

COURANTS EXTRÉMAUX ET DYNAMIQUE COMPLEXE

PAR VINCENT GUEDJ

RÉSUMÉ. – Nous construisons des courants positifs fermés extrémaux de tout bidegré sur l'espace projectif complexe \mathbb{P}^k qui ne sont pas des courants d'intégration sur un sous-ensemble analytique irréductible. Nous appliquons ces résultats à l'étude dynamique de certains endomorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^k pour lesquels nous construisons une mesure ergodique d'entropie maximale.

© 2005 Published by Elsevier SAS

ABSTRACT. – We construct extremal positive closed currents of any bidegree on the complex projective space \mathbb{P}^k , which are not current of integration along irreducible analytic subsets. We apply these results to the dynamical study of some polynomial endomorphisms of \mathbb{C}^k , for which we construct an ergodic measure of maximal entropy.

© 2005 Published by Elsevier SAS

Introduction

Suite à l'introduction des courants positifs fermés par P. Lelong [26], plusieurs auteurs ont tenté de caractériser l'ensemble des éléments extrémaux du cône convexe fermé qu'ils constituent. Tout courant d'intégration sur un sous-ensemble analytique $V \subset X$ irréductible de pure dimension p définit ainsi un élément extrémal dans le cône $\mathcal{T}_p(X)$ des courants positifs fermés de bidimension (p, p) sur une variété complexe X (voir théorème 1 dans [27], Theorem 1.27 dans [23]). On a pu caresser l'espoir un certain temps que ce soient là les seuls exemples. J.-P. Demailly [7] a le premier donné un exemple de courant extrémal dans \mathbb{P}^2 qui admet des potentiels continus (et n'est donc pas le courant d'intégration sur un diviseur). C'est un courant de nature dynamique. De nombreux autres courants extrémaux ont depuis été fournis par des constructions dynamiques. C'est le cas des courants de Green des applications de Hénon complexes [2,14] et plus généralement des applications birationnelles des surfaces projectives complexes [5,10,19]. C'est également le cas des courants de Green des automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^k [32,21]. Les courants de Green des automorphismes d'Anosov des tores complexes de dimension 2 fournissent des exemples de courants extrémaux qui sont des formes lisses (voir paragraphe 3.8 dans [34] et remarque 2.3 dans [5]).

Tous ces exemples sont de bidimension $(k-1, k-1)$. Un des principaux objectifs de cet article est de fournir de nombreux exemples (issus de la dynamique) de courants extrémaux dans $\mathcal{T}_p(\mathbb{P}^k)$ (pour tout p) dont les potentiels sont (presque) continus (voir théorèmes 2.1, 2.3 et 2.6). Nous obtenons par exemple le résultat suivant :

THÉORÈME 0.1. – *Soit f un automorphisme polynomial de \mathbb{C}^k dont on considère l'extension méromorphe à l'espace projectif complexe \mathbb{P}^k . On suppose que l'ensemble limite X_f à l'infini ne rencontre pas l'ensemble I_f des points d'indétermination. On note $r-1 = \dim_{\mathbb{C}} X_f$ et*

on suppose de plus que le degré $\lambda_r(f)$ d'ordre r domine strictement tous les autres degrés dynamiques.

Alors le courant positif fermé

$$T_{k-r}^- := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda_r(f)^n} (f^n)^* \omega^{k-r}$$

est extrémal dans le cône $\mathcal{T}_r(\mathbb{P}^k)$, où ω désigne la forme de Fubini–Study.

À notre connaissance, il s'agit là des premiers exemples connus de tels courants. De fait, la théorie des courants positifs fermés de bidimension (p, p) , $p \leq k - 2$, est fort peu développée (exception faite du cas des mesures, $p = 0$). Cela est dû en grande partie à l'absence de potentiel canonique pour ces courants. Les courants que nous considérons ont des potentiels dont nous savons contrôler le signe (voir *section 1.2*). C'est un point clef dans la preuve de leur extrémalité que nous établissons dans la *section 2* (théorèmes 2.1 et 2.6). Nous en déduisons quelques applications à la dynamique dans la *section 3*, où nous construisons une mesure μ_f ergodique d'entropie maximale pour certains endomorphismes polynomiaux f de \mathbb{C}^k . Lorsque f est inversible, la mesure μ_f est mélangeante et nous obtenons le résultat suivant :

THÉORÈME 0.2. – Soit f comme ci-dessus. On suppose de plus que l'ensemble I_f est f^{-1} -attirant. Alors la mesure

$$\mu_f := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda_r(f)^n} (f^n)^* \omega^r \wedge \frac{1}{\lambda_r(f)^n} (f^{-n})^* \omega^{k-r}$$

est une mesure de probabilité invariante à support compact dans \mathbb{C}^k , qui est mélangeante, d'entropie maximale

$$h_{\mu_f}(f) = h_{\text{top}}(f) = \log \lambda_r(f),$$

et qui intègre les fonctions plurisousharmoniques à croissance logarithmique.

Dans son étude des cycles feuilletés, D. Sullivan fait la conjecture (un peu optimiste) que les courants extrémaux sont *uniformément laminaires*. C'est le cas des courants de Green des automorphismes d'Anosov des tores complexes, qui sont même des cycles feuilletés associés aux feuilletages irrationnels stables/instables [34]. E. Bedford, M. Lyubich et J. Smillie ont établi une propriété plus faible de laminarité des courants de Green des applications de Hénon complexes [1,3]. Il serait intéressant d'obtenir l'extrémalité comme conséquence d'une propriété adéquate de laminarité. Les travaux de R. Dujardin [13] et T.C. Dinh [11] vont dans cette direction.

Mentionnons pour finir que T.C. Dinh et N. Sibony [12] ont récemment construit des courants extrémaux de bidimension (p, p) sur des variétés compactes qui admettent des biholomorphismes dynamiquement intéressants.

1. Construction de potentiels signés

Dans tout l'article nous travaillons sur l'espace projectif complexe \mathbb{P}^k de dimension k que nous munissons de sa forme de Kähler de Fubini–Study, notée ω . Nous considérons les opérateurs différentiels réels $d = \partial + \bar{\partial}$ et $d^c = \frac{i}{2\pi}(\bar{\partial} - \partial)$. La normalisation est choisie de sorte que $\omega = dd^c \log \sqrt{1 + \|z\|^2}$ dans \mathbb{C}^k , où $z = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k$ désigne les coordonnées euclidiennes et

$$\int_{\mathbb{C}^k} \omega^k = \int_{\mathbb{P}^k} \omega^k = 1.$$

Nous renvoyons le lecteur à [9], Chapitre III, pour une discussion approfondie des propriétés des courants positifs. Nous nous contentons ici de rappeler quelques faits utiles à la compréhension de l'article.

- Un courant S de bidegré (s, s) sur \mathbb{P}^k est une forme linéaire continue sur l'espace des formes lisses de bidegré $(k - s, k - s)$ sur \mathbb{P}^k . On dit également que S est de bidimension $(k - s, k - s)$.
- Le courant S est dit *fermé* ($dS = 0$) s'il s'annule sur toutes les formes d -exactes. Il est dit pluriharmonique ($dd^c S = 0$) s'il s'annule sur toutes les formes dd^c -exactes.
- Il y a plusieurs notions de positivité des courants. Dans tout l'article, S sera dit *positif* s'il est « fortement positif », au sens où $\langle S, \theta \rangle \geq 0$, pour toute forme θ telle que $\theta \wedge i\alpha_1 \wedge \overline{\alpha_1} \wedge \dots \wedge i\alpha_s \wedge \overline{\alpha_s} \geq 0$, quelles que soient les 1-formes $\alpha_1, \dots, \alpha_s$. L'ensemble $\mathcal{T}^s(\mathbb{P}^k)$ des courants positifs fermés de bidegré (s, s) sur \mathbb{P}^k est un cône convexe saillant fermé pour la topologie faible des courants. Les courants dynamiques que nous considérons sont obtenus comme limites de combinaisons linéaires de formes (fortement) positives du type $(i\alpha_1 \wedge \overline{\alpha_1})^s$.
- Un courant positif S est réel et d'ordre 0 : on peut le représenter localement par une forme de bidegré (s, s) , $S = \sum_{|I|=|J|=s} S_{IJ} dz_I \wedge dz_J$, dont les coefficients S_{IJ} sont des mesures de Radon. La variation totale $\sum |S_{IJ}|$ est dominée (à une constante multiplicative près) par la masse de S ,

$$\|S\| := \int_{\mathbb{P}^k} S \wedge \omega^{k-s}.$$

1.1. Push-forward et pull-back de courants

Soit $f : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$ un endomorphisme polynomial. On considère son extension rationnelle $f : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^k$ à l'espace projectif complexe. On notera $[z : t]$ les coordonnées homogènes sur \mathbb{P}^k , où $z \in \mathbb{C}^k$ et $(t = 0) \simeq \mathbb{P}^{k-1}$ désigne l'hyperplan à l'infini. L'extension f est seulement méromorphe à l'infini. On note $I_f \subset (t = 0)$ son ensemble d'indétermination : c'est l'ensemble des points au voisinage desquels f n'est pas holomorphe. On note $X_f := \overline{f((t = 0) \setminus I_f)}$. Dans toute la suite on suppose

$$(H1) \quad X_f \cap I_f = \emptyset.$$

De telles applications ont été considérées dans [21] : ce sont les *endomorphismes faiblement réguliers* de \mathbb{C}^k . Quitte à changer f en f^k , on peut supposer $f(X_f) = X_f$. L'ensemble X_f est l'ensemble analytique limite à l'infini ; c'est un attracteur (voir [21]). Il résulte de (H1) que de telles applications sont *algébriquement stables* dans \mathbb{P}^k [32]. La suite de courants positifs fermés $d^{-n}(f^n)^*\omega$ converge vers un courant positif fermé $T_+ = \omega + dd^c g_+$ qui est invariant, $f^*T_+ = dT_+$; c 'est le courant de Green de f . Ici d désigne le premier degré algébrique de f , i.e. le degré de $f^{-1}(H)$ pour un hyperplan H générique de \mathbb{P}^k . Nous supposons implicitement dans tout l'article $d > 1$. Nous renvoyons à [32] pour la construction de T_+ et à [21] pour la preuve du fait que

$$\text{le potentiel } g_+ \text{ de } T_+ \text{ est continu dans } \mathbb{P}^k \setminus I_f.$$

Il résulte également de (H1) que $\dim X_f = r - 1$ et $\dim I_f = k - r - 1$ pour un entier $r \in [1, k - 1]$. Comme g_+ est continu hors de I_f , on peut définir les produits d'auto-intersection T_+^j pour $1 \leq j \leq r + 1$. Le courant dynamiquement le plus intéressant est T_+^r (voir Theorem 2.2 dans [21]). Un des buts de cet article est d'établir des propriétés d'extrémalité du courant T_+^r .

Nous faisons également par la suite l'hypothèse que

$$(H2) \quad \text{l'ensemble } I_f \text{ est } f^{-1}\text{-attirant,}$$

c'est-à-dire qu'il existe un voisinage W_{I_f} de I_f dans \mathbb{C}^k tel que $f^{-1}W_{I_f} \subset W_{I_f}$ et $\bigcap_{j \geq 0} f^{-j}W_{I_f} = \emptyset$. Cela a des conséquences dynamiques particulièrement intéressantes (cf. Theorem 2.13 dans [21]). Cela impose également des restrictions de nature topologique sur les applications f considérées : elles sont nécessairement *propres* dans \mathbb{C}^k . On peut donc définir facilement le *push-forward* des courants dans ce contexte : si S est un courant de bidegré (s, s) dans \mathbb{C}^k , on pose

$$\langle f_*S, \theta \rangle := \langle S, f^*\theta \rangle,$$

pour toute forme lisse θ de bidegré $(k - s, k - s)$ à support compact dans \mathbb{C}^k . Cette opération est clairement continue pour la topologie faible des courants. Si S est fermé (respectivement positif), il en est de même de f_*S . Si S est de masse totale finie dans \mathbb{C}^k (i.e. lorsque S est la restriction à \mathbb{C}^k d'un courant défini sur \mathbb{P}^k), il en est de même de f_*S . Lorsque ces trois propriétés sont vérifiées, on notera $\widehat{f_*S}$ l'extension triviale de f_*S à travers l'hyperplan $(t = 0)$: on obtient ainsi un courant positif de bidegré (s, s) sur \mathbb{P}^k qui est à nouveau fermé (théorème d'extension d'El Mir–Skoda).

Le *pull-back* d'un courant est plus délicat à définir. Lorsque $f \in \text{Aut}(\mathbb{C}^k)$ est un automorphisme polynomial de \mathbb{C}^k , on peut bien sûr définir $f^*S := (f^{-1})_*S$. Cependant notre approche s'applique également à des endomorphismes polynomiaux f qui ne sont pas inversibles. L'hypothèse (H2) assure que $f : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$ est propre, ouverte et surjective. Cela permet de définir convenablement f^* sur les cône des courants positifs (dans \mathbb{C}^k) comme l'a montré M. Méo [29]. L'opération de pull-back préserve la positivité et le caractère fermé (respectivement pluriharmonique). Elle est continue pour la topologie faible des courants (voir [12, Corollary 2.5]).

Rappelons enfin qu'il existe une façon canonique de définir le push-forward et le pull-back des formes lisses : on considère $\widetilde{\Gamma}_f$ une désingularisation du graphe Γ_f de f dans $\mathbb{P}^k \times \mathbb{P}^k$ et le diagramme commutatif correspondant

$$\begin{array}{ccc} & \widetilde{\Gamma}_f & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ X & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Lorsque S est une forme lisse de bidegré (s, s) , on pose

$$f_*S := (\pi_2)_*(\pi_1^*S) \quad \text{et} \quad f^*S := (\pi_1)_*(\pi_2^*S),$$

où le push-forward est considéré au sens des courants. Cette définition coïncide avec la précédente lorsque l'on considère des formes lisses. Nous renvoyons le lecteur à [20] pour plus de détails.

1.2. Signe des potentiels

Soit $T_+ = \omega + dd^c g_+$ le courant de Green d'un endomorphisme polynomial f qui vérifie l'hypothèse (H1). Le courant T_+^r admet des potentiels qui sont presque positifs. En effet

$$T_+^r = \omega^r + dd^c \mathcal{T}_{\text{can}}, \quad \text{où } \mathcal{T}_{\text{can}} = (g_+ + C_{W_{I_f}}) \sum_{j=0}^{r-1} T_+^j \wedge \omega^{r-1-j}$$

est un courant positif dans $\mathbb{P}^k \setminus W_{I_f}$ si l'on fixe par exemple $C_{W_{I_f}} = -\inf_{\mathbb{P}^k \setminus W_{I_f}} g_+$. On utilise là le fait crucial que g_+ est continu, donc minoré hors d'un petit voisinage W_{I_f} de I_f . On vérifie

de plus que

$$\lambda^{-j} (f^j)^* \mathcal{T}_{\text{can}} \rightarrow 0 \quad \text{dans } \mathbb{C}^k$$

pour $\lambda = d^r$.

L'existence de potentiels positifs est exceptionnelle. Si S est un courant positif fermé de bidegré (s, s) sur \mathbb{P}^k , on s'attend plutôt à ce que S admette des potentiels négatifs, c'est-à-dire qu'il existe Θ une forme lisse fermée cohomologue à S et \mathcal{T}_S un courant de bidegré $(s-1, s-1)$ sur \mathbb{P}^k tels que

$$S = \Theta + dd^c \mathcal{T}_S \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_S \leq 0 \quad \text{sur } \mathbb{P}^k.$$

L'existence de tels potentiels est classique en théorie de Nevanlinna [28,17] lorsque S est le courant d'intégration sur une intersection complète. Nous montrons ici l'existence de potentiels \mathcal{T}_S qui sont presque partout négatifs.

PROPOSITION 1.1. – *Soit σ un courant positif fermé de bidegré (s, s) sur \mathbb{P}^k , $1 \leq s \leq k$. Soit Θ une forme lisse positive fermée cohomologue à σ . Soit W un petit voisinage de $\text{Supp } \sigma \cap (t = 0)$.*

Alors pour tout courant positif fermé S de bidegré (s, s) tel que $0 \leq S \leq \sigma$ sur \mathbb{P}^k , il existe un courant \mathcal{T}_S de bidegré $(s-1, s-1)$ sur \mathbb{P}^k tel que

- (1) $S = \alpha \Theta + dd^c \mathcal{T}_S$, où $\alpha = \|S\| \cdot \|\sigma\|^{-1}$;
- (2) $\mathcal{T}_S \leq 0$ dans $\mathbb{P}^k \setminus W$;
- (3) $0 \leq \int_{\mathbb{P}^k \setminus W} (-\mathcal{T}_S) \wedge \omega^{k-s+1} \leq C_W \|S\|$, où C_W est indépendante de S, σ .

Preuve. – Commençons par traiter le cas, plus simple, des mesures ($s = k$). Cela permettra de fixer les idées sur ce qui va suivre. Dans ce cas S est une mesure de Radon positive que l'on peut supposer de probabilité ($\|S\| = 1$). C'est donc une somme de masses de Dirac, $S = \int_{\mathbb{P}^k} \delta_a dS(a)$, où δ_a désigne la masse de Dirac au point $a \in \mathbb{P}^k$. Or $\delta_a = T_a^k$, où T_a est la $(1, 1)$ -forme positive fermée lisse dans $\mathbb{P}^k \setminus \{a\}$ à coefficients dans L^p , $p < k$,

$$T_a(x) = \omega(x) + dd^c \left(\log \frac{\|x \wedge a\|}{\|x\| \|a\|} \right).$$

On a donc

$$\delta_a = \omega^k + dd^c \mathcal{T}_a, \quad \text{où } \mathcal{T}_a = \log \frac{\|x \wedge a\|}{\|x\| \|a\|} \sum_{j=0}^{k-1} T_a^j \wedge \omega^{k-1-j} \leq 0.$$

Il s'ensuit par intégration que

$$S = \omega^k + dd^c \mathcal{T}_S, \quad \text{avec } \mathcal{T}_S = \int_{a \in \mathbb{P}^k} \mathcal{T}_a dS(a) \leq 0.$$

Observons enfin que comme \mathbb{P}^k est homogène, les courants positifs $-\mathcal{T}_a$ ont tous la même masse $C_0 = \int -\mathcal{T}_a(x) \wedge \omega(x)$. On a donc par Fubini

$$0 \leq \int_{\mathbb{P}^k} -\mathcal{T}_S(x) \wedge \omega(x) = C_0 = C_0 \|S\|.$$

On peut enfin remplacer ω^k par n'importe quelle forme lisse fermée Θ qui lui est cohomologue. Il suffit alors de modifier \mathcal{T}_S en lui ajoutant une forme lisse qu'on peut toujours supposer négative (quitte à retrancher un grand multiple de ω^{k-1} qui ne change pas le dd^c).

La situation n'est plus aussi simple lorsque $1 \leq s \leq k-1$: les courants positifs fermés ne sont pas nécessairement des sommes de courants d'intégration sur des cycles effectifs (comme l'a montré Demailly [7]). Lorsque $s=1$, on peut encore construire des potentiels partout négatifs. Dans ce cas les \mathcal{T}_S sont des fonctions quasiplurisousharmoniques (i.e. localement somme d'une fonction plurisousharmonique et d'une fonction lisse), en particulier celles-ci sont majorées sur \mathbb{P}^k : il suffit de retrancher une constante pour les rendre négatives. La grande particularité du cas $s=1$ tient au fait que deux potentiels $\mathcal{T}_S, \mathcal{T}'_S$ d'un même courant S diffèrent d'une fonction pluriharmonique qui est nécessairement constante (principe du maximum).

Lorsque $2 \leq s \leq k-1$, nous allons construire des potentiels presque négatifs. Cela sera suffisant pour l'application que nous souhaitons en faire (Section 2). La construction s'appuie sur la connaissance de potentiels négatifs locaux (i.e. dans les ouverts bornés de \mathbb{C}^k) dont l'existence remonte aux travaux de P. Lelong et H. Skoda (voir [33]). Nous suivons ici l'approche de J.-P. Demailly [8]. Soit $\chi \geq 0$ une fonction test dans \mathbb{C}^k telle que $\chi \equiv 1$ sur une grande boule $B(A) = \{z \in \mathbb{C}^k \mid \|z\| < A\}$. Posons

$$\mathcal{T}_1(x) := \int_{y \in \mathbb{C}^k} K(x, y) \wedge \chi(y) S(y),$$

où $K(x, y) = -c_k \beta^{k-1}(x-y) \|x-y\|^{-(2k-2)} \leq 0$, $\beta(x-y) = dd^c \|x-y\|^2$ et la constante $c_k > 0$ est choisie de sorte que

$$dd^c K = [\Delta] = \text{courant d'intégration sur la diagonale de } \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^k.$$

Le noyau $K \leq 0$ est lisse hors de la diagonale Δ de $\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^k$. Il s'ensuit que $\mathcal{T}_1 \leq 0$ est un courant de bidegré $(s-1, s-1)$ dans \mathbb{C}^k qui est lisse hors du support de χS . Un calcul direct [8] montre que

$$(1) \quad \chi S = dd^c \mathcal{T}_1 + R \quad \text{dans } \mathbb{C}^k,$$

où R est lisse hors du support de $d\chi \wedge S$. En particulier si $A > 1$ est choisie assez grande, R est lisse dans $\mathbb{C}^k \setminus W$. En multipliant (1) par χ , il vient

$$(2) \quad \chi^2 S = dd^c(\chi \mathcal{T}_1) + R_1,$$

où $R_1 = \chi R + d^c \chi \wedge d\mathcal{T}_1 - d\chi \wedge d^c \mathcal{T}_1 - dd^c \chi \wedge \mathcal{T}_1$ est à support compact dans \mathbb{C}^k et est lisse dans $\mathbb{C}^k \setminus W$. On en déduit

$$(3) \quad S = \alpha \Theta + dd^c(\chi \mathcal{T}_1) + R_2 \quad \text{dans } \mathbb{P}^k,$$

où $R_2 = R_1 - (1 - \chi^2)S - \alpha \Theta$ est lisse dans $\mathbb{P}^k \setminus W$ et $\alpha = \|S\| \cdot \|\sigma\|^{-1}$. L'égalité a lieu dans \mathbb{P}^k puisque les « termes d'erreur » sont à support compact dans \mathbb{C}^k . Notons que la masse de $\chi \mathcal{T}_1$ et R_2 est contrôlée par celle de S .

Observons enfin que le courant réel R_2 est d -exact. Il résulte du dd^c -lemma de la théorie de Hodge (voir, e.g., [16, p. 149]) qu'il existe un courant réel \mathcal{T}_2 de bidegré $(s-1, s-1)$ et d'ordre 0, lisse dans $\mathbb{P}^k \setminus W$, et tel que $R_2 = dd^c \mathcal{T}_2$: il suffit de poser $\mathcal{T}_2 = \partial^* \bar{\partial}^* G_{\bar{\partial}}^2 R_2$, où $\partial^*, \bar{\partial}^*$ sont les opérateurs adjoints à $\partial, \bar{\partial}$ et $G_{\bar{\partial}}$ désigne l'opérateur de Green associé à $\bar{\partial}$ (cf. [16, p. 150]).

Comme \mathcal{T}_2 est lisse hors de W , on peut (quitte à lui retrancher $C\omega^{k-1}$) le supposer négatif dans $\mathbb{P}^k \setminus W$. Sa masse est contrôlée par celle de R_2 (elle-même contrôlée par celle de S). On conclut en considérant

$$\mathcal{T}_S := \chi\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2. \quad \square$$

Remarque 1.2. – Lorsque X est une variété kählerienne compacte, on peut également chercher à résoudre l’opérateur dd^c par intégration contre un noyau K globalement défini dans $X \times X$. En général ce noyau n’est pas négatif. On peut cependant choisir $K \leq 0$ lorsque $X = \mathbb{P}^k$ (voir Paragraphe 6 dans [4]). Nous remercions T.C. Dinh de nous avoir signalé ce fait qui permet de donner une preuve plus simple de la Proposition 1.1.

Nous avons maintenu notre preuve en l’état car elle s’adapte sans modification à toute autre compactification X de \mathbb{C}^k . Il est nécessaire de considérer de telles compactifications en dynamique (voir [19]); elles ne sont pas homogènes en général.

2. Extrémalité des courants dynamiques

2.1. Courants f^* -invariants

THÉORÈME 2.1. – *Soit $f : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$ un automorphisme polynomial qui vérifie les hypothèses (H1) et (H2). Alors le courant T_+^r est extrémal dans le cône $\mathcal{T}^r(\mathbb{P}^k)$ des courants positifs fermés de bidegré (r, r) sur \mathbb{P}^k .*

Comme nous le verrons dans la preuve, $(T_+^r)_{|\mathbb{C}^k}$ est également extrémal dans le cône $\mathcal{T}^r(\mathbb{C}^k)$. Par ailleurs T_+ a des potentiels continus hors de I_f qui est de dimension $k - r - 1$; il résulte d’inégalités classiques (voir l’annexe de [32]) que T_+^r ne charge aucun sous-ensemble analytique propre de \mathbb{P}^k .

Les automorphismes réguliers introduits par N. Sibony dans [32] satisfont les hypothèses (H1) et (H2), de même que de nombreux automorphismes faiblement réguliers (voir [21]).

Preuve. – Soit S un courant positif fermé de bidegré (r, r) tel que $0 \leq S \leq T_+^r$. Il s’agit de montrer que $S = \alpha T_+^r$, où $\alpha = \|S\| = \int_{\mathbb{P}^k} S \wedge \omega^{k-r}$ est la masse de S . On pose $\lambda = d^r > 1$. Considérons

$$S_j := \lambda^j \widehat{(f_{|\mathbb{C}^k}^{-j})^* S},$$

où $\widehat{}$ signifie que l’on considère l’extension triviale à travers $(t = 0)$ du courant $(f_{|\mathbb{C}^k}^{-j})^* S$ défini dans \mathbb{C}^k . Puisque $f^* T_+^r = \lambda T_+^r$, on a $(f^{-1})^* T_+^r = \lambda^{-1} T_+^r$ dans \mathbb{C}^k . On en déduit que $0 \leq S_j \leq T_+^r$ dans \mathbb{C}^k , et donc également dans \mathbb{P}^k puisqu’aucun de ces deux courants ne charge l’hyperplan $(t = 0)$. Notons à présent $S'_j := \lambda^{-j} (f^j)^* S_j$. On a $S'_j \equiv S$ dans \mathbb{C}^k , or aucun de ces deux courants ne charge $(t = 0)$, donc $S'_j \equiv S$ dans \mathbb{P}^k . Le reste de la preuve consiste à établir un résultat de convergence uniforme : on va montrer que la suite $S'_j = \lambda^{-j} (f^j)^* S_j$ converge vers αT_+^r . Puisqu’il s’agit en fait d’une suite constante égale à S , on obtiendra $S = \alpha T_+^r$ avec $\alpha = \|S\|$.

Il résulte de la proposition 1.1 qu’on peut décomposer les courants S_j sous la forme

$$S_j = \alpha_j \omega^r + dd^c(\mathcal{T}_{S_j}),$$

où $\alpha_j = \|S_j\| \in [0, 1]$ et \mathcal{T}_{S_j} est un courant réel de bidegré $(r - 1, r - 1)$ qui est négatif hors d'un voisinage W_{I_f} fixé (arbitrairement petit) de I_f , et de masse contrôlée

$$\int_{\mathbb{P}^k \setminus W_{I_f}} -\mathcal{T}_{S_j} \wedge \omega^{k-r+1} \leq C_{W_{I_f}}.$$

Soit $R_j := T_+^r - S_j$. C'est un courant positif fermé de bidegré (r, r) dominé par T_+^r dont on considère également la décomposition

$$R_j = (1 - \alpha_j)\omega^r + dd^c(\mathcal{T}_{R_j}), \quad \text{où } \mathcal{T}_{R_j} \leq 0 \text{ dans } \mathbb{P}^k \setminus W_{I_f}$$

et $\int_{\mathbb{P}^k \setminus W_{I_f}} -\mathcal{T}_{R_j} \wedge \omega^{k-r+1} \leq C_{W_{I_f}}$. Le courant

$$P_j := \mathcal{T}_{\text{can}} - \mathcal{T}_{S_j} - \mathcal{T}_{R_j}$$

est donc pluriharmonique et positif dans $\mathbb{P}^k \setminus W_{I_f}$. Il résulte du lemme 2.2 ci-dessous que $\lambda^{-j}(f^j)^*P_j \rightarrow 0$ dans $\mathbb{C}^k \setminus W_{I_f}$. Or $\lambda^{-j}(f^j)^*\mathcal{T}_{\text{can}} \rightarrow 0$ et

$$\frac{1}{\lambda^j}(f^j)^*(\mathcal{T}_{\text{can}} - P_j) = \frac{1}{\lambda^j}(f^j)^*(\mathcal{T}_{S_j} + \mathcal{T}_{R_j}) \leq \frac{1}{\lambda^j}(f^j)^*(\mathcal{T}_{S_j}) \leq 0 \quad \text{dans } \mathbb{C}^k \setminus W_{I_f}.$$

On en déduit $\lambda^{-j}(f^j)^*(\mathcal{T}_{S_j}) \rightarrow 0$ dans $\mathbb{C}^k \setminus W_{I_f}$. Ainsi

$$S = \frac{1}{\lambda^{j_k}}(f^{j_k})^*(S_{j_k}) = \alpha_{j_k} \frac{1}{\lambda^{j_k}}(f^{j_k})^*(\omega^r) + dd^c\left(\frac{1}{\lambda^{j_k}}(f^{j_k})^*\mathcal{T}_{S_{j_k}}\right) \rightarrow \alpha T_+^r$$

dans $\mathbb{C}^k \setminus W_{I_f}$, où $\alpha = \lim \alpha_{j_k}$. Enfin comme W_{I_f} est arbitrairement petit, et comme ni S ni T_+^r ne charge ($t = 0$), on en déduit $S = \alpha T_+^r$ dans \mathbb{P}^k . Il s'ensuit que $\alpha = \|S\|$ est indépendante du choix de la sous-suite (α_{j_k}) . \square

Comme I_f est de dimension $k - r - 1$, on peut trouver une forme lisse fermée ω_I de bidegré $(1, 1)$ sur \mathbb{P}^k qui est strictement positive hors de \overline{W}_{I_f} et telle que $\omega_I^{k-r} \equiv 0$ dans W_{I_f} . On peut supposer ω_I cohomologue à ω .

LEMME 2.2. – Soit P un courant pluriharmonique de bidegré $(r - 1, r - 1)$ sur \mathbb{P}^k qui est positif dans $\mathbb{P}^k \setminus \overline{W}_{I_f}$. Alors

$$0 \leq \int_{\mathbb{C}^k} (f^j)^*P \wedge \omega_I^{k-r+1} \leq d^{(r-1)j} \int_{\mathbb{P}^k} P \wedge \omega_I^{k-r+1}.$$

En particulier $\lambda^{-j}(f^j)^*P \rightarrow 0$ dans \mathbb{C}^k , où $\lambda = d^r$.

Preuve. – Supposons tout d'abord P lisse. Soit $\delta_{r-1}(f^j)$ la masse du courant positif fermé $(f^j)_*\widehat{\omega_I^{k-r+1}}$. Comme ce dernier ne charge pas l'hyperplan à l'infini, on a

$$\delta_{r-1}(f^j) = \int_{\mathbb{C}^k} (f^j)_*\omega_I^{k-r+1} \wedge \omega^{r-1} = \int_{\mathbb{C}^k} \omega_I^{k-r+1} \wedge (f^j)^*\omega^{r-1} = d^{(r-1)j}.$$

La dernière égalité provient du fait que $\dim I_f = k - r - 1$ est suffisamment petite : le courant $(f^j)^*\omega$ est une forme dont les coefficients sont dans L^p , $1 \leq p < r + 1$, donc le produit extérieur $(f^j)^*\omega \wedge \dots \wedge (f^j)^*\omega = (f^j)^*(\omega^{r-1})$ est bien défini partout dans \mathbb{P}^k , ne charge pas l'hyperplan $(t = 0)$, et sa masse se calcule en cohomologie (voir corollaire A.6.5 dans [32]). On en déduit que

$$(f^j)_* \widehat{\omega_I^{k-r+1}} = d^{(r-1)j} \omega_I^{k-r+1} + dd^c \theta_j,$$

où θ_j est un courant de bidegré $(k - r, k - r)$. Il résulte alors du théorème de Stokes que $\int_{\mathbb{P}^k} P \wedge dd^c \theta_j = \int_{\mathbb{P}^k} dd^c P \wedge \theta_j = 0$, d'où

$$0 \leq \int_{\mathbb{C}^k} (f^j)^* P \wedge \omega_I^{k-r+1} \leq \int_{\mathbb{P}^k} P \wedge (f^j)_* \widehat{\omega_I^{k-r+1}} = d^{(r-1)j} \int_{\mathbb{P}^k} P \wedge \omega_I^{k-r+1}.$$

La positivité provient de ce que $P \geq 0$ dans $\mathbb{C}^k \setminus W_{I_f}$, donc $(f^j)^* P \geq 0$ dans $\mathbb{C}^k \setminus f^{-j} W_{I_f} \supset \mathbb{C}^k \setminus W_{I_f}$ (hypothèse (H2)).

Si P n'est pas lisse, on peut, comme \mathbb{P}^k est une variété homogène, utiliser une convolution pour le régulariser : soit P_ε des formes lisses pluriharmoniques de bidegré $(r - 1, r - 1)$ telles que $P_\varepsilon \geq 0$ dans $\mathbb{P}^k \setminus W_{I_f}$ et $P_\varepsilon \rightarrow P$ au sens des courants lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ (voir [24]). Alors $(f^j)^* P_\varepsilon \wedge \omega_I^{k-r+1} \rightarrow (f^j)^* P \wedge \omega_I^{k-r+1}$ dans \mathbb{C}^k , donc

$$0 \leq \int_{\mathbb{C}^k} (f^j)^* P \wedge \omega_I^{k-r+1} \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{C}^k} (f^j)^* P_\varepsilon \wedge \omega_I^{k-r+1} \leq d^{(r-1)j} \int_{\mathbb{P}^k} P \wedge \omega_I^{k-r+1}.$$

Comme $d > 1$, on en déduit que $d^{-rj} (f^j)^* P \rightarrow 0$ dans $\mathbb{C}^k \setminus W_{I_f}$, et même dans $\mathbb{C}^k \setminus f^{-l} W_{I_f}$, $\forall l \in \mathbb{N}$. Comme $\bigcap_l f^{-l} W_{I_f} = \emptyset$, la convergence a lieu dans tout \mathbb{C}^k . \square

Lorsque f n'est pas inversible, le courant T_+^r n'est plus nécessairement extrémal dans $\mathcal{T}^r(\mathbb{P}^k)$ (considérer le cas de produits croisés). Dans la preuve du théorème précédent nous n'avons cependant utilisé l'inversibilité de f qu'à une seule reprise : dans l'astuce initiale qui consiste à écrire $S = \lambda^{-j} (f^j)^* S_j$. C'est cette écriture qui n'est plus valable ici. Le reste de la preuve s'applique néanmoins et donne le

THÉORÈME 2.3. – Soit $f : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$ un endomorphisme polynomial qui vérifie (H1) et (H2). Soit $S \in \mathcal{T}^r(\mathbb{P}^k)$ tel que $0 \leq S \leq T_+^r$. Alors

$$\frac{1}{\lambda^j} (f^j)^* S \rightarrow \alpha T_+^r, \quad \text{où } \alpha = \|S\| = \int_{\mathbb{P}^k} S \wedge \omega^{k-r}.$$

Cela montre en particulier que T_+^r est extrémal dans le sous-cône de $\mathcal{T}^r(\mathbb{P}^k)$ constitué des courants S qui vérifient la relation d'invariance $f^* S = \lambda S$. Cette propriété permet d'établir l'**ergodicité** des mesures fabriquées à partir de T_+^r , tandis que l'extrémalité dans $\mathcal{T}^r(\mathbb{P}^k)$ implique la propriété de **mélange** (voir section 3).

2.2. Courants f_* -invariants

Dans toute la suite de l'article nous faisons l'hypothèse

$$(H3) \quad \lambda = d^r > \lambda_{r+1}(f) := \lim_{j \rightarrow +\infty} (\delta_{r+1}(f^j))^{1/j},$$

où $\delta_{r+1}(f)$, le $(r + 1)$ -ième degré algébrique de f , est le degré de $f^{-1}(L)$, pour un sous-espace linéaire générique L de codimension $r + 1$ dans \mathbb{P}^k . Nous renvoyons le lecteur à [30,20] pour plus d'informations concernant ces degrés. Sous les hypothèses (H1) et (H3), il est possible de construire un courant f_* -invariant T_{k-r}^- qui est dynamiquement intéressant. La construction de T_{k-r}^- est établie dans [21] lorsque f est un automorphisme. Nous adaptons à présent cette construction au cas des endomorphismes qui vérifient l'hypothèse supplémentaire

$$(H4) \quad \lim_{z \in \mathcal{C}_f, |z| \rightarrow +\infty} f(z) \in X_f.$$

Ici \mathcal{C}_f désigne l'ensemble critique de f dans \mathbb{C}^k . L'hypothèse (H4) signifie donc que f est propre dans \mathbb{C}^k et telle que ses valeurs critiques accumulent l'infini dans X_f (elles pourraient accumuler également I_f). L'analyse d'exemples montre que (H4) est générique parmi les endomorphismes vérifiant (H1) et (H3). Observons également que (H4) est vide lorsque f est un automorphisme.

Construction de T_{k-r}^- . – Soit $f : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$ un endomorphisme polynomial qui vérifie (H1), (H3) et (H4). Soit L un sous-espace linéaire de dimension r de \mathbb{P}^k . Pour un choix générique de L , on a $L \cap I_f = \emptyset$ puisque I_f est de dimension $k - r - 1$. En régularisant $[L]$, le courant d'intégration sur L , on obtient une forme positive fermée lisse Θ de bidegré $(k - r, k - r)$ sur \mathbb{P}^k , dont le support n'intersecte pas I_f et telle que $\|\Theta\| = 1$. Comme $f((t = 0) \setminus I_f) \subset X_f$, le courant $f_*\Theta \in \mathcal{T}^{k-r}(\mathbb{P}^k)$ intersecte l'hyperplan $(t = 0)$ dans X_f . Il est de masse

$$\|f_*\Theta\| = \int_{\mathbb{C}^k} f_*\Theta \wedge \omega^r = \int_{\mathbb{C}^k} \Theta \wedge f^*\omega^r = \lambda = d^r,$$

puisque $\Theta \wedge f^*\omega^r$ ne charge pas l'hyperplan $(t = 0)$. On peut donc trouver un courant \mathcal{T} de bidegré $(k - r - 1, k - r - 1)$ tel que $\lambda^{-1}f_*\Theta = \Theta + dd^c\mathcal{T}$. Lorsque $f \in \text{Aut}(\mathbb{C}^k)$, $f_*\Theta = (f^{-1})^*\Theta$ est lisse dans \mathbb{C}^k et on peut choisir \mathcal{T} lisse hors d'un petit voisinage W_{X_f} de X_f . Lorsque f n'est pas inversible, $f_*\Theta$ présente des singularités aux valeurs critiques de f qui rencontrent $f(\text{Supp } \Theta)$. L'hypothèse (H4) implique cependant l'existence d'un potentiel \mathcal{T}_0^- particulier.

LEMME 2.4. – Soient W_{X_f} un petit voisinage de X_f dans \mathbb{P}^k et $s := k - r - 1$. Il existe \mathcal{T}_0^- , un courant de bidegré (s, s) sur \mathbb{P}^k , et $C_0 > 0$ tels que

$$\frac{1}{\lambda}f_*\Theta = \Theta + dd^c\mathcal{T}_0^- \quad \text{et} \quad 0 \leq \mathcal{T}_0^- \leq C_0[\omega^s + f_*\omega^s] \quad \text{dans } \mathbb{P}^k \setminus W_{X_f}.$$

Preuve. – Soit L_1 un sous-espace linéaire de dimension r de \mathbb{P}^k tel que $L_1 \cap I_f = \emptyset$. On choisit L_1 très proche de l'infini $(t = 0)$. Comme f est propre, $f(L_1)$ est également proche de $(t = 0)$ et rencontre $f(\mathcal{C}_f)$ près de X_f d'après l'hypothèse (H4). Si Θ_1 désigne une régularisation de L_1 , on en déduit que $f_*\Theta_1$ est lisse dans $\mathbb{P}^k \setminus W_{X_f}$. Comme $\lambda^{-1}f_*\Theta_1$ est cohomologue à Θ , on peut trouver \mathcal{T}_1^- un courant de bidegré (s, s) sur \mathbb{P}^k tel que

$$\frac{1}{\lambda}f_*\Theta_1 = \Theta + dd^c\mathcal{T}_1^- \quad \text{et} \quad 0 \leq \mathcal{T}_1^- \leq C_0\omega^s \quad \text{dans } \mathbb{P}^k \setminus W_{X_f}.$$

En effet on peut choisir \mathcal{T}_1^- lisse dans $\mathbb{P}^k \setminus W_{X_f}$ et le supposer positif, quitte à ajouter un grand multiple de ω^s . Observons à présent que Θ_1 et Θ sont lisses et cohomologues. Soit \mathcal{T}_2^- une forme lisse de bidegré (s, s) sur \mathbb{P}^k telle que $\Theta = \Theta_1 + dd^c\mathcal{T}_2^-$. Quitte à ajouter un

grand multiple de ω^s et agrandir C_0 , on peut supposer $0 \leq T_2^- \leq C_0 \omega^s$. On conclut en posant $T_0^- = T_1^- + \lambda^{-1} f_* T_2^-$. \square

La construction de T_{k-r}^- s'ensuit assez simplement. L'action de f_* sur les formes lisses de bidegré $(k-r, k-r)$ se comporte bien sous itération (par dualité), en particulier $(f^{j+1})_* \Theta = f_*((f^j)_* \Theta)$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Une récurrence immédiate fournit ainsi

$$\frac{1}{\lambda^j} (f^j)_* \Theta = \Theta + dd^c T_j^-, \quad \text{avec } T_j^- := \sum_{l=0}^{j-1} \frac{1}{\lambda^l} (f^l)_* T_0^-.$$

Or X_f est un attracteur pour f , on peut donc supposer $fW_{X_f} \subset W_{X_f}$. On en déduit que

$$0 \leq T_j^- \leq 2C_0 \sum_{l=0}^j \frac{1}{\lambda^l} (f^l)_* \omega^{k-r-1} \quad \text{dans } \mathbb{P}^k \setminus W_{X_f}.$$

La suite de courants T_j^- est croissante dans $\mathbb{P}^k \setminus W_{X_f}$ et de masse

$$0 \leq \int_{\mathbb{P}^k \setminus W_{X_f}} T_j^- \wedge \omega^{r+1} \leq 2C_0 \sum_{l=0}^j \frac{1}{\lambda^l} \int_{\mathbb{P}^k} (f^l)_* \omega^{k-r-1} \wedge \omega^{r+1} \leq 2C_0 \sum_{l \geq 0} \frac{\delta_{r+1}(f^j)}{\lambda^l}.$$

L'hypothèse (H3), $\lambda > \lambda_{r+1}(f)$, assure la convergence (géométrique) de cette série. Ainsi (T_j^-) converge dans $\mathbb{P}^k \setminus W_{X_f}$ vers un courant $T_\infty^- \geq 0$, d'où

$$\frac{1}{\lambda^j} (f^j)_* \Theta \longrightarrow T_{k-r}^- := \Theta + dd^c T_\infty^- \quad \text{dans } \mathbb{P}^k \setminus W_{X_f}.$$

Comme W_{X_f} est arbitrairement proche de X_f , la convergence a lieu dans $\mathbb{P}^k \setminus X_f$. Les courants positifs fermés de bidimension (r, r) ne chargeant pas les ensembles analytiques de dimension $r-1$ (c'est le cas de X_f), la convergence a en fait lieu dans tout \mathbb{P}^k . Le courant limite $T_{k-r}^- \in \mathcal{T}^{k-r}(\mathbb{P}^k)$ vérifie, par construction, la relation d'invariance

$$f_* T_{k-r}^- = \lambda T_{k-r}^-,$$

et est de masse $\|T_{k-r}^-\| = 1$.

L'existence d'un potentiel $T_\infty^- \geq 0$ garantit que T_{k-r}^- n'est pas le courant d'intégration sur un ensemble analytique de dimension r . En fait nous établissons un résultat bien plus fort, dans l'esprit de [20,6]. Rappelons qu'une fonction quasiplurisousharmonique (qps) est localement la somme d'une fonction plurisousharmonique et d'une fonction lisse. On note $QPSH(\mathbb{P}^k)$ l'ensemble des fonction qps sur \mathbb{P}^k .

PROPOSITION 2.5. – On a

$$QPSH(\mathbb{P}^k) \subset L^1(T_{k-r}^- \wedge \omega^r).$$

En particulier T_{k-r}^- ne charge pas les ensembles pluripolaires.

Preuve. – Une fonction qps sur \mathbb{P}^k est semi-continue supérieurement (donc majorée) et de courbure $dd^c \varphi$ minorée par une forme lisse. Soit φ une telle fonction. Quitte à translater et dilater φ , on peut supposer $\varphi \leq 0$ et $dd^c \varphi \geq -\omega$ sur \mathbb{P}^k .

Soit $\omega_X \geq 0$ une forme lisse fermée de bidegré $(1, 1)$ telle que $\omega_X^r \equiv 0$ au voisinage de X_f (c'est possible car X_f est de dimension $r - 1$). On peut supposer $\|\omega_X\| = 1$. Les formes lisses ω_X^r et ω^r sont donc cohomologues sur \mathbb{P}^k . Fixons $\theta \geq 0$ une forme lisse de bidegré $(r - 1, r - 1)$ telle que $\omega^r = \omega_X^r + dd^c\theta$. Rappelons que $T_{k-r}^- = \Theta + dd^c(\mathcal{T}_\infty^-)$ avec $\mathcal{T}_\infty^- \geq 0$ hors d'un petit voisinage de X_f . On peut supposer $\omega_X^r \equiv 0$ dans ce voisinage. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbb{P}^k} (-\varphi) T_{k-r}^- \wedge \omega^r = \int_{\mathbb{P}^k} (-\varphi) T_{k-r}^- \wedge \omega_X^r + \int_{\mathbb{P}^k} (-\varphi) T_{k-r}^- \wedge dd^c\theta \\ &= \int_{\mathbb{P}^k} (-\varphi) \Theta \wedge \omega_X^r + \int_{\mathbb{P}^k} (-\varphi) dd^c\mathcal{T}_\infty^- \wedge \omega_X^r + \int_{\mathbb{P}^k} (-\varphi) T_{k-r}^- \wedge dd^c\theta. \end{aligned}$$

La première intégrale est finie car $\Theta \wedge \omega_X^r$ est une mesure lisse. Les deux autres se traitent par le théorème de Stokes. On a

$$\int_{\mathbb{P}^k} (-\varphi) dd^c\mathcal{T}_\infty^- \wedge \omega_X^r = \int_{\mathbb{P}^k} -dd^c\varphi \wedge \mathcal{T}_\infty^- \wedge \omega_X^r \leq \int_{\mathbb{P}^k} \omega \wedge \mathcal{T}_\infty^- \wedge \omega_X^r < +\infty,$$

puisque $\mathcal{T}_\infty^- \wedge \omega_X^r \geq 0$ dans tout \mathbb{P}^k et $-dd^c\varphi \leq \omega$. De même

$$\int_{\mathbb{P}^k} (-\varphi) T_{k-r}^- \wedge dd^c\theta = \int_{\mathbb{P}^k} -dd^c\varphi \wedge T_{k-r}^- \wedge \theta \leq \int_{\mathbb{P}^k} \omega \wedge T_{k-r}^- \wedge \theta < +\infty$$

car $T_{k-r}^- \wedge \theta \geq 0$. Pour justifier ces intégrations par parties, on peut supposer φ lisse puis l'approximer par une suite décroissante de fonctions qqsh. Nous renvoyons le lecteur à [22] pour plus d'informations sur les fonctions qqsh sur \mathbb{P}^k . Mentionnons simplement qu'elles sont en correspondance bijective avec les fonctions psh à croissance logarithmique dans \mathbb{C}^k ; elles caractérisent donc les ensembles localement pluripolaires. \square

Rappelons que $\mathcal{T}^{k-r}(\mathbb{P}^k)$ désigne le cône des courants positifs fermés de bidegré $(k - r, k - r)$ sur \mathbb{P}^k . Considérons le sous-cône

$$\mathcal{T}_{f_*}^{k-r}(\mathbb{P}^k) := \{S \in \mathcal{T}^{k-r}(\mathbb{P}^k) \mid f_*S = \lambda S\}$$

des courants f_* -invariants. En recopiant la preuve des théorèmes 2.1 et 2.3, on obtient le résultat suivant.

THÉORÈME 2.6. – Soit $f : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$ un endomorphisme polynomial qui vérifie (H1), (H3) et (H4). Le courant T_{k-r}^- est extrémal dans le cône $\mathcal{T}_{f_*}^{k-r}(\mathbb{P}^k)$.

Si f est un automorphisme alors T_{k-r}^- est extrémal dans $\mathcal{T}^{k-r}(\mathbb{P}^k)$.

Remarque 2.7. – D'un point de vue dynamique, le théorème 2.6 présente un intérêt supplémentaire au théorème 2.1. Lorsque f est un automorphisme, on a en effet remplacé l'hypothèse (H2) par l'hypothèse (H3) qui est dynamiquement plus significative.

On s'attend de plus à ce que T_{k-r}^- soit extrémal dans $\mathcal{T}^{k-r}(\mathbb{P}^k)$, même lorsque f n'est pas inversible. Lorsque $k = 2, r = 1$, ce fait a été établi dans [19, théorème 5.2].

3. Conséquences dynamiques

Dans toute cette section f désigne un endomorphisme polynomial de \mathbb{C}^k qui vérifie les hypothèses (H1)–(H4).

3.1. Une mesure invariante canonique

Nous avons construit deux courants invariants T_+^r et T_{k-r}^- de bidegrés complémentaires. Il est naturel de vouloir considérer la mesure $\mu_f := T_+^r \wedge T_{k-r}^-$. Ce produit est bien défini car T_+ a des potentiels bornés sur le support de T_{k-r}^- . Notons $\mathcal{L}(\mathbb{C}^k)$ la classe de Lelong des fonctions psh à croissance logarithmique dans \mathbb{C}^k .

THÉORÈME 3.1. – *La mesure $\mu_f := T_+^r \wedge T_{k-r}^-$ est une mesure de probabilité invariante à support compact dans \mathbb{C}^k telle que*

$$\mathcal{L}(\mathbb{C}^k) \subset L^1(\mu_f).$$

En particulier μ_f ne charge pas les ensembles pluripolaires de \mathbb{C}^k .

Preuve. – Nous commençons par rappeler pourquoi μ_f est bien définie. Nous allons montrer par récurrence sur $j \in [0, r]$ que

$$(\mathcal{P}_j) \quad QPSH(\mathbb{P}^k) \subset L^1(T_+^j \wedge T_{k-r}^- \wedge \omega^{r-j}).$$

Ici $QPSH(\mathbb{P}^k)$ désigne comme précédemment l'ensemble des fonctions quasiplurisousharmoniques sur \mathbb{P}^k . Une telle propriété d'intégrabilité permet de définir, par récurrence, les courants positifs fermés

$$T_+^{j+1} \wedge T_{k-r}^- := \omega \wedge T_+^j \wedge T_{k-r}^- + dd^c(g_+ T_+^j \wedge T_{k-r}^-).$$

La propriété (\mathcal{P}_{r-1}) permet ainsi de définir μ_f , tandis que (\mathcal{P}_r) assure que $QPSH(\mathbb{P}^k) \subset L^1(\mu_f)$. Observons que (\mathcal{P}_0) a déjà été établie (proposition 2.5). Supposons donc (\mathcal{P}_j) établie pour un entier $j \in [0, r-1]$, et démontrons (\mathcal{P}_{j+1}) . Soit $\varphi \in QPSH(\mathbb{P}^k)$; on peut supposer $\varphi \leq 0$ et $dd^c \varphi \geq -\omega$. Alors

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbb{P}^k} (-\varphi) T_+^{j+1} \wedge T_{k-r}^- \wedge \omega^{r-j-1} \\ &= \int_{\mathbb{P}^k} (-\varphi) T_+^j \wedge T_{k-r}^- \wedge \omega^{r-j} + \int_{\mathbb{P}^k} (-\varphi) dd^c([g_+ + C_{W_{I_f}}] T_+^j \wedge T_{k-r}^- \wedge \omega^{r-j-1}). \end{aligned}$$

La première intégrale de droite est finie par hypothèse de récurrence. La seconde se traite par Stokes, en observant que $[g_+ + C_{W_{I_f}}] T_+^j \wedge T_{k-r}^- \geq 0$ dans \mathbb{P}^k . En effet $T_{k-r}^- \equiv 0$ dans un voisinage W_{I_f} de I_f et $g_+ + C_{W_{I_f}} \geq 0$ hors de W_{I_f} , si on choisit $C_{W_{I_f}}$ assez grande. Ainsi

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{P}^k} (-\varphi) dd^c([g_+ + C_{W_{I_f}}] T_+^j \wedge T_{k-r}^- \wedge \omega^{r-j-1}) \\ &= \int_{\mathbb{P}^k} [g_+ + C_{W_{I_f}}] T_+^j \wedge T_{k-r}^- \wedge \omega^{r-j-1} \wedge (-dd^c \varphi) \\ &\leq \int_{\mathbb{P}^k} [g_+ + C_{W_{I_f}}] T_+^j \wedge T_{k-r}^- \wedge \omega^{r-j} < +\infty, \end{aligned}$$

puisque $-dd^c \varphi \leq \omega$. Cela démontre (\mathcal{P}_{j+1}) .

Montrons à présent que μ_f est à support compact dans \mathbb{C}^k . Comme toute fonction ψ de la classe $\mathcal{L}(\mathbb{C}^k)$ est du type $\psi = \varphi|_{\mathbb{C}^k} - \log \sqrt{1 + \|z\|^2}$, où $\varphi \in QPSH(\mathbb{P}^k)$, cela montrera que

$\mathcal{L}(\mathbb{C}^k) \subset L^1(\mu_f)$. Soit $\mathcal{B}^+(X_f) := \{z \in \mathbb{C}^k \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(z) \in X_f\}$ le bassin d'attraction de X_f pour f . Alternativement, $\mathcal{B}^+(X_f) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(W_{X_f})$, où W_{X_f} est un petit voisinage de X_f dans \mathbb{C}^k . On considère de même $\mathcal{B}^-(I_f) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(W_{I_f})$, le « bassin d'attraction » de I_f pour f^{-1} , W_{I_f} désignant un petit voisinage de I_f . Lorsque f est inversible, il s'agit d'un bassin d'attraction au sens classique du terme. Lorsque f est de degré topologique ≥ 2 , il s'agit des points $z \in \mathbb{C}^k$ tels qu'une préhistoire $(z_n) \in (\mathbb{C}^k)^{\mathbb{N}}$, $f^n(z_n) = z$, converge vers I_f . Considérons également $K^+ := \{z \in \mathbb{C}^k \mid (f^n(z))_{n \geq 0} \text{ est bornée}\}$ et

$$K^- := \{z \in \mathbb{C}^k \mid \text{toutes les préhistoires de } z \text{ restent dans un compact de } \mathbb{C}^k\}.$$

En utilisant le fait que X_f (respectivement I_f) est un attracteur pour f (respectivement f^{-1}), on montre aisément que

$$\mathbb{C}^k = K^+ \cup \mathcal{B}^+(X_f) = K^- \cup \mathcal{B}^-(I_f).$$

Comme f contracte $(t=0) \setminus I_f$ sur X_f , $X_f \cap I_f = \emptyset$, on a

$$(t=0) \setminus I_f \subset \overline{\mathcal{B}^+(X_f)} \quad \text{et} \quad (t=0) \setminus X_f \subset \overline{\mathcal{B}^-(I_f)},$$

où les adhérences sont considérées dans \mathbb{P}^k . Il s'ensuit que l'ensemble $K := K^+ \cap K^-$ est un compact de \mathbb{C}^k . On vérifie sans peine que T_+^r est à support dans $\overline{K^+}$ tandis que T_{k-r}^- est à support dans $\overline{K^-}$. Pour des raisons de dimension, on a donc $\overline{K^+} = K^+ \cup I_f$ et $\overline{K^-} = K^- \cup X_f$. Tous ces faits sont établis dans [21] lorsque f est un automorphisme et s'adaptent aisément au cas des endomorphismes. On en déduit que μ_f est à support dans le compact K .

L'invariance de μ_f résulte de celles de T_+^r et T_{k-r}^- : si χ est une fonction test dans \mathbb{C}^k , on a

$$\langle f_* \mu_f, \chi \rangle = \langle T_+^r \wedge T_{k-r}^-, \chi \circ f \rangle = \left\langle T_{k-r}^-, \frac{1}{\lambda} f^*(\chi T_+^r) \right\rangle = \langle \mu_f, \chi \rangle.$$

Enfin la masse de μ_f se calcule en cohomologie puisque le produit $T_+^r \wedge T_{k-r}^-$ est globalement défini sur \mathbb{P}^k , ainsi

$$\|\mu_f\| = \|T_+^r\| \cdot \|T_{k-r}^-\| = 1. \quad \square$$

3.2. Ergodicité et entropie

M. Gromov a montré [18] que l'entropie topologique d'une application holomorphe f est toujours dominée par le taux de croissance asymptotique du volume du graphe itéré de f . L'argument de M. Gromov passe au cas méromorphe et permet d'obtenir la majoration

$$h_{\text{top}}(f) \leq \max_{1 \leq j \leq k} \log \lambda_j(f),$$

où $h_{\text{top}}(f)$ désigne l'entropie topologique de f et les $\lambda_j(f)$ sont les degrés dynamiques de f . Nous renvoyons le lecteur à [20] pour la définition de ces quantités, ainsi que pour celle de l'entropie métrique $h_\mu(f)$ d'une mesure invariante μ . Cette dernière est toujours dominée par l'entropie topologique (principe variationnel). Les hypothèses (H1) et (H3) assurent ici que $\lambda = \lambda_r(f) = d^r$ est le plus grand des degrés dynamiques. On a donc

$$h_{\mu_f}(f) \leq h_{\text{top}}(f) \leq \log \lambda.$$

Nous établissons à présent la réciproque, conjecturée par S. Friedland [15].

THÉORÈME 3.2. – *La mesure μ_f est ergodique et d'entropie maximale,*

$$h_{\mu_f}(f) = h_{\text{top}}(f) = \log \lambda.$$

Lorsque f est un automorphisme, μ_f est mélangeante.

Preuve. – L'ergodicité (respectivement le mélange) de μ_f découle assez simplement des propriétés d'extrémalité de T_+^r et T_{k-r}^- , en suivant une méthode à présent classique en dynamique complexe à plusieurs variables. Nous en esquissons brièvement la démonstration et renvoyons le lecteur à [21] pour plus de détails. Etant donnée χ une fonction test dans \mathbb{C}^k , il s'agit de montrer que $\widehat{\chi}_n \mu_f \rightarrow c_\chi \mu_f$ au sens des mesures, où

$$\widehat{\chi}_n := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi \circ f^j \quad \text{et} \quad c_\chi = \int \chi d\mu_f.$$

Pour obtenir le mélange, il faut montrer la propriété plus forte $\chi_n \mu_f \rightarrow c_\chi \mu_f$, avec $\chi_n = \chi \circ f^n$. Nous esquissons la preuve de l'ergodicité.

Étape 1. – Soit ψ une fonction test. On montre que $\widehat{R}_n \rightarrow c_\psi T_{k-r}^-$, où

$$\widehat{R}_n := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} R_j, \quad \text{avec} \quad R_j := \frac{1}{\lambda^j} (f^j)_* (\psi T_{k-r}^-).$$

On peut supposer $0 \leq \psi \leq 1$. Les courants \widehat{R}_n sont alors des courants positifs dominés par T_{k-r}^- , donc de masse uniformément bornée. Toute valeur d'adhérence de (\widehat{R}_n) est un courant f_* -invariant (puisque nous considérons des moyennes de Césaro), qui est fermé grâce au lemme suivant dont la preuve est laissée au lecteur.

LEMME 3.3. –

$$\|dR_n\| = O([\delta_{r+1}(f^n)/\lambda^n]^{1/2}) \quad \text{et} \quad \|dd^c R_n\| = O(\delta_{r+1}(f^n)/\lambda^n).$$

Soit R une valeur d'adhérence de (\widehat{R}_n) . Comme T_{k-r}^- est extrémal parmi les courants positifs fermés f_* -invariants (théorème 2.6), on a $R = c_R T_{k-r}^-$. Or

$$c_R = \lim_{j \rightarrow +\infty} \langle \widehat{R}_{n_j}, \omega^r \rangle = \lim_{j \rightarrow +\infty} \left\langle \psi T_{k-r}^-, \frac{1}{n_j} \sum_{l=0}^{n_j-1} \lambda^{-l} (f^l)^* \omega^r \right\rangle = c_\psi.$$

La convergence dans la dernière égalité résulte de ce que les potentiels de $\lambda^{-l} (f^l)^* \omega$ convergent uniformément vers g_+ sur le support de T_{k-r}^- . Il s'ensuit que $R = c_\psi T_{k-r}^-$ est indépendant du choix de la sous-suite (n_j) ; c'est donc que (\widehat{R}_n) converge vers $c_\psi T_{k-r}^-$.

Étape 2. – On veut en déduire à présent que $\widehat{R}_n \wedge T_+^r$ converge vers $R \wedge T_+^r = c_\psi \mu_f$. Ce serait immédiat si T_+^r était une forme lisse. Ce n'est pas le cas, mais on peut tout de même écrire

$$T_+^r = \omega^r + dd^c(S), \quad \text{où} \quad S = \sum_{j=0}^{r-1} g_+ T_+^j \wedge \omega^{r-1-j}$$

peut être exprimé comme une série de formes lisses qui convergent (en masse) géométriquement sur le support de T_{k-r}^- . En combinant cette information avec les estimées du lemme 3.3, on obtient la convergence désirée (nous renvoyons le lecteur à [21] pour plus de détails).

Nous pouvons à présent conclure. Nous voulions montrer que $\widehat{\chi}_n \mu_f \rightarrow c_\chi \mu_f$, c'est-à-dire $\int \widehat{\chi}_n \psi d\mu_f \rightarrow c_\chi c_\psi$. Or il résulte de l'invariance de T_+^r que

$$\int \widehat{\chi}_n \psi d\mu_f = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \langle \lambda^{-j}(f^j)^*(\chi T_+^r), \psi T_{k-r}^- \rangle = \langle \chi T_+^r, \widehat{R}_n \rangle \rightarrow c_\chi c_\psi.$$

Ceci démontre l'ergodicité de μ_f . Le mélange est obtenu de la même façon : l'extrémalité forte de T_{k-r}^- évite le recours aux moyennes de Césaro.

Il reste à montrer que μ_f est d'entropie maximale. Cela résulte du travail de Y. Yomdin [35]. De fait, si T_{k-r}^- était le courant d'intégration sur une variété lisse, on pourrait appliquer directement [35] car f est holomorphe au voisinage du support de T_{k-r}^- . Ce n'est bien sûr pas le cas (cf. proposition 2.5), mais T_{k-r}^- peut être obtenu comme limite de tels courants et nous allons appliquer [35] à ces approximants. Nous suivons ici l'approche initiée par E. Bedford et J. Smillie dans [2, théorème 4.4]. Rappelons tout d'abord la définition de l'entropie métrique. Soit $\zeta = \{\zeta_i\}$ une partition mesurable de \mathbb{P}^k . L'entropie $H_\mu(\zeta)$ de la partition ζ par rapport à μ est

$$H_\mu(\zeta) := \sum -\mu(\zeta_i) \log \mu(\zeta_i).$$

L'entropie métrique de f par rapport à ζ et μ est

$$h_\mu(f, \zeta) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} H_\mu \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\zeta) \right),$$

où $\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\zeta)$ désigne la partition jointe. Enfin l'entropie métrique de f par rapport à la mesure invariante μ est

$$h_\mu(f) := \sup_{\zeta} h_\mu(f, \zeta).$$

Soit $\varepsilon > 0$; considérons $\zeta = \{\zeta_i\}$ une partition mesurable de \mathbb{P}^k de petit diamètre $diam(\zeta_i) < \varepsilon$. On peut supposer sans perte de généralité que $\mu_f(\partial\zeta_i) = 0$. Observons que tout élément $\zeta_i^{(n)}$ de la partition jointe $\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\zeta)$ est contenu dans une n -boule dynamique de rayon ε ,

$$B_n(x, \varepsilon) = \left\{ y \mid \max_{0 \leq i \leq n-1} d(f^i(x), f^i(y)) < \varepsilon \right\}.$$

Il s'ensuit que pour toute mesure de probabilité ν sur \mathbb{P}^k ,

$$(4) \quad H_\nu \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\zeta) \right) = \sum -\nu(\zeta_i^{(n)}) \log \nu(\zeta_i^{(n)}) \geq -\log \sup_B \nu(B),$$

où le supremum est pris sur toutes les n -boules dynamiques B de rayon ε . Nous allons estimer cette dernière quantité pour des mesures $\nu = \nu_n$ bien choisies que nous définissons à présent. Soit L un sous-espace linéaire générique de \mathbb{P}^k de dimension r . On note comme précédemment

ω_X une forme lisse fermée de bidegré $(1, 1)$ et de masse 1 telle que $\omega_X^r \equiv 0$ au voisinage de X_f (qui est de dimension $r - 1$). Posons

$$\nu_n := [L] \wedge \frac{1}{\lambda^n} (f^n)^* (\omega_X^r) \quad \text{et} \quad \mu_n := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (f^j)_* (\nu_n).$$

Nous montrons plus loin (lemme 3.4) que les mesures μ_n convergent vers μ_f . Il résulte d’une preuve du principe variationnel due à M. Misiurewicz (voir lemme 4.5.2 dans [25]) que

$$(5) \quad h_{\mu_f}(f) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} H_{\nu_n} \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\zeta) \right).$$

Si B est une n -boule dynamique de rayon ε , on a

$$(6) \quad \nu_n(B) = \frac{1}{\lambda^n} \int_{f^n(B \cap L)} \omega_X^r \leq \frac{C}{\lambda^n} \text{Vol}_r(f^n(B \cap L)),$$

où Vol_r désigne le volume r -dimensionnel. Le principal résultat de Y. Yomdin [35] assure, puisque f est holomorphe donc lisse dans l’ouvert invariant $\mathbb{C}^k \setminus W_{I_f}$, que

$$(7) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log^+ \sup_B \text{Vol}_r(f^n(B \cap L)) = 0.$$

Comme précédemment le supremum est pris sur toutes les n -boules dynamiques B de rayon ε . Les inégalités (5), (4) et (6), (7) impliquent alors

$$h_{\mu_f}(f) \geq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} H_{\nu_n} \left(\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\zeta) \right) \geq - \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log \sup_B \nu_n(B) \geq \log \lambda,$$

ce qui conclut la preuve du théorème 3.2. \square

LEMME 3.4. – *La suite (μ_n) converge vers μ_f .*

Preuve. – On va montrer que pour un choix générique du sous-espace L , la suite $\lambda^{-j} (f^j)_* [L]$ converge vers le courant T_{k-r}^- . Supposons ce fait acquis pour l’instant et fixons j_n une suite d’entiers qui tend vers $+\infty$ plus lentement que n . On peut décomposer

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=j_n}^{n-j_n} \frac{1}{\lambda^j} (f^j)_* [L] \wedge \frac{1}{\lambda^{n-j}} (f^{n-j})^* \omega_X^r + o(1).$$

Comme les potentiels de $d^{-n} (f^n)^* \omega_X$ convergent uniformément vers la fonction de Green G^+ , potentiel de T^+ , sur les compacts de \mathbb{C}^k , on en déduit la convergence souhaitée.

Montrons à présent que $\lambda^{-j} (f^j)_* [L]$ converge vers T_{k-r}^- pour un choix générique de L . Il s’agit d’un résultat d’équidistribution du type de ceux démontrés par A. Russakovskii et B. Shiffman dans [30] (pour les pull-backs). Nous en esquissons une preuve légèrement simplifiée. Rappelons que $[L] = \omega^{k-r} + dd^c \mathcal{T}_L$, où $\mathcal{T}_L \leq 0$ désigne le courant de Levine [28]. Notons $\mathcal{G}_{r,k}(\mathbb{C})$ la grassmannienne des r -plans de \mathbb{P}^k et σ l’unique mesure de probabilité sur

$\mathcal{G}_{r,k}(\mathbb{C})$ qui est invariante sous l’action du groupe unitaire $\mathbb{U}(k + 1, \mathbb{C})$. Comme ce dernier agit transitivement sur \mathbb{P}^k , il vient

$$(8) \quad \int_{\mathcal{G}_{r,k}(\mathbb{C})} \mathcal{T}_L d\sigma(L) = C_0 \omega^{k-r-1},$$

où C_0 désigne une constante négative (voir lemme 3.3 dans [31]). Posons

$$\varphi_n(L) := \int_{\mathbb{P}^k} \frac{1}{\lambda^n} (f^n)_* (\mathcal{T}_L) \wedge \omega^{r+1} \leq 0.$$

Les φ_n sont des fonctions qps sur $\mathcal{G}_{r,k}(\mathbb{C})$: on peut adapter le lemme central 5.1 de [30] pour en donner une version quantitative

$$dd^c \varphi_n \geq -(k - r) \delta_{r+1}(f^n) \omega_{r,k},$$

où $\omega_{r,k}$ désigne la forme de Fubini–Study sur $\mathcal{G}_{r,k}(\mathbb{C})$. Soit enfin

$$\varphi := \frac{1}{A} \sum_{n \geq 0} \varphi_n, \quad \text{où } A = r \sum_{n \geq 0} \frac{\delta_{r+1}(f^n)}{\lambda^n} < +\infty.$$

Il s’agit d’une limite décroissante de fonctions $\omega_{r,k}$ -psh. La fonction φ est donc soit identique à $-\infty$, soit à nouveau $\omega_{k,r}$ -psh (voir [22]). Or il résulte de (8) que $\varphi \neq -\infty$, en effet

$$\int_{\mathcal{G}_{r,k}(\mathbb{C})} \varphi(L) d\sigma(L) = \frac{1}{A} \sum_{n \geq 0} \int_{\mathbb{P}^k} \frac{1}{\lambda^n} (f^n)_* (C_0 \omega^{k-r-1}) \wedge \omega^{r+1} = C_0.$$

On en déduit en particulier que $\varphi_n(L) \rightarrow 0$ pour tout L hors de l’ensemble pluripolaire $\{\varphi = -\infty\}$. \square

N. Sibony a introduit la notion d’*automorphisme polynomial régulier* dans [32]. Ce sont les automorphismes polynomiaux de \mathbb{C}^k tels que $I_f \cap I_{f^{-1}} = \emptyset$. Dans ce cas on a $X_f = I_f$, donc f vérifie (H1), et $I_f = X_{f^{-1}}$ est un attracteur pour f^{-1} , donc f vérifie (H2). Par ailleurs $\delta_l(f) = d_+^l$ pour $1 \leq l \leq r$ et $\delta_l(f) = d_-^{k-l}$ pour $r \leq l \leq k$, où $d_{\pm} = \delta_1(f^{\pm 1})$. En particulier $\lambda = d_+^r = d_-^{k-r} > \lambda_{r+1}(f) = d_-^{k-r-1}$ donc f vérifie (H3). Comme $\mathcal{C}_f = \emptyset$, (H4) est automatiquement vérifiée. Nos résultats précédents s’appliquent donc et fournissent une réponse à une question posée dans [32,21] :

COROLLAIRE 3.5. – *Soit $f : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$ un automorphisme polynomial régulier. Alors $\mu_f = T_+^r \wedge T_-^{k-r}$ est une mesure mélangante d’entropie maximale*

$$h_{\mu_f}(f) = h_{\text{top}}(f) = \log \lambda = \log d_+^r = \log d_-^{k-r}.$$

Remerciements

Ce travail est une suite logique à [21]. J’adresse mes plus vifs remerciements à N. Sibony pour m’ avoir indiqué les travaux de J.-P. Demailly [8] ainsi que pour les discussions que nous avons eues à ce sujet il y a quelques années déjà.

RÉFÉRENCES

- [1] BEDFORD E., LYUBICH M., SMILLIE J., Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 . IV. The measure of maximal entropy and laminar currents, *Invent. Math.* **112** (1) (1993) 77–125.
- [2] BEDFORD E., SMILLIE J., Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 . III. Ergodicity, exponents and entropy of the equilibrium measure, *Math. Ann.* **294** (3) (1992) 395–420.
- [3] BEDFORD E., SMILLIE J., Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 . V. Critical points and Lyapunov exponents, *J. Geom. Anal.* **8** (3) (1998) 349–383.
- [4] BOST J.-B., GILLET H., SOULÉ C., Heights of projective varieties and positive Green forms, *J. Amer. Math. Soc.* **7** (4) (1994) 903–1027.
- [5] CANTAT S., Dynamique des automorphismes des surfaces $K3$, *Acta Math.* **187** (1) (2001) 1–57.
- [6] COMAN D., GUEDJ V., Invariant currents and dynamical Lelong numbers, *J. Geom. Anal.* **14** (2) (2004) 199–213.
- [7] DEMAILLY J.-P., Courants positifs extrémaux et conjecture de Hodge, *Invent. Math.* **69** (3) (1982) 347–374.
- [8] DEMAILLY J.-P., Propagation des singularités des courants positifs fermés, *Ark. Mat.* **23** (1) (1985) 35–52.
- [9] DEMAILLY J.-P., Complex analytic and differential geometry, Free accessible book <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/books.html>.
- [10] DILLER J., FAVRE C., Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces, *Amer. J. Math.* **123** (6) (2001) 1135–1169.
- [11] DINH T.C., Suites d'applications méromorphes multivaluées et courants laminaires, *Prépublication*, décembre 2003.
- [12] DINH T.C., SIBONY N., Green currents for holomorphic automorphisms of compact Kähler manifolds, math.DS/0311322.
- [13] DUJARDIN R., Laminar currents in \mathbb{P}^2 , *Math. Ann.* **325** (4) (2003) 745–765.
- [14] FORNÆSS J.-E., SIBONY N., Complex Hénon mappings in \mathbb{C}^2 and Fatou–Bieberbach domains, *Duke Math. J.* **65** (2) (1992) 345–380.
- [15] FRIEDLAND S., Entropy of polynomial and rational maps, *Ann. of Math. (2)* **133** (2) (1991) 359–368.
- [16] GRIFFITHS P.-A., HARRIS J., Principles of Algebraic Geometry, Wiley, New York, 1978.
- [17] GRIFFITHS P.-A., KING J., Nevanlinna theory and holomorphic mappings between algebraic varieties, *Acta Math.* **130** (1973) 145–220.
- [18] GROMOV M., On the entropy of holomorphic maps, *Manuscrit*, 1977.
- [19] GUEDJ V., Dynamics of polynomial mappings of \mathbb{C}^2 , *Amer. J. Math.* **124** (1) (2002) 75–106.
- [20] GUEDJ V., Ergodic properties of rational mappings with large topological degree, *Preprint*, January 2003, à paraître in *Annals of Mathematics*.
- [21] GUEDJ V., SIBONY N., Dynamics of polynomial automorphisms of \mathbb{C}^k , *Ark. Mat.* **40** (2) (2002) 207–243.
- [22] GUEDJ V., ZERIAHI A., Intrinsic capacities on compact Kähler manifolds, math.CV/0401302.
- [23] HARVEY R., Holomorphic chains and their boundaries, in : *Several Complex Variables (Proc. Sympos. Pure Math., vol. XXX, Part 1, Williams Coll., Williamstown, Mass., 1975)*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1977, pp. 309–382.
- [24] HUCKLEBERRY A., Subvarieties of homogeneous and almost homogeneous manifolds, in: *Contributions to Complex Analysis and Analytic Geometry*, in: Aspects Math., vol. **E26**, Vieweg, Braunschweig, 1994, pp. 189–232.
- [25] KATOK A., HASSELBLATT B., Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems, with a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza, *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications*, vol. **54**, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, xviii + 802 pp.
- [26] LELONG P., Intégration sur un ensemble analytique complexe, *Bull. Soc. Math. France* **85** (1957) 239–262.
- [27] LELONG P., Éléments extrémaux sur le cône des courants positifs fermés, in : *Séminaire Pierre Lelong (Analyse), Année 1971–1972*, in : Lecture Notes in Math., vol. **332**, Springer, Berlin, 1973, pp. 112–131.

- [28] LEVINE H., A theorem on holomorphic mappings into complex projective space, *Ann. of Math. (2)* **71** (1960) 529–535.
- [29] MÉO M., Image inverse d'un courant positif fermé par une application analytique surjective, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **322** (12) (1996) 1141–1144.
- [30] RUSSAKOVSKII A., SHIFFMAN B., Value distribution for sequences of rational mappings and complex dynamics, *Indiana Univ. Math. J.* **46** (3) (1997) 897–932.
- [31] SHIFFMAN B., Applications of geometric measure theory to value distribution theory for meromorphic maps, in: *Value Distribution Theory (Proc. Tulane Univ. Program, Tulane Univ., New Orleans, La., 1972–1973), Part A*, Dekker, New York, 1974, pp. 63–95.
- [32] SIBONY N., Dynamique des applications rationnelles de \mathbb{P}^k , in : *Dynamique et Géométrie Complexes, Panorama et Synthèses*, 1999.
- [33] SKODA H., Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans C^n , *Bull. Soc. Math. France* **100** (1972) 353–408.
- [34] SULLIVAN D., Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds, *Invent. Math.* **36** (1976) 225–255.
- [35] YOMDIN Y., Volume growth and entropy, *Israel J. Math.* **57** (3) (1987) 285–300.

(Manuscrit reçu le 15 juillet 2004 ;
accepté le 11 février 2005.)

Vincent GUEDJ
Université Paul Sabatier,
Laboratoire Émile Picard,
UMR 5580,
118 route de Narbonne,
31062 Toulouse cedex 04, France
E-mail : guedj@picard.ups-tise.fr