

HYPERSURFACES LEVI-PLATES IMMERGÉES DANS LES SURFACES COMPLEXES DE COURBURE POSITIVE ☆

PAR BERTRAND DEROIN

RÉSUMÉ. – Nous démontrons qu’il n’y a pas d’hypersurface Levi-plate compacte *immergée* de classe C^1 dans le plan projectif complexe, si le feuilletage par courbes holomorphes possède un courant harmonique absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue, avec une densité bornée supérieurement et inférieurement. Ceci découle d’un résultat de rigidité pour les hypersurfaces Levi-plates compactes immergées dans une surface complexe de courbure positive et ayant la même régularité.

© 2005 Published by Elsevier SAS

ABSTRACT. – We show that there is no *immersed* compact Levi-flat hypersurface of class C^1 in the complex projective plane, if the foliation by holomorphic curves carries a harmonic current which is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure, with a density bounded from above and below. This is a corollary of a rigidity result for immersed compact Levi-flat hypersurfaces in complex surfaces of non-negative curvature.

© 2005 Published by Elsevier SAS

1. Introduction

Dans une surface complexe, une hypersurface *réelle* est dite *Levi-plate* si elle est feuilletée par des courbes holomorphes. L’étude des hypersurfaces Levi-plates, et plus généralement des laminations par courbes holomorphes du plan projectif complexe, a suscité de nombreux travaux, notamment à propos de la conjecture du minimal exceptionnel [19,24,4,16,5,9]. Cette conjecture affirme qu’une feuille d’un feuilletage holomorphe singulier de CP^2 s’accumule sur une singularité, et serait vraie si toute lamination compacte par courbes holomorphes contenait une courbe algébrique.

Récemment, Y.-T. Siu a démontré qu’il n’y a pas d’hypersurface Levi-plate compacte de classe C^8 dans le plan projectif complexe [22], et la régularité a été améliorée par A. Iordan et J. Cao/M.C. Shaw/L. Wang à une hypersurface Levi-plate de classe C^4 et C^2 [17,8]. Leur méthode s’appuie sur l’étude de l’opérateur $\bar{\partial}$ dans le complémentaire de la 3-variété afin d’obtenir des propriétés de régularité des solutions jusqu’au bord, et ceci mène à une contradiction.

Dans ce travail nous proposons une approche dynamique à l’étude des hypersurfaces Levi-plates d’une surface complexe, qui consiste à étudier le feuilletage par courbes holomorphes.

☆ Ce travail a été partiellement supporté par le Fond National Suisse.

Elle est fondée sur la théorie des *courants harmoniques* sur un feuilletage, dont l'existence a été démontrée par L. Garnett dans [14] (voir aussi [3,7]).

DÉFINITION 1.1. – Sur un feuilletage par surfaces de Riemann \mathcal{F} d'une variété compacte M , un courant harmonique est un opérateur $C: \Omega^2(\mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{R}$, strictement positif et $i\bar{\partial}\partial$ -fermé, où $\Omega^2(\mathcal{F})$ est l'espace des $(1, 1)$ -formes lisses le long des feuilles.

Étant donnée une hypersurface Levi-plate compacte M d'une surface complexe S , et un courant harmonique sur M , nous nous intéressons à divers invariants numériques. Ils sont dus à A. Candel, qui a introduit la *classe de Chern* d'un fibré en droites *holomorphe* $E \rightarrow M$ contre un courant harmonique (Définition 4.2). La classe de Chern du fibré tangent aux feuilles, appelée *caractéristique d'Euler*, ou la classe de Chern du fibré normal aux feuilles dans S , que nous appelons *classe normale*, sont des exemples de tels invariants.

Notre contribution est de relier la classe normale à des propriétés dynamiques du feuilletage par courbes holomorphes ; nous démontrons que lorsque le courant harmonique est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue, la classe normale est majorée par l'opposé de la caractéristique d'Euler (Proposition 4.6). Nous obtenons alors le résultat suivant de rigidité des hypersurfaces Levi-plates dans les surfaces complexes de courbure positive, sous la forte hypothèse d'existence d'un courant harmonique absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue.

THÉORÈME 1.2 (Théorème principal). – *Soit S une surface complexe dont le fibré anti-canonique $-K_S$ possède une métrique de classe C^2 de courbure Ω positive ou nulle. Soit \mathcal{F} un feuilletage par surfaces de Riemann de classe C^1 d'une variété compacte M de dimension 3. Supposons que \mathcal{F} admette un courant harmonique absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue avec une densité bornée supérieurement et inférieurement par des constantes strictement positives. Alors, si il existe une immersion $L: M \rightarrow S$ de classe C^1 et holomorphe le long des feuilles :*

- soit \mathcal{F} est un quotient du feuilletage horizontal de $\mathbf{C}P^1 \times \mathbf{S}^1$;
- soit l'image de \mathcal{F} est tangente au lieu où la courbure Ω s'annule.

Les surfaces de Del Pezzo sont les surfaces complexes compactes dont le fibré anti-canonique peut être muni d'une métrique de courbure strictement positive. La liste de ces surfaces est : $\mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}P^1$ et les éclatements de $\mathbf{C}P^2$ en $d = 0, 1, \dots, 8$ points. Une hypersurface Levi-plate immergée dans ces surfaces et ayant la régularité du théorème principal est un quotient du feuilletage horizontal de $\mathbf{C}P^1 \times \mathbf{S}^1$. Dans le plan projectif il n'y a pas d'hypersurface Levi-plate de cette nature.

COROLLAIRE 1.3. – *Si un feuilletage par surfaces de Riemann de classe C^1 d'une variété compacte M de dimension 3 a un courant harmonique absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue avec une densité bornée supérieurement et inférieurement par des constantes strictement positives, alors il n'existe pas d'immersion de classe C^1 et holomorphe le long des feuilles de M dans le plan projectif complexe.*

Nous retrouvons donc le résultat de Y.-T. Siu pour les hypersurfaces Levi-plates immergées dans le plan projectif complexe, et ayant la régularité du théorème principal. Signalons que, par contre, T. Ohsawa et N. Sibony ont démontré l'analogie du théorème de plongement de Kodaira pour les feuilletages par variétés complexes de codimension 1 réelle. Dans le cas de feuilletages par surfaces de Riemann, il peut être formulé de la manière suivante, en utilisant les travaux de D. Sullivan sur les cycles feuilletés en codimension 1 ([23], Proposition II.16) et un critère d'existence d'un fibré en droites holomorphe de courbure strictement positive le long des feuilles que nous avons donné dans [12].

THÉORÈME 1.4 [20]. – Soit \mathcal{F} un feuilletage par surfaces de Riemann de classe C^1 d'une variété compacte M de dimension 3. Si \mathcal{F} n'a pas de feuille compacte homologue à 0, alors il existe un plongement $\pi : M \rightarrow \mathbb{C}P^4$ de classe C^1 qui est holomorphe le long des feuilles. Par projection générique, nous obtenons une immersion lisse $\pi' : M \rightarrow \mathbb{C}P^3$ de classe C^1 et holomorphe le long des feuilles.

Ainsi, sous les hypothèses du théorème principal et du théorème précédent, un feuilletage par surfaces de Riemann d'une variété compacte de dimension 3 se plonge holomorphiquement dans $\mathbb{C}P^4$, s'immerge holomorphiquement dans $\mathbb{C}P^3$, mais pas dans $\mathbb{C}P^2$.

Remarque 1.5. – En général, une lamination par courbes holomorphes dans une surface complexe possède une structure transverse *hölderienne* [19,24]. En fait notre résultat s'étend aux hypersurfaces Levi-plates immergées ayant une structure transverse *lipschitzienne*. Nous faisons donc la démonstration du théorème principal en supposant le feuilletage \mathcal{F} *transversalement lipschitzien*, et l'immersion holomorphe $L : M \rightarrow S$ *transversalement bilipschitzienne* (voir 3.1 pour la définition).

Outre le fait que ce résultat soit plus général, notre motivation vient de ce qu'il y a beaucoup d'exemples de feuilletages par surfaces de Riemann transversalement lipschitziens qui ont la régularité du théorème : nous démontrons qu'un feuilletage par surfaces de Riemann *continu* et *minimal* d'une variété compacte de dimension 3 possède (i) une structure transverse lipschitzienne et (ii) un courant harmonique absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue avec une densité bornée supérieurement et inférieurement (Proposition 2.5).

Remarque 1.6. – Nous ne connaissons pas la liste exhaustive de toutes les surfaces complexes S dont le fibré anti-canonique peut être muni d'une métrique de classe C^2 de courbure positive ou nulle, d'autant que dans le théorème principal S n'est pas forcément compacte. Citons quand même quelques exemples. Soit S_{p_1, \dots, p_9} l'éclatement de $\mathbb{C}P^2$ en neuf points p_1, \dots, p_9 . Lorsque ces neuf points sont les points d'intersection de deux cubiques génériques, S_{p_1, \dots, p_9} est une fibration elliptique au-dessus de $\mathbb{C}P^1$. Le fibré anti-canonique peut alors être muni d'une métrique lisse dont la courbure est partout positive et s'annule exactement sur les fibres de la fibration : en dehors des hypersurfaces Levi-plates isomorphes à un quotient de $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{S}^1$ il y en a d'autres qui sont l'image réciproque d'une courbe fermée simple générique de la base, et sous la régularité du théorème principal ce sont les seules.

Génériquement, les neuf points sont sur une unique cubique, et la géométrie de S_{p_1, \dots, p_9} dépend du diviseur $\sum p_i - 3O(1)$ de degré 0 en restriction à la cubique. Lorsque ce diviseur est d'ordre fini, la surface S_{p_1, \dots, p_9} est une fibration elliptique au-dessus de $\mathbb{C}P^1$ et se comporte comme dans le cas où les neuf points sont les points d'intersection de deux cubiques génériques. Lorsque ce diviseur est irrationnel et vérifie une *condition diophantienne*, V. Arnold [2] a démontré que le fibré normal de la relevée stricte \tilde{C} de la cubique dans S_{p_1, \dots, p_9} est linéarisable. Au voisinage de cette cubique il y a donc des hypersurfaces Levi-plates qui sont difféomorphes à un feuilletage linéaire par plans du tore \mathbb{T}^3 . Une métrique sur le fibré anti-canonique d'un voisinage de \tilde{C} doit s'annuler sur ces hypersurfaces Levi-plates. Cependant nous ne savons pas si il y a une métrique de classe C^2 globale sur $-K_{S_{p_1, \dots, p_9}}$ et de courbure positive. Dans le cas où le diviseur $\sum p_i - 3O(1)$ ne satisfait pas de condition diophantienne nous ne savons plus rien.

2. Mesures et courants harmoniques

Dans cette partie nous donnons un aperçu de la théorie des mesures harmoniques de L. Garnett sur un feuilletage.

Un *feuilletage par surfaces lisses* \mathcal{F} d'une variété M est un atlas d'homéomorphismes $\phi = (z, t): U \rightarrow \mathbf{D} \times T$ d'ouverts U de M recouvrant M dans le produit du disque unité $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C}, |z| < 1\}$ par une boule T de \mathbf{R}^q (appelée *espace transverse*) en sorte que les changements de cartes soient de la forme

$$\psi \circ \phi^{-1}: (z, t) \mapsto (z'(z, t), t'(t)),$$

où $z'(\cdot, t)$ est une famille de fonctions lisses de z dépendant continûment de t dans la topologie C^∞ .

Sur un feuilletage par surfaces lisses, soit $C^\infty(\mathcal{F})$ le faisceau des fonctions définies sur un ouvert U de M à valeurs réelles qui sont lisses le long des feuilles, et dont les dérivées à tout ordre le long des feuilles sont continues. Une k -forme lisse Ω sur \mathcal{F} ($k = 1, 2$) est une famille de k -formes sur chaque feuille de \mathcal{F} qui s'exprime dans une boîte $B \times T$ par

$$\Omega = \sum_{I=(i_1, \dots, i_k)} f_I dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_k}$$

où les fonctions f_I sont des fonctions de $C^\infty(\mathcal{F})$. De même, une métrique riemannienne lisse g est la donnée d'une famille de métriques sur chaque feuille de \mathcal{F} qui s'exprime dans une boîte $B \times T$ par

$$g = \sum_{i,j} g_{i,j} dz_i \otimes z_j$$

où les $g_{i,j}$ sont des fonctions de $C^\infty(\mathcal{F})$. On peut construire des métriques lisses à partir de partitions lisses de l'unité (voir [6]).

DÉFINITION 2.1. – Soient \mathcal{F} un feuilletage par surfaces lisses et g une métrique lisse de \mathcal{F} . Une mesure harmonique ν_g est une mesure de probabilité sur les boréliens de M telle que

$$\int_M \Delta_g f d\nu_g = 0$$

pour toute fonction lisse f sur \mathcal{F} .

THÉORÈME 2.2 [14]. – *Un feuilletage par surfaces lisses d'une variété compacte muni d'une métrique lisse admet une mesure harmonique. De plus, une mesure est harmonique si et seulement si elle se désintègre dans toute boîte comme une somme transverse de mesures le long des feuilles, qui sont le produit d'une fonction harmonique positive par le volume riemannien.*

Si \mathcal{F} est un feuilletage par surfaces lisses *orientées* muni d'une métrique lisse g , le théorème d'Ahlfors–Bers montre qu'il existe des homéomorphismes locaux

$$\phi = (z, t): U \rightarrow \mathbf{D} \times T$$

d'ouverts U de M recouvrant M à valeurs dans le produit du disque unité par l'espace transverse T dans lesquels la métrique g s'exprime par

$$g = f|dz|^2,$$

et qui préservent l'orientation des feuilles. Les changements de cartes sont alors des transformations

$$(z', t') = (z'(z, t), t'(t))$$

où z' dépend holomorphiquement de z . Ainsi, le feuilletage \mathcal{F} est muni d'une structure de *feuilletage par surfaces de Riemann*.

La notion de *courant harmonique* est plus intrinsèque sur un feuilletage par surfaces de Riemann. Un courant harmonique est un opérateur linéaire sur l'espace des $(1, 1)$ -formes lisses sur \mathcal{F} qui est strictement positif et $i\bar{\partial}\partial$ -fermé. Étant données une métrique conforme g et une mesure harmonique ν_g sur M , considérons le courant C_{ν_g} défini de manière duale sur l'espace des $(1, 1)$ -formes lisses de \mathcal{F} par

$$C_{\nu_g}(f dv_g) = \int_M f dv_g,$$

ν_g désignant le volume riemannien associé à g . Le courant C_{ν_g} est harmonique en vertu de l'identité

$$-2\Delta_g.dv_g = i\bar{\partial}\partial.$$

Par dualité tout courant harmonique est de la forme C_{ν_g} , où g est une métrique conforme et ν_g est une mesure harmonique.

Soit \mathcal{F} un feuilletage par surfaces de Riemann d'une variété compacte M . Dans une boîte $\mathbf{D} \times T$, une *transversale* \mathcal{T} est une partie fermée qui intersecte chaque plaque $\mathbf{D} \times t$ en un point. Une *mesure transverse* μ de \mathcal{F} est une famille de mesures $\{\mu_{\mathcal{T}}\}_{\mathcal{T}}$ sur chaque transversale de \mathcal{F} contenue dans une boîte. Nous demandons que lorsque $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, la restriction de la mesure $\mu_{\mathcal{T}_2}$ à \mathcal{T}_1 soit la mesure $\mu_{\mathcal{T}_1}$.

Un courant harmonique C induit une mesure transverse canonique de \mathcal{F} : dans une boîte $\mathbf{D} \times T$, il existe une mesure $\bar{\mu}$ sur T et une fonction positive $\varphi \in L^1(\text{leb} \otimes \bar{\mu})$ harmonique sur $\bar{\mu}$ -presque toute plaque $\mathbf{D} \times t$ telles que, pour toute $(1, 1)$ -forme lisse Ω sur \mathcal{F} à support dans $\mathbf{D} \times T$ nous ayons

$$C(\Omega) = \int_T \left\{ \int_{\mathbf{D} \times t} \varphi \Omega \right\} d\bar{\mu}(t).$$

La fonction φ et la mesure $\bar{\mu}$ ne sont pas déterminées de façon unique mais leur produit l'est et définit une mesure transverse μ : la projection $t : \mathbf{D} \times T \rightarrow T$ induit un homéomorphisme d'une transversale \mathcal{T} de $\mathbf{D} \times T$ dans T et nous définissons

$$\mu_{\mathcal{T}} = \varphi|_{\mathcal{T}} t_*^{-1} \bar{\mu}.$$

Le courant harmonique C peut alors être pensé comme l'intégration du produit d'une forme le long des feuilles par la mesure transverse μ .

PROPOSITION 2.3. – *La mesure transverse μ est quasi-invariante par le pseudo-groupe d'holonomie de \mathcal{F} et les dérivées au sens de Radon–Nikodym des transformations d'holonomie sont de logarithme borné.*

Démonstration. – La fonction φ n'est définie que modulo multiplication par une fonction positive constante le long des feuilles. La 1-forme $d \log \varphi$ est mesurable et définie sur μ -presque toute feuille L . Le lemme suivant montre que $d \log \varphi$ est bornée sur M . \square

LEMME 2.4 (Inégalité de Harnack). – Soit $g = \frac{|dz|}{1-|z|^2}$ la métrique hyperbolique sur le disque unité. Pour toute fonction harmonique positive $\varphi : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{R}$ et non nulle, nous avons

$$|d \log \varphi|_g \leq 1.$$

La démonstration de ce lemme est une reformulation de l'inégalité de Schwarz (voir [21]). Nous ne la reproduisons pas ici. Démontrons que $d \log \varphi$ est bornée. Remarquons que dans toute boîte holomorphe $\mathbf{D} \times T$, le lemme nous dit que la 1-forme $d \log \varphi$ est bornée sur $\rho \mathbf{D} \times I$ pour tout $\rho < 1$. Il suffit donc de prendre un recouvrement fini de M par des boîtes $\mathbf{D} \times T$ et de remarquer que pour $\rho < 1$ suffisamment proche de 1 les boîtes $\rho \mathbf{D} \times I$ recouvrent encore M .

La signification de la forme $d \log \varphi$ est la suivante. Soit $h : \mathcal{T}_1 \rightarrow \mathcal{T}_2$ une transformation d'holonomie d'une transversale \mathcal{T}_1 dans une transversale \mathcal{T}_2 . Elle provient de la donnée d'une application continue $p : [0, 1] \times \mathcal{T}_1 \rightarrow M$ telle que $p(0, t) = t$, $p(1, t) = h(t)$ et telle que l'image $p([0, 1] \times t)$ soit contenue dans la feuille passant par le point t . Nous avons alors

$$h_* \mu_{\mathcal{T}_1} = e^{-f} \mu_{\mathcal{T}_2},$$

où $f(t) = \int_{p([0,1] \times t)} d \log \varphi$. Pour vérifier cela il suffit de le faire localement dans une boîte où c'est évident. La proposition est démontrée.

Un feuilletage est dit *transversalement lipschitzien* si il est localement défini par des équations $\{t_i = cste\}$ telles que les changements de coordonnées $t_j = t_j(t_i)$ soient des transformations bilipschitziennes. Pour clore ce paragraphe, nous construisons des exemples de feuilletages par surfaces de Riemann transversalement lipschitziens de variétés de dimension 3, munis d'un courant harmonique absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue, avec une densité bornée supérieurement et inférieurement par des constantes strictement positives.

PROPOSITION 2.5. – Soient \mathcal{F} un feuilletage par surfaces de Riemann minimal d'une variété compacte de dimension 3 et \mathcal{C} un courant harmonique. Alors le pseudo-groupe d'holonomie de \mathcal{F} est conjugué à un sous-groupe du pseudo-groupe des homéomorphismes bilipschitziens d'un ouvert de \mathbf{R} dans un ouvert de \mathbf{R} , et la conjugaison envoie la mesure transverse μ sur la mesure de Lebesgue.

Démonstration. – Soit $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 \cup \dots \cup \mathcal{T}_r$ l'union d'un nombre fini de transversales qui rencontre toutes les feuilles. Le pseudo-groupe d'holonomie préserve le support de $\mu_{\mathcal{T}}$, si bien qu'il doit être total à cause de notre hypothèse de minimalité, et que de plus $\mu_{\mathcal{T}}$ n'a pas d'atome. Les homéomorphismes

$$T_k : t \in \mathcal{T}_k \simeq]0, 1[\mapsto \mu_{\mathcal{T}_k}([0, t]) \in]0, \mu_{\mathcal{T}_k}(\mathcal{T}_k)[$$

conjuguent le pseudo-groupe d'holonomie de \mathcal{F} à un sous-groupe des homéomorphismes d'un intervalle dans un autre de la forme

$$h(x) = cste + \int_0^x e^{f(u)} du,$$

où f est une fonction mesurable bornée. Ce sont exactement les homéomorphismes bilipschitziens d'un ouvert de \mathbf{R} dans un ouvert de \mathbf{R} . D'autre part, les homéomorphismes T_k envoient la mesure $\mu_{\mathcal{T}_k}$ sur la mesure de Lebesgue. \square

3. Fibré normal à une hypersurface Levi-plate

Soient \mathcal{F} un feuilletage par surfaces de Riemann *transversalement lipschitzien* d'une variété compacte M de dimension 3 et S une surface complexe.

DÉFINITION 3.1. – Une *immersion holomorphe* est une immersion topologique¹

$$L: M \rightarrow S$$

qui immerge chaque feuille holomorphiquement dans S . Une immersion holomorphe L est dite *transversalement bilipschitzienne* si il existe un recouvrement de M par des boîtes $\mathbf{D} \times I$ et une constante $C \geq 1$ tels que pour tout $(z, t) \in \mathbf{D} \times I$ et tout $t' \in I$, nous ayons

$$\frac{1}{C}|t - t'| \leq d_S(L(z, t), L(\mathbf{D} \times t')) \leq C|t - t'|,$$

où d_S est une distance sur S provenant d'une métrique riemannienne et $|\cdot|$ est la distance euclidienne sur l'intervalle I .

Remarque 3.2. – Lorsque le feuilletage est de classe C^1 , une application $\pi: M \rightarrow S$ de classe C^1 qui a une dérivée injective est un exemple d'immersion transversalement bilipschitzienne.

Pour étudier les courbes holomorphes des surfaces complexes, l'ingrédient principal est la *formule d'adjonction*, qui relie la géométrie de la surface à celle de la courbe et de son fibré normal. Dans cette partie nous établissons la formule d'adjonction pour une immersion holomorphe localement bilipschitzienne, et nous calculons son fibré normal. En particulier, nous démontrons que le fibré normal ne dépend ni de la surface, ni de la manière dont la variété M est immergée, mais seulement de la dynamique de \mathcal{F} (Proposition 3.4).

Soient \mathcal{O} le faisceau des fonctions $f: U \rightarrow \mathbf{C}$ définies sur un ouvert U de M , qui sont mesurables bornées et holomorphes sur *leb*-presque toute feuille, et \mathcal{O}^* le faisceau des fonctions qui sont l'exponentielle d'une fonction de \mathcal{O} . Un *fibré en droites holomorphe* est un élément de $H^1(M, \mathcal{O}^*)$.

Rappelons que le fibré canonique $K_{\mathcal{F}}$ de \mathcal{F} est le dual du fibré tangent $T\mathcal{F}$ de \mathcal{F} , et que le fibré canonique de S est le fibré $K_S = \Lambda^2 T^*S$. Le *fibré normal* \mathcal{N}_L d'une immersion holomorphe $L: M \rightarrow S$ est le quotient du fibré L^*T^*S par $T\mathcal{F}$. Ce sont des fibrés en droites holomorphes de $H^1(M, \mathcal{O}^*)$ car ils sont définis par des cocycles de fonctions $c: U \rightarrow \mathbf{C}^*$ *continues* et *holomorphes* le long des feuilles.

LEMME 3.3 (Formule d'adjonction). – $K_{\mathcal{F}} = \mathcal{N}_L \otimes L^*K_S$.

Démonstration. – Soit D une droite complexe dans \mathbf{C}^2 . À partir d'une forme volume ω sur \mathbf{C}^2 et d'un vecteur v de \mathbf{C}^2 , la restriction du produit intérieur $v \cdot \omega$ à D est une forme linéaire sur D , qui s'annule si seulement si v est dans D ou si ω est nulle. Le produit intérieur induit donc un isomorphisme naturel

$$\mathbf{C}^2/D \otimes \bigwedge^2 (\mathbf{C}^2)^* \rightarrow D^*.$$

Comme π est non dégénérée le long des feuilles, cet isomorphisme induit un isomorphisme

$$\mathcal{N}_L \otimes \pi^*K_S \rightarrow K_{\mathcal{F}}.$$

¹ Une immersion topologique est une application continue qui est localement injective.

Lorsque la forme volume ω et le champ de vecteurs v dépendent holomorphiquement d'un point sur une feuille, le produit intérieur est une 1-forme holomorphe le long de \mathcal{F} . La formule d'adjonction est démontrée. \square

Nous calculons à présent le fibré normal \mathcal{N}_L d'une immersion holomorphe *transversalement bilipschitzienne*. En particulier, nous montrons qu'il ne dépend que de \mathcal{F} , mais pas de S ni de la manière dont M est immergée dans S (Proposition 3.4).

Dans une carte

$$\phi = (z, t) : U \rightarrow \mathbf{D} \times I$$

de \mathcal{F} , considérons le "champ de vecteurs normal" $\frac{\partial}{\partial t}$. Il peut être interprété comme une *dérivation* de l'espace des fonctions localement constantes le long des feuilles et transversalement lipschitziennes à valeurs dans l'espace des fonctions mesurables bornées sur *leb*-presque toute feuille. Dans une autre carte $\psi = (z', t') : U' \rightarrow \mathbf{D} \times I$, nous avons sur *leb*-presque toute feuille

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{dt'}{dt} \frac{\partial}{\partial t'}$$

Le cocycle

$$c(\phi, \psi) = \frac{dt'}{dt}$$

définit un fibré en droites holomorphe N de $H^1(M, \mathcal{O}^*)$, dont les sections locales holomorphes sont $f \frac{\partial}{\partial t}$, où f est une fonction de \mathcal{O} .

PROPOSITION 3.4. – *Soient S une surface complexe et $L : M \rightarrow S$ une immersion holomorphe transversalement bilipschitzienne. Alors la "différentielle transverse" de L induit un isomorphisme de fibré en droites holomorphe de N dans \mathcal{N}_L .*

Démonstration. – Nous démontrons dans un premier temps que M admet un atlas feuilleté qui munit \mathcal{F} d'une structure de feuilletage par surfaces de Riemann *lipschitziennes*, pour lequel L est bilipschitzienne.

Au voisinage de tout point de M il existe une boîte $\mathbf{D} \times I$ de \mathcal{F} et des coordonnées holomorphes $(x, y) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{D} \times \mathbf{D}$ définies sur un voisinage \mathcal{U} de $L(\mathbf{D} \times I)$ telles que :

- (i) Pour tout $(z, t) \in \mathbf{D} \times I$, $L(z, t) = (z, y(z, t))$.
- (ii) Il existe une constante $C \geq 1$ telle que pour tout $(z, t) \in \mathbf{D} \times I$ et tout $t' \in I$,

$$\frac{1}{C} |t - t'| \leq d(L(z, t), L(\mathbf{D} \times t')) \leq C |t - t'|,$$

la distance d étant la distance euclidienne standard sur le bidisque $\mathbf{D} \times \mathbf{D}$. Par compacité, nous pouvons recouvrir M par un nombre fini des boîtes $\mathbf{D} \times I$. Nous choisissons $\rho < 1$ en sorte que les boîtes $\rho \mathbf{D} \times I$ recouvrent encore M . Soient (z, t) et (z', t') les coordonnées de deux de ces boîtes et $(x, y), (x', y')$ les coordonnées holomorphes de S à valeurs dans le bidisque pour lesquelles nous avons

$$L(z, t) = (z, y(z, t)), \quad L(z', t') = (z', y'(z', t')).$$

Nous prétendons que ces coordonnées munissent \mathcal{F} d'une structure lipschitzienne, c'est-à-dire que les changements de cartes sont des transformations lipschitziennes d'un ouvert de $\rho \mathbf{D} \times I$ dans un ouvert de $\rho \mathbf{D} \times I$. \square

LEMME 3.5. – Soient $0 < \rho < 1$, $0 < \delta < \frac{1-\rho}{2}$, et deux fonctions holomorphes $f : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$ et $g : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{D}$. Si pour tout point p du graphe $\text{graph}(f)$ de f , nous avons

$$d(p, \text{graph}(g)) \leq \delta,$$

alors pour tout $z \in \rho\mathbf{D}$,

$$|f(z) - g(z)| \leq \delta \left(1 + \left(\frac{2}{1-\rho} \right)^2 \right).$$

Démonstration. – Soient $\delta < \delta' < (1-\rho)/2$ et $z \in \rho\mathbf{D}$. Par hypothèse il existe $z' \in \mathbf{D}$ tel que

$$|(z, f(z)) - (z', g(z'))| \leq \delta'.$$

Ceci nous donne les deux inégalités

$$|z - z'| \leq \delta', \quad |f(z) - g(z')| \leq \delta'.$$

Ainsi les deux points z et z' sont de norme inférieure à $(1+\rho)/2$. Puisque $|g|$ est bornée par 1, la formule de Cauchy montre que $|g'|$ est bornée par $(\frac{2}{1-\rho})^2$ sur le disque $\frac{1+\rho}{2}\mathbf{D}$. Nous obtenons

$$|g(z) - g(z')| \leq \left(\frac{2}{1-\rho} \right)^2 |z - z'|$$

et

$$|f(z) - g(z)| \leq \delta' \left(1 + \left(\frac{2}{1-\rho} \right)^2 \right).$$

Le lemme est démontré en faisant tendre δ' vers δ . \square

Observons que la coordonnée z' s'exprime en fonction de z et t par la formule

$$z' = x'(z, y(z, t)),$$

où x' est une fonction holomorphe des deux variables x et y . En vertu de (ii) et du lemme, pour tous couples $(z, t), (z', t') \in \rho\mathbf{D} \times I$, nous avons

$$|y(z, t) - y(z', t')| \leq |y(z, t) - y(z, t')| + |y(z, t') - y(z', t')| \leq C'(|t - t'| + |z - z'|),$$

où $C' = \max(C, (\frac{2}{1-\rho})^2)$. La fonction y est donc une fonction lipschitzienne des variables z et t , et la coordonnée z' une fonction lipschitzienne des variables z et t , puisque x' est analytique. Nous avons démontré que les cartes (z, t) munissent \mathcal{F} d'une structure de feuilletage par surfaces de Riemann lipschitzien, et que l'application L est lipschitzienne.

Une application lipschitzienne d'un ouvert de \mathbf{R}^n dans un ouvert de \mathbf{R}^m est dérivable presque partout. Dans une carte holomorphe et lipschitzienne (z, t) de \mathcal{F} , considérons la section $dL \cdot \frac{\partial}{\partial t}$ du fibré L^*TS et sa projection $[dL \cdot \frac{\partial}{\partial t}]$ dans \mathcal{N}_L . Dans une autre carte holomorphe et lipschitzienne (z', t') de \mathcal{F} nous avons

$$\left[dL \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right] = \frac{dt'}{dt} \left[dL \cdot \frac{\partial}{\partial t'} \right]$$

presque partout. Pour démontrer la proposition, il nous suffit donc de démontrer que $[dL \cdot \frac{\partial}{\partial t}]$ est une section holomorphe sur presque toute feuille et que le logarithme de sa norme est borné. Ceci découle du lemme suivant.

LEMME 3.6. – Soit $Hol(\mathbf{D}, \mathbf{C})$ l'espace de Banach des fonctions holomorphes bornées du disque unité \mathbf{D} dans \mathbf{C} muni de la norme uniforme. Alors pour tout chemin lipschitzien $y: I \rightarrow Hol(\mathbf{D}, \mathbf{C})$ il existe une application $y': I \rightarrow Hol(\mathbf{D}, \mathbf{C})$ mesurable et bornée telle que pour tout (z, t) de $\mathbf{D} \times I$,

$$y_t(z) = y_0(z) + \int_0^t y'_u(z) du.$$

Admettons ce lemme. Considérons l'expression

$$L(z, t) = (z, y(z, t)).$$

La courbe $t \in I \mapsto y(\cdot, t) \in Hol(\rho\mathbf{D}, \mathbf{C})$ est lipschitzienne d'après 3.5. Puisque L est transversalement bilipschitzienne, il existe une constante D telle que pour tout $z \in \mathbf{D}$ et tous $t, t' \in I$,

$$|y(z, t) - y(z, t')| \geq D|t - t'|.$$

Ainsi la dérivée y'_t donnée par le lemme 3.6 vérifie en tout z et tout t

$$D \leq |y'_t| \leq C'.$$

Comme nous avons

$$\left[dL \cdot \frac{\partial}{\partial t} \right] = y'_t \frac{\partial}{\partial y},$$

la proposition est démontrée.

Démonstration de 3.6. – Pour tout t de I , développons les fonctions y_t en séries de Laurent :

$$y_t(z) = \sum y_n(t) z^n.$$

Soit $\rho < 1$. La formule de Cauchy s'écrit

$$y_n(t) = \int_0^1 \frac{y_t(\rho e^{2\pi i \theta})}{\rho^n e^{2\pi i n \theta}} d\theta.$$

Ainsi pour tout $n \geq 0$ la fonction $y_n: I \rightarrow \mathbf{C}$ est lipschitzienne de constante de Lipschitz $lip(y_n) \leq \rho^{-n} lip(y)$. En faisant tendre ρ vers 1, nous obtenons

$$lip(y_n) \leq lip(y).$$

Les fonctions y_n sont donc l'intégrale d'une fonction $y'_n \in L^\infty(I)$ bornée par $lip(y)$, c'est-à-dire que pour tout $t \in I$

$$y_n(t) = y_n(0) + \int_0^1 y'_n(u) du.$$

Posons

$$y'_t(z) = \sum y'_n(t)z^n.$$

Comme les fonctions y'_n sont bornées par $lip(y)$, cette série converge uniformément sur $K \times I$ pour tout compact $K \subset \mathbf{D}$. Nous avons donc pour tout point $z \in \mathbf{D}$

$$y_t(z) = y_0(z) + \int_0^t y'_u(z) du.$$

Comme y est lipschitzienne, ceci montre que $|y'_t|$ est bornée pour presque tout t par $lip(y)$ et achève la démonstration du lemme. \square

4. Classe normale

La classe de Chern d'un fibré en droites holomorphe $E \rightarrow \Sigma$ au-dessus d'une surface de Riemann compacte s'exprime comme l'intégrale de la forme courbure d'une métrique hermitienne de E normalisée par un facteur $1/2\pi$. La courbure d'une métrique hermitienne $|\cdot|$ de E est la $(1, 1)$ -forme définie par

$$\text{courbure}(|\cdot|) = i\bar{\partial}\partial \log |s|,$$

où s est une section holomorphe locale ne s'annulant pas. Cette forme est bien définie puisque le logarithme de la norme d'une fonction holomorphe est une fonction harmonique.

A. Candel [6] a étendu cette définition à un feuilletage, en donnant un sens à la classe de Chern d'un fibré en droites holomorphe contre un courant harmonique. Soit \mathcal{F} un feuilletage par surfaces de Riemann transversalement lipschitzien d'une variété compacte M de dimension 3. Soit $C^\infty(\mathcal{F}, leb)$ le faisceau des fonctions mesurables bornées sur leb -presque toute feuille, lisses sur leb -presque toute feuille et dont les dérivées le long des feuilles à tout ordre sont bornées. Un fibré en droites holomorphe de $H^1(M, \mathcal{O}^*)$ possède des métriques hermitiennes de $C^\infty(\mathcal{F}, leb)$ puisqu'il existe des partitions lisses de l'unité (voir [6]). Deux de ces métriques diffèrent d'une fonction e^f où $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction de $C^\infty(\mathcal{F}, leb)$. Leur courbure diffèrent alors additivement l'une de l'autre de la $(1, 1)$ -forme $i\bar{\partial}\partial f$.

LEMME 4.1. – Soit C un courant harmonique absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue. Pour toute fonction f de $C^\infty(\mathcal{F}, leb)$, nous avons

$$C(i\bar{\partial}\partial f) = 0.$$

Démonstration. – En utilisant une partition lisse de l'unité, écrivons f comme une somme finie de fonctions g dont les supports sont contenus dans des boîtes $\mathbf{D} \times I$. Considérons alors une famille de noyaux p_k de la forme

$$p_k(x + iy, t) = q_k(x)q_k(y)q_k(t)$$

où $q_k: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction lisse à valeurs positives, dont le support est contenu dans le segment $] -1/k, 1/k[$ et dont l'intégrale est égale à 1. La suite de fonctions lisses

$$g_k(z, t) = \int_{\mathbf{D} \times I} p_k(z - w, t - u)g(z, t) dw d\bar{w} du$$

converge dans $L^1(\text{leb})$ vers la fonction g , et leurs dérivées $\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} g_k$ convergent dans $L^1(\text{leb})$ vers $\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial z^\alpha \partial \bar{z}^\beta} g$. Le lemme en découle puisque, g_k étant lisse pour tout k , nous avons $C(i\bar{\partial}\partial g_k) = 0$. \square

DÉFINITION 4.2 (A. Candel). – Soit C un courant harmonique absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue. La classe de Chern–Candel d’un fibré en droites holomorphe E de $H^1(M, \mathcal{O}^*)$ est définie par

$$c_1(E, C) = \frac{1}{2\pi} C(\text{courbure}(|\cdot|)),$$

où $|\cdot|$ est une métrique hermitienne de E de $C^\infty(\mathcal{F}, \text{leb})$.

Au paragraphe 3 nous avons construit le fibré normal N , et nous avons montré qu’il est le fibré normal de toute immersion holomorphe localement bilipschitzienne de M dans une surface complexe.

DÉFINITION 4.3. – Soit \mathcal{F} un feuilletage par surfaces de Riemann transversalement lipschitzien d’une variété compacte M de dimension 3. La classe normale $n(C)$ d’un courant harmonique absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue est la classe de Chern–Candel du fibré normal N .

En appendice, nous interprétons la classe normale comme un réel positif qui mesure à quelle vitesse les feuilles de \mathcal{F} convergent les unes vers les autres. Nous ne l’avons pas incorporé ici car nous n’en avons pas besoin pour la démonstration du théorème.

Remarque 4.4. – Lorsque le fibré E de $H^1(M, \mathcal{O}^*)$ est continu, c’est-à-dire qu’il est représenté par un cocycle de fonctions continues et holomorphes le long des feuilles, la classe de Chern–Candel de E contre un courant harmonique C est définie sans ambiguïté par

$$c_1(E, C) = \frac{1}{2\pi} C(\text{courbure}(|\cdot|)),$$

où $|\cdot|$ est une métrique hermitienne lisse de E (au sens où la norme d’une section holomorphe continue de E est une fonction de $C^\infty(\mathcal{F})$). Nous n’avons donc pas besoin de supposer le courant harmonique absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue dans ce cas.

DÉFINITION 4.5. – Soit \mathcal{F} est un feuilletage par surfaces de Riemann d’une variété compacte. La caractéristique d’Euler $\chi(C)$ d’un courant harmonique C est la classe de Chern–Candel du fibré tangent de \mathcal{F} . Elle est bien définie puisque le fibré tangent est un fibré en droites holomorphe continu.

Le résultat suivant est le point-clé dont nous aurons besoin pour la preuve du Théorème 1.2.

PROPOSITION 4.6. – Soient \mathcal{F} un feuilletage par surfaces de Riemann transversalement lipschitzien d’une variété compacte de dimension 3 et C un courant harmonique absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue avec une densité bornée supérieurement et inférieurement par des constantes strictement positives. Si l’ensemble des feuilles sphériques est de C -mesure nulle, alors $n(C) \leq -\chi(C)$.

S. Frankel [13] définit l’action d’un courant harmonique C par

$$A(C) := \int_M |d \log \varphi|_g^2 d\nu_g,$$

où g est une métrique conforme sur \mathcal{F} et ν_g est la mesure harmonique associée à C et g . L'intégrale converge puisque $d \log \varphi$ est bornée, d'après les inégalités de Harnack. L'action mesure donc à quel point la mesure transverse μ associée à C est loin d'être invariante par l'holonomie.

LEMME 4.7. – Si C est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue avec une densité bornée supérieurement et inférieurement par des constantes strictement positives, alors $A(C) = \pi n(C)$.

Démonstration. – Étant absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, la mesure harmonique ν_g s'exprime dans des coordonnées $(z, t) \in \mathbf{D} \times I$ de \mathcal{F} par

$$\nu_g = \varphi dv_g \otimes dt,$$

où φ est une fonction harmonique sur presque toute plaque $\mathbf{D} \times t$ pour la mesure de Lebesgue. La fonction $\log \varphi$ est alors dans $C^\infty(\mathcal{F}, \text{leb})$, puisque la densité φ est bornée supérieurement et inférieurement par des constantes strictement positives.

Considérons la métrique hermitienne $|\cdot|$ de N définie par la famille de fonctions de $C^\infty(\mathcal{F}, \text{leb})$:

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \right| = \varphi.$$

La courbure de cette métrique s'exprime par la formule

$$\text{courbure}(|\cdot|) = i\bar{\partial}\partial \log \varphi.$$

Mais puisque φ est harmonique le long des feuilles, nous avons

$$2|d \log \varphi|_g^2 dv_g = i\bar{\partial}\partial \log \varphi,$$

ce qui montre le lemme. \square

Dans [13], S. Frankel démontre que l'action est majorée par l'opposé de la caractéristique d'Euler–Poincaré multipliée par π , pour un feuilletage qui est suspendu au-dessus d'une surface de Riemann compacte. Nous étendons sa démonstration à tout feuilletage qui n'admet pas de feuilles sphériques en utilisant les techniques qu'É. Ghys développe dans [15]. En fait, le cadre optimal est celui d'une lamination compacte par surfaces de Riemann; en particulier, nous n'avons pas besoin du fait que le courant harmonique soit absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue (voir Remarque 4.4).

PROPOSITION 4.8. – Si l'ensemble des feuilles sphériques est C -négligeable, alors

$$A(C) \leq -\pi \chi(C).$$

Démonstration. – Décomposons M en trois parties disjointes :

$$M = M_{sph} \cup M_{par} \cup M_{hyp}$$

où M_{sph} (resp. M_{par} , M_{hyp}) est la réunion des feuilles sphériques (resp. paraboliques, hyperboliques). Le courant C se décompose en la somme

$$C = C_{par} + C_{hyp}$$

de deux courants harmoniques dont les supports sont respectivement inclus dans M_{par} et M_{hyp} , puisque M_{sph} est de C -mesure nulle. Comme les supports de C_{par} et C_{hyp} sont disjoints, nous avons la formule

$$A(C) = A(C_{par}) + A(C_{hyp}).$$

La caractéristique d'Euler–Poincaré étant additive, il suffit donc de démontrer l'inégalité de la proposition pour C_{par} et C_{hyp} .

Les fonctions φ définissent des fonctions harmoniques positives sur le revêtement universel de C_{par} -presque toute feuille. Comme une fonction harmonique positive sur \mathbf{C} est constante, d'une part $A(C_{par}) = 0$, et d'autre part le courant C_{par} est un *cycle feuilleté* (voir [23]). L'inégalité découle alors d'un théorème d'A. Connes [10], selon lequel $\chi(C)$ est négative lorsque C est un cycle feuilleté dont le support ne contient pas de feuille sphérique.

La démonstration de l'inégalité dans le cas du courant C_{hyp} repose sur les méthodes développées dans [15]. Soit g_{hyp} la métrique sur M_{hyp} qui sur le revêtement universel $\mathbf{D} \rightarrow L$ d'une feuille de M_{hyp} s'exprime par $g_{hyp} = \frac{|dz|^2}{1-|z|^2}$. Si g est une métrique lisse sur \mathcal{F} écrivons

$$g_{hyp} = e^f g$$

sur le support de C_{hyp} . Dans [15] (p. 55), É. Ghys démontre que :

- (i) f est une fonction semi-continue supérieurement,
- (ii) $i\bar{\partial}\partial f$ est une $(1, 1)$ -forme mesurable bornée et $C_{hyp}(i\bar{\partial}\partial f) = 0$.

Par définition,

$$\text{courbure}(g_{hyp}) = \text{courbure}(g) + i\bar{\partial}\partial f,$$

et d'après (ii),

$$\chi(C_{hyp}) = -\frac{1}{2\pi} C_{hyp}(\text{courbure}(g_{hyp})).$$

Considérons la mesure $\nu_{g_{hyp}} = e^f \nu_g$ sur M . Comme $\text{courbure}(g_{hyp}) = -2 d\nu_{g_{hyp}}$, nous avons

$$\chi(C_{hyp}) = -\frac{1}{\pi} \int_M d\nu_{g_{hyp}}.$$

Occupons-nous maintenant de $A(C_{hyp})$. D'après le Lemme 2.4, nous avons C_{hyp} -presque partout

$$|d \log \varphi|_{g_{hyp}}^2 \leq 1.$$

La fonction $|d \log \varphi|_{g_{hyp}}^2$ est donc $\nu_{g_{hyp}}$ -intégrable ; comme de surcroît

$$|d \log \varphi|_{g_{hyp}}^2 = e^{-f} |d \log \varphi|_g^2,$$

nous en déduisons

$$A(C_{hyp}) = \int_M |d \log \varphi|_{g_{hyp}}^2 d\nu_{g_{hyp}} \leq -\pi \chi(C_{hyp})$$

et la proposition est démontrée. \square

5. Démonstration du théorème principal

Comme nous l'avons dit à la Remarque 1.5, nous démontrons le théorème sous l'hypothèse plus faible que le feuilletage est transversalement lipschitzien (plutôt que de classe C^1) et l'immersion holomorphe est transversalement bilipschitzienne (plutôt qu'une immersion de classe C^1).

Soit \mathcal{F} un feuilletage par surfaces de Riemann transversalement lipschitzien d'une variété compacte de dimension 3 munie d'un courant harmonique C absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue avec une densité bornée supérieurement et inférieurement par des constantes strictement positives. Soit S une surface complexe dont le fibré anti-canonique est muni d'une métrique de classe C^2 dont la courbure Ω est positive ou nulle. Enfin, soit

$$L : M \rightarrow S$$

une immersion holomorphe localement bilipschitzienne. Il s'agit de démontrer que soit \mathcal{F} est un quotient du feuilletage horizontal de $\mathbf{C}P^1 \times \mathbf{S}^1$, soit l'image de L est tangente au lieu où la courbure Ω s'annule.

Dans le cas où \mathcal{F} possède une feuille sphérique, le théorème de stabilité de Reeb montre qu'il est un quotient du feuilletage horizontal de $\mathbf{C}P^1 \times \mathbf{S}^1$.

Nous allons démontrer que si \mathcal{F} n'a pas de feuille sphérique alors son image par L est tangente au lieu où Ω s'annule, ce qui démontrera le théorème. Écrivons la formule d'adjonction et prenons les classes de Chern–Candel :

$$-\chi(C) = c_1(\mathcal{N}_L, C) + c_1(L^*K_S, C).$$

D'après la Proposition 3.4, \mathcal{N}_L est isomorphe à N , ce qui donne

$$c_1(-L^*K_S, C) = n(C) + \chi(C).$$

D'après la Proposition 4.6, le terme de droite est négatif. En ce qui concerne le terme de gauche, il est donné par la formule

$$c_1(-L^*K_S, C) = \frac{1}{2\pi} C(L^*\Omega).$$

Comme la forme Ω est positive, il est positif. Ainsi les deux termes sont nuls et

$$C(L^*\Omega) = 0$$

ce qui démontre que \mathcal{F} est tangent au lieu où Ω s'annule sur le support de C , c'est-à-dire partout. Le théorème est démontré.

Nous concluons par la démonstration du Corollaire 1.3. Il s'agit de démontrer qu'il n'y a pas d'immersion holomorphe $L : \mathbf{C}P^1 \times \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{C}P^2$. Dans ce cas, nous aurions une courbe rationnelle C de $\mathbf{C}P^2$ (avec peut-être des points multiples) dont le fibré normal est de classe de Chern nulle. Écrivons la formule d'adjonction pour les courbes holomorphes :

$$K_C = \mathcal{N}_{C, \mathbf{C}P^2} \otimes K_{\mathbf{C}P^2},$$

et prenons les classes de Chern "classiques". Comme la caractéristique d'Euler de la sphère est 2 et que $K_{\mathbf{C}P^2} = 3O(-1)$, nous obtenons

$$2 = 3c_1(O(1)|_C),$$

ce qui est une contradiction, puisque les classes de Chern sont des nombres entiers. Le corollaire est donc démontré.

Remerciements

Je remercie Étienne Ghys de m'avoir soumis ce problème et encouragé par de nombreuses conversations, et l'arbitre pour ses remarques éclairantes. Ce travail a été réalisé en partie lors de mon séjour à l'UNAM (Cuernavaca), où j'ai bénéficié d'une excellente atmosphère de travail.

Appendice A

Nous donnons ici une interprétation de la classe normale en termes de la dynamique du feuilletage : elle mesure à quelle vitesse les feuilles convergent les unes vers les autres en moyenne.² Soient \mathcal{F} un feuilletage par surfaces de Riemann d'une variété compacte M de dimension 3, C un courant harmonique, g une métrique riemannienne lisse sur \mathcal{F} et ν_g la mesure harmonique associée à C . Considérons l'ensemble des chemins $\gamma : [0, \infty[\rightarrow M$ dont l'image est contenue dans une feuille de \mathcal{F} . Il est naturellement muni d'une dynamique engendrée par le semi-groupe S de transformations $S_t : \Gamma \rightarrow \Gamma$ définies pour tout $t \geq 0$ et $s \geq 0$ par

$$S_t(\gamma)(s) = \gamma(t + s).$$

L. Garnett a construit à partir de ν_g une mesure naturelle $\overline{\nu}_g$ sur Γ invariante par S , permettant de penser à un élément de Γ comme à un chemin brownien le long des feuilles de \mathcal{F} . Fixons un point x de X et regardons l'ensemble Γ_x des chemins γ de Γ tels que $\gamma(0) = x$. Soit w_x la mesure de Wiener sur Γ_x , construite à l'aide du noyau de la chaleur $p(x, y, t)$ sur le revêtement universel \tilde{L}_x de L_x , en imposant la relation

$$w_x(\gamma(t_i) \in B_i) = \int_{B_1 \times \dots \times B_k} \prod_{1 \leq i \leq k} p(y_{i-1}, y_i, t_i - t_{i-1}) dv_g(y_1) \dots dv_g(y_k),$$

pour toute famille de Boréliens B_1, \dots, B_k de \tilde{L}_x et toute famille de réels positifs t_1, \dots, t_k . En intégrant ces mesures à partir de la mesure ν_g on forme une mesure finie sur Γ par la formule

$$\overline{\nu}_g(B) = \int_X w_x(B \cap \Gamma_x) d\nu_g(x).$$

L. Garnett démontre que $\overline{\nu}_g$ est invariante par le semi-groupe S .

Supposons que \mathcal{F} est transversalement lipschitzien et que ν_g est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit $|\cdot|$ une métrique de N de $C^\infty(\mathcal{F}, \text{leb})$; considérons pour tout $t \geq 0$ la fonctionnelle :

$$H_t(\gamma) = -\log |h'_{|\gamma|_{[0,t]}}|,$$

où $|h'_{|\gamma|_{[0,t]}}|$ est la norme de la dérivée de l'holonomie le long du chemin $\gamma|_{[0,t]}$. En fait dans une carte feuilletée $\mathbf{D} \times I$ la 1-forme

$$\alpha = d \log \left| \frac{\partial}{\partial t} \right|$$

² Après avoir soumis cet article, nous avons pris connaissance de la théorie des cocycles sur un feuilletage développée par A. Candel [7], de laquelle le résultat de cet appendice découle.

est fermée, mesurable et bornée. De plus elle ne dépend pas du système de coordonnées choisi. Nous avons alors

$$H_t(\gamma) = - \int_{\gamma|_{[0,t]}} \alpha.$$

En utilisant le fait que la géométrie des feuilles est uniformément bornée et les estimées de Malliavin [18] sur la décroissance exponentielle du noyau de la chaleur, on démontre que H_t est $\overline{\nu}_g$ -intégrable [11].

PROPOSITION A.1. – *Pour tout $t \geq 0$,*

$$\int H_t d\overline{\nu}_g = \pi t n(C).$$

La classe normale mesure donc avec quelle vitesse les feuilles convergent les unes vers les autres en moyenne.

Démonstration. – Prouvons déjà que la moyenne de H_t est une fonction linéaire de t . Étudions la famille de fonctions $f_t : X \rightarrow \mathbf{R}$ définie pour tout temps $t \geq 0$ par

$$f_t(x) = \int_{\tilde{L}_x} p(x, y, t) \left\{ \int_x^y \alpha \right\} dv_g(y).$$

Pout toute fonction continue F sur M , il existe une unique famille de fonctions F_t définies pour $t \geq 0$, dont la restriction à chaque feuille de \mathcal{F} est solution de l'équation de la chaleur $\Delta F_t = \frac{\partial F_t}{\partial t}$ avec pour condition initiale $F_0 = F$. Garnett ([14], p. 288, Fact 1) démontre que F_t est continue pour tout temps $t \geq 0$ en utilisant l'expression

$$F_t(x) = \int_{\tilde{L}_x} p(x, y, t) F(y) dv_g(y).$$

Elle démontre aussi que le semi-groupe S_t^* défini par $S_t^* F = F_t$ préserve la mesure ν_g , c'est-à-dire que

$$\int_M S_t^* F d\nu_g = \int_M F d\nu_g.$$

La démonstration de L. Garnett s'étend ici pour montrer que f_t est continue. De plus en utilisant la formule

$$p(x, y, t + s) = \int_{\tilde{L}_x} p(x, z, t) p(z, y, s) dv_g(z),$$

nous avons

$$f_{t+s}(x) = \int_{\tilde{L}_x} p(x, z, t) \left\{ \int_{\tilde{L}_x} p(z, y, s) \left\{ \int_x^y \alpha \right\} dv_g(y) \right\} dv_g(z).$$

En décomposant l'intégrale $\int_x^y \alpha = \int_x^z \alpha + \int_z^y \alpha$, nous trouvons la relation

$$f_{t+s} = f_t + S_t^* f_s.$$

Ainsi nous en déduisons que $M_t = \int_M f_t d\nu_g = -\int_\Gamma H_t d\bar{\nu}_g$ vérifie $M_{t+s} = M_t + M_s$.

Pour démontrer la proposition, il nous suffit de calculer la dérivée $\frac{dM_t}{dt}$ au temps $t = 0$. Fixons un point x_0 dans M . Pour tout x de \tilde{L}_{x_0} nous avons

$$f_t(x) = \int_x^{x_0} \alpha + \int_{\tilde{L}_{x_0}} p(x, y, t) \left\{ \int_{x_0}^y \alpha \right\} d\nu_g(y).$$

Le premier terme à droite ne dépend pas du temps et le second terme est la solution de l'équation de la chaleur sur \tilde{L}_{x_0} avec pour condition initiale la fonction $x \mapsto \int_{x_0}^x \alpha$. Nous en déduisons

$$\left. \frac{df_t}{dt} \right|_{t=0} = \Delta_g \log \left| \frac{\partial}{\partial t} \right|.$$

Nous avons donc

$$\frac{dM_t}{dt} = \int_M \Delta_g \log \left| \frac{\partial}{\partial t} \right| d\nu_g = -\frac{1}{2} C(\text{courbure}(|\cdot|)),$$

et la proposition est démontrée. \square

RÉFÉRENCES

- [1] AHLFORS L., Zur Theorie der Überlagerungsflächen, *Acta Math.* **65**, 157–194.
- [2] ARNOLD V., Équations différentielles ordinaires, vol. 2, Mir, Moscow.
- [3] BERNDTSSON B., SIBONY N., The $\bar{\partial}$ -equation on a positive current, *Invent. Math.* **147** (2) (2002) 371–428.
- [4] CAMACHO C., LINS NETO A., SAD P., Minimal sets of foliations on complex projective spaces, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **68** (1988) 187–203.
- [5] BONATTI C., LANGEVIN R., MOUSSU R., Feuilletages de $CP(n)$: de l'holonomie hyperbolique pour les minimaux exceptionnels, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **75** (1992) 123–134.
- [6] CANDEL A., Uniformization of surface laminations, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **26** (4) (1993) 489–516.
- [7] CANDEL A., The harmonic measures of Lucy Garnett, *Adv. Math.* **176** (2) (2003) 187–247.
- [8] CAO J., SHAW M.C., WANG L., Estimates for the $\bar{\partial}$ -Neumann problem and nonexistence of C^2 Levi-flat hypersurfaces in CP^n , *Math. Z.* (2004).
- [9] CERVEAU D., Minimaux des feuilletages algébriques de $CP(n)$, *Ann. Inst. Fourier* **43** (5) (1993) 1535–1543.
- [10] CONNES A., A survey of foliations and operator algebras, in: Proc. of Symp. Pure Math., vol. **38**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1982, pp. 521–628.
- [11] DEROIN B., Laminations par variétés complexes, Thèse ENS Lyon, 2003.
- [12] DEROIN B., Laminations dans les espaces projectifs complexes, math.CV/0410376, 2004.
- [13] FRANKEL S., Harmonic analysis of surface group representations to $Diff(S^1)$ and Milnor type inequalities, Prépublication de l'École Polytechnique 1125, 1996.
- [14] GARNETT L., Foliations, the ergodic theorem and Brownian motion, *J. Funct. Anal.* **51** (3) (1983) 285–311.

- [15] GHYS É., Gauss–Bonnet theorem for 2-dimensional foliations, *J. Funct. Anal.* **77** (1) (1988) 51–59.
- [16] HURDER S., MITSUMATSU Y., The intersection product of transverse invariant measures, *Indiana Univ. Math. J.* **40** (4) (1991) 1169–1183.
- [17] IORDAN A., On the non-existence of smooth Levi-flat hypersurfaces in CP^n , in : *Proceedings of the Memorial Conference of K. Oka’s centennial birthday on Complex Analysis in Several Variables, Kyoto, Nara, 2001.*
- [18] MALLIAVIN P., Diffusions et géométrie différentielle globale, Centro Internazionale Matematico Estivo, Varenne, France, août 1975.
- [19] MAÑÉ R., SAD P., SULLIVAN D., On the dynamics of rational maps, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **16** (2) (1983) 193–217.
- [20] OHSAWA T., SIBONY N., Kähler identity on Levi-flat manifolds and application to the embedding, *Nagoya Math. J.* **158** (2000) 87–93.
- [21] RUDIN W., *Analyse réelle et complexe*, Masson, Paris.
- [22] SIU Y.-T., $\bar{\partial}$ -Regularity for weakly pseudoconvex domains in compact hermitian symmetric spaces with respect to invariant metrics, *Ann. of Math.* **156** (2) (2002) 595–621.
- [23] SULLIVAN D., Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds, *Invent. Math.* **36** (1976) 225–255.
- [24] SULLIVAN D., THURSTON W., Extending holomorphic motions, *Acta Math.* **157** (3–4) (1986) 243–257.

(Manuscrit reçu le 10 novembre 2003 ;
 accepté, après révision, le 15 octobre 2004.)

Bertrand DEROIN
 Department of Mathematics,
 University of Toronto,
 Toronto, Ontario, Canada M5S 3G3
 E-mail : bderoin@math.toronto.edu