_i$ . Le degré de l'application

$$\theta \mapsto \frac{\psi \circ \gamma(\theta) - \gamma(\theta)}{\|\psi \circ \gamma(\theta) - \gamma(\theta)\|}$$

ne dépend pas de la fonction  $\psi$ , ni de la famille  $(V_i)_{i \in I}$ , ni du lacet choisi. Il ne dépend pas non plus de  $h$ ; on le note  $i(\mathcal{F}, z_0)$ . On obtiendrait le même entier en remplaçant les demi-feuilles positives par les demi-feuilles négatives.

### 1.7. Nombre d'enlacement

Soit  $f \in \text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$  et  $I = (f_t)_{t \in [0,1]}$  une isotopie de l'identité à  $f$ , famille prolongée sur  $\mathbb{R}$  par la relation de périodicité  $f_{t+1} = f_t \circ f$ . Supposons que  $f$  a un point périodique  $z^*$  de période  $q \geq 2$ . Si  $z$  est un point fixe de  $f$ , l'application

$$t \mapsto \frac{f_t(z^*) - f_t(z)}{\|f_t(z^*) - f_t(z)\|}$$

définit, par passage au quotient, une application continue du cercle  $\mathbb{R}/q\mathbb{Z}$ , orienté suivant les  $t$  croissants, vers  $S^1$ . Le degré de cette application est le nombre d'enlacement réel  $\ell_{I, z^*}(z)$ . Il ne dépend évidemment pas de la classe d'homotopie de  $I$ . Toute autre isotopie  $I'$  de l'identité à  $f$  est homotope à  $R_\infty^k I$ , où  $k \in \mathbb{Z}$ , et on peut vérifier que  $\ell_{I', z^*}(z) = \ell_{I, z^*}(z) - kq$ . Le nombre d'enlacement  $L_{f, z^*}(z) = \ell_{I, z^*}(z) + q\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  est donc indépendant de l'isotopie choisie. Puisque  $\text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$  est connexe par arcs, on en déduit que si  $h \in \text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$ , l'isotopie  $h \circ I \circ h^{-1} = (h \circ f_t \circ h^{-1})_{t \in [0,1]}$  est homotope à  $I$  (à extrémité initiale fixée) et on a donc  $l_{h \circ I \circ h^{-1}, h(z^*)}(h(z)) = \ell_{I, z^*}(z)$ . Ainsi, on peut définir le nombre d'enlacement réel  $\ell_{I, z^*}(z)$ , dans le cas où  $P$  est un plan orienté, où  $f \in \text{Homéo}^+(P)$ , où  $z^*$  est un point périodique de  $f$ , où  $z$  est un point fixe et où  $I$  est une isotopie de l'identité à  $f$ . Il suffit de choisir un homéomorphisme  $h: P \rightarrow \mathbb{R}^2$  préservant les orientations et de poser  $\ell_{I, z^*}(z) = l_{h \circ I \circ h^{-1}, h(z^*)}(h(z))$ . On définit alors  $L_{f, z^*}(z) = \ell_{I, z^*}(z) + q\mathbb{Z}$ . Remarquons que le nombre d'enlacement réel  $\ell_{I, z'}(z)$  peut être défini de façon analogue si  $f$  a deux points fixes distincts  $z$  et  $z'$  et que  $\ell_{I, z'}(z) = \ell_{I, z}(z')$ .

On utilisera plus tard les résultats suivants :

**PROPOSITION 1.3.** – Soient  $P_0$  et  $P_1$  deux plans orientés, soient  $f_0 \in \text{Homéo}^+(P_0)$  et  $f_1 \in \text{Homéo}^+(P_1)$ . On suppose que :

- (i) il existe un homéomorphisme  $h : W'_0 \rightarrow W'_1$  préservant les orientations entre un disque ouvert  $W'_0 \subset P_0$  et un disque ouvert  $W'_1 \subset P_1$  tel que  $h(f_0(z)) = f_1(h(z))$  pour tout  $z \in W'_0 \cap f_0^{-1}(W'_0)$  ;
- (ii) le point  $z_0^*$  est un point périodique de  $f_0$ , de période  $q \geq 2$ , dont l'orbite  $O(z_0^*)$  est incluse dans  $W'_0$  ;
- (iii) le point  $z_0$  est un point fixe de  $f_0$  appartenant à  $W'_0$  ;
- (iv) il existe un disque ouvert  $W_0 \subset W'_0 \cap f_0^{-1}(W'_0)$  contenant l'orbite  $O(z_0^*)$  ainsi que le point  $z_0$ .

Le point  $z_1^* = h(z_0^*)$  est alors un point périodique de  $f_1$ , de période  $q$ , le point  $z_1 = h(z_0)$  un point fixe de  $f_1$  et on a  $L_{f_1, z_1^*}(z_1) = L_{f_0, z_0^*}(z_0)$ .

*Démonstration.* – Il est clair que  $z_1^*$  est un point périodique de  $f_1$ , de période  $q$ , et que  $z_1$  est un point fixe de  $f_1$ . Montrons que  $L_{f_1, z_1^*}(z_1) = L_{f_0, z_0^*}(z_0)$ .

Quitte à conjuguer  $f_0$  et  $f_1$ , on peut supposer que  $P_0 = P_1 = \mathbb{R}^2$ . Posons  $W_1 = h(W_0)$ . Fixons  $i \in \{0, 1\}$ . Rappelons que  $\check{A}_{z_i}$  est le revêtement universel de  $A_{z_i} = \mathbb{R}^2 \setminus \{z_i\}$ , que  $\check{\pi}_{z_i} : \check{A}_{z_i} \rightarrow A_{z_i}$  est la projection de revêtement et que  $\check{T}_{z_i}$  est l'automorphisme de revêtement défini par le bord orienté du disque de centre  $z_i$  et de rayon 1. Notons  $\check{W}'_i \subset \check{A}_{z_i}$  et  $\check{W}_i \subset \check{A}_{z_i}$  les préimages respectives de  $W'_i \setminus \{z_i\}$  et  $W_i \setminus \{z_i\}$  par  $\check{\pi}_{z_i}$ . Ce sont les revêtements universels respectifs de  $W'_i \setminus \{z_i\}$  et  $W_i \setminus \{z_i\}$ . Choisissons une isotopie  $I_i$  de l'identité à  $f_i$  qui fixe  $z_i$ . Relevons l'isotopie  $I_i|_{\check{A}_{z_i}}$  en une isotopie de l'identité à  $\check{f}_i$  sur  $\check{A}_{z_i}$ . On peut relever  $h$  en une application  $\check{h} : \check{W}'_0 \rightarrow \check{W}'_1$  qui vérifie  $\check{h} \circ \check{T}_{z_0} = \check{T}_{z_1} \circ \check{h}$ . Les applications  $\check{h} \circ \check{f}_0$  et  $\check{f}_1 \circ \check{h}$ , restreintes à  $\check{W}_0$ , sont des homéomorphismes de  $\check{W}_0$  sur  $\check{f}_1(\check{W}_0)$  qui relèvent chacune l'homéomorphisme  $(h \circ f_0)|_{W_0} = (f_1 \circ h)|_{W_0} : W_0 \rightarrow f_1(W_1)$ . On en déduit qu'il existe un entier  $k$  tel que  $\check{f}_1 \circ \check{h}(\check{z}) = \check{T}_{z_1}^k \circ \check{h} \circ \check{f}_0(\check{z})$  pour tout  $\check{z} \in \check{W}_0$ . Si  $\check{z}_0^* \in \check{A}_0$  est un antécédent de  $z_0^*$  par  $\check{\pi}_{z_0}$ , alors  $\check{z}_1^* = \check{h}(\check{z}_0^*)$  est un antécédent de  $z_1^*$  par  $\check{\pi}_{z_1}$ . Il existe un entier  $p \in \mathbb{Z}$  tel que  $\check{f}_0^q(\check{z}_0^*) = \check{T}_{z_0}^p(\check{z}_0^*)$ . On en déduit que  $\check{f}_1^q(\check{z}_1^*) = \check{T}_{z_1}^{p+kq}(\check{z}_1^*)$ . Ainsi, on a  $\ell_{I_0, z_0^*}(z_0) + kq$ .  $\square$

**PROPOSITION 1.4.** – Soient  $P$  un plan orienté et  $f \in \text{Homéo}^+(P)$ . On suppose que  $f$  a un point périodique  $z^*$  de période  $q \geq 2$  ainsi qu'un point fixe  $z$ . On suppose de plus qu'il existe une droite  $\Gamma$  telle que :

- $O(z^*) \subset D(\Gamma)$  ;
- $z \in G(\Gamma)$  ;
- $f(\Gamma) \subset G(\Gamma)$  ;
- $f^{-1}(\Gamma) \subset D(\Gamma)$ .

Alors on a  $L_{f, z^*}(z) = 0$ . De plus, si  $f$  a un point fixe  $z' \in D(\Gamma)$ , alors pour toute isotopie  $I$  de l'identité à  $f$ , on a  $\ell_{I, z^*}(z) = 0$  si et seulement si  $\ell_{I, z'}(z) = 0$ .

*Démonstration.* – Quitte à conjuguer  $f$ , on peut supposer que  $P = \mathbb{R}^2$ . Fixons un relèvement  $\check{\Gamma}$  de  $\Gamma$  au revêtement universel  $\check{A}_z$  de  $A_z = \mathbb{R}^2 \setminus \{z\}$ . C'est une droite de  $\check{A}_z$ . Il existe alors un unique relèvement  $\check{f}_z$  de  $f|_{A_z}$  tel que  $\check{f}_z(\check{\Gamma}) \subset G(\check{\Gamma})$  et  $\check{f}_z^{-1}(\check{\Gamma}) \subset D(\check{\Gamma})$ . Remarquons maintenant que  $z^*$  a un unique antécédent  $\check{z}^* \in D(\check{\Gamma})$  et que  $\check{z}^*$  est un point périodique de  $\check{f}_z$ , de période  $q$ . On en déduit que  $\ell_{I, z^*}(z) = 0$ , pour toute isotopie  $I$  de l'identité à  $f$  qui fixe  $z$  et qui se relève, restreinte à  $A_z$ , en une isotopie de l'identité à  $\check{f}_z$ . Remarquons que si  $f$

a un point fixe  $z' \in D(\Gamma)$ , ce point a un unique antécédent dans  $D(\check{\Gamma})$  et cet antécédent est un point fixe de  $\check{f}_z$ . Ainsi, on a  $\ell_{I,z'}(z) = 0$ .  $\square$

## 2. Idée de la preuve et plan de l'article

Nous avons donné, à la fin de l'introduction, une application du théorème B. En gardant les mêmes notations, remarquons que c'est la non-nullité de  $p$ , et non pas le fait que  $p \notin q\mathbb{Z}$ , qui permet de déduire l'existence de points périodiques de périodes arbitrairement grandes. En d'autres termes, c'est la propriété  $\ell_{I,z^*}(z) \neq 0$ , où  $I$  est une isotopie de l'identité à  $f$  qui fixe  $z$  et qui se relève à  $\check{A}_z$  en une isotopie de l'identité à  $\check{f}_z$ . L'existence d'un point fixe  $z$  tel que  $\ell_{I,z^*}(z) \neq 0$  était déjà connue. Elle se déduit facilement, après extension de  $f$  à un tore, puis approximation par un difféomorphisme, du théorème 9.2.1 de [13]. Elle peut également se déduire de la proposition 3.1 de [15]. Cette propriété n'est pas sans lien avec certains résultats de géométrie symplectique. Rappelons le résultat suivant (voir C. Viterbo [18]) : si  $f$  est le temps 1 d'une isotopie hamiltonienne à support compact sur  $\mathbb{R}^{2n}$ , alors il existe un point fixe  $z$  tel que la valeur de l'action en ce point, définie par l'isotopie, est non nulle.

Dans le cas où  $n = 1$ , l'action en  $z$  est bien définie si  $f$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  à support compact qui préserve l'aire. Plus généralement, l'action en un point fixe  $z$  est bien définie si  $f$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  qui vérifie la propriété de prolongement (ii) énoncée à la fin de l'introduction et qui préserve une mesure finie invariante  $\mu$ , sans atome fixe. Reprenons les notations de la fin de l'introduction. L'homéomorphisme  $\bar{f}_z = \bar{f}|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{z\}}$  se prolonge en un homéomorphisme  $\bar{\bar{f}}_z$  de l'anneau compact  $\bar{\bar{A}}_z = \bar{A}_z \sqcup S_z$ , égal à  $T_z f$  sur  $S_z$ . Si  $\check{p}_{1,z} : \check{A}_z \rightarrow \mathbb{R}$  est une application continue vérifiant  $\check{p}_{1,z}(T_z(\check{z}')) = \check{p}_{1,z}(\check{z}') + 1$ , pour tout  $\check{z}' \in \check{A}_z$ , alors la fonction  $\check{p}_{1,z} \circ \check{f}_z - \check{p}_{1,z}$  relève une fonction continue  $\psi_z : A_z \rightarrow \mathbb{R}$ . L'intégrale  $\int_{A_z} \psi_z d\mu$  est alors bien définie et ne dépend pas de  $\check{p}_{1,z}$ , c'est le nombre de rotation de  $\mu$ . C'est également la valeur de l'action en  $z$ . On peut définir similairement l'action dans le cas où  $f$  est un homéomorphisme qui vérifie la propriété de prolongement (ii) et qui préserve une mesure finie invariante  $\mu$  dont le support est disjoint de  $\text{Fix}(f)$ . Il n'est pas nécessaire, dans ce cas, de compactifier  $\bar{A}_z$ . Remarquons que le nombre d'enlacement  $\ell_{I,z^*}(z)$  n'est rien d'autre que l'action définie par la mesure discrète équilibrée sur  $O(z^*)$ , de masse totale  $q$ .

Pour démontrer le théorème, nous nous placerons sur la sphère. Remarquons que l'on peut prolonger  $f$  en un homéomorphisme de la sphère  $S = \mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\}$  qui fixe le point à l'infini. Si  $z$  et  $z'$  sont deux points fixes de  $f$ , on peut définir dans  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$  le nombre de rotation de  $z^*$  dans l'anneau  $S \setminus \{z, z'\}$ , où on choisit comme générateur du premier groupe d'homologie le bord orienté d'un petit cercle centré en  $z$ . De même, on peut définir le nombre réel dès qu'on se fixe une isotopie  $I$  qui fixe  $z$  et  $z'$ . Ce n'est rien d'autre que  $\ell_{I|_{\mathbb{R}^2}, z^*}(z)$  si  $z' = \infty$  et  $-\ell_{I|_{\mathbb{R}^2}, z^*}(z')$  si  $z = \infty$ . Nous verrons dans la section 4 que pour montrer le théorème B, il suffit de prouver que si  $f$  est un homéomorphisme de  $S$  qui préserve l'orientation et qui a un point périodique de période  $q \geq 2$ , il existe alors deux points fixes  $z$  et  $z'$  tels que le nombre de rotation (élément de  $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ ) de  $z^*$  dans l'anneau  $S \setminus \{z, z'\}$  ne soit pas nul. Nous expliquerons dans la section 6 pourquoi il suffit de considérer le cas où  $f$  a un nombre fini de points fixes.

Rappelons qu'en géométrie symplectique, les points fixes s'obtiennent en cherchant les points critiques d'une fonctionnelle d'action définie sur un espace de lacet ou sur un espace de grande dimension (si on utilise les fonctions génératrices) et que les valeurs critiques sont égales à l'action au point fixe associé. Pour démontrer le théorème B, nous étudierons les homéomorphismes  $f$  d'une sphère  $S$  qui préservent l'orientation et qui ont un nombre fini de points fixes. Nous avons montré dans [14] que si  $I$  est une isotopie de l'identité à  $f$  telle que la trajectoire de tout point  $z \in \text{Fix}(f) \setminus \text{Fix}(I)$  n'est pas homotope à un point dans  $S \setminus \text{Fix}(I)$ , il existe un feuilletage orienté  $\mathcal{F}$  sur  $S$  dont les singularités sont les points fixes de  $I$  et dont les feuilles sont « poussées vers la gauche » par l'isotopie. Plus précisément, la trajectoire d'un point  $z \notin \text{Fix}(I)$  est homotope, à extrémités fixées, à un arc positivement transverse à  $\mathcal{F}$ . Une telle isotopie sera dite *maximale* et le feuilletage *dynamiquement transverse* à  $I$ . La dynamique de  $\mathcal{F}$  est alors duale à celle de  $I$ . Toute propriété conservative de  $f$  se traduit par une propriété dissipative de  $\mathcal{F}$ . Donnons comme exemple le fait que la dynamique de  $\mathcal{F}$  est de type gradient si  $f$  préserve l'aire. Un autre exemple de propriété conservative est la présence d'un point périodique  $z^*$  de période  $q \geq 2$ . Cette orbite va définir une filtration de  $\mathcal{F}$ . Plus précisément, le lacet  $I^q(z^*) = \prod_{0 \leq i < q} I(f^{q-1}(z^*))$  de  $z^*$  est homotope à un lacet  $\Gamma$  positivement transverse à  $\mathcal{F}$ . Ce lacet étant homologue à zéro, il existe donc une fonction  $\lambda_\Gamma : S \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}$ , définie à une constante additive près, telle que  $\lambda_\Gamma(z') - \lambda_\Gamma(z) = \Gamma \wedge \gamma$ , où  $\gamma$  est un arc quelconque qui joint  $z$  à  $z'$  et où  $\Gamma \wedge \gamma$  représente le nombre d'intersection algébrique entre  $\Gamma$  et  $\gamma$ . Puisque la fonction  $\lambda_\Gamma$  décroît le long des feuilles, elle définit une décomposition de  $S$  en blocs isolants de  $\mathcal{F}$ . La fonction  $\lambda_\Gamma$  n'est pas canonique, mais la différence des valeurs qu'elle prend entre deux points de  $\text{Fix}(I)$  a un sens dynamique, qui se traduit en termes de nombre d'enlacement. Plus précisément, on peut d'abord noter, puisque  $\Gamma$  est homotope à  $I^q(z^*)$ , que les valeurs que prend  $\lambda_\Gamma$  sur  $\text{Fix}(I)$  ne dépendent que de  $I$  : on posera donc  $\lambda_{I,z^*} = \lambda_\Gamma|_{\text{Fix}(I)}$ . On peut également remarquer que si  $z$  et  $z'$  sont deux points de  $\text{Fix}(I)$ , la différence  $\lambda_{I,z^*}(z) - \lambda_{I,z^*}(z')$  n'est rien d'autre que le nombre de rotation réel de  $z^*$  dans l'anneau  $S \setminus \{z, z'\}$  où on a choisi, comme générateur du premier groupe d'homologie, le bord orienté d'un petit cercle centré en  $z$ . Ainsi, pour démontrer le théorème B, il suffira de prouver qu'il existe une isotopie maximale  $I$  pour laquelle cette fonction  $\lambda_{I,z^*}$  ne peut pas prendre ses valeurs dans  $q\mathbb{Z}$ . Comme argument principal, nous expliquerons comment construire à partir d'une isotopie  $I$  telle que  $\lambda_{I,z^*}$  prenne ses valeurs dans  $q\mathbb{Z}$  une autre isotopie maximale  $I'$ . Plus précisément, nous verrons que si pour toute isotopie maximale  $I$ , on peut choisir  $\lambda_{I,z^*}|_{\text{Fix}(I)}$  à valeurs dans  $q\mathbb{Z}$ , alors on peut construire une suite d'isotopies maximales distinctes contenant à chaque fois au moins un nouveau point fixe, contredisant la finitude de  $\text{Fix}(f)$ . Pour cela, nous comparerons les indices  $i(f, z)$ ,  $i(I, z)$  et  $i(\mathcal{F}, z)$  si  $z \in \text{Fix}(I)$ . Nous verrons également que les dynamiques locales de  $\mathcal{F}$  et de  $\mathcal{F}'$  en  $z$  sont liées, si  $I'$  est une autre isotopie maximale fixant  $z$  et  $\mathcal{F}'$  un feuilletage dynamiquement transverse à  $I'$ . Dans le cas des difféomorphismes, c'est le nombre de rotation induit par l'isotopie sur le cercle  $S_z$  qui permet de comparer les dynamiques locales des feuilletages. Nous verrons que ceci se généralise au cas des homéomorphismes.

Expliquons maintenant le plan de l'article, en notant que la preuve proprement dite du théorème B ne sera développée qu'à partir de la section 6.

Dans la section 3, nous rappellerons de façon plus précise ce qu'est un feuilletage  $\mathcal{F}$  dynamiquement transverse à une isotopie  $I$  sur une surface  $M$  joignant l'identité à un homéomorphisme  $f$ . Nous nous intéresserons particulièrement au cas où  $z$  est une singularité isolée de  $\mathcal{F}$ . Par des arguments déjà utilisés dans [14] et [15], nous commencerons par prouver, d'une part que  $i(I, z) = i(\mathcal{F}, z) - 1$ , d'autre part que  $i(f, z) = i(\mathcal{F}, z)$  si  $i(\mathcal{F}, z) \neq 1$ . Nous établirons alors le résultat le plus important de la section. Nous fixons une isotopie locale  $J$  en  $z$  de nombre de rotation 1 et nous supposons que  $i(\mathcal{F}, z) \neq 1$ . Nous montrerons que si  $\mathcal{F}'$  est un feuilletage dynamiquement transverse à une isotopie  $I'$  sur une surface  $M'$  joignant l'identité à un homéomorphisme  $f'$ , et si l'isotopie locale  $I'$  en  $z'$  est conjuguée à une isotopie locale en  $z$  homotope à  $J^k I$ , alors  $z'$  est une source de  $\mathcal{F}'$  si  $k > 0$  et un puits si  $k < 0$ .

Comme nous l'avons dit plus haut, nous introduirons dans la section 4 des objets définis pour les homéomorphismes de la sphère. Dans la section 5, nous étudierons en détail les isotopies maximales des homéomorphismes de la sphère ayant un nombre fini de points fixes. Nous étudierons également les propriétés dynamiques globales des feuilletages dynamiquement transverses.

Nous expliquerons dans la section 6 pourquoi il suffit de prouver le théorème B dans le cas où  $\text{Fix}(f)$  est fini, ce qui nous permettra de faire une récurrence sur le nombre de points fixes. Nous introduirons également une notion de réductibilité sur  $f$ . Nous initialiserons la récurrence dans la courte section 7. Nous étudierons le cas irréductible en section 8 en utilisant fortement les résultats des sections 3 et 5. Nous étudierons le cas réductible en section 9 en utilisant l'hypothèse de récurrence.

### 3. Feuilletages dynamiquement transverses et indices

Nous considérons dans cette section une surface orientée  $M$  ayant un bout isolé  $z_0$ , un homéomorphisme  $f$  de  $M$  isotope à l'identité et une isotopie  $I = (f_t)_{t \in [0,1]}$  de l'identité à  $f$ . Nous supposons de plus les deux hypothèses suivantes :

- (i) pour tout  $z \in \text{Fix}(f)$  la trajectoire  $I(z)$ , qui est un lacet, n'est pas homotope à un point ;
- (ii) il existe une partie ouverte de  $M$ , voisinage du bout isolé  $z_0$ , qui n'intersecte pas  $\text{Fix}(f)$ .

Le revêtement universel  $\tilde{M}$  de  $M$  est un plan. Notons  $\tilde{I} = (\tilde{f}_t)_{t \in [0,1]}$  l'isotopie de  $\tilde{M}$  issue de l'identité qui relève  $I$ . On sait que  $\tilde{f}_1$  commute avec tous les automorphismes de revêtement et n'a pas de point fixe. La *version feuilletée équivariante du théorème de translation de Brouwer*, qui est donnée dans [14], nous dit qu'il existe un feuilletage topologique orienté  $\tilde{\mathcal{F}}$ , invariant par les automorphismes de revêtement, qui est formé de *droites de Brouwer* de  $\tilde{f}_1$  : toute feuille  $\tilde{\phi}$  est une droite de  $\tilde{M}$  qui sépare  $\tilde{f}_1(\tilde{\phi}) \subset G(\tilde{\phi})$  de  $\tilde{f}_1^{-1}(\tilde{\phi}) \subset D(\tilde{\phi})$ . Cette propriété du feuilletage  $\tilde{\mathcal{F}}$  s'exprime sous la forme équivalente suivante : tout point  $\tilde{z} \in \tilde{M}$  peut être joint à  $\tilde{f}_1(\tilde{z})$  par un arc  $\tilde{\gamma}$  positivement transverse à  $\tilde{\mathcal{F}}$  (voir [14]). Ainsi,  $\tilde{\mathcal{F}}$  relève un feuilletage  $\mathcal{F}$  sur  $M$  qui est dynamiquement transverse à l'isotopie : la trajectoire  $I(z)$  de tout point  $z$  est homotope, à extrémités fixées, à un arc  $\gamma$  qui est positivement transverse à  $\mathcal{F}$ .

On peut bien sûr prolonger  $f$  en un homéomorphisme de même nom sur  $M \sqcup \{z_0\}$ . Le point  $z_0$  est alors un point fixe isolé de  $f$ . De même, on peut prolonger  $I$  en une isotopie de

$M \sqcup \{z_0\}$  qui fixe  $z_0$ . Nous pouvons donc définir les indices  $i(f, z_0)$ ,  $i(I, z_0)$  et  $i(\mathcal{F}, z_0)$ . Nous allons comparer ces indices dans cette section.

PROPOSITION 3.1. – Si  $M$  n'est pas un plan, alors  $i(\mathcal{F}, z_0) = i(I, z_0) + 1$ .

*Démonstration.* – Le principe de la preuve apparaît dans [15] (Proposition 5.1, page 153). Donnons-nous un anneau  $U \subset M$  dont  $z_0$  est un bout puis un lacet  $\beta \subset U$  engendrant le groupe fondamental de  $U$ . Relevons  $\beta$  en un arc  $\tilde{\beta}$  de  $\tilde{M}$  joignant un point  $\tilde{z}_1$  à  $\tilde{T}(\tilde{z}_1)$ , où  $\tilde{T}$  est un automorphisme de revêtement. Puisque  $M$  n'est pas un plan,  $\tilde{T}$  n'est pas trivial, la surface quotient  $\widehat{M} = \tilde{M}/\tilde{T}$  est donc un anneau. La projection de revêtement  $\widehat{\pi} : \tilde{M} \rightarrow \widehat{M}$  passe au quotient et définit une application  $\widehat{\pi} : \widehat{M} \rightarrow M$  qui n'est rien d'autre que la projection du revêtement (généralement non galoisien)  $\tilde{M}$ . L'isotopie  $\tilde{I} = (\tilde{f}_t)_{t \in [0,1]}$  se projette en une isotopie  $\widehat{I} = (\widehat{f}_t)_{t \in [0,1]}$  et le feuilletage  $\tilde{\mathcal{F}}$  en un feuilletage  $\widehat{\mathcal{F}}$  qui est dynamiquement transverse à  $\widehat{I}$ . Enfin, l'arc  $\tilde{\beta}$  se projette en un lacet  $\widehat{\beta}$  qui engendre le groupe fondamental de  $\widehat{M}$ . Plus précisément, la composante connexe  $\widehat{U}$  de  $\widehat{\pi}^{-1}(U)$  qui contient  $\widehat{\beta}$  est un anneau dont le groupe fondamental est engendré par  $\widehat{\beta}$  et on sait que  $\widehat{\pi}|_{\widehat{U}}$  est un homéomorphisme de  $\widehat{U}$  sur  $U$  qui conjugue  $\widehat{f}|_{\widehat{U} \cap \widehat{f}^{-1}(\widehat{U})}$  à  $f|_{U \cap f^{-1}(U)}$ . Si on note  $\widehat{z}_0$  le bout de  $\widehat{U}$  correspondant à  $z_0$ , on peut prolonger  $\widehat{f}$  en un homéomorphisme de  $\widehat{M} \sqcup \{\widehat{z}_0\}$  qui fixe  $\widehat{z}_0$  et  $\widehat{I}$  en une isotopie de  $\widehat{M} \sqcup \{\widehat{z}_0\}$  qui fixe  $\widehat{z}_0$ . Considérées comme isotopies locales en  $\widehat{z}_0$  et en  $z_0$ , les isotopies  $\widehat{I}$  et  $I$  sont conjuguées : on a donc  $i(\widehat{I}, \widehat{z}_0) = i(I, z_0)$ . De même,  $\widehat{\pi}|_{\widehat{U}}$  envoie le feuilletage  $\widehat{\mathcal{F}}|_{\widehat{U}}$  sur le feuilletage  $\mathcal{F}|_U$  et on a donc  $i(\widehat{\mathcal{F}}, \widehat{z}_0) = i(\mathcal{F}, z_0)$ . On peut donc se ramener au cas où  $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  et  $z_0 = 0$ .

L'isotopie  $I$  se relève par  $\Pi$  en une isotopie  $\check{I} = (\check{f}_t)_{t \in [0,1]}$  de  $\mathbb{R}^2$  issue de l'identité et le feuilletage  $\mathcal{F}$  en un feuilletage  $\check{\mathcal{F}}$ . Soit  $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\}$  un lacet librement homotope à  $\partial \mathbf{D}_1$ . On peut recouvrir l'image du lacet par une famille finie  $(V_i)_{i \in I}$  de voisinages trivialisants du feuilletage  $\mathcal{F}$ , puis construire une application continue  $\psi$  sur l'image de  $\gamma$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , telle que  $\psi(z) \in \phi_{V_i, z}^+ \setminus \{z\}$  pour tout  $i \in I$  et tout  $z \in V_i$ . La famille  $(V_i)_{i \in I}$  se relève en une famille  $(\check{V}_i)_{i \in \check{I}}$  de voisinages trivialisants de  $\check{\mathcal{F}}$  qui recouvre la préimage  $\check{\Gamma}$  de  $\gamma$  par  $\Pi$ . Il existe alors une unique application continue  $\check{\psi}$  sur cette préimage, à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ , telle que  $\Pi(\check{\psi}(\check{z})) = \psi(\Pi(\check{z}))$  et  $\check{\psi}(z) \in \phi_{\check{V}_i, z}^+ \setminus \{z\}$  pour tout  $i \in \check{I}$  et tout  $z \in \check{V}_i$ . Soit  $\check{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  un sous-arc de  $\check{\Gamma}$  joignant un point  $\check{z}$  à  $T(\check{z})$  qui relève  $\gamma$  par  $\Pi$ . Les applications

$$t \mapsto \frac{\check{f}_1 \circ \check{\gamma}(t) - \check{\gamma}(t)}{\|\check{f}_1 \circ \check{\gamma}(t) - \check{\gamma}(t)\|}$$

et

$$t \mapsto \frac{\check{\psi} \circ \check{\gamma}(t) - \check{\gamma}(t)}{\|\check{\psi} \circ \check{\gamma}(t) - \check{\gamma}(t)\|}$$

passent au quotient et définissent chacune une application continue du cercle  $[0, 1]/0 \sim 1$  vers le cercle unité orienté. Pour montrer la proposition 3.1, il suffit de prouver que ces deux applications ont même degré. En effet, si  $r$  est assez petit et si  $\gamma$  prend ses valeurs dans  $\mathbf{D}_r$ , on sait que le degré de la première application est égal à  $i(I, 0)$ . On peut remarquer également que le degré de la seconde est égal à  $i(\mathcal{F}, 0) - 1$ .



Soit  $\check{\delta}$  un arc positivement transverse à  $\check{\mathcal{F}}$  qui joint un point  $\check{z} \in \mathbb{R}^2$  à  $\check{f}_1(\check{z})$ . Puisque  $\check{\mathcal{F}}$  est un feuilletage sans singularité sur  $\mathbb{R}^2$ , la réunion  $\check{O}_{\check{z}}$  des feuilles de  $\check{\mathcal{F}}$  qui rencontrent  $\check{\delta}$  ne dépend pas de l'arc choisi et est homéomorphe à  $[0, 1] \times \mathbb{R}$ . L'ensemble  $\check{P}_{\check{z}} = \check{O}_{\check{z}} \setminus \{\check{z}\}$ , qui est homéomorphe à  $([0, 1] \times \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ , est donc contractile. Remarquons qu'on peut prolonger  $\check{\delta}$  en chacune des extrémités pour construire un arc  $\check{\delta}'$  positivement transverse à  $\check{\mathcal{F}}$ . Il existe alors un homéomorphisme  $\check{h}$  qui envoie la réunion  $\check{O}$  des feuilles de  $\check{\mathcal{F}}$  qui rencontrent  $\check{\delta}'$ , sur  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  et le feuilletage  $\check{\mathcal{F}}|_{\check{O}}$  sur le feuilletage vertical. Il existe alors un voisinage  $\check{V}_{\check{z}}$  de  $\check{z}$  tel que  $\check{O}_{\check{z}'} \subset \check{O}$  pour tout  $\check{z}' \in \check{V}_{\check{z}}$ . L'image par  $\check{h}$  de  $\check{O}_{\check{z}'}$  est alors égal à  $[\check{\alpha}(\check{z}'), \check{\beta}(\check{z}')] \times \mathbb{R}$ , où  $\check{\alpha} : \check{V}_{\check{z}} \rightarrow [0, 1]$  et  $\check{\beta} : \check{V}_{\check{z}} \rightarrow [0, 1]$  sont continues. Par conséquent, si on définit l'ensemble

$$\check{E} = \{(\check{z}, \check{z}') \in \check{\gamma} \times \mathbb{R}^2 \mid \check{z}' \in \check{P}_{\check{z}}\},$$

et l'application  $\check{p}_1 : (\check{z}, \check{z}') \rightarrow \check{z}$ , on obtient un fibré localement trivial  $\check{\xi} = (\check{E}, \check{p}_1, \check{\gamma})$  dont la fibre est  $([0, 1] \times \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ . Pour toute section continue  $\check{\psi}'$  de ce fibré, on sait que  $\check{\psi}'(\check{z}) \neq \check{z}$  pour tout  $z \in \check{\gamma}$  et que l'application

$$t \mapsto \frac{\check{\psi}' \circ \check{\gamma}(t) - \check{\gamma}(t)}{\|\check{\psi}' \circ \check{\gamma}(t) - \check{\gamma}(t)\|}$$

passse au quotient et définit une application continue du cercle  $[0, 1]/0 \sim 1$  vers  $S^1$ . Puisque la fibre est contractile, l'ensemble des sections est connexe par arcs et le degré ne dépend pas de  $\check{\psi}'$ . Pour conclure, il suffit de remarquer que  $\check{f}_1|_{\check{\gamma}}$  et  $\check{\psi}$  sont deux sections de  $\check{\xi}$ .  $\square$

REMARQUE 3.2. – La proposition 3.1 n'est plus valable si  $M = \mathbb{R}^2$ . En effet, la formule de Lefschetz nous dit que  $i(f, \infty) = 2$ . Puisque le nombre de rotation  $\rho(R_\infty, \infty)$  de l'isotopie  $R_\infty$  définie dans la section 1 vaut 1, on sait grâce à la proposition 1.1, qu'il existe  $k_0 \in \mathbb{Z}$  tel que  $i(R_\infty^{k_0} I, \infty) = 1$  et  $i(R_\infty^k I, \infty) = 0$  si  $k \neq k_0$ . La formule de Poincaré-Hopf, par contre nous dit que  $i(\mathcal{F}, \infty) = 2$  pour tout feuilletage  $\mathcal{F}$  dynamiquement transverse à  $R_\infty^k I$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Il faut noter que les trajectoires d'un point  $z$  pour toutes les isotopies  $R_\infty^k I$  sont homotopes, mêmes si les isotopies ne sont pas homotopes. Un feuilletage dynamiquement transverse à  $I$  est dynamiquement transverse à toutes les isotopies  $R^k I$ . Par contre il n'est pas localement transverse. Expliquons ce que cela signifie. Si  $I$  est une isotopie locale en un point  $z_0$  d'une surface  $M$ , on dira qu'un feuilletage orienté  $\mathcal{F}$  défini sur un voisinage pointé de  $z_0$  est *localement dynamiquement transverse* à  $I$  si pour tout voisinage pointé suffisamment petit  $V$  de  $z_0$  il existe un voisinage pointé  $W \subset V$  tel que pour tout point  $z \in W$  il existe un arc  $\gamma$  à valeurs dans  $V$  homotope dans  $V$  à la trajectoire  $I(z)$  qui est positivement transverse à  $\mathcal{F}$ . La preuve de la proposition 3.1 donne en fait le résultat suivant :

PROPOSITION 3.3. – Si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage localement dynamiquement transverse à une isotopie locale  $I$  en un point  $z_0$  d'une surface  $M$ , alors  $i(\mathcal{F}, z_0) = i(I, z_0) + 1$ .

La proposition 3.1 apparaît alors comme une conséquence du résultat suivant :

PROPOSITION 3.4. – Si  $I = (f_t)_{t \in [0,1]}$  est une isotopie issue de l'identité sur une surface  $M$  admettant un bout isolé  $z_0$ , si  $\mathcal{F}$  est un feuilletage dynamiquement transverse à  $I$  et si  $M$  n'est pas un plan, alors  $\mathcal{F}$  est localement dynamiquement transverse à l'isotopie locale  $I$  en  $z_0$ .

*Démonstration.* – Grâce à la construction faite au début de la preuve de la proposition 3.1, on sait qu'il suffit d'étudier le cas où  $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  et  $z_0 = 0$ . Il suffit en fait de montrer que si  $r > 0$  est assez petit, alors pour tout point  $z \in \mathbf{D}_r$ , il existe un arc  $\gamma$  à valeurs dans  $\mathbf{D}_1$  positivement transverse à  $\mathcal{F}$  et homotope à  $I(z)$  dans  $M$ .

Remarquons d'abord que le résultat est évident s'il existe une feuille fermée  $\Gamma$  de  $\mathcal{F}$  qui est incluse dans  $\overline{\mathbf{D}}_1$ . En effet, cette feuille sépare 0 de  $\infty$ . Si on note  $V$  la composante connexe de  $M \setminus \Gamma$  dont 0 est un bout, on peut remarquer que si  $z$  appartient à  $V \cap f_1^{-1}(V)$  alors tout arc positivement transverse à  $\mathcal{F}$  qui joint  $z$  à  $f_1(z)$  est nécessairement inclus dans  $V$ . Nous supposons dorénavant qu'il n'existe dans  $\overline{\mathbf{D}}_1$  aucune feuille fermée. Quitte à remplacer  $\mathbf{D}_1$  par un cercle de rayon plus petit, nous pouvons toujours supposer que si  $\phi_z^+$  est une demi-feuille positive de  $\mathcal{F}$  qui est incluse dans  $\overline{\mathbf{D}}_1$ , alors l'ensemble  $\omega(\phi_z)$  se réduit à 0. En effet, si  $\phi_z^+$  est une demi-feuille positive de  $\mathcal{F}$  incluse dans  $\overline{\mathbf{D}}_1$  telle que  $\omega(\phi_z)$  ne se réduise pas à 0, alors  $\omega(\phi_z)$  contient une feuille  $\phi$  telle que  $\alpha(\phi) = \omega(\phi) = \{0\}$ . Si  $s$  est choisi assez petit pour que  $\overline{\mathbf{D}}_s$  ne contienne pas  $\phi$ , alors si  $\phi_{z'}^+$  est une demi-feuille positive de  $\mathcal{F}$  qui est incluse dans  $\overline{\mathbf{D}}_s$ , l'ensemble  $\omega(\phi_{z'})$  se réduit à 0. De même, nous pouvons supposer que si  $\phi_z^-$  est une demi-feuille négative de  $\mathcal{F}$  qui est incluse dans  $\overline{\mathbf{D}}_1$ , alors l'ensemble  $\alpha(\phi_z)$  se réduit à 0.

On relève par  $\Pi$  l'isotopie  $I$  en une isotopie  $\check{I} = (\check{f}_t)_{t \in [0,1]}$  de  $\mathbb{R}^2$  issue de l'identité et le feuilletage  $\mathcal{F}$  en un feuilletage  $\check{\mathcal{F}}$  dynamiquement transverse à  $\check{I}$ . On posera  $\check{U} = \mathbb{R} \times ]0, +\infty[$  et on notera  $\check{\mathcal{F}}_{\check{U}}$  la restriction du feuilletage  $\check{\mathcal{F}}$  à  $\check{U}$ . Toute feuille  $\check{\phi}'$  de  $\check{\mathcal{F}}_{\check{U}}$  étant une droite de  $\check{U}$ , on notera  $D(\check{\phi}')$  la composante connexe de  $\check{U} \setminus \check{\phi}'$  située à droite de  $\check{\phi}'$  et  $G(\check{\phi}')$  la composante située à gauche. On dira qu'un point  $\check{z} \in \mathbb{R} \times \{0\}$  est *rentrant* (resp. *sortant*) si  $\check{\phi}_{\check{z}}^{++} = \check{\phi}_{\check{z}}^+ \setminus \{\check{z}\}$  (resp.  $\check{\phi}_{\check{z}}^{--} = \check{\phi}_{\check{z}}^- \setminus \{\check{z}\}$ ) est une feuille de  $\check{\mathcal{F}}_{\check{U}}$ , où  $\check{\phi}_{\check{z}}^+$  (resp.  $\check{\phi}_{\check{z}}^-$ ) est la demi-feuille positive (resp. négative) de  $\check{\mathcal{F}}$  issue de  $\check{z}$  (resp. aboutissant à  $\check{z}$ ).

Nous allons raisonner par l'absurde et supposer que la conclusion de la proposition n'est pas vérifiée. Ceci signifie qu'il existe une suite  $(\check{\phi}'_n)_{n \geq 0}$  de feuilles de  $\check{\mathcal{F}}_{\check{U}}$  et une suite  $(\check{z}'_n)_{n \geq 0}$  de points dans  $\check{U}$  telles que :

- $\check{z}'_n \in G(\check{\phi}'_n)$  ;
- $\check{f}_1(\check{z}'_n) \notin G(\check{\phi}'_n)$  ;
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_2(\check{z}'_n) = +\infty$ .

En effet, pour tout  $\check{z}' \in \check{U}$ , l'ensemble  $\check{W}_{\check{z}'}$  des points  $\check{z}'' \in \check{U}$  qui peuvent être joints par un arc dans  $\check{U}$  issu de  $\check{z}'$  et positivement transverse à  $\check{\mathcal{F}}_{\check{U}}$  est une partie ouverte dont la frontière est la réunion d'une famille de feuilles  $(\check{\phi}'_\alpha)_\alpha$  telles que  $\check{z}' \in G(\check{\phi}'_\alpha)$  et on sait que pour tout point  $\check{z}'' \notin \check{W}_{\check{z}'}$ , il existe  $\alpha_0$  tel que  $\check{z}'' \notin G(\check{\phi}'_{\alpha_0})$ .

Puisqu'on peut trouver un arc dans  $\mathbb{R}^2$  positivement transverse à  $\check{\mathcal{F}}$  qui joint  $\check{z}'_n$  à  $\check{f}_1(\check{z}'_n)$  on sait qu'aucune feuille  $\check{\phi}'_n$  n'est une feuille de  $\check{\mathcal{F}}$  : la feuille  $\check{\phi}_n$  de  $\check{\mathcal{F}}$  qui contient  $\check{\phi}'_n$  rencontre  $\mathbb{R} \times \{0\}$ .

Commençons par montrer que, pour toute feuille rentrante  $\check{\phi}_{\check{z}}^{++}$  fixée, on a  $\check{\phi}'_n \neq \check{\phi}_{\check{z}}^{++}$  pour  $n$  assez grand. En d'autres termes, montrons qu'il existe  $A > 0$  tel que si  $\check{z}' \in G(\check{\phi}_{\check{z}}^{++})$  vérifie  $p_2(\check{z}') > A$ , alors  $\check{f}_1(\check{z}') \in G(\check{\phi}_{\check{z}}^{++})$ . Fixons  $\check{z}_0 \in \check{\phi}_{\check{z}}^{++}$  tel que  $\check{f}_1(\check{\phi}_{\check{z}_0}^+)$  et  $\check{f}_1^{-1}(\check{\phi}_{\check{z}_0}^+)$  soient contenus dans  $\mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ . Puisque  $\check{\phi}_{\check{z}}$  est une droite de Brouwer de  $\check{f}_1$ , nous savons que  $\check{f}_1(\check{\phi}_{\check{z}_0}^+)$  et  $\check{f}_1^{-1}(\check{\phi}_{\check{z}_0}^+)$  sont disjoints de  $\check{\phi}_{\check{z}}$ . Chacun de ces ensembles est donc contenu dans l'une des deux composantes connexes de  $\check{U} \setminus \check{\phi}_{\check{z}}^{++}$ , à savoir  $G(\check{\phi}_{\check{z}}^{++})$  ou  $D(\check{\phi}_{\check{z}}^{++})$ . En fait nous avons  $\check{f}_1(\check{\phi}_{\check{z}_0}^+) \subset G(\check{\phi}_{\check{z}}^{++})$  et  $\check{f}_1^{-1}(\check{\phi}_{\check{z}_0}^+) \subset D(\check{\phi}_{\check{z}}^{++})$ . Pour s'en convaincre, il suffit d'étudier les

deux situations où l'ensemble  $\alpha$ -limite de la feuille  $\phi_z$  de  $\mathcal{F}$  relevée par  $\check{\phi}_z$  est disjoint de 0 ou réduit à ce point. Choisissons alors  $A > 0$  tel que

- $\check{f}_1(\mathbb{R} \times ]A, +\infty[) \subset \mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ ;
- $\check{\phi}_z^+ \cap \check{\phi}_{z_0}^- \subset \mathbb{R} \times ]-\infty, A]$ ;
- $\check{f}_1^{-1}(\check{\phi}_z^+ \cap \check{\phi}_{z_0}^-) \subset \mathbb{R} \times ]-\infty, A]$ .

Si  $\check{z}' \in \overline{G(\check{\phi}_z^{++})}$  vérifie  $p_2(\check{z}') > A$ , on peut trouver un segment horizontal  $\gamma$  (éventuellement réduit à un point) joignant  $\check{z}'$  à un point  $\check{z}_1 \in \check{\phi}_{z_0}^+$  et ne rencontrant  $\check{\phi}_z^{++}$  qu'au point  $\check{z}_1$ . Il est inclus dans  $G(\check{\phi}_z^{++})$  et est donc disjoint de  $\check{f}_1^{-1}(\check{\phi}_z^{++})$  puisqu'il est disjoint de  $\check{f}_1^{-1}(\check{\phi}_{z_0}^+)$  et de  $\check{f}_1^{-1}(\check{\phi}_z^+ \cap \check{\phi}_{z_0}^-)$ . Ainsi l'arc  $\check{f}_1(\gamma)$  est disjoint de  $\check{\phi}_z^{++}$  et de  $\mathbb{R} \times \{0\}$  et contient un point de  $G(\check{\phi}_z^{++})$ , à savoir  $\check{f}_1(\check{z}_1)$ . On en déduit que cet arc est inclus dans  $G(\check{\phi}_z^{++})$ , ce qui prouve que  $\check{f}_1(\check{z}') \in G(\check{\phi}_z^{++})$ .

Dans le cas où il y a un nombre fini de feuilles rentrantes, nous en déduisons que  $\check{\phi}'_n$  n'est pas une feuille rentrante si  $n$  est assez grand. Nous allons prouver ce résultat même dans le cas où il y a une infinité de feuilles rentrantes. Quitte à extraire une sous-suite, il suffit de trouver une contradiction dans le cas où  $\check{\phi}'_n = \check{\phi}_{z'_n}^{++}$  est une feuille rentrante pour tout  $n \geq 0$ . On peut toujours supposer que la suite  $(z'_n)_{n \geq 0}$  est convergente et on note  $\check{z}$  sa limite. Bien évidemment, la demi-feuille  $\check{\phi}_z^+$  est incluse dans  $\mathbb{R} \times ]0, +\infty[$  et contient donc une feuille rentrante  $\check{\phi}_{z^*}^{++}$  d'après les hypothèses faites sur  $\mathcal{F}$  au début de la preuve. Considérons un arc  $\check{\gamma} \subset \check{U}$  transverse à  $\check{\mathcal{F}}$  et intersectant  $\check{\phi}_{z^*}^{++}$  dans son intérieur. On peut supposer d'abord que tous les  $\check{\phi}'_n$  intersectent  $\check{\gamma}$ , puis que la famille  $(G(\check{\phi}'_n))_{n \geq 0}$  est totalement ordonnée. Plus précisément on peut supposer que la suite  $(G(\check{\phi}'_n))_{n \geq 0}$  est croissante et que  $G(\check{\phi}'_n) \subset G(\check{\phi}_{z^*}^{++})$  ou alors que la suite  $(G(\check{\phi}'_n))_{n \geq 0}$  est décroissante et que  $G(\check{\phi}_{z^*}^{++}) \subset G(\check{\phi}'_n)$ . Nous allons étudier le premier cas, le second se traitant de façon analogue. Nous avons montré précédemment que pour  $n$  assez grand le point  $\check{f}_1(z'_n)$  appartient à  $G(\check{\phi}_{z^*}^{++})$  puisque  $z'_n \in G(\check{\phi}_{z^*}^{++})$ . De même, pour  $n$  assez grand le point  $z'_n$  n'appartient pas à  $G(\check{\phi}'_0)$  puisque  $\check{f}_1(z'_n) \notin G(\check{\phi}'_0)$ . Notons  $\check{\phi}_n$  la feuille de  $\check{\mathcal{F}}$  qui contient  $\check{\phi}'_n$  et remarquons que  $z'_n \in G(\check{\phi}_n)$  et que  $\check{f}_1(z'_n) \notin G(\check{\phi}_n)$ . Ceci contredit l'existence d'un arc positivement transverse à  $\check{\mathcal{F}}$  qui joint  $\check{z}$  à  $\check{f}_1(\check{z})$ .

On montre de façon analogue que  $\check{\phi}'_n$  n'est pas une feuille sortante si  $n$  est assez grand. Il reste donc à étudier le cas où  $\check{\phi}'_n$  joint un point  $z_n^- \in \mathbb{R} \times \{0\}$  à un point  $z_n^+ \in \mathbb{R} \times \{0\}$ . On peut là encore supposer que les suites  $(z_n^-)_{n \geq 0}$  et  $(z_n^+)_{n \geq 0}$  convergent en notant  $z^-$  et  $z^+$  leurs limites respectives. Comme  $\check{\phi}'_n$  sépare deux points dont la deuxième coordonnée est arbitrairement grande, on en déduit que la demi-feuille  $\check{\phi}_{z^-}^{++}$  est incluse dans  $\mathbb{R} \times ]0, +\infty[$ . Elle contient donc une feuille rentrante  $\check{\phi}_{z^*}^{++}$ . De même, la demi-feuille  $\check{\phi}_{z^+}^-$  est incluse dans  $\mathbb{R} \times ]0, +\infty[$  et contient une feuille sortante  $\check{\phi}_{z^*}^{--}$ . On choisit dans  $\check{U}$  un arc  $\check{\gamma}^-$  (resp.  $\check{\gamma}^+$ ) transverse à  $\check{\mathcal{F}}$  et intersectant  $\check{\phi}_{z^-}^{++}$  (resp.  $\check{\phi}_{z^+}^-$ ) dans son intérieur. On peut supposer que tous les  $\check{\phi}'_n$  intersectent  $\check{\gamma}^-$  et  $\check{\gamma}^+$ , que la suite  $(G(\check{\phi}'_n))_{n \geq 0}$  est croissante et que  $G(\check{\phi}'_n) \subset G(\check{\phi}_{z^*}^{++}) \cap G(\check{\phi}_{z^-}^{--})$  ou alors que la suite  $(G(\check{\phi}'_n))_{n \geq 0}$  est décroissante et que  $G(\check{\phi}_{z^*}^{++}) \cup G(\check{\phi}_{z^+}^-) \subset G(\check{\phi}'_n)$ . Nous allons là encore nous limiter au premier cas. Comme précédemment, on sait que pour  $n$  assez grand le point  $\check{f}_1(z'_n)$  appartient à  $G(\check{\phi}_{z^*}^{++}) \cap G(\check{\phi}_{z^-}^{--})$  et que  $z'_n$  n'appartient pas à  $G(\check{\phi}'_0)$ . Si on note  $\check{\phi}_n$  la feuille de  $\check{\mathcal{F}}$  qui contient  $\check{\phi}'_n$ , on sait que  $z'_n \in G(\check{\phi}_n)$  et que  $\check{f}_1(z'_n) \notin G(\check{\phi}_n)$ . Ceci contredit, là encore, l'existence d'un arc positivement transverse à  $\check{\mathcal{F}}$  qui joint  $\check{z}$  à  $\check{f}_1(\check{z})$ .  $\square$

Reprenons les hypothèses du début de la section. Le lien entre l'indice du feuilletage et l'indice de Lefschetz est donné par le résultat suivant.

PROPOSITION 3.5. – Si  $i(\mathcal{F}, z_0) \neq 1$ , alors  $i(f, z_0) = i(\mathcal{F}, z_0)$ .

*Démonstration.* – On a vu plus haut que le résultat était vrai si  $M$  est un plan. Dans le cas contraire, on reprend la construction de la proposition 3.1. On peut donc se ramener au cas où  $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  et  $z_0 = 0$ . Le fait que  $\mathcal{F}$  n'admette qu'une seule singularité 0 dans le plan  $\mathbb{R}^2$  et que  $i(\mathcal{F}, 0) \neq 1$  implique que  $\mathcal{F}$  n'a pas de feuille fermée. De même il n'existe pas de courbe fermée simple sur  $\mathbb{R}^2$  positivement transverse à  $\mathcal{F}$ . On en déduit que tout arc  $\delta$  positivement transverse à  $\mathcal{F}$  rencontre toute feuille en au plus un point et donc que toute feuille est errante. Puisque toute feuille est errante, toute feuille est une droite. Plus précisément, si  $\delta$  est un arc positivement transverse à  $\mathcal{F}$  qui joint un point  $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  à  $f(z)$ , la réunion  $O_z$  des feuilles de  $\mathcal{F}$  qui rencontrent  $\delta$  est homéomorphe à  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  et l'ensemble  $P_z = O_z \setminus \{z\}$  à  $([0, 1] \times \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ . On obtient, là encore, un fibré localement trivial  $\xi = (E, p_1, \gamma)$  dont la fibre est  $([0, 1] \times \mathbb{R}) \setminus \{0\}$  en posant

$$E = \{(z, z') \in \gamma \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \mid z' \in P_z\},$$

et  $p_1 : (z, z') \rightarrow z$ . On conclut comme dans la proposition 3.1. □

REMARQUE 3.6. – Les deux propositions précédentes permettent de compléter le théorème de Le Roux (Proposition 1.1). Conservons les hypothèses de la proposition 1.1, en supposant cette fois-ci que  $i(f, z_0) = 1$ , et montrons que l'indice de toute isotopie locale de  $f$  en  $z_0$  est nul. On peut trouver un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  n'ayant que 0 comme point fixe et dont le germe en 0 est conjugué au germe de  $f$  en  $z_0$  (et on peut donc supposer que  $f$  est cet homéomorphisme). On trouve un argument limpide de ce classique résultat d'extension dans le chapitre 2 de [16], argument dont nous nous sommes en partie inspirés dans les preuves des deux propositions précédentes. Remarquons maintenant que toute isotopie locale de  $f$  en 0 est localement conjuguée à une isotopie globale  $I$  de  $\mathbb{R}^2$  fixant 0. On choisit un feuilletage  $\mathcal{F}$  dynamiquement transverse à  $I|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}$ . La proposition 3.1 nous dit  $i(I, 0) = i(\mathcal{F}, 0) - 1$  et la proposition 3.5 que  $i(\mathcal{F}, 0) = 1$ .

Énonçons maintenant le point clé de cette section. Fixons une isotopie locale de l'identité en  $z_0$  de nombre de rotation 1, notée  $J$ . Supposons que  $M'$  soit une surface orientée ayant un bout isolé  $z'_0$ , que  $f'$  soit un homéomorphisme de  $M'$  isotope à l'identité sans point fixe au voisinage de  $z'_0$ , que  $I' = (f'_t)_{t \in [0,1]}$  soit une isotopie de  $M'$  joignant l'identité à  $f'$  et que pour tout point  $z \in \text{Fix}(f')$  la trajectoire  $I'(z)$  ne soit pas homotope à un point. Supposons de plus que l'isotopie locale  $I'$  de  $f'$  en  $z'_0$  soit conjuguée à une isotopie locale en  $z_0$  qui est homotope à  $J^k I$ . Considérons alors un feuilletage orienté  $\mathcal{F}'$  sur  $M'$  dynamiquement transverse à  $I'$ .

PROPOSITION 3.7. – Si, ni  $M$  ni  $M'$  n'est un plan, et si  $i(\mathcal{F}, z_0) \neq 1$ , alors :

- $i(\mathcal{F}', z'_0) = i(\mathcal{F}, z_0)$ , si  $k = 0$  ;
- $z'_0$  est une source de  $\mathcal{F}'$ , si  $k > 0$  ;
- $z'_0$  est un puits de  $\mathcal{F}'$ , si  $k < 0$ .

REMARQUE 3.8. – Là encore, on comprend mieux le sens de la proposition 3.7 si, au lieu de considérer des homéomorphismes, on considère des difféomorphismes et des isotopies de difféomorphismes. Supposons qu'on soit dans la situation idéale où  $f'$ , ainsi que l'isotopie  $I'$ , se prolongent à  $M' \sqcup \{z'_0\}$  et où le feuilletage  $\mathcal{F}'$  est « transverse » au cercle  $S_{z'_0}$ . Si le nombre de rotation réel de  $Tf'(z'_0)$  défini par l'isotopie  $Tf'_t(z'_0)$  est  $> 0$  (resp.  $< 0$ ) le feuilletage doit être sortant (resp. rentrant) sur  $S_{z'_0}$ .

*Démonstration de la proposition 3.7.* – La première assertion découle immédiatement de la proposition 3.1. La troisième assertion se prouvera comme la deuxième. Nous allons donc nous intéresser à celle-ci. On peut toujours supposer, utilisant la construction faite dans la preuve de la proposition 3.1, que  $M = M' = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  et que  $z_0 = z'_0 = 0$ . On relève alors par  $\Pi$  chacune des isotopies  $I$  et  $I'$  en des isotopies  $\check{I} = (\check{f}_t)_{t \in [0,1]}$  et  $\check{I}' = (\check{f}'_t)_{t \in [0,1]}$  de  $\mathbb{R}^2$ , issues de l'identité. On peut supposer qu'il existe  $r > 0$  tel que  $f$  et  $f'$  coïncident sur  $D_r$  et n'aient pas d'autre point fixe que 0 dans ce disque. Remarquons que  $\check{f}'_1 = T^k \circ \check{f}_1$  sur  $\mathbb{R} \times ]-\ln r, +\infty[$ . De même, on relève chacun des feuilletages  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{F}'$  en des feuilletages  $\check{\mathcal{F}}$  et  $\check{\mathcal{F}}'$ .  $\square$

LEMME 3.9. – Si  $k > 0$ , il n'existe aucune feuille  $\phi$  de  $\mathcal{F}'$  telle que  $\omega(\phi) = \{0\}$ .

*Démonstration.* – On va raisonner par l'absurde en supposant qu'une telle feuille  $\phi$  existe. Il y a trois possibilités, pour  $\alpha(\phi)$  :

- il est réduit à  $\{0\}$  ;
- c'est une feuille fermée non homotope à un point dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  ;
- il contient  $\infty$  mais ne contient pas 0.

Dans chacun des cas, toute feuille  $\check{\phi}$  de  $\check{\mathcal{F}}'$  qui relève  $\phi$  est une droite de Brouwer de  $\mathbb{R}^2$  :

$$\check{f}'_1(\overline{G(\check{\phi})}) \subset G(\check{\phi}), \quad \check{f}'_1^{-1}(\overline{D(\check{\phi})}) \subset D(\check{\phi}).$$

Nous allons distinguer deux cas, suivant que  $\alpha(\phi)$  se réduit ou non à 0.

*Cas où  $\alpha(\phi)$  n'est pas réduit à 0.*

Dans ce cas, on a  $T^{-1}(G(\check{\phi})) \subset G(\check{\phi})$  et on en déduit que

$$(T^{-k} \circ \check{f}'_1)(\overline{G(\check{\phi})}) \subset T^{-k}(G(\check{\phi})) \subset T^{-1}(G(\check{\phi})).$$

On peut construire un arc  $\check{\gamma} \subset \mathbb{R} \times ]-\ln r, +\infty[$  joignant un point  $\check{z} \in \check{\phi}$  à  $T(\check{z})$ , inclus, sauf aux extrémités, dans  $D(\check{\phi}) \cap G(T(\check{\phi}))$ . On a donc

$$\check{f}'_1(\check{\gamma}) = (T^{-k} \circ \check{f}'_1)(\check{\gamma}) \subset (T^{-k} \circ \check{f}'_1)(\overline{G(T(\check{\phi}))}) \subset T^{1-k}(G(\check{\phi})) \subset G(\check{\phi}).$$

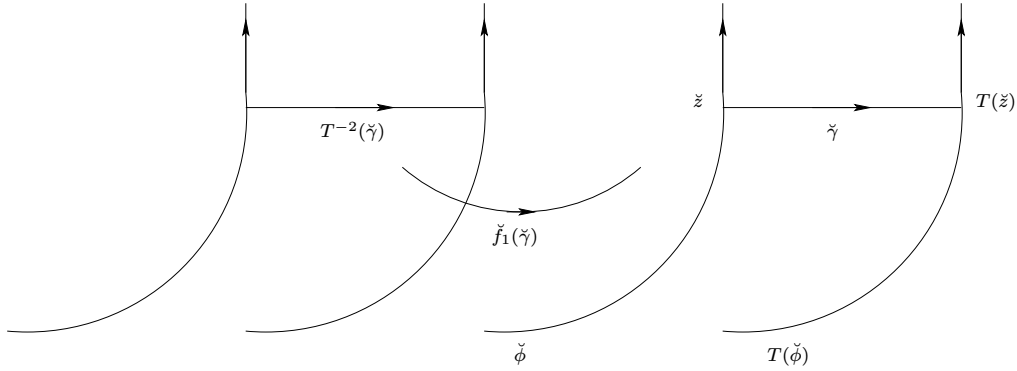
On peut donc construire une famille continue  $(\check{\gamma}_s)_{s \in [0,1]}$  d'arcs à valeurs dans  $G(\check{\phi})$  tels que :

- $\check{\gamma}_0 = \check{f}_1 \circ \check{\gamma}$  ;
- $\check{\gamma}_1 = T^{-2} \circ \check{\gamma}$  ;
- $\check{\gamma}_s(1) = T(\check{\gamma}_s(0))$ , pour tout  $s \in [0, 1]$ .

Chacune des applications

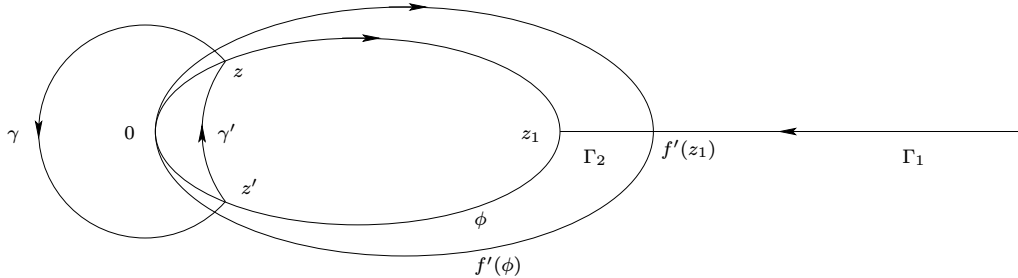
$$t \mapsto \frac{\check{\gamma}_s(t) - \check{\gamma}(t)}{\|\check{\gamma}_s(t) - \check{\gamma}(t)\|}$$

est bien définie, passe au quotient et définit une application continue de  $[0, 1]/0 \sim 1$  dans  $S^1$ . Le degré de ces applications ne dépend pas de  $s$ , il vaut  $i(I, 0)$  quand  $s = 0$  et 0 quand  $s = 1$  : on a donc  $i(I, 0) = 0$ . La proposition 3.1 nous dit donc que  $i(\mathcal{F}, 0) = 1$ , ce qui contredit l'hypothèse.



Cas où  $\alpha(\phi)$  est réduit à 0.

Puisque  $\alpha(\phi) = \omega(\phi) = 0$ , la feuille  $\phi$  est une droite de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  et l'adhérence de l'une des composantes connexes de son complémentaire dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  est bornée. Supposons par exemple que ce soit la composante  $D(\phi)$  située à droite. Puisque  $\mathcal{F}$  est dynamiquement transverse à  $I$ , nous savons que  $\overline{D(\phi)} \setminus \{0\} \subset f'(D(\phi))$ . Fixons  $z_1 \in \phi$ , choisissons une demi-droite  $\Gamma_1 \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  joignant  $\infty$  à  $f'(z_1)$ , contenue, sauf en son extrémité, dans  $G(f'(\phi))$ , puis prolongeons  $\Gamma_1$  en une demi-droite  $\Gamma_2 \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  joignant  $\infty$  à  $z_1$ , contenue, sauf en son extrémité, dans  $G(\phi)$ . On peut trouver un arc  $\gamma \subset \mathbf{D}_r$ , disjoint de  $\Gamma_2 \cup f'^{-1}(\Gamma_2)$ , joignant un point  $z \in \phi_{z_1}^-$  à un point  $z' \in \phi_{z_1}^+$  et contenu, sauf aux extrémités, dans  $G(\phi)$ , ainsi qu'un arc  $\gamma' \subset \mathbf{D}_r$  joignant  $z'$  à  $z$  et contenu, sauf aux extrémités, dans  $D(\phi)$ .



Fixons une feuille  $\check{\phi}$  de  $\check{\mathcal{F}}'$  qui relève  $\phi$ , notons  $\check{z}_1$  l'antécédent de  $z_1$  qui est sur  $\check{\phi}$  et  $\check{\Gamma}_2$  le relèvement de  $\Gamma_2$  qui aboutit à  $\check{z}_1$ . Notons également  $\check{\Gamma}_1 \subset \check{\Gamma}_2$  le relèvement de  $\Gamma_1$  qui aboutit

à  $\check{f}'_1(\check{z}_1)$ . L'arc  $\gamma$  se relève en un arc  $\check{\gamma}$  qui joint l'antécédent  $\check{z}$  de  $z$  qui est sur  $\check{\phi}$  à l'antécédent  $\check{z}'$  de  $z'$  qui est sur  $T(\check{\phi})$ . De même,  $\gamma'$  se relève en un arc  $\check{\gamma}'$  qui joint  $\check{z}'$  à  $T(\check{z})$ .

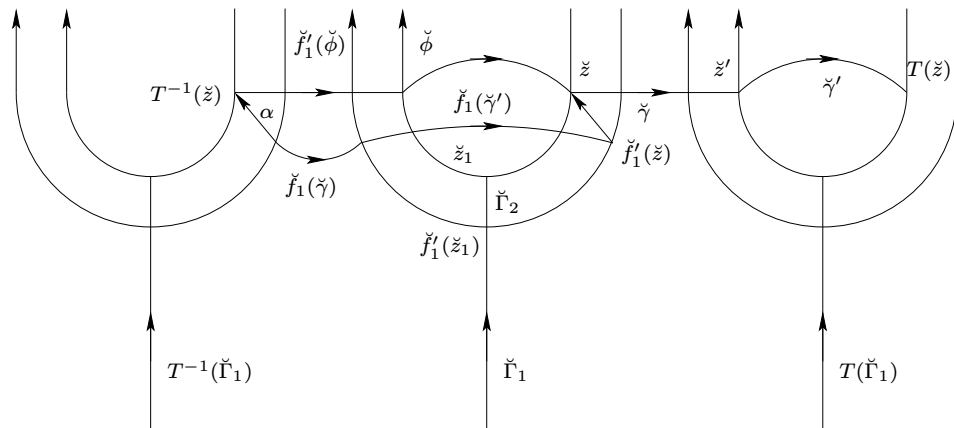
L'arc  $\check{\gamma}$  est disjoint de  $\check{\Gamma}_2$  et de  $\check{\phi}_{\check{z}_1}^+$ , il se trouve en fait dans la composante connexe  $D(\check{\Gamma}_2\check{\phi}_{\check{z}_1}^+)$  à droite de  $\check{\Gamma}_2\check{\phi}_{\check{z}_1}^+$ . Par contre  $T^{-1}(\check{\gamma})$  est inclus dans  $G(\check{\Gamma}_2\check{\phi}_{\check{z}_1}^+)$  sauf en son extrémité  $T^{-1}(\check{z}')$ . L'arc  $T^{-1} \circ \check{f}'_1(\check{\gamma})$  est également disjoint de  $\Gamma_2$  et de  $\check{\phi}_{\check{z}_1}^+$ . Plus précisément, il est inclus dans  $G(\check{\Gamma}_2\check{\phi}_{\check{z}_1}^+)$ . Il en est de même de  $\check{f}'_1(\check{\gamma}) = T^{-k} \circ \check{f}'_1(\check{\gamma})$ . Le point  $T^{-1}(\check{z})$  appartient à  $T^{-1}(G(\check{\Gamma}_1\check{f}'_1(\check{\phi}_{\check{z}_1}^-)))$ . Il en est de même de  $\check{f}'_1(\check{z}) = T^{-k} \circ \check{f}'_1(\check{z})$  si  $k > 1$ . Par contre  $\check{f}'_1(\check{z})$  est sur la droite  $T^{-1}(\check{\Gamma}_1\check{f}'_1(\check{\phi}_{\check{z}_1}^-))$  si  $k = 1$ . Dans tous les cas, on peut trouver un arc  $s \mapsto \check{\alpha}(s)$  à valeurs dans l'adhérence de  $T^{-1}(G(\check{\Gamma}_1\check{\phi}_{\check{z}_1}^-))$  qui joint  $\check{f}'_1(\check{z})$  à  $T^{-1}(\check{z})$ . On peut alors construire une famille continue  $(\check{\gamma}_s)_{s \in [0,1]}$  d'arcs à valeurs dans l'adhérence de  $G(\check{\Gamma}_2\check{\phi}_{\check{z}_1}^-)$  joignant  $\check{f}'_1 \circ \check{\gamma}$  à  $T^{-1} \circ \check{\gamma}$ , telle que  $\check{\gamma}_s(0) = \check{\alpha}(s)$ .

L'arc  $\check{\gamma}'$  est disjoint de  $\check{\Gamma}_1$  et de  $\check{f}'_1(\check{\phi}_{\check{z}_1}^-)$ , il se trouve dans la composante connexe  $D(\check{\Gamma}_1\check{f}'_1(\check{\phi}_{\check{z}_1}^-))$ . Par contre  $T^{-1}(\check{\gamma}')$  est inclus dans  $G(\check{\Gamma}_1\check{f}'_1(\check{\phi}_{\check{z}_1}^-))$ . L'arc  $\check{f}'_1(\check{\gamma}') = T^{-k} \circ \check{f}'_1(\check{\gamma}')$  est également contenu dans  $G(\check{\Gamma}_1\check{f}'_1(\check{\phi}_{\check{z}_1}^-))$ , sauf en son extrémité  $\check{f}'_1(\check{z})$  si  $k = 1$ . Dans tous les cas, on peut construire une famille continue  $(\check{\gamma}'_s)_{s \in [0,1]}$  d'arcs à valeurs dans l'adhérence de  $G(\check{\Gamma}_1\check{f}'_1(\check{\phi}_{\check{z}_1}^-))$  joignant  $\check{f}'_1 \circ \check{\gamma}'$  à  $T^{-1} \circ \check{\gamma}'$ , telle que  $\check{\gamma}'_s(0) = \check{\gamma}_s(1)$  et  $\check{\gamma}'_s(1) = T(\check{\alpha}(s))$  (nous avons illustré sur la figure qui suit le cas où  $k = 1$ ).

Chacune des applications

$$t \mapsto \frac{\check{\gamma}_s \check{\gamma}'_s(t) - \check{\gamma} \check{\gamma}'(t)}{\|\check{\gamma}_s \check{\gamma}'_s(t) - \check{\gamma} \check{\gamma}'(t)\|}$$

est bien définie, passe au quotient et définit une application continue de  $[0, 1]/0 \sim 1$  dans  $S^1$ . Le degré de ces applications ne dépend pas de  $s$ , il vaut  $i(I, 0)$  quand  $s = 0$  et 0 quand  $s = 1$  : on a donc  $i(I, 0) = 0$ . On a encore une contradiction.



Dans le cas où c'est la composante  $G(\phi)$  située à gauche de  $\phi$  qui est bornée, on raisonne avec les isotopies réciproques  $I^{-1}$  et  $I'^{-1}$ . □

*Suite de la démonstration de la proposition 3.7.* – Remarquons d'abord qu'il n'y a pas de feuille fermée  $\phi$  de  $\mathcal{F}'$  dans  $\overline{D}_r$ . En effet, si une telle feuille existe, elle borde un disque fermé

$D \subset \overline{\mathbf{D}}_r$  contenant 0 dans son intérieur. Puisque  $\mathcal{F}'$  est dynamiquement transverse à  $I'$ , ce disque est attractif si les orientations de  $\phi$  et de  $\partial D$  coïncident et répulsif dans le cas contraire. Puisque 0 est le seul point fixe de  $f$  dans  $\mathbf{D}_r$ , on en déduit que  $i(f, 0) = 1$ . Or on sait, grâce à la proposition 3.5, que  $i(f, 0) = i(\mathcal{F}, 0) \neq 1$ .

Le fait qu'il n'y ait pas de feuille fermée de  $\mathcal{F}'$  dans  $\overline{\mathbf{D}}_r$ , ni de feuille dont l'ensemble  $\omega$ -limite soit réduit à 0 implique, par le théorème de Poincaré-Bendixson, que toute demi-feuille  $\phi_z^+$ ,  $z \in \overline{\mathbf{D}}_r$ , sort de  $\overline{\mathbf{D}}_r$ , en d'autres termes que la réunion des demi-feuilles  $\phi_z^-$ ,  $z \notin \overline{\mathbf{D}}_r$ , est l'anneau  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  tout entier. Il est classique d'en déduire que 0 est une source de  $\mathcal{F}'$ . Remarquons d'abord que, si  $r'$  est assez petit, alors pour tout  $z \in \mathbf{D}_{r'} \setminus \{0\}$ , on a  $\phi_z^- \subset \mathbf{D}_r$ . En effet, dans le cas contraire, on pourrait construire une suite  $(z_n)_{n \geq 0}$  convergeant vers 0 et une suite  $(z'_n)_{n \geq 0}$  sur  $\partial \mathbf{D}_r$ , telles que  $z'_n \in \phi_{z_n}^-$  et telles que  $\phi_{z_n}^- \cap \phi_{z'_n}^+ \subset \overline{\mathbf{D}}_r$ . Si  $z'$  est une valeur d'adhérence de  $(z'_n)_{n \geq 0}$ , on en déduit que  $\phi_{z'}^+ \subset \overline{\mathbf{D}}_r$ , ce qui est impossible. Utilisant encore le théorème de Poincaré-Bendixson, le fait qu'il n'y ait pas de feuille fermée de  $\mathcal{F}'$  dans  $\overline{\mathbf{D}}_r$ , ni de feuille dont l'ensemble  $\omega$ -limite est réduit à 0, on sait que  $\alpha(\phi_z) = \{0\}$  pour tout  $z \in \mathbf{D}_{r'} \setminus \{0\}$ . Le saturé  $W = \bigcup_{z \in \mathbf{D}_{r'} \setminus \{0\}} \phi_z$  est un anneau. En effet, le complémentaire de  $W \sqcup \{0\}$  dans  $\mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\}$  est nécessairement connexe. Puisque l'ensemble  $\alpha$ -limite, dans  $W$ , de toute feuille  $\phi$  du feuilletage restreint  $\mathcal{F}'|_W$  est égal à 0, l'ensemble  $\omega$ -limite, dans  $W$  de toute feuille est égal à l'autre bout de  $W$ . Ainsi  $\mathcal{F}'|_W$  est conjugué au feuilletage radial sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  dirigé vers l'extérieur.  $\square$

#### 4. Isotopies sur la sphère

Dans cette section, on suppose que  $S$  est une sphère orientée et on fixe  $f \in \text{Homéo}^+(S)$ . On notera  $\mathcal{I}$  l'ensemble des isotopies de l'identité à  $f$  et, pour toute partie  $X \subset \text{Fix}(f)$ , on définira

$$\mathcal{I}_X = \{I \in \mathcal{I} \mid X \subset \text{Fix}(I)\}.$$

Pour tout point  $z \in S$  on choisit un homéomorphisme  $h_z : \mathbb{R}^2 \rightarrow S \setminus \{z\}$  préservant les orientations, et on définit  $R_z = h_z \circ R_\infty \circ h_z^{-1}$ . Ainsi, le nombre de rotation de l'isotopie locale  $R_z$  en  $z$  vaut 1. De même, pour tout couple  $(z, z')$  de points distincts de  $S$  on choisit un homéomorphisme  $h_{z,z'} : \mathbb{R}^2 \rightarrow S \setminus \{z\}$  tel que  $h_{z,z'}(0) = z'$  et on définit  $R_{z,z'} = h_{z,z'} \circ R_\infty \circ h_{z,z'}^{-1}$ . Le nombre de rotation de  $R_{z,z'}$  en  $z$  vaut 1, par contre il vaut  $-1$  en  $z'$ . Mettons sous forme de proposition les résultats qui ont été rappelés dans la section 1.

**PROPOSITION 4.1.** – (i) *Pour tout point  $z \in \text{Fix}(f)$ , l'ensemble  $\mathcal{I}_{\{z\}}$  est non vide. Pour tous  $I$  et  $I'$  dans  $\mathcal{I}_{\{z\}}$ , il existe un unique entier  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $I'$  soit homotope à  $R_z^k I$  dans  $\mathcal{I}_{\{z\}}$ .*

(ii) *Si  $f$  a au moins deux points fixes, alors pour tout couple  $(z, z')$  de points fixes distincts l'ensemble  $\mathcal{I}_{\{z,z'\}}$  est non vide. Pour tous  $I$  et  $I'$  dans  $\mathcal{I}_{\{z,z'\}}$ , il existe un unique entier  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $I'$  soit homotope à  $R_{z,z'}^k I$  dans  $\mathcal{I}_{\{z,z'\}}$ .*

(iii) *Si  $f$  a au moins trois points fixes, alors pour tout triplet  $(z, z', z'')$  de points fixes distincts l'ensemble  $\mathcal{I}_{\{z,z',z''\}}$  est non vide. Toutes les isotopies de  $\mathcal{I}_{\{z,z',z''\}}$  sont homotopes.*



Soit  $I = (f_t)_{t \in [0,1]} \in \mathcal{I}$ . Si  $z^*$  est un point périodique de  $f$ , de période  $q \geq 2$ , on appellera *trajectoire complète* de  $z^*$  le lacet  $\Gamma^* = I^q(z^*)$  construit par assemblage des trajectoires  $I(f^k(z^*))$ . Ce lacet est bien sûr homologue à zéro dans  $S$ . Il existe donc une *fonction duale*  $\lambda_{\Gamma^*} : S \setminus \Gamma^* \rightarrow \mathbb{Z}$ , définie à une constante additive près, telle que  $\lambda_{\Gamma^*}(z') - \lambda_{\Gamma^*}(z) = \Gamma^* \wedge \gamma$ , où  $\gamma$  est un arc quelconque qui joint  $z$  à  $z'$  et où  $\Gamma^* \wedge \gamma$  représente le nombre d'intersection algébrique entre  $\Gamma^*$  et  $\gamma$ . La fonction  $\lambda_{\Gamma^*}$  est évidemment bien définie sur l'ensemble  $\text{Fix}(I)$  (toujours à une constante près). On préférera noter  $\lambda_{I,z^*}$  la restriction à  $\text{Fix}(I)$  par analogie avec la notation donnée aux isotopies du plan. Remarquons d'ailleurs que si  $\text{Fix}(I)$  a au moins deux éléments  $z$  et  $z'$ , on a :

$$\lambda_{I,z^*}(z') - \lambda_{I,z^*}(z) = \ell_{I|_{S \setminus \{z\}, z^*}}(z').$$

Par conséquent, si  $\text{Fix}(I)$  a au moins trois éléments  $z$ ,  $z'$  et  $z''$ , on a :

$$\lambda_{I,z^*}(z'') - \lambda_{I,z^*}(z') = \ell_{I|_{S \setminus \{z\}, z^*}}(z'') - \ell_{I|_{S \setminus \{z\}, z^*}}(z').$$

**PROPOSITION 4.2.** – *Si  $f$  a au moins deux points fixes  $z$  et  $z'$ , ainsi qu'un point périodique  $z^*$  de période  $q \geq 2$ , alors pour tous  $I$  et  $I'$  dans  $\mathcal{I}_{\{z,z'\}}$  on a :*

$$\lambda_{I',z^*}(z') - \lambda_{I',z^*}(z) = \lambda_{I,z^*}(z') - \lambda_{I,z^*}(z) - kq,$$

si  $I'$  est homotope à  $(R_{z,z'})^k I$  dans  $\mathcal{I}_{\{z,z'\}}$ .

*Démonstration.* – Il suffit de vérifier que

$$\lambda_{(R_{z,z'})^k I, z^*}(z') - \lambda_{(R_{z,z'})^k I, z^*}(z) = \lambda_{I, z^*}(z') - \lambda_{I, z^*}(z) - kq,$$

et d'utiliser l'égalité

$$\lambda_{I', z^*}(z') - \lambda_{I', z^*}(z) = \lambda_{(R_{z,z'})^k I, z^*}(z') - \lambda_{(R_{z,z'})^k I, z^*}(z),$$

conséquence immédiate du fait que  $I'$  est homotope à  $(R_{z,z'})^k I$  dans  $\mathcal{I}_{\{z,z'\}}$ .  $\square$

De même, pour tout  $z^{**} \in \text{Fix}(f)$ , on peut considérer le lacet  $\Gamma^{**} = \gamma_{z^{**}}$ , une fonction duale  $\lambda_{\gamma_{z^{**}}}$  sur  $S \setminus \gamma_{z^{**}}$  (qui est d'ailleurs constante sur  $S \setminus \{z^{**}\}$  si  $z^{**} \in \text{Fix}(I)$ ) dont on note  $\lambda_{I, z^{**}}$  la restriction à  $\text{Fix}(I) \setminus \{z^{**}\}$ . La proposition 4.2 est évidemment encore valable si  $q = 1$ . Appliquée à  $z^{**}$ , elle devient :

**PROPOSITION 4.3.** – *Si  $f$  a au moins trois points fixes  $z$ ,  $z'$  et  $z^{**}$ , alors pour tous  $I$  et  $I'$  dans  $\mathcal{I}_{\{z,z'\}}$ , on a :*

$$\lambda_{I', z^{**}}(z') - \lambda_{I', z^{**}}(z) = \lambda_{I, z^{**}}(z') - \lambda_{I, z^{**}}(z) - k,$$

si  $I'$  est homotope à  $(R_{z,z'})^k I$  dans  $\mathcal{I}_{\{z,z'\}}$ .

**REMARQUE 4.4.** – La formule de Lefschetz nous dit que  $f$  a au moins un point fixe  $z$ . Si  $f$  a un point périodique  $z^*$  de période  $q \geq 2$ , le théorème A appliqué au plan  $S \setminus \{z\}$  nous dit que  $f$  a au moins un deuxième point fixe  $z'$ . Choisissons  $I \in \mathcal{I}_{\{z,z'\}}$  et remarquons que  $f$  a au moins un troisième point fixe si  $\lambda_{I, z^*}(z') - \lambda_{I, z^*}(z) = kq \in q\mathbb{Z}$ . En effet, posons  $I' = (R_{z,z'})^k I = (f'_t)_{t \in [0,1]}$ . D'après la proposition 4.2, on sait que  $\lambda_{I', z^*}(z') - \lambda_{I', z^*}(z) = 0$ . Cette propriété indique que si l'on relève au revêtement universel  $\check{M}$  de  $S \setminus \{z, z'\}$ , l'isotopie  $(f'_t)_{S \setminus \{z, z'\}})_{t \in [0,1]}$  en une isotopie  $\check{I}' = (\check{f}'_t)_{t \in [0,1]}$  issue de l'identité, tout antécédent de  $z^*$  est un point périodique de période  $q$  de  $\check{f}'_1$ . Le théorème A appliqué au plan  $\check{M}$  nous dit que  $\check{f}'_1$

a au moins un point fixe. Ce point se projette sur un troisième point fixe  $z^{**}$  de  $f$  qui vérifie  $\lambda_{I',z^{**}}(z') - \lambda_{I',z^{**}}(z) = 0$ . La proposition 4.3 nous dit alors que  $\lambda_{I,z^{**}}(z') - \lambda_{I,z^{**}}(z) = k$ . On a prouvé, plus précisément, que si  $f$  a deux points fixes  $z$  et  $z'$ , un point périodique  $z^*$  de période  $q \geq 2$ , et s'il existe  $I \in \mathcal{I}_{\{z,z'\}}$  tel que  $\lambda_{I,z^*}(z') - \lambda_{I,z^*}(z) = kq$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , alors il existe un troisième point fixe  $z^{**}$  tel que  $\lambda_{I,z^{**}}(z') - \lambda_{I,z^{**}}(z) = k$ .

REMARQUE 4.5. – Supposons que  $f$  vérifie les hypothèses du théorème B et étendons  $f$  en un homéomorphisme de  $S = \mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\}$  de même nom, qui fixe le point à l'infini. Pour montrer que  $f$  vérifie la conclusion du théorème, il suffit de trouver une isotopie  $I$  et deux points  $z, z'$  dans  $\text{Fix}(I)$  tels que

$$\lambda_{I,z^*}(z') - \lambda_{I,z^*}(z) \notin q\mathbb{Z}.$$

C'est clair si l'un des points  $z$  ou  $z'$  est égal à  $\infty$  puisque

$$\lambda_{I,z^*}(z') - \lambda_{I,z^*}(z) = \ell_{I|_{S \setminus \{z\}}, z^*}(z'),$$

c'est également vrai si aucun des deux points n'est égal à  $\infty$ . En effet, si  $I' \in \mathcal{I}_{z,z',\infty}$ , on sait que

$$\lambda_{I',z^*}(z') - \lambda_{I',z^*}(z) \notin q\mathbb{Z}$$

d'après la proposition 4.2. On en déduit que

$$\lambda_{I',z^*}(z') - \lambda_{I',z^*}(\infty) \notin q\mathbb{Z}$$

ou

$$\lambda_{I',z^*}(z) - \lambda_{I',z^*}(\infty) \notin q\mathbb{Z}.$$

REMARQUE 4.6. – Par la suite, nous écrirons souvent  $L_f(z)$ ,  $\ell_I(z)$  ou  $\lambda_I(z)$  au lieu de  $L_{f,z^*}(z)$ ,  $\ell_{I,z^*}(z)$  et  $\lambda_{I,z^*}(z)$  quand il n'y a pas d'ambiguïté sur le point périodique qui définit les fonctions d'enlacement.

### 5. Isotopies maximales sur la sphère

Comme dans la section précédente, on suppose ici que  $S$  est une sphère orientée et que  $f \in \text{Homéo}^+(S)$ . On suppose de plus que  $\text{Fix}(f)$  est fini.

On dira que  $I' \in \mathcal{I}$  est une *extension* de  $I \in \mathcal{I}$  si  $\text{Fix}(I) \subset \text{Fix}(I')$  et si  $I'$  est homotope à  $I$  dans  $\mathcal{I}_{\text{Fix}(I)}$ . On dira que  $I \in \mathcal{I}$  est une isotopie maximale s'il n'existe aucune extension  $I'$  de  $I$  telle que  $\text{Fix}(I) \neq \text{Fix}(I')$ . La finitude de  $\text{Fix}(f)$  implique que toute isotopie admet une extension maximale.

Soit  $I \in \mathcal{I}$  une isotopie telle que  $\text{Fix}(I) \neq \emptyset$ . On pose  $M = S \setminus \text{Fix}(I)$  et on relève l'isotopie  $(f_t|_M)_{t \in [0,1]}$  au revêtement universel  $\tilde{M}$  de  $M$  en une isotopie  $\tilde{I} = (\tilde{f}_t)_{t \in [0,1]}$  issue de l'identité. Dire que  $I$  est maximale signifie que  $\text{Fix}(\tilde{f}_1) = \emptyset$ , autrement dit qu'il n'y pas de point fixe de  $f$  dans  $M$  dont la trajectoire est homotope à un point dans  $M$  (voir [14]). Si  $I$  est une isotopie maximale, on peut donc construire un feuilletage  $\mathcal{F}$  sur  $M$  qui est dynamiquement transverse à l'isotopie  $(f_t|_M)_{t \in [0,1]}$ .

Dans le cas où  $f$  a un point périodique  $z^*$  de période  $q \geq 2$ , on peut choisir, pour tout  $k \in \{0, \dots, q-1\}$ , un arc  $\gamma_k$  joignant  $f^k(z^*)$  à  $f^{k+1}(z^*)$ , homotope dans  $M$  à la trajectoire  $I(f^k(z^*))$ , qui est positivement transverse à  $\mathcal{F}$ . Le lacet  $\Gamma = \prod_{0 \leq k < q} \gamma_k$  est donc homotope

dans  $M$  à la trajectoire complète  $\Gamma^* = I^q(z^*)$ . On peut donc trouver une fonction duale  $\lambda_\Gamma$  qui coïncide avec  $\lambda_{\Gamma^*} = \lambda_{I, z^*}$  sur  $\text{Fix}(I)$ .

Puisque  $\Gamma$  est positivement transverse à  $\mathcal{F}$ , tout point  $z \in \Gamma$  est de multiplicité finie. Plus précisément, si  $h: V \rightarrow ]-1, 1[$  est une carte trivialisante définie sur un voisinage  $V$  de  $z$ , l'ensemble  $V \cap \Gamma$  est une réunion de sous-arcs de  $\Gamma$  dont les images par  $h$  sont chacune le graphe d'une fonction continue définie sur un intervalle de  $]-1, 1[$  et seul un nombre fini d'entre eux contient  $z$ . On en déduit que la fonction  $\lambda_\Gamma$  est bornée. On peut remarquer également que cette fonction décroît le long de toute feuille  $\phi$  de  $\mathcal{F}$ , avec un saut en chaque point de  $\phi \cap \Gamma$  égal à la multiplicité de ce point. On en déduit que, pour tout  $\lambda \in \mathbb{Z}$ , l'ensemble

$$S_{<\lambda} = \overline{\{z \in S \mid \lambda_\Gamma(z) < \lambda\}}$$

est une variété à bord (dont le bord est vide si et seulement si  $S_{<\lambda}$  est vide ou égale à  $S$ ) et le bord orienté est une réunion de cercles positivement transverses à  $\mathcal{F}$ . Ainsi, pour tout point  $z \in S_{<\lambda}$ , on a  $\phi_z^+ \setminus \{z\} \subset \text{Int}(S_{<\lambda})$ . On peut simplifier la situation (voir [14]). En effet, on peut toujours modifier les arcs  $\gamma_k$  pour que  $\Gamma$  n'ait pas de point triple ou d'ordre supérieur et pour que l'auto-intersection soit transverse en un point double. Tout point double est alors adjacent à trois ou quatre composantes connexes de  $S \setminus \Gamma$ . Mais on peut modifier sans problème  $\Gamma$  au voisinage des points adjacents à trois composantes connexes en rajoutant des intersections pour que tout point double soit adjacent à exactement quatre composantes connexes (voir [14], page 82). On dira alors que  $\Gamma$  est en *position générique*. L'adhérence de toute composante connexe  $U$  de  $S \setminus \Gamma$  est alors une variété à bord. Puisque  $\Gamma$  est connexe, on sait que  $U$  est un disque ouvert et donc que  $\overline{U}$  est un disque fermé. On appellera *décomposition dynamique transverse* définie par un point périodique  $z^*$  tout triplet  $(I, \mathcal{F}, \Gamma)$  formé d'une isotopie maximale telle que  $\text{Fix}(I) \neq \emptyset$ , d'un feuilletage  $\mathcal{F}$  sur  $S \setminus \text{Fix}(I)$  dynamiquement transverse à  $I|_{S \setminus \text{Fix}(I)}$  et d'un lacet  $\Gamma$  homotope dans  $S \setminus \text{Fix}(I)$  à la trajectoire complète de  $z^*$  pour  $I$ , positivement transverse à  $\mathcal{F}$  et en position générique.

Si  $(I, \mathcal{F}, \Gamma)$  est une décomposition dynamique transverse définie par  $z^*$ , alors l'adhérence de toute composante connexe de  $S \setminus \Gamma$  est ce qu'on appelle communément un *bloc isolant* du feuilletage. La dynamique sur la frontière d'une composante connexe  $U$  de  $S \setminus \Gamma$  est facile à comprendre. Il y a trois types de composantes : les composantes attractives, répulsives et de type selle. Le bord orienté d'une composante attractive  $U$  est un assemblage d'un nombre fini de sous-arcs de  $\Gamma$  héritant de l'orientation de  $\Gamma$  ; la fonction  $\lambda_\Gamma$  a un minimum local sur  $U$  ; enfin  $(\phi_z^+ \setminus \{z\}) \subset U$ , pour tout  $z \in \overline{U}$ . Le bord orienté d'une composante répulsive  $U$  est un assemblage d'un nombre fini de sous-arcs de  $\Gamma$  héritant de l'orientation opposée à celle de  $\Gamma$  ; la fonction  $\lambda_\Gamma$  a un maximum local sur  $U$  ; enfin  $(\phi_z^- \setminus \{z\}) \subset U$ , pour tout  $z \in \overline{U}$ . La formule de Poincaré-Hopf nous dit que si  $U$  est une composante attractive ou répulsive alors

$$\sum_{z \in \text{Fix}(I) \cap U} i(\mathcal{F}, z) = 1.$$

Le bord orienté d'une composante  $U$  de type selle s'écrit  $\partial U = \prod_{0 \leq i \leq 2r-1} \alpha_i$ , où  $\alpha_i$  est un assemblage d'un nombre fini de sous-arcs de  $\Gamma$  héritant de l'orientation de  $\Gamma$  si  $i$  est pair, héritant de l'orientation opposée si  $i$  est impair. La fonction  $\lambda_\Gamma$  n'a pas d'extremum local sur  $U$  ; si  $z$  n'est pas une extrémité de  $\alpha_i$ , il existe un voisinage de  $z$  dans  $\phi_z^+$  (resp.  $\phi_z^-$ ) qui est inclus dans  $\overline{U}$  si  $i$  est pair (resp. impair) ; si  $z$  est une extrémité de  $\alpha_i$ , alors  $\phi_z \cap \overline{U} = \{z\}$ .

Notons que la dernière relation provient de la décroissance de  $\lambda_\Gamma$  le long de  $\phi_z$ , ce n'est pas seulement un voisinage de  $z$  dans  $\phi_z$  qui ne rencontre  $\bar{U}$  qu'en  $z$ . Remarquons que

$$\sum_{z \in \text{Fix}(I) \cap U} i(\mathcal{F}, z) = 1 - r.$$

Détaillons maintenant les informations dynamiques qu'apporte la décomposition dynamique transverse  $(I, \mathcal{F}, \Gamma)$ .

Toute feuille fermée  $\phi$  de  $\mathcal{F}$  est disjointe de  $\Gamma$ . Elle borde deux disques. Celui qui est à gauche est un disque attractif de  $f$  et celui qui est à droite est un disque répulsif. Plus généralement toute feuille non errante est disjointe de  $\Gamma$ . C'est le cas, par exemple, des feuilles qui appartiennent à l'ensemble  $\omega$ -limite ou à l'ensemble  $\alpha$ -limite d'une autre feuille.

On déduit des propriétés des feuilletages singuliers de la sphère rappelées en section 1, et du fait que  $\mathcal{F}$  est dynamiquement transverse à  $I$ , que pour toute feuille  $\phi$  qui n'est pas fermée, les ensembles limites remplis  $\bar{\alpha}(z)$  et  $\bar{\omega}(z)$  sont des parties fermées connexes remplies qui sont positivement ou négativement invariantes par  $f$ .

REMARQUE 5.1. – Pour conclure cette section, supposons que  $f$  ait au moins trois points fixes  $z, z'$  et  $z''$  ainsi qu'un point périodique  $z^*$  de période  $q \geq 2$ . Soit  $I \in \mathcal{I}_{\{z, z', z''\}}$  une isotopie maximale. Considérons une décomposition dynamique transverse  $(I, \mathcal{F}, \Gamma)$  définie par  $z^*$ . Notons  $\lambda_-$  la valeur minimale prise par la fonction  $\lambda_\Gamma$  sur  $S \setminus \Gamma$  et  $\lambda_+$  la valeur maximale. Toute composante connexe de  $S \setminus \Gamma$  où  $\lambda_\Gamma$  vaut  $\lambda_-$  (resp.  $\lambda_+$ ) est une composante attractive (resp. répulsive) et contient donc un point de  $\text{Fix}(I)$ . On peut donc trouver deux points  $z_-$  et  $z_+$  dans  $\text{Fix}(I)$  tels que

$$\lambda_{I, z^*}(z_-) = \lambda_- < \lambda_+ = \lambda_{I, z^*}(z_+).$$

Dans le cas où  $\lambda_{I, z^*}(z_+) - \lambda_{I, z^*}(z_-) = kq, k \in \mathbb{Z}$ , on a vu à la fin de la section précédente qu'il existait un point fixe  $z^{**}$ , distinct de  $z_-$  et  $z_+$ , tel que  $\lambda_{I, z^{**}}(z_+) - \lambda_{I, z^{**}}(z_-) = k$ . Puisque  $k \neq 0$ , le point  $z^{**}$  n'est pas dans  $\text{Fix}(I)$  et est donc distinct de  $z, z'$  et  $z''$ . Il y a donc un quatrième point fixe.

## 6. Réduction au cas fini

Nous allons expliquer dans cette section pourquoi il suffit de démontrer le théorème B dans le cas où  $\text{Fix}(f)$  est fini. Nous expliquerons ensuite la démarche employée pour traiter ce cas.

Supposons que  $f \in \text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$  ait un point périodique  $z^*$  de période  $q \geq 2$ . L'espace  $\text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$  muni de la  $C^0$ -topologie étant localement contractile, il existe un voisinage  $\mathcal{W}_0$  de  $f$  dans  $\text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$  et une application continue  $\Psi: \mathcal{W}_0 \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{W}_0$  tels que

- $\Psi(f', 0) = f$  pour tout  $f' \in \mathcal{W}_0$  ;
- $\Psi(f', 1) = f'$  pour tout  $f' \in \mathcal{W}_0$  ;
- $\Psi(f, t) = f$  pour tout  $t \in [0, 1]$ .

Fixons une isotopie  $I_f$  de l'identité à  $f$  et, pour tout  $f' \in \mathcal{W}_0$ , notons  $I_{f'}$  l'isotopie obtenue par assemblage de  $I_f$  et de l'isotopie  $(\Psi(f', t))_{t \in [0,1]}$ . Fixons  $r > 0$  pour que  $\mathbf{D}_r$  contienne la trajectoire complète  $I_f^q(z^*)$  puis  $r' > r$  pour que la trajectoire  $I_{f'}(z)$  de tout point  $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{D}_{r'}$  ne rencontre pas  $\overline{\mathbf{D}}_r$ . Remarquons qu'il existe un voisinage  $\mathcal{W}_1 \subset \mathcal{W}_0$  de  $f$  dans  $\text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$  tel que si  $f' \in \mathcal{W}_1$ , la trajectoire  $I_{f'}(f^k(z^*))$  de tout point  $f^k(z^*)$ ,  $0 \leq k < q$ , soit incluse dans  $\mathbf{D}_r$  et la trajectoire  $I_{f'}(z)$  de tout point  $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{D}_{r'}$ , ne rencontre pas  $\overline{\mathbf{D}}_r$ . Ainsi, si  $f' \in \mathcal{W}_1$  coïncide avec  $f$  sur  $O(z^*)$ , on a  $\ell_{I_{f'}}(z) \in q\mathbb{Z}$  pour tout  $z \in \text{Fix}(f') \setminus \mathbf{D}_{r'}$ . Remarquons maintenant que, pour tout  $z \in \text{Fix}(f) \cap \overline{\mathbf{D}}_{r'}$ , il existe un voisinage  $\mathcal{W}_z \subset \mathcal{W}_1$  de  $f$  dans  $\text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$  et un voisinage  $W_z$  de  $z$  dans  $\mathbb{R}^2$  tel que si  $f' \in \mathcal{W}_z$  coïncide avec  $f$  sur  $O(z^*)$  et si  $z' \in \text{Fix}(f') \cap W_z$ , alors  $\ell_{I_{f'}}(z') = \ell_{I_f}(z)$ . Puisque  $\text{Fix}(f) \cap \overline{\mathbf{D}}_{r'}$  est compact, il existe une famille  $(z_i)_{1 \leq i \leq m}$  dans  $\text{Fix}(f) \cap \overline{\mathbf{D}}_{r'}$  telle que  $\text{Fix}(f) \cap \overline{\mathbf{D}}_{r'} \subset \bigcup_{1 \leq i \leq m} W_{z_i}$ . Puisque  $\overline{\mathbf{D}}_{r'}$  est compact, il existe un voisinage  $\mathcal{W}_2 \subset \mathcal{W}_1$  tel que  $\text{Fix}(f') \cap \overline{\mathbf{D}}_{r'} \subset \bigcup_{1 \leq i \leq m} W_{z_i}$ , pour tout  $f' \in \mathcal{W}_2$ . Posons  $\mathcal{W}_3 = \mathcal{W}_2 \cap \left( \bigcap_{1 \leq i \leq m} \mathcal{W}_{z_i} \right)$ . Pour montrer qu'il existe  $z \in \text{Fix}(f)$  tel que  $\ell_{I_f}(z) \notin q\mathbb{Z}$ , il suffit de trouver un homéomorphisme  $f' \in \mathcal{W}_3$  qui coïncide avec  $f$  sur  $O(z^*)$  et un point  $z' \in \text{Fix}(f')$  tel que  $\ell_{I_{f'}}(z') \notin q\mathbb{Z}$ . Or on peut trouver un homéomorphisme  $f' \in \mathcal{W}_3$  qui coïncide avec  $f$  sur  $O(z^*)$  et qui a un nombre fini de points fixes. Pour prouver le théorème B, il suffit donc de le faire dans le cas où l'ensemble des points fixes est fini. En d'autres termes, pour démontrer le théorème B, il suffit de prouver le théorème B( $n$ ) suivant, pour tout entier  $n \geq 0$ .

**THÉORÈME B( $n$ ).** – *Soit  $f$  un homéomorphisme du plan qui préserve l'orientation et qui a exactement  $n$  points fixes. Pour tout point périodique  $z^*$  de période  $q \geq 2$ , il existe un point fixe  $z$  tel que  $L_{f, z^*}(z) \neq 0$ .*

Supposons que  $f \in \text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$  ait un point périodique  $z^*$  de période  $q \geq 2$  et un nombre fini de points fixes. Nous pouvons prolonger  $f$  en un homéomorphisme (de même nom) de la sphère  $S = \mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\}$  qui fixe  $\infty$ . Nous dirons que  $f$  est *réductible* s'il vérifie l'une des deux propriétés suivantes :

- (i) il existe une partie fermée connexe remplie  $K \subset S$  disjointe de  $O(z^*)$ , invariante par  $f$ , qui contient au moins deux points fixes de  $f$  ;
- (ii) il existe une isotopie maximale  $I \in \mathcal{I}_\infty$ , une décomposition dynamique transverse  $(I, \mathcal{F}, \Gamma)$  définie par  $z^*$  et une feuille non fermée  $\phi$  de  $\mathcal{F}$  telles que :
  - $\overline{\alpha}(\phi)$  et  $\overline{\omega}(\phi)$  soient disjoints,
  - $\Gamma \cap (\phi \cup \overline{\alpha}(\phi) \cup \overline{\omega}(\phi)) = \emptyset$ .

Dans le cas contraire, nous dirons que  $f$  est *irréductible*.

Nous allons démontrer le théorème B, dans le cas fini, par récurrence sur  $n$ . Nous initialiserons la récurrence dans la prochaine section en prouvant les théorèmes B(0), B(1), B(2). Dans la section 8, nous montrerons directement le théorème B dans le cas où  $\text{Fix}(f)$  est fini et où  $f$  est irréductible. Dans la section 9, nous prouverons que le théorème B( $n$ ) est vrai dans le cas où  $f$  est réductible, si l'on suppose que les théorèmes B( $n'$ ),  $n' < n$ , ont été prouvés.

### 7. Initialisation de la récurrence

Le théorème A nous donne B(0). D'après la remarque faite à la fin de la section 4, ce théorème nous donne aussi B(1). En effet, supposons que  $f \in \text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$  ait un point périodique  $z^*$  de période  $q \geq 2$ , et un unique point fixe  $z$ . Prolongeons  $f$  en un homéomorphisme de la sphère  $S = \mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\}$  fixant  $\infty$  et choisissons  $I \in \mathcal{I}_{z, \infty}$ . Nous avons vu à la fin de la section 4 que  $\ell_{I|_{\mathbb{R}^2}, z^*}(z) = \lambda_{I, z^*}(z) - \lambda_{I, z^*}(\infty) \notin q\mathbb{Z}$ .

On peut déduire également B(2) de la remarque faite à la fin de la section 5. En effet, supposons que  $f \in \text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$  ait un point périodique  $z^*$  de période  $q \geq 2$ , et exactement deux points fixes  $z$  et  $z'$ . Prolongeons là encore  $f$  en un homéomorphisme de la sphère  $S = \mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\}$  fixant  $\infty$  et choisissons  $I \in \mathcal{I}_{z, z', \infty}$ . Nous avons vu à la fin de la section 5 que l'un des entiers

$$\ell_{I|_{\mathbb{R}^2}}(z) = \lambda_I(z) - \lambda_I(\infty),$$

$$\ell_{I|_{\mathbb{R}^2}}(z') = \lambda_I(z') - \lambda_I(\infty),$$

$$\ell_{I|_{\mathbb{R}^2}}(z') - \ell_{I|_{\mathbb{R}^2}}(z) = \lambda_I(z') - \lambda_I(z)$$

n'était pas multiple de  $q$ . C'est donc le cas pour l'un des entiers  $\ell_{I|_{\mathbb{R}^2}}(z)$  ou  $\ell_{I|_{\mathbb{R}^2}}(z')$ .

### 8. Étude du cas irréductible

Nous prouverons dans cette section :

**PROPOSITION 8.1.** – *Supposons que  $f \in \text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$  ait un point périodique  $z^*$  de période  $q \geq 2$ , un nombre fini de points fixes et soit irréductible. Il existe alors un point fixe  $z$  tel que  $L_{f, z^*}(z) \neq 0$ .*

Nous prolongeons  $f$  en un homéomorphisme de la sphère  $S = \mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\}$  qui fixe  $\infty$ .

**LEMME 8.2.** – *Soit  $(I, \mathcal{F}, \Gamma)$  une décomposition dynamique transverse définie par  $z^*$ . Toute composante connexe  $U$  de  $S \setminus \Gamma$  qui contient une source  $z_0$  de  $\mathcal{F}$  tel que  $i(f, z_0) \neq 1$  ne contient pas de point de  $\text{Fix}(I)$  autre que  $z_0$ . De plus  $\mathcal{F}|_U$  est conjugué au feuilletage radial sur  $\mathbf{D}_1 \setminus \{0\}$  dirigé vers l'extérieur.*

*Démonstration.* – On va raisonner par l'absurde et supposer que  $\mathcal{F}|_U$  n'est pas conjugué au feuilletage radial sur  $\mathbf{D}_1 \setminus \{0\}$  dirigé vers l'extérieur. Il existe alors une feuille  $\phi$  issue de  $z_0$  qui reste dans  $U$ . L'ensemble  $\omega(\phi)$ , qui est disjoint de  $\Gamma$ , est donc inclus dans  $U$ . On va commencer par montrer que c'est nécessairement une feuille fermée.

Puisque  $\omega(\phi) \neq \{z_0\}$ , on sait que  $\bar{\omega}(\phi)$  et  $\bar{\alpha}(\phi) = \{z_0\}$  sont disjoints. Puisque  $f$  est irréductible, on en déduit que  $\Gamma \cap \bar{\omega}(\phi) \neq \emptyset$ . Le lacet  $\Gamma$ , étant connexe et disjoint de  $\partial\bar{\omega}(\phi) = \omega(\phi)$ , est nécessairement inclus dans l'intérieur de  $\bar{\omega}(\phi)$ . Le disque ouvert  $W = S \setminus \bar{\omega}(\phi)$  est donc inclus dans  $U$ , de même que son adhérence. On a vu en section 5 que  $\bar{\omega}(\phi)$  était positivement ou négativement invariant par  $f$ . On va supposer qu'on est dans le premier cas, le second se traitant de façon analogue. Dans ce cas,  $\bar{W}$  est une partie négativement invariante par  $f$  et  $K = \bigcap_{k \geq 0} f^{-k}(\bar{W})$  est donc une partie fermée connexe invariante disjointe de  $\Gamma$ . La composante connexe de  $S \setminus K$  qui contient  $\Gamma$  est un disque ouvert invariant, puisqu'elle contient  $O(z^*)$ . Son complémentaire  $K'$  est une partie fermée connexe remplie contenant  $K$ , invariante par  $f$  et disjointe de  $O(z^*)$ . Puisque  $K'$  contient

$z_0$  et puisque  $f$  est irréductible, il n'y a pas d'autre point fixe de  $f$  dans  $K'$  et donc dans  $K$ . En particulier,  $\omega(\phi) \cap \text{Fix}(I) = \emptyset$ , puisque  $\omega(\phi) \cap \text{Fix}(I) \subset K \setminus \{z_0\}$ . On en déduit donc que  $\omega(\phi)$  est une feuille fermée  $\phi'$ .

L'ensemble  $\overline{W}$  précédemment défini est le disque fermé bordé par  $\phi'$  qui contient  $z_0$ . C'est un disque répulsif de  $f$  qui ne contient pas de point fixe autre que  $z_0$ . On a donc  $i(f, z_0) = 1$ , ce qui contredit l'hypothèse.  $\square$

LEMME 8.3. – Soit  $(I, \mathcal{F}, \Gamma)$  une décomposition dynamique transverse. Toute composante connexe répulsive  $U$  de  $S \setminus \Gamma$  contient un unique point de  $\text{Fix}(I)$ .

*Démonstration.* – Considérons une composante connexe répulsive  $U$ . La réunion des feuilles incluses dans  $U$  et de  $\text{Fix}(I) \cap U$  est une partie fermée connexe remplie. L'ensemble  $\mathcal{X}$  des parties fermées connexes remplies, qui sont réunions de  $\text{Fix}(I) \cap U$  et de feuilles incluses dans  $U$ , étant inductif, on peut choisir une partie de  $\mathcal{F}$  qui est minimale pour l'inclusion. On va montrer qu'elle se réduit à un point, ce qui nous donnera le lemme. Nous allons donc montrer que si  $X \in \mathcal{X}$  n'est pas réduit à un point, il existe  $X' \in \mathcal{X}$  qui est inclus strictement dans  $X$ . Remarquons que la frontière de  $X$  contient au moins une feuille.

Commençons par prouver que toute feuille  $\phi \subset \partial X$  est fermée ou *presque fermée* (i.e. vérifie  $\alpha(\phi) = \omega(\phi) = \{z_0\}$ , avec  $z_0 \in \text{Fix}(f)$ ). Dans le cas où  $\phi \subset \partial X$  n'est ni fermée, ni presque fermée, l'un des ensembles  $\overline{\omega}(\phi)$  ou  $\overline{\alpha}(\phi)$  doit rencontrer  $\Gamma$ , car  $f$  est irréductible. Supposons par exemple que  $\overline{\omega}(\phi) \cap \Gamma \neq \emptyset$ . Le disque ouvert  $S \setminus X$  doit donc rencontrer  $\overline{\omega}(\phi)$  puisqu'il contient  $\Gamma$ . Or il ne rencontre pas la frontière de  $\overline{\omega}(\phi)$ , puisque  $\partial \overline{\omega}(\phi) = \omega(\phi) \subset \partial X = \partial(S \setminus X)$ . On en déduit que  $S \setminus X \subset \overline{\omega}(\phi)$ , puis que  $\partial X = \partial(S \setminus X) \subset \overline{\omega}(\phi)$ . Ceci est impossible car  $\phi \cap \overline{\omega}(\phi) = \emptyset$  et  $\phi \subset \partial X$ .

Supposons maintenant que  $\partial X$  contienne une feuille fermée  $\phi$ . Puisque  $X$  est rempli, l'un des disques fermés bordés par  $\phi$  est inclus dans  $X$ . Commençons par montrer que  $X$  se réduit à ce disque, noté  $D$ . Raisonnons par l'absurde et supposons que  $X \neq D$ . Il existe un voisinage  $W$  de  $\phi$  tel que toute feuille  $\phi'$  qui rencontre  $W$  soit une feuille fermée ou alors une feuille non fermée dont un des ensembles limites soit une feuille fermée. On vient de voir qu'une telle feuille ne peut exister dans  $\partial X$ . Puisque  $D \subset X$ ,  $D \neq X$  et  $\phi = \partial D \subset \partial X$ , on en déduit qu'il existe une feuille fermée  $\phi' \subset \partial X$  disjointe de  $D$  qui rencontre  $W$ . L'un des disques bordés par  $\phi'$  est inclus dans  $X$ . Ce n'est pas le disque qui contient  $D$ , puisque  $\phi \in \partial X$ ; ce n'est pas non plus le disque disjoint de  $D$ , si  $W$  est choisi assez proche de  $D$ . On a donc une contradiction. Montrons maintenant que le disque  $X = D$  (et donc également  $U$ !) contient un unique point fixe, ce qui prouvera le lemme dans le cas où  $\partial X$  contient une feuille fermée. Il suffit de remarquer que  $X$  est positivement ou négativement invariant par  $f$  et que  $K = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} f^k(X)$  est donc une partie fermée connexe remplie invariante par  $f$ . Puisqu'elle est disjointe de  $\Gamma$  et donc de  $O(z^*)$  et puisque  $f$  est irréductible, elle ne contient qu'un point fixe.

Supposons pour finir que  $\partial X$  contient une feuille presque fermée  $\phi$  telle que  $\alpha(\phi) = \omega(\phi) = \{z_0\}$ . Puisque  $X$  est rempli, l'un des disques fermés bordés par  $\overline{\phi}$  est inclus dans  $X$ . Comme précédemment, on peut montrer qu'il existe un voisinage  $W$  de  $\phi$  tel que  $\partial X \cap W = \phi$ . En d'autres termes,  $D \setminus \{z_0\}$  est ouvert dans  $X$  et son complémentaire  $X' = X \setminus (D \setminus \{z_0\})$  est fermé. Remarquons que  $X'$  est connexe et rempli. Il reste à vérifier que  $\text{Fix}(I) \cap U \subset X'$  pour montrer que  $X' \subset \mathcal{X}$ . Notons que  $D$  est positivement ou

négativement invariant par  $f$  et que  $K = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} f^k(D)$  est une partie fermée connexe remplie disjointe de  $\Gamma$ , invariante par  $f$ . Puisque  $f$  est irréductible, il ne contient aucun point fixe de  $I$  autre que  $z_0$ . Ainsi  $\text{Fix}(I) \cap U \subset X'$ .  $\square$

**LEMME 8.4.** – Soient  $I \in \mathcal{I}_{\{\infty\}}$  et  $I' \in \mathcal{I}_{\{\infty\}}$  deux isotopies maximales. Soient  $\mathcal{F}$  un feuilletage dynamiquement transverse à  $I$  et  $\mathcal{F}'$  un feuilletage dynamiquement transverse à  $I'$ . On suppose qu'il existe un point  $z \in (\text{Fix}(I) \cap \text{Fix}(I')) \setminus \{\infty\}$  tel que

- $i(\mathcal{F}, z) \neq 1$ ;
- $\lambda_I(z) < \lambda_I(\infty)$ ;
- $\lambda_{I'}(z) = \lambda_{I'}(\infty)$ .

Alors il existe  $z' \in \text{Fix}(I') \setminus \{\infty, z\}$  tel que

- $i(\mathcal{F}', z') \neq 1$ ;
- $\lambda_{I'}(z') < \lambda_{I'}(\infty)$ .

*Démonstration.* – Plaçons-nous sous les hypothèses du lemme et considérons une décomposition dynamique transverse  $(I', \mathcal{F}', \Gamma')$  définie par  $z^*$ . Il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $I'$  soit homotope à  $R_{z, \infty}^k I$  dans  $\mathcal{I}_{\{\infty, z\}}$ . D'après la proposition 4.2, nous savons que  $\lambda_I(z) - \lambda_I(\infty) = -kq$  et donc que  $k > 0$ . Puisque  $\rho(R_{z, \infty}, z) = 1$ , la proposition 3.7 nous dit que  $z$  est une source de  $\mathcal{F}'$ . Puisque  $i(\mathcal{F}, z) \neq 1$ , on sait d'après la proposition 3.5 que  $i(f, z) = i(\mathcal{F}, z) \neq 1$ . Le lemme 8.2 nous dit que la composante connexe  $U$  de  $S \setminus \Gamma'$  qui contient  $z$  ne contient aucun point de  $\text{Fix}(I')$  autre que  $z$  et que  $U$  est une composante répulsive de  $(I', \mathcal{F}', \Gamma')$ . Posons  $\lambda = \lambda_{I'}(z) = \lambda_{I'}(\infty)$ . Le bord de  $U$ , qui est transverse à  $\mathcal{F}'$ , est inclus dans le bord d'une composante connexe  $M$  de la surface  $S_{<\lambda}$  définie par  $\Gamma'$ . Puisque  $\infty \notin M \cup U$ , le bord de  $M$  a au moins deux composantes connexes. Notons alors  $\lambda_-$  la valeur minimale que prend la fonction  $\lambda_{\Gamma'}$  sur  $M$ ,  $m_-$  le nombre de composantes connexes de  $S \setminus \Gamma'$  contenues dans  $M$  où  $\lambda_{\Gamma'}$  vaut  $\lambda_-$ , enfin notons  $m_+$  le nombre de composantes connexes de  $\partial M$ . La formule de Poincaré-Hopf nous dit que

$$\sum_{z' \in \text{Fix}(I') \cap M, \lambda_{\Gamma'}(z) = \lambda_-} i(\mathcal{F}', z') = m_- > 0$$

et

$$\sum_{z' \in \text{Fix}(I') \cap M} i(\mathcal{F}', z') = 2 - m_+ \leq 0.$$

On en déduit qu'il existe un point  $z' \in \text{Fix}(I') \cap M$  tel que  $\lambda_- < \lambda_{\Gamma'}(z') < \lambda$  et  $i(\mathcal{F}', z') < 0$ .  $\square$

*Démonstration de la proposition 8.1.* – Nous allons raisonner par l'absurde et supposer que, pour tout point fixe  $z \in \mathbb{R}^2$  de  $f$ , on a  $L_f(z) = 0$ . Nous partons d'une isotopie  $I$  de l'identité à  $f$  dans  $\text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$  et nous choisissons un point  $z_0 \in \text{Fix}(f)$  où la fonction  $\ell_I$  atteint son maximum. Par hypothèse, il existe  $k_0 \in \mathbb{Z}$  tel que  $\ell_I(z_0) = k_0 q$ . On peut trouver une isotopie maximale  $I_0 \in \mathcal{I}_{\{\infty, z_0\}}$  telle que  $I_0|_{\mathbb{R}^2}$  soit homotope à  $R_{\infty}^{k_0} I$ . La fonction  $\lambda_{I_0}$  prend donc la même valeur, notée  $\lambda^+$ , en  $\infty$  et en  $z_0$ , qui est le maximum de  $\lambda_{I_0}$  sur  $\text{Fix}(I_0)$ . Choisissons alors une décomposition dynamique transverse  $(I_0, \mathcal{F}_0, \Gamma_0)$  définie par  $z^*$ . Puisque  $\lambda_+$  est le maximum de  $\lambda_{I_0}$  sur  $\text{Fix}(I_0)$ , c'est également le maximum de la fonction duale  $\lambda_{\Gamma_0}$  sur  $S \setminus \Gamma_0$ . Les points  $\infty$  et  $z_0$  appartiennent donc à des composantes connexes répulsives de  $S \setminus \Gamma_0$ . Le lemme 8.3 nous dit que ces composantes sont distinctes. Le bord de  $S_{<\lambda^+}$  ayant au



moins deux composantes connexes, le raisonnement fait dans le lemme précédent permet de conclure à l'existence d'un point  $z_1 \in \text{Fix}(I_0) \setminus \{\infty, z_0\}$  tel que  $i(\mathcal{F}_0, z_1) < 0$  et  $\lambda_{I_0}(z_1) < \lambda^+$ .

On a

$$\begin{aligned} \lambda_{I_0}(z_1) - \lambda^+ &= \lambda_{I_0}(z_1) - \lambda_{I_0}(z_0) \\ &= \ell_{I_0|_{\mathbb{R}^2}}(z_1) - \ell_{I_0|_{\mathbb{R}^2}}(z_0) \\ &= \ell_I(z_1) - \ell_I(z_0) \\ &= \ell_I(z_1) - k_0q. \end{aligned}$$

Puisqu'on suppose que  $\ell_I(z_1) \in q\mathbb{Z}$ , on sait donc qu'il existe un entier  $k_1 > 0$  tel que

$$\lambda_{I_0}(z_1) - \lambda_{I_0}(\infty) = \lambda_{I_0}(z_1) - \lambda^+ = -k_1q.$$

On peut trouver une isotopie maximale  $I_1 \in \mathcal{I}_{\{\infty, z_1\}}$  homotope à  $R_{z_1, \infty}^{k_1} I_0$  dans  $\mathcal{I}_{\{\infty, z_1\}}$  et un feuilletage  $\mathcal{F}_1$  dynamiquement transverse à  $I_1$ . On a alors  $\lambda_{I_1}(z_1) = \lambda_{I_1}(\infty)$ . On peut donc appliquer le lemme 8.4 et trouver un point  $z_2 \in \text{Fix}(I_1) \setminus \{\infty, z_1\}$  tel que  $i(\mathcal{F}_1, z_2) < 0$  et  $\lambda_{I_1}(z_2) < \lambda_{I_1}(\infty)$ . Comme précédemment, on obtient

$$\lambda_{I_1}(z_2) - \lambda_{I_1}(\infty) = \ell_I(z_2) - k_0q + k_1q.$$

Puisque, par hypothèse, on a  $\ell_I(z_2) \in q\mathbb{Z}$ , on sait qu'il existe un entier  $k_2 > 0$  tel que

$$\lambda_{I_1, z^*}(z_2) - \lambda_{I_1}(\infty) = -k_2q.$$

Puisqu'on suppose que  $\ell_I(z) \in q\mathbb{Z}$  pour tout  $z \in \text{Fix}(f)$ , on peut appliquer le lemme 8.4 indéfiniment et construire une suite  $(z_n)_{n \geq 0}$  de points fixes de  $f$  telle que la suite  $(\ell_I(z_n))_{n \geq 0}$  soit strictement décroissante, ce qui est absurde.  $\square$

## 9. Étude du cas réductible

Nous prouverons dans cette section :

**PROPOSITION 9.1.** – *Supposons que  $f \in \text{Homéo}^+(\mathbb{R}^2)$  ait exactement  $n$  points fixes et un point périodique  $z^*$  de période  $q \geq 2$ . Supposons de plus que  $f$  soit réductible. Si le théorème  $B(n')$  est vrai pour tout  $n' < n$ , alors il existe un point fixe  $z$  tel que  $L_{f, z^*}(z) \neq 0$ .*

Nous prolongeons, là encore,  $f$  en un homéomorphisme de la sphère  $S = \mathbb{R}^2 \sqcup \{\infty\}$  qui fixe  $\infty$ . Nous allons envisager les deux cas de réductibilité.

*Démonstration dans le premier cas de réductibilité.* – Nous supposons ici qu'il existe une partie fermée remplie  $K \subset S$ , invariante par  $f$  et disjointe de  $O(z^*)$ , qui contient au moins deux points fixes de  $f$ . L'hypothèse de récurrence, appliquée à la restriction de  $f$  au complémentaire de  $K$  nous dit qu'il existe  $z \in S \setminus K$  tel que  $L_{f|_{S \setminus K, z^*}}(z) \neq 0$ . Nous allons envisager trois cas.

Dans le cas où  $\infty \in K$ , on applique la proposition 1.3 aux plans  $P_0 = S \setminus K$  et  $P_1 = \mathbb{R}^2$ , aux disques  $W_0 = W'_0 = W_1 = W'_1 = S \setminus K$  et à l'identité sur  $S \setminus K$ . On en déduit que

$$L_f(z) = L_{f|_{S \setminus K}}(z) \neq 0.$$

Dans le cas où  $z = \infty$ , on fixe  $z_0 \in \text{Fix}(f) \cap K$  ainsi qu'une isotopie  $I \in \mathcal{I}_{z_0, \infty}$ . La proposition 1.3 nous dit que

$$L_{f|_{S \setminus \{z_0\}}}(\infty) = L_{f|_{S \setminus K}}(\infty) \neq 0.$$

On en déduit que

$$\ell_{I|_{\mathbb{R}^2}}(z_0) = \lambda_I(z_0) - \lambda_I(\infty) = -\ell_{I|_{S \setminus \{z_0\}}}(\infty) \notin q\mathbb{Z}.$$

Dans le cas où  $\infty \notin K$  et  $z \neq \infty$ , on fixe  $z_0 \in \text{Fix}(f) \cap K$  ainsi qu'une isotopie  $I \in \mathcal{I}_{z, z_0, \infty}$ . Là encore on sait que

$$L_{f|_{S \setminus \{z_0\}}}(z) = L_{f|_{S \setminus K}}(z) \neq 0.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \ell_{I|_{\mathbb{R}^2}}(z) - \ell_{I|_{\mathbb{R}^2}}(z_0) &= \lambda_I(z) - \lambda_I(z_0) \\ &= \ell_{I|_{S \setminus \{z_0\}}}(z) \notin q\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'un au moins des deux entiers  $\ell_{I|_{\mathbb{R}^2}}(z)$  ou  $\ell_{I|_{\mathbb{R}^2}}(z_0)$  n'est pas un multiple de  $q$ .  $\square$

*Démonstration dans le second cas de réductibilité.* – Nous supposons ici qu'il existe une isotopie maximale  $I \in \mathcal{I}_\infty$ , une décomposition dynamique transverse  $(I, \mathcal{F}, \Gamma)$  définie par  $z^*$  et une feuille non fermée  $\phi$  de  $\mathcal{F}$  telles que  $\bar{\alpha}(\phi)$  et  $\bar{\omega}(\phi)$  soient disjoints et telles que  $\Gamma \cap (\phi \cup \bar{\alpha}(\phi) \cup \bar{\omega}(\phi)) = \emptyset$ . On choisit alors  $z_0 \in \bar{\alpha}(\phi) \cap \text{Fix}(I)$  et  $z_1 \in \bar{\omega}(\phi) \cap \text{Fix}(I)$ .

Commençons par relever  $I$  en une isotopie  $\check{I} = (\check{f}_t)_{t \in [0,1]}$  du revêtement universel  $\check{M}$  de l'anneau  $M = S \setminus \{z_0, z_1\}$ , qui est issue de l'identité. Le feuilletage  $\mathcal{F}$  se relève alors en un feuilletage  $\check{\mathcal{F}}$  de  $\check{M} \setminus \text{Fix}(\check{I})$ , dynamiquement transverse à  $\check{I}$ . Notons  $\check{T}$  l'automorphisme de revêtement défini par le bord d'un petit disque centré en  $z_1$ . Donnons-nous une feuille  $\check{\phi}$  de  $\check{\mathcal{F}}$  qui relève  $\phi$ . Remarquons que c'est une droite topologique, que  $\check{T}(\check{\phi})$  est à droite de  $\check{\phi}$  et que  $\check{W} = D(\check{\phi}) \cap G(\check{T}(\check{\phi}))$  est un disque ouvert, composante connexe de la préimage de  $W = S \setminus (\phi \cup \bar{\alpha}(\phi) \cup \bar{\omega}(\phi))$  par la projection de revêtement. Posons  $\check{f} = \check{f}_1$ . Puisque  $\check{\mathcal{F}}$  est dynamiquement transverse à  $\check{I}$ , on sait que  $\check{\phi}$  et  $\check{T}(\check{\phi})$  sont des droites de Brouwer de  $\check{f}$  et donc que  $\check{W}' = D(\check{f}(\check{\phi})) \cap G(\check{f}^{-1}(\check{T}(\check{\phi})))$  est un disque ouvert contenant  $\check{W}$ ,  $\check{f}(\check{W})$  et  $\check{f}^{-1}(\check{W})$ . Remarquons que  $\check{W}' \cap \text{Fix}(\check{f}) = \check{W} \cap \text{Fix}(\check{f})$  et que  $\check{W}' \cap \text{Fix}(\check{I}) = \check{W} \cap \text{Fix}(\check{I})$ .

L'isotopie  $\check{I}|_{\check{M} \setminus \text{Fix}(\check{I})}$  se relève en une isotopie  $\tilde{I} = (\tilde{f}_t)_{t \in [0,1]}$  du relèvement universel  $\tilde{M}$  de  $\check{M} \setminus \text{Fix}(\check{I})$ , qui est issue de l'identité. Notons  $\tilde{\pi}: \tilde{M} \rightarrow \check{M} \setminus \text{Fix}(\check{I})$  la projection de revêtement et  $\tilde{G}$  le groupe des automorphismes du revêtement. Fixons une composante connexe  $\tilde{W}'$  de  $\tilde{\pi}^{-1}(\check{W}' \setminus \text{Fix}(\check{I}))$  et notons  $\tilde{H} \subset \tilde{G}$  le stabilisateur de  $\tilde{W}'$ . Définissons alors  $\widehat{M} = \tilde{M}/\tilde{H}$  et notons  $\widehat{\pi}: \widehat{M} \rightarrow \check{M}$  la projection de revêtement. Ainsi, on a une suite de revêtements

$$\tilde{M} \rightarrow \widehat{M} \rightarrow \check{M} \setminus \text{Fix}(\check{I}) \rightarrow S \setminus \text{Fix}(I).$$

Remarquons que l'isotopie  $\tilde{I}$  se projette en une isotopie  $\widehat{I} = (\widehat{f}_t)_{t \in [0,1]}$  de  $\widehat{M}$ .

Les composantes connexes de  $\partial\tilde{W}'$  ne sont pas relativement compactes dans  $\tilde{M}$  puisque chacune d'elles est un relèvement de  $f(\phi)$  ou de  $f^{-1}(\phi)$ . On en déduit que  $\tilde{W}'$  est simplement connexe. Cet ensemble est le revêtement universel de  $\widehat{W}' = \tilde{W}'/\tilde{H}$  et  $\widehat{\pi}|_{\tilde{W}'}: \tilde{W}' \rightarrow \widehat{W}'$  est la projection de revêtement. Pour tout point  $z \in \widehat{W}'$ , le morphisme  $\iota_*: \pi_1(\widehat{W}', z) \rightarrow \pi_1(\widehat{M}, z)$  entre groupes fondamentaux induit par l'inclusion  $\iota: \widehat{W}' \rightarrow \widehat{M}$  est un isomorphisme. Ainsi  $\widehat{M}$  est homéomorphe à  $\widehat{W}'$ . On a un homéomorphisme naturel  $h$  entre  $\check{W}' \setminus \text{Fix}(\check{I})$  et  $\widehat{W}'$  qui à un point  $\check{z} \in \check{W}' \setminus \text{Fix}(\check{I})$  associe l'image  $h(\check{z}) = \widehat{\pi}(\check{z})$  de tout antécédent  $\tilde{z} \in \tilde{\pi}^{-1}(\{\check{z}\}) \cap \tilde{W}'$ . Cet homéomorphisme se prolonge par bouts en un homéomorphisme  $\bar{h}$  entre  $\check{W}'$  et un disque ouvert  $\widehat{\widehat{W}'}$  et l'isotopie  $\widehat{I}$  se prolonge en une isotopie  $\widehat{\widehat{I}} = (\widehat{\widehat{f}}_t)_{t \in [0,1]}$

du plan  $\overline{M} = \widehat{M} \cup \overline{W'}$  qui fixe les bouts ajoutés. Posons  $\overline{f} = \overline{f}_1$  et remarquons que, pour tout point  $\check{z} \in \check{W}$ , on a  $\overline{h}(\check{f}(\check{z})) = \overline{f}(\overline{h}(\check{z}))$ .

LEMME 9.2. – *Les points fixes de  $\overline{f}$  sont les images par  $\overline{h}$  des points fixes de  $\check{f}$  qui sont dans  $\check{W}$ . Leur nombre est strictement inférieur à  $n$ .*

*Démonstration.* – La relation de conjugaison nous dit que l'image par  $\overline{h}$  d'un point fixe  $\check{z} \in \check{W}$  de  $\check{f}$  est un point fixe de  $\overline{f}$ . La réciproque peut se montrer par des arguments classiques de revêtements. Nous allons cependant donner une preuve qui utilise les feuilletages transverses. Remarquons que  $\check{F}$  se relève en un feuilletage  $\widehat{\mathcal{F}}$  de  $\widehat{M}$  dynamiquement transverse à  $\widehat{I}$ .

Soit  $\widehat{z} \in \text{Fix}(\overline{f})$ . Si  $\widehat{z}$  est une singularité de  $\widehat{\mathcal{F}}$ , c'est l'image par  $\overline{h}$  d'un point  $\check{z} \in \text{Fix}(\check{I})$ . Sinon, la trajectoire de  $\widehat{z}$ , pour  $\widehat{I}$ , est homotope à un lacet  $\widehat{\gamma}$  positivement transverse à  $\widehat{\mathcal{F}}$ . Il suffit de montrer que ce lacet est inclus dans  $\overline{W} = \overline{h}(\check{W})$ . La frontière de  $\overline{W}$  est la réunion de deux droites topologiques, les images par  $\overline{h}$  de  $\check{\phi}$  et  $\check{T}(\check{\phi})$ , qui sont des feuilles de  $\widehat{\mathcal{F}}$ . Puisque le lacet  $\widehat{\gamma}$  est positivement transverse à  $\widehat{\mathcal{F}}$ , il ne rencontre donc aucune de ces deux feuilles. S'il n'est pas inclus dans  $\overline{W}$ , il est donc inclus dans une composante connexe  $\widehat{W}''$  de  $\widehat{M} \setminus \text{Adh}(\overline{W})$ . Puisque  $\widehat{W}''$  est simplement connexe et puisque le feuilletage  $\widehat{\mathcal{F}}_{\widehat{W}''}$  est non singulier, ceci est impossible.

Remarquons, pour conclure, que l'extension de  $f$  à  $S$  a  $n + 1$  point fixes. Tout point fixe, autre que  $z_0$  et  $z_1$ , a au plus un antécédent dans  $\check{W}$ . Il y a donc au plus  $n - 1$  points fixes de  $\check{f}$  dans  $\check{W}$ . □

Remarquons que l'unique antécédent  $\check{z}^*$  de  $z^*$  dans  $\check{W}$  est un point périodique de  $\check{f}$  de période  $q$  dont l'orbite est dans  $\check{W}$  et que  $\widehat{z}^* = \overline{h}(\check{z}^*)$  est un point périodique de  $\overline{f}$  de période  $q$  dont l'orbite est incluse dans  $\overline{W}$ . L'hypothèse de récurrence nous dit qu'il existe un point fixe  $\widehat{z} \in \text{Fix}(\overline{f})$  tel que  $L_{\widehat{\mathcal{F}}, \widehat{z}}(\widehat{z}) \neq 0$ . Posons  $\check{z} = \overline{h}^{-1}(\widehat{z})$ . La proposition 1.3 nous dit que  $L_{\check{f}, \check{z}^*}(\check{z}) = L_{\widehat{\mathcal{F}}, \widehat{z}}(\widehat{z}) \neq 0$  et donc que  $l_{\check{I}, \check{z}^*}(\check{z}) \notin q\mathbb{Z}$ .

Prouvons maintenant que  $l_{\check{I}, \check{z}^*}(\check{T}^k(\check{z})) = 0$ , pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ . Nous allons le faire dans le cas où  $k < 0$ , le cas où  $k > 0$  se traitant de la même façon. Remarquons que  $\check{T}^k(\check{z}) \in G(\check{\phi})$  et que  $\{\check{z}\} \cup O(\check{z}^*) \subset D(\check{\phi})$ . Remarquons également que  $l_{\check{I}, \check{z}}(\check{T}^k(\check{z})) = 0$ , puisque  $\check{f}_t(\check{T}^k(\check{z})) = \check{T}^k(\check{f}_t(\check{z}))$ , pour tout  $t \in [0, 1]$ . Puisque  $\check{\phi}$  est une droite de Brouwer de  $\check{f}$ , on peut appliquer la proposition 1.4. On en déduit que  $l_{\check{I}, \check{z}^*}(\check{T}^k(\check{z})) = 0$ .

Notons  $z \in S$  la projection de  $\check{z}$ . Choisissons une isotopie maximale  $I^0 \in \mathcal{I}_{z, z_0, z_1}$  et relevons  $I^0|_M$  en une isotopie  $\check{I}^0$  de  $\check{M}$  issue de l'identité. Cette isotopie aboutit à  $\check{f}$  puisqu'elle fixe  $\check{z}$  et que  $\check{f}(\check{z}) = \check{z}$ . Rappelons que  $\check{z}^*$  est un point périodique de  $\check{f}$  et que le lacet  $(\check{I}^0)^q(\check{z}^*)$ , trajectoire complète de  $\check{z}^*$ , relève la trajectoire complète  $(I^0)^q(z^*)$ . Remarquons que  $l_{\check{I}^0, \check{z}}(\check{T}^k(\check{z})) = 0$ , pour tout  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . On en déduit que  $\check{I}^0$  est homotope à  $\check{I}$  et donc que  $l_{\check{I}^0, \check{z}^*}(\check{T}^k(\check{z})) = l_{\check{I}, \check{z}^*}(\check{T}^k(\check{z}))$ , pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ . Fixons un arc  $\gamma: ]0, 1] \rightarrow M$  tel que

$\lim_{t \rightarrow 0^+} \gamma(t) = z_0$  et  $\gamma(1) = z$  et considérons le relèvement  $\check{\gamma}$  aboutissant en  $\check{z}$ . Remarquons maintenant que

$$\begin{aligned} \lambda_{I^0, z^*}(z) - \lambda_{I^0, z^*}(z_0) &= (I^0)^q(z^*) \wedge \gamma \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\check{I}^0)^q(\check{z}^*) \wedge \check{T}^k(\check{\gamma}) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} l_{\check{I}^0, \check{z}^*}(\check{T}^k(\check{z})) \\ &= l_{\check{I}, \check{z}^*}(\check{z}) \notin q\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

La conclusion se fait comme dans le premier cas de réductibilité. Si  $z_0 = \infty$ , on trouve

$$\ell_{I^0|_{\mathbb{R}^2}}(z) = \lambda_{I^0}(z) - \lambda_{I^0}(\infty) \notin q\mathbb{Z}.$$

Si  $z = \infty$ , on trouve

$$\ell_{I^0|_{\mathbb{R}^2}}(z_0) = \lambda_{I^0}(z_0) - \lambda_{I^0}(\infty) \notin q\mathbb{Z}.$$

Si  $z, z_0$  et  $\infty$  sont distincts, on choisit une isotopie maximale  $I^1 \in \mathcal{I}_{z, z_0, \infty}$ . Il existe un entier  $k$  tel que  $I^1$  soit homotope à  $R_{z_0}^k I^0$  dans  $\mathcal{I}_{z_0}$ . On trouve

$$\ell_{I^1|_{\mathbb{R}^2}}(z) - \ell_{I^1|_{\mathbb{R}^2}}(z_0) = \lambda_{I^1}(z) - \lambda_{I^1}(z_0) = \lambda_{I^0}(z) - \lambda_{I^0}(z_0) - kq \notin q\mathbb{Z}.$$

Ainsi, l'un des entiers  $\ell_{I^1|_{\mathbb{R}^2}}(z)$  ou  $\ell_{I^1|_{\mathbb{R}^2}}(z_0)$  n'est pas dans  $q\mathbb{Z}$ . □

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. BÉGUIN, S. CROVISIER, F. LE ROUX, Pseudo-rotations of the open annulus, *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)* **37** (2006), 275–306.
- [2] C. BONATTI, B. KOLEV, Existence de points fixes enlacés à une orbite périodique d'un homéomorphisme du plan, *Ergodic Theory Dynam. Systems* **12** (1992), 677–682.
- [3] P. BOYLAND, J. FRANKS, Notes on dynamics of surface homeomorphisms, Informal Lecture Notes, Warwick, 1988.
- [4] L. E. J. BROUWER, Beweis des ebenen Translationssatzes, *Math. Ann.* **72** (1912), 37–54.
- [5] A. DEHOVE, Décomposition d'un difféomorphisme en produit de difféomorphismes déviant la verticale : applications à certains problèmes de topologie en dimension 2, Thèse, Université Paris 13, 1998.
- [6] J. FRANKS, M. HANDEL, K. PARWANI, Fixed points of abelian actions, *J. Mod. Dyn.* **1** (2007), 443–464.
- [7] J.-M. GAMBAUDO, Periodic orbits and fixed points of a  $C^1$  orientation-preserving embedding of  $D^2$ , *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **108** (1990), 307–310.
- [8] J. GUASCHI, Representations of Artin's braid groups and linking numbers of periodic orbits, *J. Knot Theory Ramifications* **4** (1995), 197–212.
- [9] M.-E. HAMSTROM, E. DYER, Regular mappings and the space of homeomorphisms on a 2-manifold, *Duke Math. J.* **25** (1958), 521–531.
- [10] T. HOMMA, An extension of the Jordan curve theorem, *Yokohama Math. J.* **1** (1953), 125–129.

- [11] H. KNESER, Die Deformationssätze der einfach zusammenhängenden Flächen, *Math. Z.* **25** (1926), 362–372.
- [12] B. KOLEV, Point fixe lié à une orbite périodique d'un difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$ , *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **310** (1990), 831–833.
- [13] P. LE CALVEZ, Décomposition des difféomorphismes du tore en applications déviant la verticale, *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)* **79** (1999), 146.
- [14] P. LE CALVEZ, Une version feuilletée équivariante du théorème de translation de Brouwer, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **102** (2005), 1–98.
- [15] P. LE CALVEZ, Periodic orbits of Hamiltonian homeomorphisms of surfaces, *Duke Math. J.* **133** (2006), 125–184.
- [16] F. LE ROUX, Homéomorphismes de surfaces : théorèmes de la fleur de Leau-Fatou et de la variété stable, *Astérisque* **292** (2004), 210.
- [17] J. J. PALIS, W. D. MELO, *Geometric theory of dynamical systems. An introduction*, Springer, 1982.
- [18] C. VITERBO, Symplectic topology as the geometry of generating functions, *Math. Ann.* **292** (1992), 685–710.

(Manuscrit reçu le 9 février 2007 ;  
accepté, après révision, le 26 novembre 2007.)

Patrice LE CALVEZ  
Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications  
C.N.R.S.-U.M.R 7539  
Institut Galilée  
Université Paris 13  
Av. J.-B. Clément,  
93430 Villetaneuse, France  
E-mail: lecalvez@math.univ-paris13.fr