Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 35, 2002, p. 575 à 603.

DESCENTE ÉTALE DES F-ISOCRISTAUX SURCONVERGENTS ET RATIONALITÉ DES FONCTIONS L DE SCHÉMAS ABÉLIENS

PAR JEAN-YVES ÉTESSE [1]

RÉSUMÉ. – Pour k un corps de caractéristique $p > 0$ et S un k-schéma lisse et séparé trois types de résultats sont prouvés :
(1) la descente étale des F-isocristaux surconvergents sur S ;
(2) la pleine fidélité de foncteurs de restriction à un ouvert dense de S, entre F-isocristaux ;
(3) l'expression cohomologique p-adique de la fonction L d'un schéma abélien sur S et sa rationalité.

ABSTRACT. – Let k be a field of characteristic $p > 0$ and S a smooth separated k-scheme; three types of results are proved:
(1) etale descent for overconvergent F-isocrystals on S;
(2) full faithfulness of restriction functors to a dense open subscheme of S, between F-isocrystals;
(3) a p-adic cohomological expression of the L-function of an abelian scheme on S and its rationality.

Introduction

Soient $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète complet de corps des fractions K de caractéristique 0, de corps résiduel k de caractéristique $p > 0$ et S un k-schéma séparé de type fini. Les résultats de cet article s'articulent autour de trois thèmes progressifs :

1. le descente étale des F-isocristaux surconvergents sur S,
2. des théorèmes de pleine fidélité pour des foncteurs de restriction à un ouvert dense entre F-isocristaux,
3. l'expression cohomologique p-adique des fonctions L de schémas abéliens et leur rationalité.

Les catégories des F-isocristaux convergents et surconvergents sur S ont été définies par Berthelot [4,3,5,6] et il montre en particulier qu'elles sont locales pour la topologie de Zariski sur S [5]. Ici, *lorsque S est lisse sur k*, nous généralisons ce résultat à la topologie étale en montrant que les *F-isocristaux surconvergents se descendent par un morphisme $S' \to S$ étale surjectif* [théorème 1] *ou par un morphisme $S' \to S$ propre surjectif et génériquement étale* [théorème 3].

La démonstration repose d'une part sur des théorèmes de Ogus [35, theo. 5.4, theo. 4.6] qui assurent que de tels morphismes descendent les F-isocristaux convergents et d'autre part sur

[1] Durant la préparation de cet article, l'auteur a bénéficié du soutien du programme TMR de la Communauté Européenne, dans le cadre du réseau “Arithmetic Algebraic Geometry” (Contrat n° ERB FMR XCT 960006).

0012-9593/02/04/

une étude, au I, du cas S affine et lisse via les algèbres de Monsky–Washnitzer : leur caractère hensélien [20] permet de prouver qu'un facteur direct (au sens "convergent") d'un F-isocristal surconvergent est en fait surconvergent [théorème 6].

Pour les théorèmes de pleine fidélité on suppose S lisse séparé sur k. Soit $j : U \hookrightarrow S$ une immersion ouverte telle que U soit dense dans S. Notons $F\text{-Isoc}^{\dagger}(S/K)$ (resp. $F\text{-Isoc}^{\dagger}(S/K)^0$, resp. $F\text{-Isoc}(S/K)$) la catégorie des F-isocristaux surconvergents (resp. F-isocristaux surconvergents unités, resp. F-isocristaux convergents) sur (S/K) : ici F-isocristal unité signifie que, en tout point géométrique de S, les pentes du Frobenius sont nulles. Nous montrons que les *foncteurs naturels*

(1) $j^* : F\text{-Isoc}^{\dagger}(S/K) \longrightarrow F\text{-Isoc}^{\dagger}(U/K)$,
(2) $F\text{-Isoc}^{\dagger}(S/K)^0 \longrightarrow F\text{-Isoc}(S/K)^0$,
(3) $F\text{-Isoc}^{\dagger}(S/K)^0 \longrightarrow F\text{-Isoc}(U/K)^0$,

sont pleinement fidèles [théorème 4], [théorème 5] et [corollaire 1 du théorème 5].

La question de cette pleine fidélité est évoquée dans [5, 2.3.9]. La preuve a été donnée dans des cas particuliers pour le foncteur (2) : lorsque S est une courbe, par Crew quand on se limite aux objets de rang 1 [12, theo. 4.10], puis par Tsuzuki en rang quelconque ; enfin par Tsuzuki lorsque k est parfait et que S admet une compactification lisse sur k [41, theo. 1.2.2].

La preuve de ces pleines fidélités est obtenue comme suit :

– pour (1) grâce à un résultat analogue de Tsuzuki pour les F-isocristaux convergents et un théorème de descente étale [théorème $2''$] ;
– pour (2), le théorème de A.-J. de Jong sur l'existence d'une altération projective lisse de S [27, théorème 4.1] après passage à une clôture algébrique de k et le théorème de descente par un morphisme propre surjectif génériquement étale [théorème 3] permettent de se ramener au cas traité par Tsuzuki où k est parfait et S admet une compactification lisse ;
– le (3) est conséquence directe de (1) et (2).

Au paragraphe III on suppose $\mathcal{V}$ d'indice de ramification $e \leqslant p-1$; soient S un k-schéma lisse et séparé et $f : X \to S$ un schéma abélien. On prouve [théorème 7] que *les faisceaux de cohomologie rigide $R^i f_{\mathrm{rig}*}(\mathcal{O}_{X/K})$ sont des F-isocristaux surconvergents* : ceci démontre un cas particulier d'une conjecture plus générale de Berthelot portant sur la surconvergence des $R^i f_{\mathrm{rig}*}(\mathcal{O}_{X/K})$.

Un théorème de Grothendieck assure que X admet une polarisation : après extension finie étale on rajoute une structure de niveau. On est alors dans le cas universel relevable : par un lemme de Zarhin et le théorème 6 on se ramène au cas d'une polarisation principale et d'une base lisse où la surconvergence est connue ; on redescend la surconvergence par le théorème de descente étale [théorème 1].

Pour la fonction L d'un schéma abélien $f : X \to S$, le corps k est fini, $\mathcal{V}$ est l'anneau W des vecteurs de Witt à coefficients dans k et S un k-schéma séparé de type fini. *On prouve par voie p-adique* [théorème 8] *la rationalité de la fonction $L(S, R^i f_{\mathrm{cris}*}(\mathcal{O}_{X/W}), t)$* en se ramenant au cas S lisse sur k : dans ce cas on a l'égalité

$$L\big(S, R^i f_{\mathrm{cris}*}(\mathcal{O}_{X/W}), t\big) = L\big(S, R^i f_{\mathrm{rig}*}(\mathcal{O}_{X/K}), t\big)$$

et la surconvergence établie au théorème 7 permet d'obtenir l'expression cohomologique de cette fonction L et sa méromorphie via la formule des traces en cohomologie rigide [23] ; le théorème de Borel–Dwork permet de conclure à la rationalité.

Addenda. Depuis la soumission de cet article à publication (en 2000) Chiarellotto et Tsuzuki ont établi aussi la descente étale des F-isocristaux surconvergents et ceci par des méthodes différentes de celles présentées ici, cf. [11] ; des travaux de Tsuzuki sont actuellement en cours pour la descente propre.

I. Modules à connexion et structure de Frobenius sur les algèbres complètes et faiblement complètes

1. Préliminaires

1.1. Dans tout cet article on fixe un corps k de caractéristique $p > 0$ et un entier $a \in \mathbb{N}^*$

On désigne par $C(k)$ un anneau de Cohen de k de caractéristique 0 [9, AC IX, §2, n°3, prop. 5] : $C(k)$ est un anneau de valuation discrète complet d'idéal maximal $pC(k)$ [26, 0_{IV}, 19.8.5]. Toute injection de corps de caractéristique $p > 0$, $k \hookrightarrow k'$ se prolonge en un morphisme $C(k) \hookrightarrow C(k')$ qui est une injection fidèlement plate [26, 0_{IV}, 19.8.6 (i)], [9, AC IX, §2, n°1, prop. 2] et [9, AC VI, §3, n°6, lemme 1]. Si $k \hookrightarrow k'$ est une extension finie de degré d, alors $C(k')$ est un $C(k)$-module libre de rang d [26, 0_{I}, 7.4.4] et [9, loc. cit.].

Si $\mathcal{V}$ est un anneau de valuation discrète complet, d'uniformisante π, de corps résiduel k et d'indice de ramification e, alors il existe un morphisme fidèlement plat $C(k) \hookrightarrow \mathcal{V}$ et $\mathcal{V}$ est un $C(k)$-module libre de rang e [26, 0_{IV}, 19.8.6, 19.8.8]. Fixons une extension $k \hookrightarrow k'$; $\mathcal{V}' := \mathcal{V} \otimes_{C(k)} C(k')$ est un anneau de valuation discrète complet, d'uniformisante π, corps résiduel k' et l'extension $C(k') \hookrightarrow \mathcal{V}'$ est totalement ramifiée de degré e [40, I, §6, prop. 17 et 18; II, §2, prop. 3].

Relevons les Frobenius à $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ comme suit. Puisque $C(k)$ est une $\mathbb{Z}_p$-algèbre plate, complète pour la topologie p-adique avec $C(k)/pC(k) \simeq k$, c'est un "relèvement" de k au sens de [8, 1.1.3], et deux tels relèvements sont isomorphes [8, 1.2.7]. Fixons une p-base $(x_i)_{i\in I}$ de k sur $\mathbb{F}_p$ [26, 0_{IV}, 21.1.9] (appelée p-base dans [8, 1.1.1]) : cette p-base existe par [26, 0_{IV}, 21.4.2]. De même, soit $(y_j)_{j\in J}$ une p-base de k' sur k : alors $(x_i, y_j)_{i\in I, j\in J}$ est une p-base de k' sur $\mathbb{F}_p$. Soit $(\tilde{x}_i)_{i\in I}$ (resp. $(\tilde{y}_j)_{j\in J}$) le relèvement de $(x_i)_{i\in I}$ à $C(k)$ (resp. de $(y_j)_{j\in J}$ à $C(k')$) construit dans [8, 1.1.3] : la donnée de $(\tilde{x}_i^{p^a})_{i\in I}$ (resp. de $(\tilde{x}_i^{p^a}, \tilde{y}_j^{p^a})_{i\in I, j\in J}$) fixe un relèvement σ à $C(k)$ (resp. σ' à $C(k')$) de la puissance $a^{\textit{ième}}$ du Frobenius de k (resp. de k') [8, 1.2.7 (ii)] et σ' est au-dessus de σ, i.e. le carré

$$\begin{tikzcd} C(k') \arrow[r, "\sigma'"] & C(k') \\ C(k) \arrow[u] \arrow[r, "\sigma"'] & C(k) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

commute ; par l'extension des scalaires $C(k) \hookrightarrow \mathcal{V}$ on en déduit encore un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V}' \arrow[r, "\sigma'"] & \mathcal{V}' \\ \mathcal{V} \arrow[u] \arrow[r, "\sigma"'] & \mathcal{V} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

où $\sigma(\pi) = \sigma'(\pi) = \pi$. On note K_0, K_0', K, K' les corps des fractions de $C(k)$, $C(k')$, $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ respectivement.

1.2. (1.2.1). Soient A_0 une k-algèbre lisse, $\mathcal{A}$ une $C(k)$-algèbre lisse relevant A_0 [18, théo. 6], $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \otimes_{C(k)} C(k')$, $A = \mathcal{A} \otimes_{C(k)} \mathcal{V}$ et $A' = A \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{V}'$. Notons $\hat{\mathcal{A}}$ (resp. $\hat{\mathcal{A}}'$, resp. $\hat{A}$, resp. $\hat{A}'$) le complété p-adique de $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{A}'$, resp. A, resp. A'), $\mathcal{A}^\dagger := \mathcal{A}^{\dagger \mathcal{V}} \subset \hat{A}$ (resp. $A^\dagger := A^{\dagger \mathcal{V}} \subset \hat{A}$, resp. $A'^\dagger := A'^{\dagger \mathcal{V}'} \subset \hat{A}'$) le complété faible de $\mathcal{A}$ au-dessus de $(C(k),(p))$ (resp. de A au-dessus de $(\mathcal{V},(\pi))$; resp. de A' au-dessus de $(\mathcal{V}',(\pi))$) : on a des injections [33, §1]

$$A^\dagger \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{V}' \hookrightarrow A'^\dagger \simeq \left(A^\dagger \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{V}'\right)^{\dagger \mathcal{V}'} =: A^\dagger \otimes^\dagger_{\mathcal{V}} \mathcal{V}' \hookrightarrow \hat{A}' = \hat{A} \,\hat{\otimes}_{\mathcal{V}} \mathcal{V}'$$

où $\otimes^\dagger_{\mathcal{V}}$ désigne par définition le produit tensoriel faiblement complété.

Posons $A^\dagger_K = A^\dagger \otimes_{\mathcal{V}} K$, $A'^\dagger_{K'} = A'^\dagger \otimes_{\mathcal{V}'} K'$, $\hat{A}_K = \hat{A} \otimes_{\mathcal{V}} K$, $\hat{A}'_{K'} = \hat{A}' \otimes_{\mathcal{V}'} K'$.

Quitte à se localiser sur $\operatorname{Spec} A_0$ pour la topologie de Zariski on peut supposer que A_0 admet une p-base $(T_\ell)_{\ell \in L}$ sur k [8, 1.1.2 (iii)]. Avec des notations analogues à (1.1), la donnée de $(\tilde{x}_i^{p^a}, \tilde{T}_\ell^{p^a})_{i \in I, \ell \in L})$ (resp. $(\tilde{x}_i^{p^a}, \tilde{y}_j^{p^a}, \tilde{T}_\ell^{p^a})_{i \in I, j \in J, \ell \in L})$ fixe un relèvement $\mathcal{F}_{\hat{\mathcal{A}}}$ à $\hat{\mathcal{A}}$ (resp. $\mathcal{F}_{\hat{\mathcal{A}}'}$ à $\hat{\mathcal{A}}'$) de F_{A_0} (resp. $F_{A'_0}$), la puissance $a^{ième}$ du Frobenius de A_0 (resp. de A'_0) et $\mathcal{F}_{\hat{\mathcal{A}}'}$ est au-dessus de σ' et de $\mathcal{F}_{\hat{\mathcal{A}}}$. Par l'extension des scalaires $C(k) \hookrightarrow \mathcal{V}$ on en déduit encore un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \hat{A}' \arrow[r, "\mathcal{F}_{\hat{A}'}"] & \hat{A}' \\ \hat{A} \arrow[u] \arrow[r, "\mathcal{F}_{\hat{A}}"'] & \hat{A} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

au-dessus de

(∗)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{V}' \arrow[r, "\sigma'"] & \mathcal{V}' \\ \mathcal{V} \arrow[u] \arrow[r, "\sigma"'] & \mathcal{V}\,. \arrow[u] \end{tikzcd}$$

D'après [37, cor. 2.4.3] il existe alors un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} A'^\dagger \arrow[r, "F_{A'^\dagger}"] & A'^\dagger \\ A^\dagger \arrow[u] \arrow[r, "F_{A^\dagger}"'] & A^\dagger \arrow[u] \end{tikzcd}$$

au-dessus de $(*)$ tel que $F_{A^\dagger}$ (resp. $F_{A'^\dagger}$) relève F_{A_0} (resp. $F_{A'_0}$) . Le morphisme $F_{A^\dagger}$ est fini et fidèlement plat [20, théo. 17] et [8, (1.1.1), (1.1.2) (iii)] ; par passage au séparé complété, $F_{A^\dagger}$ induit un morphisme $F_{\hat{A}} : \hat{A} \to \hat{A}$ qui se factorise en

$$F_{\hat{A}} : \hat{A} \xrightarrow[1_{\hat{A}} \otimes F_{A^\dagger}]{\hspace{4em}} C := \hat{A} \otimes_{A^\dagger, F_{A^\dagger}} A^\dagger \xrightarrow[F_{\hat{A}/A^\dagger}]{\hspace{4em}} \hat{A}$$

où C est complet pour la topologie π-adique. Comme $F_{\hat{A}/A^\dagger}$ mod π^{n+1} est l'identité de $A_n := A^\dagger / m^{n+1} A^\dagger = A / m^{n+1} A$ [33, theo. 1.4], $F_{\hat{A}/A^\dagger}$ est un isomorphisme et on identifiera $F_{\hat{A}}$ à l'image inverse sur $\hat{A}$ de $F_{A^\dagger}$. On en déduit des morphismes $F_{A^\dagger_K} : A^\dagger_K \to A^\dagger_K$,

$F_{\hat{A}_K}:\hat{A}_K \to \hat{A}_K$ (resp. $F_{A'^{\dagger}_{K'}}:A'^{\dagger}_{K'} \to A'^{\dagger}_{K'}$, $F_{\hat{A}'_{K'}}:\hat{A}'_{K'} \to \hat{A}'_{K'}$) au-dessus de σ (resp. au-dessus de σ') et $F_{A'^{\dagger}_{K'}}$ (resp. $F_{\hat{A}'_{K'}}$) est au-dessus de $F_{A^{\dagger}_K}$ (resp. $F_{\hat{A}_K}$).

(1.2.2) Soit B_0 une A_0-algèbre étale ; on la relève en une $A^{\dagger}$-algèbre étale B [20, théo. 4]. Alors $B \otimes_{A^{\dagger}, F_{A^{\dagger}}} A^{\dagger}$ est une $A^{\dagger}$-algèbre étale relevant $B_0 \otimes_{A_0, F_{A_0}} A_0$ et sa complétée faible est $B^{\dagger} \otimes_{A^{\dagger}, F_{A^{\dagger}}} A^{\dagger}$ [33, theo. 6.1]. Munissons $B^{\dagger}$ d'un Frobenius $F_{B^{\dagger}}$ compatible à $F_{A^{\dagger}}$ comme suit. Le Frobenius relatif

$$F_{B_0/A_0}: B_0 \otimes_{A_0, F_{A_0}} A_0 \xrightarrow{\sim} B_0$$

est un isomorphisme [31, VI, lemma 13.2] ; il se relève de manière unique [20, théo. 17, cor. 2 du théo. 17 et cor. 3 du théo. 4] en un isomorphisme

$$F_{B^{\dagger}/A^{\dagger}}: B^{\dagger} \otimes_{A^{\dagger}, F_{A^{\dagger}}} A^{\dagger} \xrightarrow{\sim} B^{\dagger}.$$

On prend alors pour $F_{B^{\dagger}}$ le composé

$$B^{\dagger} \xrightarrow[1_{B^{\dagger}} \otimes F_{A^{\dagger}}]{} B^{\dagger} \otimes_{A^{\dagger}, F_{A^{\dagger}}} A^{\dagger} \xrightarrow[F_{B^{\dagger}/A^{\dagger}}]{\sim} B^{\dagger};$$

on identifiera $F_{B^{\dagger}}$ à $1_{B^{\dagger}} \otimes F_{A^{\dagger}}$. On en déduit aussi $F_{B^{\dagger}_K}$, $F_{B'^{\dagger}_{K'}}$, $F_{\hat{B}_K}$ et $F_{\hat{B}'_{K'}}$.

1.3. Soit $\Omega^1_{A^{\dagger}}$ (resp. $\Omega^1_{A'^{\dagger}}$) le module des $\mathcal{V}$-différentielles de $A^{\dagger}$ (resp. $\mathcal{V}'$-différentielles de $A'^{\dagger}$) au sens de Monsky–Washnitzer [33, theo. 4.2]

$$\Omega^1_{A^{\dagger}} := \tilde{\Omega}^1_{A^{\dagger}/\mathcal{V}} := \Omega^1_{A^{\dagger}/\mathcal{V}} / \bigcap_n m^n \Omega^1_{A^{\dagger}/\mathcal{V}}$$

[resp. $\Omega^1_{A'^{\dagger}} := \tilde{\Omega}^1_{A'^{\dagger}/\mathcal{V}'} := \Omega^1_{A'^{\dagger}/\mathcal{V}'} / \bigcap_n m^n \Omega^1_{A'^{\dagger}/\mathcal{V}'}$] ; on pose

$$\Omega^1_{A^{\dagger}_K} = \Omega^1_{A^{\dagger}} \otimes_{\mathcal{V}} K, \quad \Omega^1_{\hat{A}} := \widehat{\Omega^1_{\hat{A}/\mathcal{V}}} \quad \text{et} \quad \Omega^1_{\hat{A}_K} := \Omega^1_{\hat{A}} \otimes_{\mathcal{V}} K$$

[resp. $\Omega^1_{A'^{\dagger}_{K'}} = \Omega^1_{A'^{\dagger}} \otimes_{\mathcal{V}'} K'$, $\Omega^1_{\hat{A}'} := \widehat{\Omega^1_{\hat{A}'/\mathcal{V}'}}$ et $\Omega^1_{\hat{A}'_{K'}} := \Omega^1_{\hat{A}'} \otimes_{\mathcal{V}'} K'$]. Remarquons qu'ici on prend les complétés des modules de 1-différentielles usuelles car on s'intéresse aux différentielles continues [35, p. 781], [33, p. 197].

Si $t_1, \ldots, t_d$ sont des coordonnées locales de A sur $\mathcal{V}$, les éléments $dt_1, \ldots, dt_d$ forment une base locale de $\Omega^1_{A^{\dagger}}$ (resp. de $\Omega^1_{\hat{A}}$, resp. de $\Omega^1_{A'^{\dagger}}$, resp. de $\Omega^1_{\hat{A}'}$) sur $A^{\dagger}$ (resp. sur $\hat{A}$, resp. sur $A'^{\dagger}$, resp. sur $\hat{A}'$) [33, theo. 4.5, 4.6].

PROPOSITION 1. – *Soient A_0 une k-algèbre lisse et $A_0 \to B_0$ un k-morphisme étale* ; *on le relève en un $\mathcal{V}$-morphisme $A^{\dagger} \to B^{\dagger}$ plat formellement étale pour la topologie m-adique entre algèbres f.c.t.f.* [20, théo. 17]. *Alors*

(i) *les morphismes $\hat{A} \hookrightarrow \hat{A}'$ et $A^{\dagger} \hookrightarrow A'^{\dagger}$ sont fidèlement plats* ;

(ii) *on a des isomorphismes*

(1) $\Omega^1_{A^{\dagger}} \otimes_{A^{\dagger}} \hat{A} \simeq \Omega^1_{\hat{A}}$, $\Omega^1_{B^{\dagger}} \otimes_{B^{\dagger}} \hat{B} \simeq \Omega^1_{\hat{B}}$;

(2) $\Omega^1_{\hat{A}} \otimes_{\hat{A}} \hat{B} \simeq \Omega^1_{\hat{B}}$;

(3) $\Omega^1_{A^\dagger} \otimes_{A^\dagger} \hat{B} \simeq \Omega^1_{\hat{B}}$;
(4) $\Omega^1_{A^\dagger} \otimes_{A^\dagger} B^\dagger \simeq \Omega^1_{B^\dagger}$;
(5) $\Omega^1_{\hat{A}} \otimes_{\hat{A}} \hat{A}' \simeq \Omega^1_{\hat{A}} \hat{\otimes}_{\mathcal{V}} \mathcal{V}' \simeq \Omega^1_{\hat{A}'}$;
(6) $\Omega^1_{A^\dagger} \otimes_{A^\dagger} A'^\dagger \simeq \Omega^1_{A'^\dagger}$.

Démonstration. – Pour le (i), par fidèle platitude de $A^\dagger \hookrightarrow \hat{A}$ et $A'^\dagger \hookrightarrow \hat{A}'$, il suffit de montrer que $\hat{A} \hookrightarrow \hat{A}'$ est fidèlement plat. D'après [9, AC III, §5, n°4, prop. 2] $\hat{A}'$ est un $\hat{A}$-module idéalement séparé pour $m\hat{A}$, donc $\hat{A}'$ est un $\hat{A}$-module plat [9, AC III, §5, n°3, théo. 1]. En désignant par $\operatorname{Spm}\mathcal{R}$ le spectre maximal d'un anneau $\mathcal{R}$, il nous reste à prouver qu'il existe une surjection $\operatorname{Spm}\hat{A}' \twoheadrightarrow \operatorname{Spm}\hat{A}$ [9, AC I, §3, n°5, prop. 9(e)]. Or $A_0 \hookrightarrow A'_0 := A'/mA'$ est fidèlement plat ; comme on a des bijections $\operatorname{Spm} A_0 \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spm}\hat{A}$, $\operatorname{Spm} A'_0 \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spm}\hat{A}'$ et une surjection $\operatorname{Spm} A'_0 \twoheadrightarrow \operatorname{Spm} A_0$ [loc. cit.], la conclusion en résulte.

Pour le (ii), le (5) et le (6) sont clairs et mis là pour mémoire.

Comme $\hat{A}$ est formellement étale sur $A^\dagger$ pour la topologie m-adique [20, prop. 2] le morphisme canonique

$$\Omega^1_{A^\dagger/\mathcal{V}} \otimes_{A^\dagger} \hat{A} \longrightarrow \Omega^1_{\hat{A}/\mathcal{V}}$$

est un bimorphisme formel au sens de [26, 0_{IV}, 20.7.6], donc on a un isomorphisme

$$\widehat{\Omega^1_{A^\dagger}} \simeq \Omega^1_{\hat{A}},$$

d'où (1) car $\Omega^1_{A^\dagger}$ est projectif de type fini sur $A^\dagger$ [33, theo. 4.6]. De même pour $B^\dagger$.

Pour (2) et (3) l'argument est encore le même car $\hat{B}/\hat{A}$ (resp. $\hat{B}/A^\dagger$) est formellement étale pour la topologie m-adique : on utilise [26, 0_{I}, 7.7.9] car $\Omega^1_{\hat{A}}$ est de type fini sur $\hat{A}$.

Pour le (4), $B^\dagger$ est formellement étale sur $A^\dagger$ pour la topologie m-adique ; donc le morphisme canonique

$$\Omega^1_{A^\dagger/\mathcal{V}} \otimes_{A^\dagger} B^\dagger \longrightarrow \Omega^1_{B^\dagger/\mathcal{V}}$$

induit

$$(*) \qquad \Omega^1_{A^\dagger} \otimes_{A^\dagger} B^\dagger \longrightarrow \Omega^1_{B^\dagger}$$

et devient un isomorphisme après complétion [26, 0_{IV}, 20.7.6]. La complétion se résume ici à tensoriser sur $B^\dagger$ par $\hat{B}$ car on a affaire à des $B^\dagger$-modules de type fini ; par fidèle platitude de $\hat{B}$ sur $B^\dagger$ [20, prop. 2] $(*)$ est un isomorphisme. D'où la proposition. □

PROPOSITION 2. – *Soient $\mathcal{A}$ un anneau commutatif, $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ trois $\mathcal{A}$-algèbres commutatives, telles que $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{C}$ soit fidèlement plat et*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathcal{B} \arrow[d, "j"] \\ \mathcal{C} \arrow[r, hook, "i"'] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

un carré commutatif de morphismes injectifs d'algèbres.

Notons $i' : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$, $j' : \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{C} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$ les injections canoniques et $\varphi : \mathcal{C} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \to \mathcal{D}$ l'application naturelle telle que $i = \varphi \circ i'$, $j = \varphi \circ j'$. Alors :

(a) *On a un isomorphisme de $\mathcal{A}$-algèbres*

$$\mathcal{A} \simeq i'(\mathcal{C}) \cap j'(\mathcal{B}).$$

(b) *Si de plus φ est injective on a aussi un isomorphisme*

$$\mathcal{A} \simeq i(\mathcal{C}) \cap j(\mathcal{B}) \subset \mathcal{D}.$$

(c) *Soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ deux anneaux de valuation discrète comme en* (1.1), *A une $\mathcal{V}$-algèbre lisse, $A' = A \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{V}'$, B une $A^\dagger$-algèbre telle que $A^\dagger \hookrightarrow B$ soit injectif, $B' = B \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{V}'$; on notera $\hat{(\ )}$ la complétion m-adique. Alors, dans chacun des trois cas suivants, les hypothèses du* (b) *sont satisfaites et φ est une injection plate* :

(c.1) $\mathcal{A} = A^\dagger$, $\mathcal{B} = A'^\dagger$, $\mathcal{C} = \hat{A}$, $\mathcal{D} = \hat{A}'$, *où $A^\dagger \subset \hat{A}$* (*resp.* $A'^\dagger \subset \hat{A}'$) *est le complété faible de A* (*resp. de A'*) *au-dessus de $(\mathcal{V}, (\pi))$* (*resp. au-dessus de $(\mathcal{V}', (\pi))$*).

(c.2) $\mathcal{A} = A^\dagger$, $\mathcal{B} = B^\dagger$, $\mathcal{C} = A'^\dagger$, $\mathcal{D} = B'^\dagger$, *où $B^\dagger \subset \hat{B}$* (*resp.* $B'^\dagger \subset \hat{B}'$) *est le complété faible de B* (*resp. de B'*) *au-dessus de $(\mathcal{V}, (\pi))$* (*resp. au-dessus de $(\mathcal{V}', (\pi))$*).

(c.3) $\mathcal{A} = A^\dagger$, $\mathcal{B} = B^\dagger$, $\mathcal{C} = \hat{A}$, $\mathcal{D} = \hat{B}$ *où B est une $A^\dagger$-algèbre régulière telle que le morphisme structural $A^\dagger \hookrightarrow B$ soit injectif plat et quasi-fini.*

(d) *Soient A_0 une k-algèbre lisse et $\operatorname{Spec} B_0 \to \operatorname{Spec} A_0$ un k-morphisme étale et dominant. Notons A une $\mathcal{V}$-algèbre lisse relevant A_0 et $A^\dagger \to B$ un $\mathcal{V}$-morphisme étale relevant $A_0 \to B_0$* [20, théo. 4]. *Alors les hypothèses du* (c.2) (*resp. du* (c.3)) *sont satisfaites* : *en particulier on a une injection plate*

$$A'^\dagger \otimes_{A^\dagger} B^\dagger \hookrightarrow B'^\dagger \quad (\textit{resp. } \hat{A} \otimes_{A^\dagger} B^\dagger \hookrightarrow \hat{B})$$

et un isomorphisme

$$A^\dagger \simeq A'^\dagger \cap B^\dagger \subset B'^\dagger \quad (\textit{resp. } A^\dagger \simeq \hat{A} \cap B^\dagger \subset \hat{B}).$$

Démonstration. –

(a) Appliquant [9, AC I, §3, n°5, prop. 10(ii)] avec $A = \mathcal{A}$, $B = \mathcal{C}$, $F = \mathcal{B}$, $F' = \mathcal{A}$ on obtient l'isomorphisme canonique $\mathcal{A} \simeq j'(\mathcal{B}) \cap i'(\mathcal{C})$.

(b) Lorsque φ est injectif, φ induit un isomorphisme

$$\varphi : i'(\mathcal{C}) \cap j'(\mathcal{B}) \xrightarrow{\ \sim\ } i(\mathcal{C}) \cap j(\mathcal{B}) \subset \mathcal{D},$$

d'où l'assertion (b).

(c) Dans chacun des trois cas, φ mod m^n est un isomorphisme et $\mathcal{D}$ est un $\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$-module idéalement séparé pour $m\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$ [9, AC III, §5, n°4, prop. 2], donc le critère usuel [9, AC III, §5, n°2, théo. 1] établit la platitude de φ.

Pour (c.1) on démontre directement l'injectivité de la flèche

$$\hat{A} \otimes_{A^\dagger} A'^\dagger \hookrightarrow \left(\hat{A} \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{V}'\right)^{\dagger \mathcal{V}'}$$

en utilisant la définition du complété faible [33, §1] ; comme

$$\left(\hat{A} \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{V}'\right)^{\dagger \mathcal{V}'} \hookrightarrow \left(\hat{A} \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{V}'\right)^{\wedge} \simeq \hat{A}'$$

est aussi injectif [33, §1], l'injectivité de φ en résulte.

L'injectivité de φ dans le cas (c.2) se voit aussi directement [loc. cit.].

Prouvons (c.3). Rappelons que $A^\dagger \hookrightarrow \hat{A}$ et $B^\dagger \hookrightarrow \hat{B}$ sont fidèlement plats, $A^\dagger$ est régulier [20, prop. 2], et l'injection $A^\dagger \hookrightarrow B$ fournit une flèche $A^\dagger \to B^\dagger$ [33], aussi injective, car $\hat{A} \hookrightarrow \hat{B}$

est injective. Le morphisme $g:\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A^\dagger$ est dominant, plat, de type fini, entre schémas noethériens normaux ; puisque g est ouvert [26, IV, 2.4.6] et dominant, A, $A^\dagger$ et B admettent des décompositions de la forme

$$A = \prod_{i\in I} A_i, \qquad A^\dagger = \prod_{i\in I} A_i^\dagger, \qquad B = \prod_{i\in I} B_i$$

avec même ensemble d'indices où A_i, $A_i^\dagger$, B_i sont intégralement clos [20, prop. 11] et g induit, pour tout i, une injection $A_i^\dagger \hookrightarrow B_i$. L'application

$$\varphi : \hat{A} \otimes_{A^\dagger} B^\dagger \longrightarrow \hat{B}$$

s'écrit alors

$$\varphi = \prod_{i\in I} \varphi_i : \prod_{i\in I} \big(\hat{A}_i \otimes_{A_i^\dagger} B_i^\dagger\big) \longrightarrow \prod_{i\in I} \hat{B}_i;$$

pour prouver l'injectivité de φ on peut donc supposer $A^\dagger$ et B intégralement clos [20, cor. 3 de prop. 11].

D'après Raynaud [38, cor. 2 (2) p. 42], on a la version suivante du "Main theorem" de Zariski : soit A' la fermeture intégrale de $A^\dagger$ dans B ; il existe une sous-$A^\dagger$-algèbre C de A' (donc C est intègre), finie sur $A^\dagger$, telle que $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} C$ soit une immersion ouverte. Puisque $u:\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} C$ est une immersion ouverte dominante, il existe $f \in C\backslash\{0\}$ tel que les morphismes

$$\operatorname{Spec} D \hookrightarrow \operatorname{Spec} B \hookrightarrow \operatorname{Spec} C \quad \text{(où } D = C[1/f]\text{)}$$

soient des immersions ouvertes dominantes. L'injectivité de $B \hookrightarrow D$ assure l'injectivité de $B^\dagger \hookrightarrow D^\dagger$. Or on a une injection

$$\hat{C} \otimes_{C^\dagger} D^\dagger = \hat{C} \otimes_{C^\dagger} \big(C^\dagger[X]^\dagger/(Xf-1)\big) \hookrightarrow \hat{C}[X]^\dagger/(Xf-1) \simeq \big(\hat{C}[X]/(Xf-1)\big)^\dagger$$

et $\hat{D} \simeq (\hat{C}[X]/(Xf-1))^\wedge$; si l'on pose $C' := \hat{C}[X]/(Xf-1)$, le morphisme canonique

$$\varphi' : \hat{C} \otimes_{C^\dagger} D^\dagger \longrightarrow \hat{D}$$

est donc simplement l'injection composée

$$\varphi' : \hat{C} \otimes_{C^\dagger} D^\dagger \hookrightarrow (C')^\dagger \hookrightarrow (\hat{C'}).$$

Comme C est fini sur $A^\dagger$, on a $C = C^\dagger$ [33], d'où $\hat{C} \otimes_{C^\dagger} D^\dagger \simeq \hat{A} \otimes_{A^\dagger} D^\dagger \xhookrightarrow{\varphi'} \hat{D}$. Par suite, la flèche horizontale supérieure du carré commutatif

$$\begin{tikzcd} \hat{A} \otimes_{A^\dagger} B^\dagger \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \hat{B} \arrow[d] \\ \hat{A} \otimes_{A^\dagger} D^\dagger \arrow[r, hook, "\varphi'"] & \hat{D} \end{tikzcd}$$

est aussi injective ; d'où (c.3).

(d) Choisissons une $\mathcal{V}$-algèbre lisse A relevant A_0 et $A^\dagger \to B$ un morphisme étale relevant $A_0 \to B_0$ [20, théo. 4]. Le morphisme composé $A^\dagger \to B \to B^\dagger$ est injectif, car $A_0 \to B_0$ est injectif [20, théo. 17]; il suffit alors d'appliquer (c.3). Remarquons qu'ici B n'est pas nécessairement faiblement complet car $A^\dagger \to B$ n'est pas supposé fini [33, theo. 6.1]. □

COROLLAIRE. – *Sous les hypothèses* (d) *de la proposition* 2, *soit $\mathcal{K}$ l'anneau total des fractions de $A^\dagger$. Alors on a des isomorphismes*

(i) $A^\dagger = \hat{A} \cap A_K^\dagger = \hat{A} \cap \mathcal{K} = \hat{A} \cap B^\dagger = \hat{A} \cap B_K^\dagger$,

(ii) $A_K^\dagger = \hat{A}_K \cap \mathcal{K} = \hat{A}_K \cap B_K^\dagger$.

Démonstration. – Puisque $A^\dagger$ est plat sur $\mathcal{V}$, $A_K^\dagger$ est contenu dans l'anneau $\mathcal{K}$; en particulier $A^\dagger \subset A_K^\dagger$ et de même $B^\dagger \subset B_K^\dagger$. Comme $A^\dagger$ est un anneau de Zariski [20, prop. 2] on établit l'égalité $A^\dagger = \hat{A} \cap \mathcal{K}$ comme [9, AC III, §3, n°5, cor. 4 de prop. 9] ; d'où des inclusions

$$A^\dagger \hookrightarrow A_K^\dagger \cap \hat{A} \hookrightarrow \mathcal{K} \cap \hat{A} = A^\dagger$$

qui sont des égalités. Le reste résulte de la proposition précédente. □

On a de même la proposition suivante

PROPOSITION 2′. – *Sous l'hypothèse* (d) *de la proposition* 2 *et les notations de* 1.1 *et* 1.2 *on a les égalités*

(i) $A^\dagger = \hat{A} \cap A'^\dagger = A'^\dagger \cap B^\dagger \subset \hat{B}'$,

(ii) $A_K^\dagger = \hat{A}_K \cap A'^\dagger_{K'} = A'^\dagger_{K'} \cap B_K^\dagger = \hat{A}'_{K'} \cap B_K^\dagger \subset \hat{B}'_{K'}$.

Démonstration. –

(i) On a $A^\dagger = \hat{A} \cap A'^\dagger$ (resp. $A^\dagger = A'^\dagger \cap B^\dagger$) par le cas (c.1) (resp. (d)) de la proposition 2.

(ii) De $A^\dagger = \hat{A} \cap A'^\dagger$ on déduit $A_K^\dagger = \hat{A}_K \cap (A'^\dagger \otimes_{\mathcal{V}} K) = \hat{A}_K \cap A'^\dagger_{K'}$. De même $A^\dagger = A'^\dagger \cap B^\dagger$ fournit $A_K^\dagger = (A'^\dagger \otimes_{\mathcal{V}} K) \cap B_K^\dagger = A'^\dagger_{K'} \cap B_K^\dagger$. Enfin, d'après le (ii) du corollaire ci-dessus, on a $\hat{A}'_{K'} \cap B_K^\dagger = (\hat{A}'_{K'} \cap B'^\dagger_{K'}) \cap B_K^\dagger = A'^\dagger_{K'} \cap B_K^\dagger = A_K^\dagger$. □

2. Descente des modules

2.1. Sous les hypothèses de 1.2 soit $\mathcal{M}$ un $\hat{A}_K$-module projectif de type fini, tel que $\mathcal{N} = \mathcal{M} \otimes_{\hat{A}_K} \hat{B}_K$ soit de la forme $\mathcal{N} = N \otimes_{B_K^\dagger} \hat{B}_K$. Notons

$$i : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N} = \mathcal{M} \otimes_{\hat{A}_K} \hat{B}_K \quad \text{et} \quad j : N \hookrightarrow \mathcal{N} = N \otimes_{B_K^\dagger} \hat{B}_K$$

les injections canoniques.

PROPOSITION 3. – *Sous les hypothèses* 2.1 *précédentes* $M := i(\mathcal{M}) \cap j(N)$ *est l'unique* $A_K^\dagger$-*module projectif de type fini, à isomorphisme près, tel que l'on ait des isomorphismes*

$$\mathcal{M} \simeq M \otimes_{A_K^\dagger} \hat{A}_K, \qquad N = M \otimes_{A_K^\dagger} B_K^\dagger.$$

Remarque. – Par la suite on notera

$$\tilde{i} : M \hookrightarrow \mathcal{M} = M \otimes_{A_K^\dagger} \hat{A}_K \quad \big(\text{resp. } \tilde{j} : M \hookrightarrow N = M \otimes_{A_K^\dagger} B_K^\dagger\big)$$

les injections canoniques ; alors $i \circ \tilde{i} = j \circ \tilde{j}$.

Démonstration de la proposition 3. – Puisque $\mathcal{M}$ est un $\hat{A}_K$-module projectif de type fini et $(A^\dagger, A_0)$ un couple hensélien [20, théo. 3] il existe d'après Elkik [18, cor. 1 du théo. 3]; un $A_K^\dagger$-module projectif de type fini P tel que

$$P \otimes_{A_K^\dagger} \hat{A}_K \simeq \mathcal{M}$$

et P est unique à $A_K^\dagger$-isomorphisme près [18, lemme p. 573]. Comme on a des isomorphismes

$$\mathcal{N} \simeq \mathcal{M} \otimes_{\hat{A}_K} \hat{B}_K \simeq P \otimes_{A_K^\dagger} \hat{A}_K \otimes_{\hat{A}_K} \hat{B}_K \simeq \left(P \otimes_{A_K^\dagger} B_K^\dagger\right) \otimes_{B_K^\dagger} \hat{B}_K \simeq N \otimes_{B_K^\dagger} \hat{B}_K,$$

il en résulte un isomorphisme [18, lemme p. 573]

$$N \simeq P \otimes_{A_K^\dagger} B_K^\dagger.$$

D'après la proposition 2 $i(\mathcal{M}) \cap j(N)$ est un $A_K^\dagger$-module; or P est plat pour tout $A_K^\dagger$-module [9, AC I, §2, n°2, déf. 1] car P est un $A_K^\dagger$-module projectif : par suite on a un isomorphisme [9, AC I, §2, n°6, prop. 6 et Rq. 1]

$$i(\mathcal{M}) \cap j(N) \simeq \left(P \otimes_{A_K^\dagger} \hat{A}_K\right) \cap \left(P \otimes_{A_K^\dagger} B_K^\dagger\right) \simeq P \otimes_{A_K^\dagger} \left(\hat{A}_K \cap B_K^\dagger\right) \simeq P \quad \text{[cor. de prop. 2].}$$

D'où la proposition 3. □

Grâce à la proposition 1 on a des injections

$$\begin{aligned}
\tilde{i} : M_1 &:= M \otimes_{A_K^\dagger} \Omega^1_{A_K^\dagger} \hookrightarrow M \otimes_{A_K^\dagger} \Omega^1_{A_K^\dagger} \otimes_{A_K^\dagger} \hat{A}_K \simeq \mathcal{M} \otimes_{\hat{A}_K} \Omega^1_{\hat{A}_K} =: \mathcal{M}_1,\\
i : \mathcal{M}_1 &:= \mathcal{M} \otimes_{\hat{A}_K} \Omega^1_{\hat{A}_K} \hookrightarrow \mathcal{M} \otimes_{\hat{A}_K} \Omega^1_{\hat{A}_K} \otimes_{\hat{A}_K} \hat{B}_K \simeq \mathcal{N} \otimes_{\hat{B}_K} \Omega^1_{\hat{B}_K} =: \mathcal{N}_1,\\
\tilde{j} : M_1 &:= M \otimes_{A_K^\dagger} \Omega^1_{A_K^\dagger} \hookrightarrow M \otimes_{A_K^\dagger} \Omega^1_{A_K^\dagger} \otimes_{A_K^\dagger} B_K^\dagger \simeq N \otimes_{B_K^\dagger} \Omega^1_{B_K^\dagger} =: N_1,\\
j : N_1 &:= N \otimes_{B_K^\dagger} \Omega^1_{B_K^\dagger} \hookrightarrow N \otimes_{B_K^\dagger} \Omega^1_{B_K^\dagger} \otimes_{B_K^\dagger} \hat{B}_K \simeq \mathcal{N} \otimes_{\hat{B}_K} \Omega^1_{\hat{B}_K} =: \mathcal{N}_1.
\end{aligned}$$

PROPOSITION 4. – *Avec les notations précédentes on a un isomorphisme*

$$M \otimes_{A_K^\dagger} \Omega^1_{A_K^\dagger} \xrightarrow{\sim} i\left(\mathcal{M} \otimes_{\hat{A}_K} \Omega^1_{\hat{A}_K}\right) \cap j\left(N \otimes_{B_K^\dagger} \Omega^1_{B_K^\dagger}\right).$$

Démonstration. – Comme $\Omega^1_{A_K^\dagger}$ est un $A_K^\dagger$-module projectif de type fini, il est plat pour le $A_K^\dagger$-module $\mathcal{N}$, donc on a des isomorphismes [9, AC I, §2, n°6, prop. 6 et Rq. 1]

$$i(\mathcal{M}_1) \cap j(N_1) \simeq \left(\mathcal{M} \otimes_{A_K^\dagger} \Omega^1_{A_K^\dagger}\right) \cap \left(N \otimes_{A_K^\dagger} \Omega^1_{A_K^\dagger}\right) \simeq M \otimes_{A_K^\dagger} \Omega^1_{A_K^\dagger}. \qquad \square$$

Notons

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^\sigma &:= \mathcal{M} \otimes_{\hat{A}_K \underset{F_{\hat{A}_K}}{\nearrow}} \hat{A}_K, &\qquad \mathcal{N}^\sigma &:= \mathcal{N} \otimes_{\hat{B}_K \underset{F_{\hat{B}_K}}{\nearrow}} \hat{B}_K,\\
M^\sigma &:= M \otimes_{A_K^\dagger \underset{F_{A_K^\dagger}}{\nearrow}} A_K^\dagger, &\qquad N^\sigma &:= N \otimes_{B_K^\dagger \underset{F_{B_K^\dagger}}{\nearrow}} B_K^\dagger\,;
\end{aligned}$$

on a alors des isomorphismes

$$\mathcal{M}^\sigma \simeq M^\sigma \otimes_{A_K^\dagger} \hat{A}_K, \qquad N^\sigma \simeq M^\sigma \otimes_{A_K^\dagger} B_K^\dagger,$$
$$\mathcal{N}^\sigma \simeq \mathcal{M}^\sigma \otimes_{\hat{A}_K} \hat{B}_K \simeq N^\sigma \otimes_{B_K^\dagger} \hat{B}_K \simeq M^\sigma \otimes_{A_K^\dagger} \hat{B}_K.$$

PROPOSITION 5. – *Sous les hypothèses précédentes on a un isomorphisme*

$$M^\sigma \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^\sigma \cap N^\sigma \subset \mathcal{N}^\sigma.$$

Démonstration. – Le $A_K^\dagger$-module M^σ est plat pour $\hat{B}_K$ [9, AC I, §2, n°2, déf. 1], car M^σ est un $A_K^\dagger$-module plat, puisque $F_{A_K^\dagger}$ est plat et M projectif de type fini sur $A_K^\dagger$. Donc on a un isomorphisme canonique [9, AC I, §2, n° 6, prop. 6 et Rq. 1] et [cor. de prop. 2]

$$\mathcal{M}^\sigma \cap N^\sigma := \left(M^\sigma \otimes_{A_K^\dagger} \hat{A}_K\right) \cap \left(M^\sigma \otimes_{A_K^\dagger} B_K^\dagger\right) \simeq M^\sigma \otimes_{A_K^\dagger} \left(\hat{A}_K \cap B_K^\dagger\right) = M^\sigma. \qquad \square$$

2.2. Sous les hypothèses 1.2 notons $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{B}$, resp. $\mathcal{D}$) l'un des anneaux $\hat{A}_K$, $A'^\dagger_{K'}$ ou $\hat{A}'_{K'}$ (resp. $A'^\dagger_{K'}$, $B_K^\dagger$ ou $B_K^\dagger$; resp. $\hat{A}'_{K'}$, $B'^\dagger_{K'}$ ou $\hat{B}'_{K'}$). On a vu [cor. de prop. 2] et [prop. 2′] que l'on a l'égalité

$$A_K^\dagger = \mathcal{C} \cap \mathcal{B} \subset \mathcal{D}$$

et que $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{D}$) est fidèlement plat sur $A_K^\dagger$ (resp. sur $\mathcal{B}$) [prop. 1].

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{C}$-module projectif de type fini tel que $\mathcal{N} := \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{C}} \mathcal{D}$ est de la forme $\mathcal{N} = N \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{D}$ pour un $\mathcal{B}$-module N (qui est donc projectif de type fini sur $\mathcal{B}$).

Notons

$$i : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N} = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{C}} \mathcal{D} \quad \text{et}$$
$$j : N \hookrightarrow \mathcal{N} = N \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{D} \quad \text{les injections canoniques.}$$

On établit comme précédemment les propositions suivantes :

PROPOSITION 3′. – *Sous les hypothèses* 2.2, $M := i(\mathcal{M}) \cap j(N)$ *est un* $A_K^\dagger$*-module projectif de type fini et on a des isomorphismes*

$$\mathcal{M} \simeq M \otimes_{A_K^\dagger} \mathcal{C},$$
$$N \simeq M \otimes_{A_K^\dagger} \mathcal{B}.$$

PROPOSITION 4′. – *De même on a un isomorphisme*

$$M \otimes_{A_K^\dagger} \Omega^1_{A_K^\dagger} \xrightarrow{\sim} i\left(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{C}} \Omega^1_{\mathcal{C}}\right) \cap j\left(N \otimes_{\mathcal{B}} \Omega^1_{\mathcal{B}}\right).$$

Notons aussi

$$\mathcal{M}^\sigma := \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{C}, F_{\mathcal{C}}} \mathcal{C}, \qquad \mathcal{N}^\sigma := \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{D}, F_{\mathcal{D}}} \mathcal{D},$$
$$M^\sigma := M \otimes_{A_K^\dagger, F_{A_K^\dagger}} A_K^\dagger, \qquad N^\sigma := N \otimes_{\mathcal{B}, F_{\mathcal{B}}} \mathcal{B}.$$

On a l'analogue suivant de la proposition 5 :

PROPOSITION 5′. – *Sous les hypothèses* 2.2 *on a un isomorphisme*

$$M^\sigma \simeq \mathcal{M}^\sigma \cap N^\sigma \subset \mathcal{N}^\sigma.$$

2.3.

PROPOSITION 6. –

(1) *Avec les hypothèses de* 1.2, *soit* $\mathcal{M}'$ *un* $\hat{A}$*-module de type fini tel que* $\mathcal{M} = \mathcal{M}' \otimes_{\hat{A}} \hat{A}_K$ *soit projectif de type fini sur* $\hat{A}_K$*. Alors il existe un* $A^\dagger$*-module de type fini* M' *tel que*

(i) $\mathcal{M} = M' \otimes_{A^\dagger} \hat{A}$*,*

(ii) $M := M' \otimes_{A^\dagger} A_K^\dagger$ *est projectif de type fini.*

De plus si $\mathcal{M}'$ *est libre alors* M' *est libre.*

(2) *Si* $\mathcal{M}_1'$ *et* $\mathcal{M}_2'$ *sont deux tels* $\hat{A}$*-modules de type fini tels que* $\mathcal{M}_1$ *et* $\mathcal{M}_2$ *soient* $\hat{A}_K$*-isomorphes, alors* M_1 *et* M_2 *sont* $A_K^\dagger$*-isomorphes.*

Démonstration. – Comme $(A^\dagger, A_0)$ est un couple hensélien [20, théo. 3] et $A^\dagger$ de Zariski [20, prop. 2] cela résulte d'un théorème de Elkik [18, théo. 3] et de [9, ACIII, §3, n°5, cor. 2 de prop. 9]. □

COROLLAIRE 1. – *Avec les notations de* 1.2, *soit* $\mathcal{M}$ *un* $\hat{A}_K$*-module projectif de type fini. Alors il existe un* $A_K^\dagger$*-module projectif de type fini* M *tel que* $\mathcal{M} \simeq M \otimes_{A_K^\dagger} \hat{A}_K$*. De plus si* $\mathcal{M}_1$ *et* $\mathcal{M}_2$ *sont deux tels* $\hat{A}_K$*-modules et si* $\mathcal{M}_1$ *et* $\mathcal{M}_2$ *sont* $\hat{A}_K$*-isomorphes, alors* M_1 *et* M_2 *sont* $A_K^\dagger$*-isomorphes.*

Démonstration. – Résulte de [18, cor. 1 du théo. 3 et lemme p. 573]. □

COROLLAIRE 2. – *Sous les hypothèses* 1.2, *soient* $\mathcal{M}$ *et* $\mathcal{P}$ *deux* $\hat{A}_K$*-modules projectifs de type fini et* $\mathcal{N} := \mathcal{M} \oplus \mathcal{P}$*. Alors*

(1) *Il existe des* $A_K^\dagger$*-modules projectifs de type fini* M *et* P *relevant respectivement* $\mathcal{M}$ *et* $\mathcal{P}$ *et tout* $A_K^\dagger$*-module* N *relevant* $\mathcal{N}$ *sera identifié à* $M \oplus P$*.*

(2) *Avec les choix du* (1) *on a l'identification*

(i) $M = \mathcal{M} \cap N$,

et des isomorphismes

(ii) $\mathcal{M} \simeq (\mathcal{M} \cap N) \otimes_{A_K^\dagger} \hat{A}_K$,

(iii) $M^\sigma \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}^\sigma \cap N^\sigma$,

(iv) $M \otimes_{A_K^\dagger} \Omega^1_{A_K^\dagger} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{M} \otimes_{\hat{A}_K} \Omega^1_{\hat{A}_K}) \cap (N \otimes_{A_K^\dagger} \Omega^1_{A_K^\dagger})$.

Le (1) et le (2) (i), (ii) résultent du corollaire 1.

Les choix du (1) fournissent l'identification $N^\sigma = M^\sigma \oplus P^\sigma$; de plus $M^\sigma \hookrightarrow \mathcal{M}^\sigma = M^\sigma \otimes_{A_K^\dagger} \hat{A}_K$ est l'injection évidente, d'où le (2) (iii).

Pour (2) (iv), puisque $\Omega^1_{A_K^\dagger}$ est plat pour le $A_K^\dagger$-module $\mathcal{N}$, on a un isomorphisme [9, ACI, §2, n°6, prop. 6]

$$\left(\mathcal{M} \otimes_{\hat{A}_K} \Omega^1_{\hat{A}_K}\right) \cap \left(N \otimes_{A_K^\dagger} \Omega^1_{A_K^\dagger}\right) \simeq (\mathcal{M} \cap N) \otimes_{A_K^\dagger} \Omega^1_{A_K^\dagger} = M \otimes_{A_K^\dagger} \Omega^1_{A_K^\dagger}. \qquad \square$$

3. Descente des morphismes

3.0. Sous les hypothèses 1.2 notons $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{B}$, resp. $\mathcal{D}$) l'un des anneaux $\hat{A}_K$, $A'^{\dagger}_{K'}$ ou $\hat{A}'_{K'}$ (resp. $B'^{\dagger}_{K'}$; $B^{\dagger}_K$ ou $B^{\dagger}_K$; resp. $\hat{B}'_{K'}$, $B'^{\dagger}_{K'}$ ou $\hat{B}'_{K'}$). On a $A^{\dagger}_K = \mathcal{C} \cap \mathcal{B} \subset \mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{D}$) est fidèlement plat sur $A^{\dagger}_K$ (resp. sur $\mathcal{B}$).

Pour $i = 1,2$, soit $\mathcal{M}_i$ un $\mathcal{C}$-module projectif de type fini tel que $\mathcal{N}_i := \mathcal{M}_i \otimes_{\mathcal{C}} \mathcal{D}$ est de la forme $\mathcal{N}_i = N_i \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{D}$ pour un $\mathcal{B}$-module N_i (qui est donc projectif de type fini sur $\mathcal{B}$).

3.1. Supposons de plus que l'on dispose de morphismes $g : N_1 \to N_2$, $g' : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$, $\varphi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ compatibles, i.e. tels que

$$g' = g \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{D} = \varphi \otimes_{\mathcal{C}} \mathcal{D}.$$

PROPOSITION 7. – *Sous les hypothèses* 3.1 *il existe un couple* (M_1, M_2) *de* $A^{\dagger}_K$*-modules projectifs de type fini, unique à* $A^{\dagger}_K$*-isomorphisme près tel que* $\mathcal{M}_i \simeq M_i \otimes_{A^{\dagger}_K} \mathcal{C}$ *et un unique* $A^{\dagger}_K$*-morphisme*

$$f : M_1 \to M_2$$

tel que $\varphi = f \otimes_{A^{\dagger}_K} \mathcal{C}$ *et* $g' = f \otimes_{A^{\dagger}_K} \mathcal{B}$.

Démonstration. – Pour l'existence du couple (M_1, M_2) et de f, les propositions 3 et 3′ fournissent une description explicite de M_1 et M_2, $M_i = \mathcal{M}_i \cap N_i$, et il suffit de définir $f : M_1 \to M_2$ par $f := g_{|M_1} = g'_{|M_1} = \varphi_{|M_1}$.

L'unicité du couple (M_1, M_2) provient de l'existence d'une flèche évidente

$$M_i \hookrightarrow \mathcal{M}_i \cap N_i$$

qui après tensorisation sur $A^{\dagger}_K$ par $\mathcal{C}$ devient l'identité de $\mathcal{M}_i$: par fidèle platitude de $\mathcal{C}$ sur $A^{\dagger}_K$ l'injection précédente est un isomorphisme. L'unicité de f est encore assurée par la fidèle platitude de $\mathcal{C}$ sur $A^{\dagger}_K$ [9, ACI, §3, n°5, prop. 9 (c)]. □

COROLLAIRE. – *Supposons que les morphismes de* 3.1 *soient les Frobenius, i.e. que* $\mathcal{M}$ *et* N *sont munis d'isomorphismes*

$$\phi_1 : \mathcal{M}^{\sigma} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}, \qquad \phi_2 : N^{\sigma} \xrightarrow{\sim} N,$$

tous les deux induits par un isomorphisme $\phi_3 : \mathcal{N}^{\sigma} \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}$. *Alors* $M := \mathcal{M} \cap N$ *est muni d'un isomorphisme de Frobenius*

$$\phi : M^{\sigma} \xrightarrow{\sim} M$$

induit par ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3: $\phi = \phi_{1|M^{\sigma}} = \phi_{2|M^{\sigma}} = \phi_{3|M^{\sigma}}$.

3.2. Supposons que $(\mathcal{M}_1, N_1, \mathcal{N}_1)$ et $(\mathcal{M}_2, N_2, \mathcal{N}_2)$ sont deux triplets de modules vérifiant les hypothèses du corollaire 2 de la proposition 6, et que l'on dispose de morphismes $g : N_1 = M_1 \oplus P_1 \to N_2 = M_2 \oplus P_2$, $g' : \mathcal{N}_1 = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{P}_1 \to \mathcal{N}_2 = \mathcal{M}_2 \oplus \mathcal{P}_2$, $\varphi : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ compatibles, i.e. tels que $g' = g \otimes_{A^{\dagger}_K} \hat{A}_K$ et $\varphi = g'_{|\mathcal{M}_1}$.

PROPOSITION 8. – *Sous les hypothèses* 3.2 *il existe un couple* (M_1, M_2) *de* $A_K^\dagger$*-modules projectifs de type fini, unique à* $A_K^\dagger$*-isomorphisme près, tel que* $\mathcal{M}_i \simeq M_i \otimes_{A_K^\dagger} \hat{A}_K$ *et un unique* $A_K^\dagger$*-morphisme* $f : M_1 \to M_2$ *tel que* $\varphi = f \otimes_{A_K^\dagger} \hat{A}_K$.

Démonstration. – Par le (2) (i) et (ii) du corollaire 2 de la proposition 6. □

Notons $\mathrm{Mod}(\hat{A}_K)$ (resp. $\mathrm{Mod}(A_K^\dagger)$) la catégorie des $\hat{A}_K$-modules (resp. $A_K^\dagger$-modules) projectifs de type fini. Pour un objet $\mathcal{M}$ de $\mathrm{Mod}(\hat{A}_K)$ (resp. M de $\mathrm{Mod}(A_K^\dagger)$) un isomorphisme

$$\hat{\phi} : F_{\hat{A}_K}^*(\mathcal{M}) =: \mathcal{M}^\sigma \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$$

$$\bigl(\text{resp. } \phi^\dagger : F_{A_K^\dagger}^*(M) =: M^\sigma \xrightarrow{\sim} M\bigr)$$

est appelé une structure de Frobenius sur $\mathcal{M}$ (resp. sur M) relativement à $F_{\hat{A}_K}$ (resp. $F_{A_K^\dagger}$). Un morphisme de $\hat{A}_K$-modules (resp. $A_K^\dagger$-modules) projectifs de type fini et structure de Frobenius est un $\hat{A}_K$-morphisme (resp. $A_K^\dagger$-morphisme) qui commute aux structures de Frobenius. On note F^a-$\mathrm{Mod}(\hat{A}_K)$ (resp. F^a-$\mathrm{Mod}(A_K^\dagger)$) la catégorie des $\hat{A}_K$-modules (resp. $A_K^\dagger$-modules) projectifs de type fini et structure de Frobenius.

Par le (2) (iii) du corollaire 2 de la proposition 6 on en déduit :

COROLLAIRE DE LA PROPOSITION 8. –

(1) *Soient* $\mathcal{M}$ *et* $\mathcal{P}$ *deux éléments de* F^a-$\mathrm{Mod}(\hat{A}_K)$, $\mathcal{N} := \mathcal{M} \oplus \mathcal{P}$, *et* N *un élément de* F^a-$\mathrm{Mod}(A_K^\dagger)$ *tels que l'on ait un isomorphisme*

$$\mathcal{N} \simeq N \otimes_{A_K^\dagger} \hat{A}_K$$

dans F^a-$\mathrm{Mod}(\hat{A}_K)$. *Alors il existe* $M \in F^a$-$\mathrm{Mod}(A_K^\dagger)$, *unique à isomorphisme près, tel que*

$$\mathcal{M} \simeq M \otimes_{A_K^\dagger} \hat{A}_K.$$

(2) *Si* $(\varphi, g, g') : (\mathcal{M}_1, N_1, \mathcal{N}_1) \to (\mathcal{M}_2, N_2, \mathcal{N}_2)$ *est un morphisme entre deux tels objets, où* $g' := g \otimes_{A_K^\dagger} \hat{A}_K$, *et si* M_1, M_2 *relèvent* $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ *alors il existe un unique morphisme de* F^a-$\mathrm{Mod}(A_K^\dagger)$, $f : M_1 \to M_2$, *induit par* g', *tel que le morphisme*

$$f' := f \otimes_{A_K^\dagger} \hat{A}_K : \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M}_2$$

de F^a-$\mathrm{Mod}(\hat{A}_K)$ *soit égal à* φ .

4. Descente des connexions

4.1. Soit $(\mathcal{M}, N, \mathcal{N})$ un triplet comme en (3.0) ; avec les notations $i, \tilde{i}, j, \tilde{j}$ de 2.1, supposons que $\mathcal{M}$ soit muni d'une connexion intégrable

$$\nabla_1 : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{C}} \Omega^1_{\mathcal{C}},$$

de même que N et $\mathcal{N}$

$$\nabla_2 : N \longrightarrow N \otimes_{\mathcal{B}} \Omega^1_{\mathcal{B}},$$
$$\nabla_3 : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{D}} \Omega^1_{\mathcal{D}},$$

telles que ∇_3 induise ∇_1 et ∇_2, via i et j respectivement.

PROPOSITION 9. – *Sous les hypothèses précédentes ∇_1 et ∇_2 induisent une connexion intégrable ∇ sur $M = \mathcal{M} \cap N$*

$$\nabla : M \longrightarrow M \otimes_{A^\dagger_K} \Omega^1_{A^\dagger_K}$$

où $\nabla := \nabla_{1|M} = \nabla_{2|M} = \nabla_{3|M}$.

De plus ∇_1 (resp. ∇_2, resp. ∇_3) se déduit de ∇ via l'extension des scalaires $A^\dagger_K \to \mathcal{C}$ (resp. $A^\dagger_K \to \mathcal{B}$, resp. $A^\dagger_K \to \mathcal{D}$), ce que l'on écrit $\nabla_1 = \nabla_{\mathcal{C}}$ (resp. $\nabla_2 = \nabla_{\mathcal{B}}$, resp. $\nabla_3 = \nabla_{\mathcal{D}}$) et $\nabla = \nabla_1 \cap \nabla_2$.

De même, si $\nabla^\sigma := \nabla^{\sigma_{\mathcal{A}}}$ (resp. $\nabla_1^\sigma := \nabla_1^{\sigma_{\mathcal{C}}}$, resp. $\nabla_2^\sigma := \nabla_2^{\sigma_{\mathcal{B}}}$, resp. $\nabla_3^\sigma := \nabla_3^{\sigma_{\mathcal{D}}}$) désigne l'extension de ∇ (resp. ∇_1, resp. ∇_2, resp. ∇_3) via le Frobenius de $A^\dagger_K$ (resp. $\mathcal{C}$, resp. $\mathcal{B}$, resp. $\mathcal{D}$), on a

$$\nabla^\sigma = \nabla_1^\sigma \cap \nabla_2^\sigma$$

et en particulier $\nabla^\sigma = \nabla^\sigma_{1|M^\sigma} = \nabla^\sigma_{2|M^\sigma} = \nabla^\sigma_{3|M^\sigma}$.

Démonstration. – Pour $x \in M = \mathcal{M} \cap N$, on a les égalités

$$\nabla_3\big(i \circ \tilde{i}(x)\big) = i \circ \nabla_1\big(\tilde{i}(x)\big) = \nabla_3\big(j \circ \tilde{j}(x)\big) = j \circ \nabla_2\big(\tilde{j}(x)\big);$$

ici x est identifié à $i \circ \tilde{i}(x) = j \circ \tilde{j}(x)$ et on a donc

$$\nabla_3\big(i \circ \tilde{i}(x)\big) \in i\big(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{C}} \Omega^1_{\mathcal{C}}\big) \cap j\big(N \otimes_{\mathcal{B}} \Omega^1_{\mathcal{B}}\big) \simeq M \otimes_{A^\dagger_K} \Omega^1_{A^\dagger_K},$$

grâce aux propositions 4 et $4'$.

Il suffit de poser $\nabla(x) := \nabla_3(i \circ \tilde{i}(x))$: l'intégrabilité de ∇ résulte de celle de ∇_3 et de l'injectivité de $i \circ \tilde{i} : M \otimes_{A^\dagger_K} \Omega^1_{A^\dagger_K} \hookrightarrow \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{D}} \Omega^1_{\mathcal{D}}$.

Le fait que $\nabla = \nabla_1 \cap \nabla_2$ et $\nabla_1 = \nabla_{\mathcal{C}}$, $\nabla_2 = \nabla_{\mathcal{B}}$, $\nabla_3 = \nabla_{\mathcal{D}}$ est clair d'après la définition de ∇.

On a de même $\nabla^\sigma = (\nabla^\sigma)_{\mathcal{C}} \cap (\nabla^\sigma)_{\mathcal{B}} = (\nabla^\sigma)_{\mathcal{D}|M^\sigma}$; or $(\nabla^{\sigma_{\mathcal{A}}})_{\mathcal{C}} = (\nabla_{\mathcal{C}})^{\sigma_{\mathcal{C}}}$, $(\nabla^{\sigma_{\mathcal{A}}})_{\mathcal{B}} = (\nabla_{\mathcal{B}})^{\sigma_{\mathcal{B}}}$, $(\nabla^{\sigma_{\mathcal{A}}})_{\mathcal{D}} = (\nabla_{\mathcal{D}})^{\sigma_{\mathcal{D}}}$, d'où

$$\nabla^\sigma = \nabla_1^\sigma \cap \nabla_2^\sigma = \nabla^\sigma_{3|M^\sigma}. \qquad \square$$

4.2. Soit $(\mathcal{M}, N, \mathcal{N})$ un triplet de modules, comme au corollaire 2 de la proposition 6, que l'on suppose munis de connexions intégrables

$$\nabla_1 : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} \otimes_{\hat{A}_K} \Omega^1_{\hat{A}_K},$$
$$\nabla_2 : N \longrightarrow N \otimes_{A^\dagger_K} \Omega^1_{A^\dagger_K},$$
$$\nabla_3 : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N} \otimes_{\hat{A}_K} \Omega^1_{\hat{A}_K}$$

telles que ∇_3 induise ∇_1 et ∇_2.

Grâce au corollaire 2 de la proposition 6 on en déduit :

PROPOSITION 9′. – *Sous les hypothèses* 4.2, *on a*

(1) ∇_1 *et* ∇_2 *induisent une connexion intégrable* ∇ *sur* $M = \mathcal{M} \cap N$

$$\nabla : M \longrightarrow M \otimes_{A_K^\dagger} \Omega^1_{A_K^\dagger}$$

où $\nabla := \nabla_{1|M} = \nabla_{2|M} = \nabla_{3|M} = \nabla_1 \cap \nabla_2$.

(2) *De plus* M^σ *est muni d'une connexion intégrable* ∇^σ

$$\nabla^\sigma : M^\sigma \longrightarrow M^\sigma \otimes_{A_K^\dagger} \Omega^1_{A_K^\dagger}$$

vérifiant les égalités $\nabla^\sigma = \nabla^\sigma_{1|M^\sigma} = \nabla^\sigma_{2|M^\sigma} = \nabla^\sigma_{3|M^\sigma} = \nabla^\sigma_1 \cap \nabla^\sigma_2$.

5. F-isocristaux et modules à connexion avec structure de Frobenius

Rappelons que $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}'$ satisfont aux conditions (1.1). Pour les notions sur les F-isocristaux nous renvoyons le lecteur aux articles de Berthelot [4,3,5,6].

5.1. Pour X un k-schéma séparé de type fini on note $F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(X/K)$ (resp. $F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K)$, resp. $F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(X/K)^0$, resp. $F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K)^0$) la catégorie des F^a-isocristaux convergents (resp. surconvergents; resp. convergents unités; resp. surconvergents unités) sur X/K [3, §0.5]. Ici, dire que E est un F^a-isocristal (convergent ou surconvergent) unité signifie que E est un F^a-isocristal (convergent ou surconvergent), de Frobenius $\phi : F^{a*}E \xrightarrow{\sim} E$, tel qu'en tout point géométrique $i_{\bar{x}} : \bar{x} \to X$, toutes les pentes du Frobenius ϕ sont nulles, i.e. il existe une base $\{e_1, \ldots, e_r\}$ de $i^*_{\bar{x}}(E)$ telle que

$$i^*_{\bar{x}}(\phi)(e_\alpha \otimes 1) = e_\alpha.$$

On notera

$$F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K) \to F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(X/K), \qquad E \longmapsto \hat{E} \text{ le foncteur d'oubli.} \tag{5.1.1}$$

Soit $\mathcal{Y}$ (resp. $\mathcal{Y}'$) un $\mathcal{V}$-schéma formel (resp. un $\mathcal{V}'$-schéma formel) de type fini; pour tout carré commutatif

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d, "w"] & \mathcal{Y}' \arrow[d] \\ X \arrow[r] & \mathcal{Y} \end{tikzcd} \tag{5.1.2}$$

on dispose de foncteurs image inverse [5, 2.3.6]

$$w^* : F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(X/K) \longrightarrow F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(X'/K'), \tag{5.1.3}$$

$$w^{\dagger *} : F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K) \longrightarrow F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(X'/K'). \tag{5.1.4}$$

On considérera deux cas particuliers de cette situation.

Celui où $\varphi : X' \to X$ est un k-morphisme, d'où

$$\varphi^* : F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(X/K) \longrightarrow F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(X'/K), \tag{5.1.5}$$

$$\varphi^{\dagger *} : F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K) \longrightarrow F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(X'/K). \tag{5.1.6}$$

Et celui où $\rho : K \hookrightarrow K'$ est tel qu'en 1.1 : pour X un k-schéma, notons X' le k'-schéma, déduit de X par le changement de base $k \hookrightarrow k'$; d'où

(5.1.7) $$\rho^* : F^a\text{-}\operatorname{Isoc}(X/K) \longrightarrow F^a\text{-}\operatorname{Isoc}(X'/K'),$$

(5.1.8) $$\rho^{\dagger *} : F^a\text{-}\operatorname{Isoc}^\dagger(X/K) \longrightarrow F^a\text{-}\operatorname{Isoc}^\dagger(X'/K'),$$

et $\rho^{\dagger *}$ est exact [5, Rq. 2.3.3 (iv)].

5.2. Soit A_0 une k-algèbre lisse relevée, comme en 1.1, en une $\mathcal{V}$-algèbre lisse A. Notons $\operatorname{Conn}(\hat{A}_K)$ (resp. $\operatorname{Conn}^\dagger(A_K^\dagger)$) la catégorie des $\hat{A}_K$-modules (resp. $A_K^\dagger$-modules) projectifs de type fini à connexion intégrable (resp. à connexion intégrable et surconvergente) [42, §2.2].

Pour un objet $(\mathcal{M}, \hat{\nabla})$ (resp. (M, ∇)) de $\operatorname{Conn}(\hat{A}_K)$ (resp. de $\operatorname{Conn}^\dagger(A_K^\dagger)$) un isomorphisme

$$\hat{\phi} : F^*_{\hat{A}_K}(\mathcal{M}) =: \mathcal{M}^\sigma \xrightarrow{\ \sim\ } \mathcal{M}$$

$$\big(\text{resp.}\quad \phi^\dagger : F^*_{A_K^\dagger}(M) =: M^\sigma \xrightarrow{\ \sim\ } M\big)$$

est appelé une structure de Frobenius sur $(\mathcal{M}, \hat{\nabla})$ (resp. sur (M, ∇)) relativement à $F_{\hat{A}_K}$ (resp. $F_{A_K^\dagger}$). Un morphisme de $\hat{A}_K$-modules (resp. de $A_K^\dagger$-modules) projectifs de type fini à connexion intégrable et structure de Frobenius est un $\hat{A}_K$-morphisme (resp. un $A_K^\dagger$-morphisme) horizontal qui commute aux structures de Frobenius. On note $F^a\text{-}\operatorname{Conn}(\hat{A}_K)$ (resp. $F^a\text{-}\operatorname{Conn}^\dagger(A_K^\dagger)$) la catégorie des $\hat{A}_K$-modules (resp. $A_K^\dagger$-modules) projectifs de type fini à connexion intégrable (resp. à connexion intégrable et surconvergente) et structure de Frobenius.

Posons $X = \operatorname{Spec} A_0$. Comme les catégories d'isocristaux convergents définies par Ogus [35] et Berthelot [5] sont équivalentes [5, 2.3.4], on dispose par Ogus [35, 2.15, 2.23] et Crew [12, 1.3.2] de foncteurs exacts à gauche et pleinement fidèles

(5.2.1) $$\operatorname{Isoc}(X/K) \longrightarrow \operatorname{Conn}\big(\hat{A}_K\big),$$

(5.2.2) $$F^a\text{-}\operatorname{Isoc}(X/K) \longrightarrow F^a\text{-}\operatorname{Conn}\big(\hat{A}_K\big).$$

Précisons un peu. Soit $\mathcal{E} \in F^a\text{-}\operatorname{Isoc}(X/K)$; d'après [5, théo. 2.4.2] il existe un F-cristal (de type fini) E non dégénéré sur X et un entier $n \geqslant 0$ tels que $\mathcal{E} \simeq E^{\mathrm{an}}(n)$ (où le Frobenius de $E^{\mathrm{an}}(n)$ est celui de E^{an} multiplié par p^{-n}). Notons $\mathcal{M}'$ un $\hat{A}$-module de type fini associé à E, muni d'une connexion intégrable et topologiquement quasi-nilpotente [8, prop. 1.3.3]. Par l'équivalence des catégories d'isocristaux convergents définies par Ogus et Berthelot, il résulte de [35, theo. 2.15] et [12, 1.3.2] que $\mathcal{M} := \mathcal{M}' \otimes_{\hat{A}} \hat{A}_K$ est un $\hat{A}_K$-module projectif de type fini.

On dispose en outre d'équivalences de catégories [5, 2.5.2, 2.5.7]

(5.2.3) $$\operatorname{Isoc}^\dagger(X/K) \longrightarrow \operatorname{Conn}^\dagger\big(A_K^\dagger\big),$$

(5.2.4) $$F^a\text{-}\operatorname{Isoc}^\dagger(X/K) \longrightarrow F^a\text{-}\operatorname{Conn}^\dagger\big(A_K^\dagger\big).$$

(5.2.5) Soient A_0 une k-algèbre lisse, $\operatorname{Spec} B_0 \to \operatorname{Spec} A_0$ un k-morphisme étale dominant et $\rho : K \to K'$ comme en 1.1 ; on utilise les notations de 1.1, 1.2 et 3 : $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{B}$, resp. $\mathcal{D}$) désigne l'un des anneaux $\hat{A}_{K'}$, $A'^\dagger_K$ ou $\hat{A}'_{K'}$ (resp. $B'^\dagger_K$, $B^\dagger_{K'}$ ou $B^\dagger_K$; resp. $\hat{B}'_{K'}$, $B'^\dagger_{K'}$ ou $\hat{B}'_{K'}$). Pour simplifier l'énoncé de la proposition suivante, la notation $F^a\text{-}\operatorname{Conn}(\mathcal{C})$ désignera $F^a\text{-}\operatorname{Conn}(\hat{A}_K)$ ou $F^a\text{-}\operatorname{Conn}(\hat{A}'_{K'})$ lorsque $\mathcal{C} = \hat{A}_K$ ou $\mathcal{C} = \hat{A}'_{K'}$ et désignera $F^a\text{-}\operatorname{Conn}^\dagger(A'^\dagger_{K'})$ lorsque $\mathcal{C} = A'^\dagger_{K'}$; idem pour $\mathcal{D}$.

PROPOSITION 10. – *Sous les hypothèses* (5.2.5),

(1) *Soient* $\mathcal{M} \in F^a\text{-}\mathrm{Conn}(\mathcal{C})$, $N \in F^a\text{-}\mathrm{Conn}^\dagger(\mathcal{B})$, $\mathcal{N} \in F^a\text{-}\mathrm{Conn}(\mathcal{D})$ *tels que l'on ait des isomorphismes*

$$\mathcal{N} \simeq N \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{D} \simeq \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{C}} \mathcal{D}$$

dans F^a-$\mathrm{Conn}(\mathcal{D})$. *Alors il existe* $M \in F^a\text{-}\mathrm{Conn}^\dagger(A_K^\dagger)$, *unique à isomorphisme près, tel que* $\mathcal{M} \simeq M \otimes_{A_K^\dagger} \mathcal{C}$ *soit un isomorphisme dans* F^a-$\mathrm{Conn}(\mathcal{C})$.

(2) *Si* $(\varphi, g, g') : (\mathcal{M}_1, N_1, \mathcal{N}_1) \to (\mathcal{M}_2, N_2, \mathcal{N}_2)$ *est un morphisme entre deux tels objets, où* $g' := g \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{D}$, *alors il existe un unique morphisme* $f : M_1 \to M_2$, *induit par* g', *tel que le morphisme* $f' := f \otimes_{A_K^\dagger} \mathcal{C} : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ *soit égal à* φ, *et* $f \otimes_{A_K^\dagger} \mathcal{B} : N_1 \to N_2$ *soit égal à* g.

Démonstration de la proposition 10. – Résulte des propositions 7, 8 et 9. En effet, la commutation requise du Frobenius $\phi : M^\sigma \to M$ et de la connexion $\nabla : M \to M \otimes_{A_K^\dagger} \Omega^1_{A_K^\dagger}$ [5, (2.5.8)] résulte de cette commutation pour $\mathcal{M}$ et du fait que $\nabla^\sigma = \nabla^\sigma_{1|M^\sigma}$ [prop. 9]. □

PROPOSITION 10′. –
(1) *Soient* $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{P} \in F^a\text{-}\mathrm{Conn}(\hat{A}_K)$, $N \in F^a\text{-}\mathrm{Conn}^\dagger(A_K^\dagger)$ *tels que l'on ait des isomorphismes*

$$\mathcal{N} \simeq N \otimes_{A_K^\dagger} \hat{A}_K \simeq \mathcal{M} \oplus \mathcal{P}$$

dans F^a-$\mathrm{Conn}(\hat{A}_K)$. *Alors il existe* $M \in F^a\text{-}\mathrm{Conn}^\dagger(A_K^\dagger)$, *unique à isomorphisme près, tel que*

$$\mathcal{M} \simeq M \otimes_{A_K^\dagger} \hat{A}_K.$$

(2) *Si* $(\varphi, g, \varphi \oplus \psi) : (\mathcal{M}_1, N_1, \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{P}_1) \to (\mathcal{M}_2, N_2, \mathcal{M}_2 \oplus \mathcal{P}_2)$ *est un morphisme entre deux tels objets, avec* $\varphi \oplus \psi = g \otimes_{A_K^\dagger} \hat{A}_K$, *alors il existe un unique morphisme* $f : M_1 \to M_2$, *induit par* $\varphi \oplus \psi$, *tel que le morphisme* $f' := f \otimes_{A_K^\dagger} \hat{A}_K : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ *soit égal à* φ.

Démonstration de la proposition 10′. – L'argument est semblable à celui de la démonstration de la proposition 10 : ici aussi on a $\nabla^\sigma = \nabla^\sigma_{1|M^\sigma}$ [prop. 9′ (2)]. □

II. Descente étale des F-isocristaux surconvergents

Soit X un k-schéma séparé de type fini. P. Berthelot a montré que la catégorie $F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K)$ est locale pour la topologie de Zariski sur X [5, 2.1.12, 2.2.11, 2.3.7]. Nous allons établir ici [théorème 1], lorsque X est lisse sur k, que cette catégorie est aussi locale pour la topologie étale sur X.

Soit $f : Y \to X$ un k-morphisme, $p_1, p_2 : Y \times_X Y \rightrightarrows Y$ les deux projections, et $E \in F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(Y/K)$. Une donnée de descente sur E relativement à f est un isomorphisme $p_2^* E \xrightarrow{\sim} p_1^* E$ dans $F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(Y \times_X Y/K)$ satisfaisant des conditions de cocycles dans $F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(Y \times_X Y \times_X Y/K)$. On a de même la notion de donnée de descente portant sur un morphisme de $F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(Y/K)$ et on en déduit une catégorie d'objets et de morphismes de $F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(Y/K)$ munis de données de descente relativement à f. Tout objet ou morphisme de $F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K)$ fournit par image inverse par f un objet ou morphisme de $F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(Y/K)$ muni d'une donnée de descente relativement à f. Nous dirons que $f : Y \to X$ “vérifie la descente pour les F^a-isocristaux surconvergents” si et seulement si le foncteur

$$f^* : F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K) \to \left\{F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(Y/K) \text{ avec données de descente relativement à } f\right\}$$

est une équivalence de catégories.

THÉORÈME 1. – *Soient X un k-schéma lisse séparé, et $f:Y\to X$ un k-morphisme étale surjectif. Alors f vérifie la descente par les F^a-isocristaux surconvergents.*

Démonstration. – Soient k' une clôture algébrique de k et $\rho:K\hookrightarrow K'$ comme en I (1.1) ; on note par un exposant $(\ )'$ les objets ou morphismes déduits du changement de base de k à k' (resp. de K à K') : $X'=X\times_k k'$, $\mathrm{Isoc}(X'/K'),\ldots$. Soient $E_1\in F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(Y/K)$ muni d'une donnée de descente relativement à f, $\hat E_1\in F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(Y/K)$ son image par le foncteur d'oubli [I, (5.1.1)], $E_1'\in F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(Y'/K')$ son image par $\rho_Y^{\dagger *}$ [I, (5.1.8)] et $\hat E_1'\in F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(Y'/K')$ l'image de E_1' par le foncteur d'oubli [I, (5.1.1)]. Puisque k' est parfait le théorème d'Ogus [35, theo. 4.5] nous assure l'existence de $\mathcal{E}'\in F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(X'/K')$, unique à isomorphisme près, tel que $\hat E_1'\simeq f'^*(\mathcal{E}')$. Soit $\mathrm{Spec}\,A_0\hookrightarrow X$ un ouvert dense de X ; il existe un ouvert affine $\mathrm{Spec}\,B_0$ de Y tel que le morphisme $V:=\mathrm{Spec}\,B_0\to\mathrm{Spec}\,A_0=:U$ induit par f soit étale dominant : on relève A_0 en une $\mathcal{V}$-algèbre lisse A et B_0 en une $A^\dagger$-algèbre étale B. On reprend les notations de la proposition 10 : soit $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{N}$, resp. N) le $\hat A'_{K'}$-module (resp. $\hat B'_{K'}$-module, resp. $B^\dagger_K$-module) projectif de type fini correspondant à $\mathcal{E}'$ (resp. à $\hat E_1'$, resp. à E_1). D'après la proposition 10, il existe un unique $A^\dagger_K$-module projectif de type fini M muni d'une connexion intégrable et d'un Frobenius horizontal tel que l'isomorphisme $\mathcal{M}\simeq M\otimes_{A^\dagger_K}\hat A'_{K'}$ soit compatible aux connexions et Frobenius : d'où un F^a-isocristal surconvergent sur (U/K) par l'équivalence de catégories (5.2.4).

Pour les recollements on procède comme suit. Notons $\bar X$ une compactification de X au-dessus de $\mathrm{Spf}\,\mathcal{V}$.

Supposons d'abord qu'il existe un $\mathcal{V}$-schéma formel de type fini P et une $\mathcal{V}$-immersion fermée $\bar X\hookrightarrow P$ tels que P soit lisse sur $\mathrm{Spf}\,\mathcal{V}$ au voisinage de X. Soient U_1, U_2 deux ouverts affines denses de X et V_1, V_2 deux ouverts de Y tels que f induise des morphismes étales dominants $f_i:V_i\to U_i$ comme ci-dessus. Pour $U_1=\mathrm{Spec}\,C_0$ on relève C_0 en une $\mathcal{V}$-algèbre lisse C et on choisit une présentation

$$C=\mathcal{V}[t_1,\ldots,t_n]/(f_1,\ldots,f_r);$$

soit P_1 le complété formel de la fermeture projective de $\mathrm{Spec}\,C$ dans $\mathbb{P}^n_{\mathcal{V}}$ et $\bar U_1$ sa réduction sur k. Notons $\bar X_1$ l'adhérence schématique de U_1 plongé diagonalement dans $\bar X\times_k\bar U_1$, $v_1:\bar X_1\to\bar X$, $w_1:\bar X_1\to\bar U_1$ les morphismes induits par les projections ; les foncteurs

$$v_1^*:\mathrm{Isoc}^\dagger\big(U_1,\bar X/K\big)\longrightarrow\mathrm{Isoc}^\dagger\big(U_1,\bar X_1/K\big)$$

et

$$w_1^*:\mathrm{Isoc}^\dagger\big(U_1,\bar U_1/K\big)\longrightarrow\mathrm{Isoc}^\dagger\big(U_1,\bar X_1/K\big)$$

sont des équivalences de catégories [5, (2.3.5)] et de même pour U_2 avec v_2^*, w_2^*. Par la construction du début on a donc $E_{U_1}\in F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(U_1,\bar U_1/K)$ et $E_{U_2}\in F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(U_2,\bar U_2/K)$ qu'on ramène par les équivalences précédentes en des éléments encore notés

$$E_{U_1}\in F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger\big(U_1,\bar X/K\big),\qquad E_{U_2}\in F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger\big(U_2,\bar X/K\big)$$

et il s'agit de montrer que leurs restrictions E_{12} et E_{21} dans $F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(U_1\cap U_2,\bar X/K)$ sont isomorphes avec condition de cocycles pour effectuer leur recollement dans $F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(X,\bar X/K)$ [5, (2.1.12), (2.3.2)]. En effet, si $j_i:U_i\hookrightarrow\bar X$ (resp. $j_{i\ell}:U_i\cap U_\ell\hookrightarrow\bar X$) est l'immersion canonique, il existe un voisinage strict $\mathcal{U}_i$ de $]U_i[_P$ dans $]\bar X[_P$ et un $\mathcal{O}_{\mathcal{U}i}$-module cohérent $\mathcal{E}_i$ tel que

$E_{U_i} = j_i^\dagger \mathcal{E}_i$ [5, (2.1.10) (i)] ; alors $\mathcal{U}_{12} = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ est un voisinage strict de $]U_1 \cap U_2[_P$ dans $]\bar{X}[_P$ [5, (1.2.10)] et, quitte à rétrécir $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$, on peut supposer que $E_{i\ell} = j_{i\ell}^\dagger \mathcal{E}_{i\ell}$ pour un $\mathcal{O}_{\mathcal{U}_{i\ell}}$-module cohérent $\mathcal{E}_{i\ell}$. Si E_{12} et E_{21} sont isomorphes avec la condition de cocycles, on peut supposer, quitte à rétrécir encore $\mathcal{U}_{12}$, que $\mathcal{E}_{12}$ et $\mathcal{E}_{21}$ sont isomorphes [5, (2.1.10) (ii)] : on peut alors recoller E_{U_1} et E_{U_2} grâce à cet isomorphisme [5, (2.1.12)]. Posons $U_1 \cap U_2 = U = \operatorname{Spec} A_0$; on note g_i le morphisme étale dominant induit par f_i par le changement de base $\operatorname{Spec} A_0 \hookrightarrow U_i$, $g_i : W_i \to U$, $p_i : W = W_1 \times_U W_2 \to W_i$ les projections et

$$h_i = g_i \circ p_i : W = \operatorname{Spec} B_0 \longrightarrow U = \operatorname{Spec} A_0.$$

Désignons par $\mathcal{M}_i$ le $\hat{A}'_{K'}$-module (resp. N_i le $B_K^\dagger$-module) provenant de $\mathcal{E}'$ sur U_i (resp. de E_1 sur V_i) : l'existence de $\mathcal{E}'$ sur (X'/K') (resp. de E_1 sur (Y/K)) fournit un isomorphisme $\mathcal{M}_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_2$ (resp. $N_1 \xrightarrow{\sim} N_2$) compatible aux Frobenius, aux connexions et avec condition de cocycles. Par la proposition 10, il existe alors un isomorphisme $M_1 \xrightarrow{\sim} M_2$ (et donc aussi un isomorphisme $E_{12} \xrightarrow{\sim} E_{21}$) compatible aux Frobenius, aux connexions et avec condition de cocycles sur $U_1 \cap U_2 \cap U_3$. Ainsi les données se recollent et on en déduit un F^a-isocristal surconvergent E sur (X/K) tel que $E_1 \simeq f^*(E)$.

Lorsqu'il n'existe pas de plongement global $\bar{X} \hookrightarrow P$ comme ci-dessus, on procède comme suit. On recouvre X par des ouverts affines et lisses $X_\alpha = \operatorname{Spec} C_{\alpha,0}$, $X = \bigcup_\alpha X_\alpha$. Pour tout α on relève $C_{\alpha,0}$ en une $\mathcal{V}$-algèbre lisse C_α, on choisit une présentation

$$C_\alpha = \mathcal{V}[t_1, \ldots, t_{n_\alpha}]/(f_1, \ldots, f_{r_\alpha})$$

et un relèvement $F_\alpha^\dagger : C_\alpha^\dagger \to C_\alpha^\dagger$ du Frobenius de $C_{\alpha,0}$ comme en I (1.2). Soient P_α le complété formel de la fermeture projective de $\operatorname{Spec} C_\alpha$ dans $\mathbb{P}_{\mathcal{V}}^{n_\alpha}$ et Y_α sa réduction sur k ; le $\mathcal{V}$-schéma formel P_α est lisse au voisinage de X_α, les Y_α se recollent le long des $X_{\alpha\beta} := X_\alpha \cap X_\beta$ et $\bar{X} = \bigcup_\alpha Y_\alpha$ est une compactification de X au-dessus de $\operatorname{Spf} \mathcal{V}$. On pose $Y_{\alpha\beta} := Y_\alpha \cap Y_\beta$, $P_{\alpha\beta} := P_\alpha \times_{\mathcal{V}} P_\beta$; on note $j_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow Y_\alpha$, $j_{\alpha\beta} : X_{\alpha\beta} \hookrightarrow Y_{\alpha\beta}$ les injections, $p_{\alpha\beta} : P_{\alpha\beta} \to P_\alpha$, $q_{\alpha\beta} : P_{\alpha\beta} \to P_\beta$ les projections. D'après [5, (2.3.2) (iii)] il s'agit de prouver l'existence, pour tout α, d'un $j_\alpha^\dagger \mathcal{O}_{]Y_\alpha[_{p_\alpha}}$-module cohérent E_α, muni d'un Frobenius, d'une connexion intégrable et surconvergente, et, pour tous α, β d'un isomorphisme horizontal $p_{\alpha\beta}^* E_\alpha \simeq q_{\alpha_\beta}^* E_\beta$ sur $]Y_{\alpha\beta}[_{P_{\alpha\beta}} = P_{\alpha\beta K}$, ces isomorphismes vérifiant la condition de cocycles et étant compatibles aux Frobenius.

D'après le début de la démonstration on a l'existence, pour tout α, d'un tel E_α ; notons $E_\alpha^\dagger$ le $C_{\alpha K}^\dagger$-module projectif de type fini associé à E_α : il s'agit de recoller. Par le même type d'arguments qu'au début et en utilisant la proposition 10 on a des isomorphismes horizontaux

$$\varphi_{\alpha\beta} : E_\alpha^\dagger \otimes_{C_\alpha^\dagger \xrightarrow[p_{\alpha\beta}]{}} \left(C_\alpha^\dagger \otimes_{\mathcal{V}}^\dagger C_\beta^\dagger\right) \xrightarrow{\sim} \left(C_\alpha^\dagger \otimes_{\mathcal{V}}^\dagger C_\beta^\dagger\right) \xleftarrow[q_{\alpha\beta}]{} \otimes_{C_\beta^\dagger} E_\beta^\dagger$$

$$\left[\text{resp.} \tilde{\varphi}_{\alpha\beta} : F_\alpha^{\dagger *} E_\alpha^\dagger \otimes_{C_\alpha^\dagger \xrightarrow[p_{\alpha\beta}]{}} \left(C_\alpha^\dagger \otimes_{\mathcal{V}}^\dagger C_\beta^\dagger\right) \xrightarrow{\sim} \left(C_\alpha^\dagger \otimes_{\mathcal{V}}^\dagger C_\beta^\dagger\right) \xleftarrow[q_{\alpha\beta}]{} \otimes_{C_\beta^\dagger} E_\beta^\dagger\right]$$

vérifiant la condition de cocycles ; d'où l'existence de E (resp. de F^*E). Si l'on note

$$\phi_\alpha : F_\alpha^{\dagger *} E_\alpha^\dagger \xrightarrow{\sim} E_\alpha^\dagger$$

le Frobenius de $E^\dagger_\alpha$, les isomorphismes $\varphi_{\alpha\beta}$ et $\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}$ s'insèrent, toujours par application de la proposition 10, dans les carrés commutatifs

$$\begin{tikzcd}
E^\dagger_\alpha \otimes_{C^\dagger_\alpha} (C^\dagger_\alpha \otimes^\dagger_{\mathcal{V}} C^\dagger_\beta) \arrow[r, "\sim^{\varphi_{\alpha\beta}}"] & (C^\dagger_\alpha \otimes^\dagger_{\mathcal{V}} C^\dagger_\beta) \otimes_{C^\dagger_\beta} E^\dagger_\beta \\
F^{\dagger *}_\alpha E^\dagger_\alpha \otimes_{C^\dagger_\alpha} (C^\dagger_\alpha \otimes^\dagger_{\mathcal{V}} C^\dagger_\beta) \arrow[u, "\phi_\alpha \otimes_{C^\dagger_\alpha} (1\otimes 1)"] \arrow[r, "\sim", "\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}"'] & (C^\dagger_\alpha \otimes^\dagger_{\mathcal{V}} C^\dagger_\beta) \otimes_{C^\dagger_\beta} F^{\dagger *}_\beta E^\dagger_\beta \arrow[u, "(1\otimes 1)\otimes_{C^\dagger_\beta} \phi_\beta"']
\end{tikzcd}$$

avec condition de cocycles ; d'où une structure de Frobenius sur E : $\phi : F^* E \xrightarrow{\sim} E$.

La descente des morphismes se fait également par le théorème de Ogus [35, theo. 4.5] et la proposition 10. □

THÉORÈME 2. – *Soient X un k-schéma lisse séparé et $f : Y \to X$ un k-morphisme étale, dominant et séparé.*

(1) *Soit $\mathcal{E} \in F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(X/K)$ tel que $f^*(\mathcal{E}) \simeq \hat{E}'$ pour $E' \in F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(Y/K)$. Alors il existe $E \in F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K)$, unique à isomorphisme près, tel que $\mathcal{E} \simeq \hat{E}$ et $E' \simeq f^{\dagger *}(E)$.*

(2) *Si $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont deux tels objets de $F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(X/K)$ et si $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ est tel que $f^*(\varphi) = \hat{g}$ pour $g \in \mathrm{Hom}(E'_1, E'_2)$, alors il existe un unique $h \in \mathrm{Hom}(E_1, E_2)$ tel que $\varphi = \hat{h}$ et $g = f^{\dagger *}(h)$.*

Remarque. – Le théorème 2 signifie que la catégorie $F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K)$ est le produit fibré des catégories $F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(X/K)$ et $F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(Y/K)$ au-dessus de la catégorie $F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(Y/K)$ avec des foncteurs-projection évidents [17, VI, §3].

Démonstration. –

(1) Puisque f est une application ouverte on a une immersion ouverte dominante $j : V = f(Y) \hookrightarrow X$. Par les mêmes arguments que dans la démonstration du théorème 1 on prouve l'existence d'une unique structure (à isomorphisme près) de F^a-isocristal surconvergent sur $j^*(\mathcal{E})$, i.e. $j^*(\mathcal{E}) \simeq \hat{E}'$ pour un $E' \in F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(V/K)$. De plus, pour tout ouvert affine $U = \mathrm{Spec}\, A_0 \overset{\varphi}{\hookrightarrow} X$, il existe une immersion ouverte dominante

$$\theta : W = \mathrm{Spec}\, B_0 \hookrightarrow U \quad \text{qui se factorise en}$$
$$W \hookrightarrow U \cap V \hookrightarrow U; \quad \text{on notera } \psi = \varphi \circ \theta.$$

Avec les notations de la proposition 10, soit $\mathcal{M}$ (resp. N, resp. $\mathcal{N}$) le $\hat{A}_K$-module (resp. $B^\dagger_K$-module, resp. $\hat{B}_K$-module) correspondant à $\varphi^*(\mathcal{E})$ (resp. $\theta^{\dagger *}(E')$, resp. à $\psi^*(\mathcal{E})$). Par la proposition 10, il existe un unique $M \in F^a\text{-}\mathrm{Conn}^\dagger(A^\dagger_K)$ tel que $\mathcal{M} \simeq M \otimes_{A^\dagger_K} \hat{A}_K$. Toujours par la proposition 10 et les arguments de la démonstration du théorème 1 ces données se recollent pour les différents U ; d'où un F^a-isocristal surconvergent sur (X/K) [5, 2.1.12, 2.2.11, 2.3.7].

(2) Pour les morphismes l'argument est semblable. □

THÉORÈME 2′. – *Soient $k \hookrightarrow k'$ une extension de corps de caractéristique p, $\rho : K \hookrightarrow K'$ comme en* I (1.1)*, X un k-schéma lisse et séparé et X' le k'-schéma déduit de X par le changement de base de k à k'.*

(1) *Soit $\mathcal{E} \in F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(X/K)$ tel que $\rho^*(\mathcal{E}) \simeq \hat{E}'$ pour $E' \in F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(X'/K')$. Alors il existe $E \in F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K)$, unique à isomorphisme près, tel que $\mathcal{E} \simeq \hat{E}$ et $E' \simeq \rho^{\dagger *}(E)$.*

(2) *Si $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont deux tels objets de $F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(X/K)$ et si $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ est tel que $\rho^*(\varphi) = \hat{g}$ pour $g \in \mathrm{Hom}(E'_1, E'_2)$ alors il existe un unique $h \in \mathrm{Hom}(E_1, E_2)$ tel que $\varphi = \hat{h}$ et $g = \rho^{\dagger *}(h)$.*

Remarque. – Le théorème 2′ signifie que la catégorie F^a-$\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K)$ est le produit fibré des catégories F^a-$\mathrm{Isoc}(X/K)$ et F^a-$\mathrm{Isoc}^\dagger(X'/K')$ au-dessus de la catégorie F^a-$\mathrm{Isoc}(X'/K')$ avec des foncteurs-projection évidents [17, VI, §3].

Démonstration. –

(1) Soient $U = \operatorname{Spec} A_0 \overset{\varphi}{\hookrightarrow} X$ un ouvert affine, $A_0' := A_0 \otimes_k k'$, $\theta : \operatorname{Spec} A_0' \to \operatorname{Spec} A_0$ et $\psi = \varphi \circ \theta$. Avec les notations de la proposition 10, soit $\mathcal{M}$ (resp. N, resp. $\mathcal{N}$) le $\hat{A}_K$-module (resp. $A'^{\dagger}_{K'}$-module, resp. $\hat{A}'_{K'}$-module) correspondant à $\varphi^*(\mathcal{E})$ (resp. à $\theta^{\dagger *}(E')$, resp. à $\psi^*(\mathcal{E})$). Par la proposition 10, il existe un unique $M \in F^a$-$\mathrm{Conn}^\dagger(A^\dagger_K)$ tel que $\mathcal{M} \simeq M \otimes_{A^\dagger_K} \hat{A}_K$. Comme dans la démonstration du théorème 2 ces données se recollent pour les différents U, d'où un F^a-isocristal surconvergent sur (X/K) [5, 2.1.12, 2.2.11, 2.3.7].

(2) Pour les morphismes l'argument est semblable. □

THÉORÈME 2″. – *Soient $k \hookrightarrow k'$ une extension de corps de caractéristique p, $\rho : K \hookrightarrow K'$ comme en* I (1.1)*, X un k-schéma lisse et séparé, $f : Y \to X$ un k-morphisme étale dominant et séparé et $f' : Y' \to X'$ déduit de f par le changement de base de k à k'.*

(1) *Soit $\mathcal{M} \in F^a$-$\mathrm{Isoc}^\dagger(X'/K')$ tel que $f'^{\dagger *}(\mathcal{M}) \simeq \rho_Y^{\dagger *}(N)$ pour $N \in F^a$-$\mathrm{Isoc}^\dagger(Y/K)$. Alors il existe $M \in F^a$-$\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K)$, unique à isomorphisme près, tel que $\mathcal{M} \simeq \rho_X^{\dagger *}(M)$ et $N \simeq f^{\dagger *}(M)$.*

(2) *Si $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ sont deux tels objets de F^a-$\mathrm{Isoc}^\dagger(X'/K')$ et si $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ est tel que $f'^{\dagger *}(\varphi) = \rho_Y^{\dagger *}(g)$ pour $g \in \mathrm{Hom}(N_1, N_2)$ alors il existe un unique $h \in \mathrm{Hom}(M_1, M_2)$ tel que $\varphi = \rho_X^{\dagger *}(h)$ et $g = f^{\dagger *}(h)$.*

Remarque. – Le théorème 2″ signifie que la catégorie F^a-$\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K)$ est le produit fibré des catégories F^a-$\mathrm{Isoc}^\dagger(X'/K')$ et F^a-$\mathrm{Isoc}^\dagger(Y/K)$ au-dessus de la catégorie F^a-$\mathrm{Isoc}^\dagger(Y'/K')$ avec des foncteurs-projection évidents [17, VI, §3]. Compte tenu des théorèmes 2, 2′ et 2″ la catégorie F^a-$\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K)$ est aussi donnée par les produits fibrés

$$\begin{aligned} F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K) &\simeq F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(X/K) \times_{F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(Y'/K')} F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(Y'/K') \\ &\simeq F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(X'/K') \times_{F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(Y'/K')} F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(Y/K). \end{aligned}$$

Démonstration. – Comme précédemment pour les théorèmes 2 et 2′. □

THÉORÈME 3. – *Soient X un k-schéma lisse séparé et $f : Y \to X$ un k-morphisme propre surjectif, génériquement étale* (*i.e. il existe un ouvert dense $U \subset X$ tel que $f_{|U} : Y_{|U} \to U$ soit étale*)*. Alors f vérifie la descente pour les F^a-isocristaux surconvergents.*

Démonstration. – Avec les notations utilisées dans la démonstration du théorème 1, le théorème d'Ogus [35, theo. 4.6] appliqué au corps parfait k' fournit $\mathcal{E}' \in F^a$-$\mathrm{Isoc}(X'/K')$, unique à isomorphisme près, tel que $\hat{E}_1' \simeq f'^*(\mathcal{E}')$. Désignons par $U \subset X$ un ouvert dense tel que $F_U : Y_U \to U$ soit étale et notons $E_{1U} \in F^a$-$\mathrm{Isoc}^\dagger(Y_U/K)$ la restriction de E_1. Compte tenu de l'équivalence de catégories [Rq. du théo. 2″]

$$F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K) \simeq F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(X'/K') \times_{F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(Y_U'/K')} F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(Y_U/K)$$

et de l'existence de $\mathcal{E}'$ et E_{1U}, on en déduit l'existence de $E \in F^a$-$\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K)$, unique à isomorphisme près, tel que $\mathcal{E}' \simeq \hat{E}'$.

La descente des morphismes se fait de manière analogue. □

THÉORÈME 4. – *Soient k un corps de caractéristique p, X un k-schéma lisse et séparé, et $j:U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte telle que U soit dense dans X. Alors le foncteur de restriction*

$$j^{\dagger *}: F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K) \to F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(U/K)$$

est pleinement fidèle.

Démonstration. – Soient E_1, $E_2 \in F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K)$, $E'_i = j^{\dagger *}(E_i)$ pour $i = 1,2$ et $g \in \mathrm{Hom}(E'_1, E'_2)$. Notons k' une clôture algébrique de k, $\rho: K \hookrightarrow K'$ comme en (1.1) et X' (resp. $j': U' \hookrightarrow X'$) déduit de X (resp. de j) par extension de k à k'. Désignons par

$$\mathcal{E}_i = \rho^*(E_i) \in F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(X'/K'),$$

par $\mathcal{E}'_i \in F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(U'/K')$ l'image de E'_i par le composé du foncteur d'oubli et du foncteur ρ^*, et par $\hat{g}' \in \mathrm{Hom}(\mathcal{E}'_1, \mathcal{E}'_2)$ l'image de g. Puisque k' est parfait il existe d'après Tsuzuki [41, theo. 6.3.1] un unique $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ tel que $j'^*(\varphi) = \hat{g}$ où j'^* est le foncteur de restriction [I, (5.1.5)]

$$j'^*: F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(X'/K') \to F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(U'/K').$$

On conclut par le (2) du théorème 2″. □

THÉORÈME 5. – *Soient k un corps de caractéristique p et X un k-schéma lisse et séparé. Alors le foncteur d'oubli*

$$F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K)^0 \longrightarrow F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(X/K)^0$$

est pleinement fidèle.

Remarque. – Tsuzuki a démontré le cas particulier de ce théorème où k est parfait et X admet une compactification lisse [41, theo. 1.2.2 ou cor. 6.6.2].

Démonstration. – Le théorème suivant de A. J. de Jong [27, theo. 4.1] permet, au vu des théorèmes 3 et 2′, de se ramener au cas traité par Tsuzuki :

THÉORÈME (de Jong [27, theo. 4.1]). – *Soient k' un corps parfait et X' un k'-schéma séparé de type fini et intègre. Alors il existe un k'-schéma projectif lisse et connexe Y, un ouvert $U' \subset Y$ et un morphisme propre surjectif et génériquement étale $f: U' \to X'$.*

Démonstration. – Soient k' une clôture algébrique de k, $\rho: K \to K'$ comme en I (1.1) et $X' = X \times_k k'$. On a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K)^0 \arrow[r, "\rho^{\dagger *}"] \arrow[d] & F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(X'/K')^0 \arrow[d] \\
F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(X/K)^0 \arrow[r, "\rho^*"'] & F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(X'/K')^0.
\end{tikzcd}$$

Donnons-nous M_1, $M_2 \in F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K)^0$, $N_i = \rho^{\dagger *}(M_i)$, $\mathcal{M}_i = \hat{M}_i$, $\mathcal{N}_i = \hat{N}_i$ et $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$; notons $g' = \rho^*(\varphi)$. Si l'on peut construire $g \in \mathrm{Hom}(N_1, N_2)$ le théorème 2′ achèvera la démonstration. Pour cette construction on peut supposer X' connexe [5, Remarque après 2.2.11 et 2.3.2]. Avec les notations du théorème de de Jong le schéma U' est lisse sur le corps parfait k' et admet la compactification lisse Y : d'après Tsuzuki [41, theo. 1.2.2 ou cor. 6.6.2] le foncteur d'oubli $F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(U'/K')^0 \to F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(U'/K')^0$ est pleinement fidèle. Or on dispose d'équivalences de catégories [théorème 3] et [35, theo. 4.6] :

$$\begin{aligned} f^{\dagger *} : & F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(X'/K')^0 \\ & \to \left\{F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(U'/K')^0 \text{ avec données de descente relativement à } f\right\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f^{*} : & F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(X'/K')^0 \\ & \to \left\{F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(U'/K')^0 \text{ avec données de descente relativement à } f\right\}. \end{aligned}$$

Le théorème 5 en résulte immédiatement. $\square$

COROLLAIRE 1. – *Soient k un corps de caractéristique p, X un k-schéma lisse et séparé et $U \hookrightarrow X$ une immersion ouverte telle que U soit dense dans X. Alors le foncteur naturel*

$$F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K)^0 \to F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(U/K)^0$$

est pleinement fidèle.

Démonstration. – C'est une conséquence directe des théorèmes 4 et 5. $\square$

Etant donnés les théorèmes 4 et 5, de pleine fidélité, la remarque qui suit le théorème 2 fournit ici :

COROLLAIRE 2. – *Sous les hypothèses du corollaire 1, la catégorie $F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K)^0$ est l'intersection, dans la catégorie $F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(U/K)^0$, des catégories $F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(U/K)^0$ et $F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(X/K)^0$.*

THÉORÈME 6. – *Soit X un k-schéma lisse et séparé.*
(1) *Soient $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \in F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(X/K)$ tels que $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2 \simeq \hat{E}$ pour $E \in F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K)$. Alors il existe E_1, $E_2 \in F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K)$, uniques à isomorphisme près, tels que*

$$\mathcal{E}_i \simeq \hat{E}_i, \quad i = 1,2 \quad \textit{et} \quad E \simeq E_1 \oplus E_2.$$

(2) *Si $\mathcal{E} \simeq \mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}' \simeq \mathcal{E}'_1 \oplus \mathcal{E}'_2$ sont deux tels objets et si $\varphi \oplus \psi \in \mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ est tel qu'il existe $g \in \mathrm{Hom}(E, E')$ avec $\hat{g} = \varphi \oplus \psi$, alors pour $i = 1,2$ il existe un unique $f_i \in \mathrm{Hom}(E_i, E'_i)$ tel que*

$$g = f_1 \oplus f_2 \quad \textit{et} \quad \varphi \oplus \psi = f_1 \widehat{\oplus} f_2.$$

Démonstration. – La démonstration est analogue à celle du théorème 2′ : ici on utilise la proposition 10′. $\square$

III. Schémas abéliens

1. F-isocristaux surconvergents associés aux schémas abéliens

Si S est un schéma et $X \to S$ un S-schéma abélien, le schéma abélien dual $X^\vee$ de X existe toujours [7, II 5.1], [24, pp. 3–7] ou [34, cor. 6.8]. Pour $m \in \mathbb{N}$, on note

$$X[m] := \mathrm{Ker}\{m : X \to X\}.$$

Considérons le foncteur contravariant

$$\mathcal{A}_{g,d,n} : \{\text{schémas}\} \to \{\text{ensembles}\}$$

qui à tout schéma S associe l'ensemble $\mathcal{A}_{g,d,n}(S)$ des classes d'isomorphismes de triplets $(X/S, \lambda, \sigma)$ où X est un S-schéma abélien de dimension $g, \lambda : X \to X^\vee$ une polarisation de degré d^2 et $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{2g})$ est constitué de $2g$ éléments de $X[n](S)$ qui induisent un isomorphisme

$$X[n] \simeq (\underline{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}})^{2g} \quad \text{au-dessus de } S.$$

Si $n \geqslant 3$ le foncteur $\mathcal{A}_{g,d,n}$ est représenté par un schéma $A_{g,d,n}$ lisse sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[1/nd]$ [10, theo. 1.4]. Si $n > 6^g.d\ \sqrt{g!}$ le foncteur $\mathcal{A}_{g,d,n}$ est représenté par un schéma $A_{g,d,n}$ quasi-projectif sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ [34, theo. 7.9].

Dans le reste de cet article nous supposerons que l'indice de ramification e de $\mathcal{V}$ satisfait la relation $e \leqslant p-1$.

THÉORÈME 7. – *Soient S un k-schéma lisse séparé et $f : X \to S$ un schéma abélien au-dessus de k de dimension g ; notons $\mathcal{O}_{X/K}$ le faisceau structural* [5, 2.3.8 (i)]. *Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $R^i f_{\mathrm{rig}*}(\mathcal{O}_{X/K})$ a une structure de F^a-isocristal surconvergent.*

Démonstration. – Puisque S est lisse il est normal et donc géométriquement unibranche [26, IV, 6.15.1] et [26, 0_{IV}, 23.2.1] ; par un théorème de Grothendieck [39, théo. XI, 1.4] et [24, p. 3] on sait alors que le schéma abélien $f : X \to S$ est projectif. Par suite il existe sur X un faisceau inversible f-ample [26, II, 5.3.1], d'où une polarisation $X \to X^\vee$ [34, chap. 6, §2] de degré noté d^2.

Soit $\ell \geqslant 3$ un nombre premier distinct de p, $\ell > 6^g.d\ \sqrt{g!}$. Pour tout S-schéma Z on note $(\underline{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}})^{2g}_Z$ le schéma en groupes fini étale constant sur Z et $X[\ell]_Z := X[\ell] \times_S Z$, qui est aussi fini étale sur Z. Le foncteur $\mathcal{F} := \underline{\mathrm{Isom}}_S((\underline{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}})^{2g}_S,\ X[\ell])$ qui à tout S-schéma Z associe $\mathrm{Isom}_Z((\underline{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}})^{2g}_Z, X[\ell]_Z)$ est représentable par un S-schéma fini étale galoisien $\rho : S' \to S$ de groupe $G = GL_{2g}(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ [25, §4 p. 20] et [16, X 5.10, X 4.2, VIII 1.6]. En particulier

$$\mathrm{Isom}_{S'}((\underline{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}})^{2g}_{S'}, X[\ell]_{S'}) = \mathcal{F}(S') \simeq \mathrm{Hom}_S(S', S')$$

est non vide puisqu'il contient l'isomorphisme correspondant à l'identité de S' ; donc $f' : X' := X \times_S S' \to S'$ est un S'-schéma abélien de dimension g, muni d'une polarisation (image inverse de celle de X) de degré d^2 et d'un isomorphisme

$$(\underline{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}})^{2g}_{S'} \simeq X'[\ell].$$

Ainsi $X' \in \mathcal{A}_{g,d,\ell}(S') \simeq \mathrm{Hom}(S', A_{g,d,\ell})$. Comme X (resp. X') est un schéma abélien, les faisceaux $R^i f_{\mathrm{cris}*}(\mathcal{O}_{X/\mathcal{V}}) = \Lambda^i R^1 f_{\mathrm{cris}*}(\mathcal{O}_{X/\mathcal{V}})$ (resp. $R^i f'_{\mathrm{cris}*}(\mathcal{O}_{X'/\mathcal{V}})$) sont des F^a-cristaux localement libres de type fini non dégénérés [7, 2.5.5] : grâce à la construction de Berthelot [5, 2.4] on peut leur associer des F^a-isocristaux convergents, notés $R^i f_{\mathrm{rig}*}(\mathcal{O}_{X/K})$ (resp. $R^i f'_{\mathrm{rig}*}(\mathcal{O}_{X'/K})$), car $e \leqslant p-1$. Soit $h : \mathfrak{X} \to A_{g,d,\ell}$ le schéma abélien universel sur $A_{g,d,\ell}$: $\mathfrak{X}$ est l'image de l'identité de $A_{g,d,\ell}$ dans la bijection

$$\mathrm{Hom}(A_{g,d,\ell}\,; A_{g,d,\ell}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_{g,d,\ell}(A_{g,d,\ell}).$$

Notons

$$h_{\mathcal{V}} := \mathfrak{X}_{\mathcal{V}} = \mathfrak{X} \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \operatorname{Spec}\mathcal{V} \longrightarrow (A_{g,d,\ell})_{\mathcal{V}} = A_{g,d,\ell} \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \operatorname{Spec}\mathcal{V}$$

et

$$h_0 := \mathfrak{X}_0 = \mathfrak{X} \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \operatorname{Spec} k \longrightarrow (A_{g,d,\ell})_0 = A_{g,d,\ell} \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} \operatorname{Spec} k,$$

les images inverses de h sur $\mathcal{V}$ et k respectivement. Le morphisme $S' \to A_{g,d,\ell}$, qui provient de l'existence d'une structure de niveau ℓ sur X', se factorise en

$$S' \xrightarrow{\varphi} (A_{g,d,\ell})_0 \longrightarrow A_{g,d,\ell}$$

et $f' : X' \to S'$ est l'image inverse de h_0 par φ. Comme il est rappelé par Crew dans [13] la cohomologie rigide relative d'un schéma abélien est compatible au changement de base, donc on a

$$R^i f'_{\mathrm{rig}*}(\mathcal{O}_{X'/K}) \simeq \varphi^*\big(R^i h_{0\mathrm{rig}*}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}_0/K})\big)$$
$$\big(\text{resp. } R^i f'_{\mathrm{rig}*}(\mathcal{O}_{X'/K}) \simeq \rho^*(R^i f_{\mathrm{rig}*}\big(\mathcal{O}_{X/K})\big)\big)$$

où φ^* (resp. ρ^*) est le morphisme image inverse [I, 5.1.2].

Les schémas abéliens

$$\big(\mathfrak{X}_0 \times \mathfrak{X}_0^\vee\big)^4 := \big(\mathfrak{X}_0 \times_{(A_{g,d,\ell})_0} \mathfrak{X}_0^\vee\big) \times_{(A_{g,d,\ell})_0} \cdots \times_{(A_{g,d,\ell})_0} \big(\mathfrak{X}_0 \times_{(A_{g,d,\ell})_0} \mathfrak{X}_0^\vee\big) \longrightarrow (A_{g,d,\ell})_0$$

et $Y := (X' \times_{S'} X'^\vee)^4 \xrightarrow{\tilde{f}'} S'$ sont munis d'une polarisation principale d'après un lemme de Zarhin ("Zarhin's trick", [30, chap. IX, lemme 1.1]). Désignons par $\tilde{h} : \tilde{\mathfrak{X}} \to A_{8g,1,\ell}$ le schéma abélien universel et $\tilde{h}_{\mathcal{V}} := \tilde{h} \times_{\mathbb{Z}} \mathcal{V}$, $\tilde{h}_0 := \tilde{h} \times_{\mathbb{Z}} k$ comme ci-dessus ; il existe donc une flèche $(A_{g,d,\ell})_0 \xrightarrow{\psi} (A_{8g,1,\ell})_0$ rendant cartésien le carré

$$\begin{tikzcd}
(\mathfrak{X}_0 \times \mathfrak{X}_0^\vee)^4 \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{\mathfrak{X}}_0 \arrow[d, "\tilde{h}_0"] \\
(A_{g,d,\ell})_0 \arrow[r, "\psi"] & (A_{8g,1,\ell})_0
\end{tikzcd}$$

où cette fois $(A_{8g,1,\ell})_0$ admet le relèvement lisse $(A_{8g,1,\ell})_{\mathcal{V}}$ sur $\mathcal{V}$: grâce à un théorème de Berthelot [4, théo. 5], $R^i\tilde{h}_{0\mathrm{rig}*}(\mathcal{O}_{\tilde{\mathfrak{X}}_0/K})$ a une structure de F^a-isocristal surconvergent sur $(A_{8g,1,\ell})_0/K$, i.e. est dans l'image essentielle du foncteur d'oubli [I, 5.1.1]

$$F^a\text{-}\operatorname{Isoc}^\dagger\big((A_{8g,1,\ell})_0/K\big) \longrightarrow F^a\text{-}\operatorname{Isoc}\big((A_{8g,1,\ell})_0/K\big).$$

Ainsi, par image inverse par $\psi \circ \varphi$ [I, 5.1.6], $R^i\tilde{f}'_{\mathrm{rig}*}(\mathcal{O}_{Y/K}) \simeq (\psi\circ\varphi)^*(R^i\tilde{h}_{0\mathrm{rig}*}(\mathcal{O}_{\tilde{\mathfrak{X}}_0/K}))$ a une structure de F^a-isocristal surconvergent sur (S'/K) ; par suite, $R^i f'_{\mathrm{rig}*}(\mathcal{O}_{X'/K})$, qui est un facteur direct de $R^i\tilde{f}'_{\mathrm{rig}*}(\mathcal{O}_{Y/K})$, a aussi une structure de F^a-isocristal surconvergent sur (S'/K) [théo. 6] : dans le cas $i = 1$, $R^1 f'_{\mathrm{rig}*}(\mathcal{O}_{X'/K})$ est le F^a-isocristal convergent associé au cristal de Dieudonné $\mathbb{D}(X')$ de X' [7] et $R^1\tilde{f}'_{\mathrm{rig}*}(\mathcal{O}_{Y/K})$ est le F^a-isocristal convergent associé à $(\mathbb{D}(X') \oplus \mathbb{D}(X')^\vee)^4$, où $\mathbb{D}(X')^\vee$ est le dual linéaire de $\mathbb{D}(X')$ [7, 5.1.8].

Le théorème 2 fournit alors la surconvergence de $R^i f_{\mathrm{rig}*}(\mathcal{O}_{X/K})$ car $\rho : S' \to S$ est fini étale surjectif. $\square$

2. Fonctions L des schémas abéliens

Dans ce paragraphe 2, k est un corps fini $k = \mathbb{F}_q$, $q = p^a$, $\bar{k}$ une clôture algébrique de k, $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k, K le corps des fractions de W ; on notera par $\bar{(\ )}$ l'image inverse sur $\bar{k}$ d'un objet sur k.

On se donne un schéma $S \to \operatorname{Spec} k$ séparé de type fini sur k, de dimension d et $f : X \to S$ un schéma abélien de dimension g : on étend ci-dessous le théorème 3 de [21] sans supposer l'existence d'une polarisation sur le schéma abélien.

Notons $\varphi \in \operatorname{Gal}(\bar{k}/k)$ le Frobenius arithmétique $x \longmapsto x^q$ et $|S|$ l'ensemble des points fermés de S : pour $s \in |S|$, de degré $\deg s = [k(s) : \mathbb{F}_q]$, on choisit $\bar{s} \in |\bar{S}|$ d'image s et on note $\overline{k(s)} \simeq \bar{k}$ une clôture algébrique de $k(s)$, $X_s = X \times_S k(s)$, $X_{\bar{s}} \simeq X \times_S \overline{k(s)}$; pour tout entier i l'itéré $\varphi^{-\deg s}$ de φ^{-1} induit, pour tout ℓ 1[er], un endomorphisme F_s de $H^i_{\text{ét}}(X_{\bar{s}}, \mathbb{Q}_\ell) \simeq R^i f_{\text{ét}*}(\mathbb{Q}_\ell)_{\bar{s}}$.

Puisque $E = R^i f_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X/W})$ est un F-cristal localement libre de rang fini on a de même un endomorphisme F_s de $E_s = H^i_{\text{cris}}(X_s/W(k(s)))$ et les fonctions L de $R^i f_{\text{ét}*}(\mathbb{Q}_\ell)$ et $R^i f_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X/W})$ coïncident pour $\ell \neq p$ [21, III] :

$$\begin{aligned} L\big(S, R^i f_{\text{ét}*}(\mathbb{Q}_\ell), t\big) &:= \prod_{s \in |S|} \det\big(1 - t^{\deg s} F_s \mid R^i f_{\text{ét}*}(\mathbb{Q}_\ell)_{\bar{s}}\big)^{-1} \\ &= \prod_{s \in |S|} \det\big(1 - t^{\deg s} F_s \mid E_s\big)^{-1} \\ &=: L\big(S, R^i f_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X/W}), t\big). \end{aligned}$$

Si S est lisse sur k, $R^i f_{\text{rig}*}(\mathcal{O}_{X/K})$ est un F-isocristal surconvergent [théorème 7] ; on démontre alors le théorème suivant comme le théorème 3 de [21].

THÉORÈME 8. – *Soient S un schéma séparé de type fini de dimension d sur $\mathbb{F}_q$, $f : X \to S$ un schéma abélien de dimension g. Alors, pour tout entier i, $0 \leqslant i \leqslant 2g$, on a* :

(1) $L(S, R^i f_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X/W}), t) \in \mathbb{Q}(t)$;

(2) *Si de plus S est lisse sur $\mathbb{F}_q$, alors*

(2.1) $R^i f_{\text{rig}*}(\mathcal{O}_{X/K})$ *est un F-isocristal surconvergent,*

(2.2)

$$L\big(S, R^i f_{\text{cris}*}(\mathcal{O}_{X/W}), t\big) = \prod_{j=0}^{2d} \det{}_K\big(1 - tF \mid H^j_{\text{rig},c}\big(S, R^i f_{\text{rig}*}(\mathcal{O}_{X/K})\big)\big)^{(-1)^{j+1}}.$$

Remerciements

Je remercie l'Université de Münster qui m'a donné l'occasion d'exposer ces travaux en avril 2000 lors du groupe de travail "Rigid Geometry and Applications" ainsi que les auditeurs pour leurs questions stimulantes, et plus particulièrement Y. André, C.L. Chai, B. Le Stum, B. Chiarellotto et N. Tsuzuki. Mes remerciements vont aussi à Yvette Brunel pour la frappe du manuscrit, et au referee dont les remarques m'ont amené à préciser la rédaction en plusieurs endroits.

RÉFÉRENCES

[1] AMICE Y., *Les nombres p-adiques*, PUF, 1975.

[2] ARTIN M., GROTHENDIECK A., VERDIER J.-L., *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas, Tome 3*, in : Lecture Notes in Math., Vol. **305**, Springer, 1973.

[3] BERTHELOT P., Cohomologie rigide et théorie de Dwork : le cas des sommes exponentielles, in : *Cohomologie p-adique*, in : Astérisque, Vol. **119–120**, SMF, 1984.

[4] BERTHELOT P., Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique p, in : *Bulletin de la SMF, mémoire n° 23, tome 114/fasc.2*, 1986, pp. 7–32.

[5] BERTHELOT P., *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres*, Prépublication 96-03 de Rennes, 1996.

[6] BERTHELOT P., Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide, *Invent. Math.* **128** (1997) 329–377.

[7] BERTHELOT P., BREEN L., MESSING W., *Théorie de Dieudonné cristalline II*, in : Lecture Notes in Math., Vol. **930**, Springer, 1982.

[8] BERTHELOT P., MESSING W., *Théorie de Dieudonné cristalline III : théorèmes d'équivalence et de pleine fidélité*, in : The Grothendieck Festschrift Vol. I, Progress in Math., Vol. **86**, Birkhäuser, 1990.

[9] BOURBAKI N., Algèbre commutative, chap. I à X.

[10] CHAI C.L., Siegel moduli schemes and their compactifications over $\mathbb{C}$, in: *Arithmetic Geometry, Cornell, Silverman*, Springer, 1986.

[11] CHIARELLOTTO B., TSUZUKI N., *Cohomological descent of rigid cohomolgy for etale coverings*, preprint, janvier 2001.

[12] CREW R., F-isocrystals and p-adic representations, in: *Algebraic Geometry Bowdoin 1985*, in: Proceedings of Symposia in Pure Math., Vol. **46**, 1987, pp. 111–138.

[13] CREW R., The p-adic monodromy of a generic abelian scheme in characteristic p, *Contemporary Math.* **133** (1992).

[14] DELIGNE P., La conjecture de Weil I, *Publ. Math IHES* **43** (1974) 273–308.

[15] DELIGNE P., La conjecture de Weil II, *Publ. Math. IHES* **52** (1980) 137–252.

[16] DEMAZURE M., GROTHENDIECK A., *Schémas en groupes II*, in : Lecture Notes in Math., Vol. **152**, Springer, 1970.

[17] GROTHENDIECK A., *Revêtements étales et groupe fondamental*, in : Lecture Notes in Math., Vol. **224**, Springer, 1971.

[18] ELKIK R., Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4e série* **6** (1973) 553–604.

[19] ÉTESSE J.-Y., Rationalité et valeurs de fonctions L en cohomologie cristalline, *Annales Inst. Fourier* **38** (4) (1988) 33–92.

[20] ÉTESSE J.-Y., Relèvement de schémas et algèbres de Monsky–Washnitzer : théorèmes d'équivalence et de pleine fidélité, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* **107** (2002) 111–138.

[21] ÉTESSE J.-Y., Relèvement de schémas abéliens, F-isocristaux et fonctions L, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **535** (2001) 51–63.

[22] ÉTESSE J.-Y., *F-isocristaux convergents et fonctions L : la conjecture de Dwork pour la fonction zêta-unité*, preprint Rennes, juin 2000.

[23] ÉTESSE J.-Y., LE STUM B., Fonctions L associées aux F-isocristaux surconvergents I : interprétation cohomologique, *Math. Annalen* **296** (1993) 557–576.

[24] FALTINGS G., CHAI C.L., *Degeneration of abelian varieties*, in : Ergebnisse der Math., 3 Folge, Vol. **22**, Springer, 1990.

[25] GROTHENDIECK A., Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. IV : les schémas de Hillbert, in : *Sém. Bourbaki, exp. n° 221 (mai 1961)*, Réédition, in : Collection Hors Série Société Mathématique de France, Vol. **6**, 1995, pp. 249–276.

[26] GROTHENDIECK A., J. DIEUDONNÉ J., *Eléments de Géométrie Algébrique*, chap. I (Springer, Coll. Grundlehren 166) ; chap. II, III, IV (*Publ. Math. IHES*, **8**, **11**, **17**, **20**, **24**, **28**, **32**).

[27] DE JONG A.J., Smoothness, semi-stability and alterations, *Publ. Math. IHES* **83** (1996) 51–93.

[28] KATZ N., MESSING W., Some consequences of the Riemann hypothesis for varieties over finite fields, *Invent. Math.* **23** (1974) 73–77.

[29] KNUS M.-A., OJANGUREN M., *Théorie de la descente et algèbres d'Azumaya*, in : Lecture Notes in Math., Vol. **389**, Springer, 1974.

[30] MORET-BAILLY L., *Pinceaux de variétés abéliennes*, in : Astérisque, Vol. **129**, SMF, 1985.

[31] MILNE J.-S., *Etale Cohomology*, Princeton University Press, 1980.

[32] MILNE J.-S., Jacobian varieties, in: *Arithmetic Geometry, Cornell, Silverman*, Springer, 1986.

[33] MONSKY P., WASHNITZER G., Formal cohomology I, *Annals of Math.* **88** (2) (1968) 181–217.

[34] MUMFORD D., FOGARTY J., KIRWAN F., *Geometric Invariant Theory*, in : Ergebnisse der Math., Vol. **34**, 3rd Edition, Springer, 1994.

[35] OGUS A., F-isocrystals and de Rham cohomology II: convergent isocrystals, *Duke Math. J.* **51** (1984) 765–850 .

[36] OGUS A., *The Convergent Topos in Characteristic p*, in : The Grothendieck Festschrift Vol. III, Progress in Math., Vol. **88**, Birkhäuser, 1990.

[37] VAN DER PUT M., The cohomology of Monsky and Washnitzer, in : *Bulletin de la SMF, mémoire n° 23, tome 114/ fasc. 2*, 1986, pp. 33–60.

[38] RAYNAUD M., *Anneaux locaux henséliens*, in : Lecture Notes in Math., Vol. **169**, Springer, 1970.

[39] RAYNAUD M., *Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes*, in : Lecture Notes in Math., Vol. **119**, Springer, 1986.

[40] SERRE J.-P., *Corps locaux*, 3e édition, Hermann, 1968.

[41] TSUZUKI N., *Morphisms of F-isocrystals and the finite monodromy theorem for unit-root F-isocrystals*, preprint, 1997.

[42] TSUZUKI N., On the Gysin isomorphism of rigid cohomology, *Hiroshima Math. J.* **29** (3) (1999) 479–527.

(Manuscrit reçu le 3 juillet 2000 ;
accepté, après révision, le 15 octobre 2001.)

Jean-Yves ÉTESSE
CNRS, Institut Mathématique,
Université de Rennes 1,
Campus de Beaulieu,
35042 Rennes cédex, France
E-mail : Jean-Yves.Etesse@univ-rennes1.fr