ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ALAIN HÉNAUT

Sur l'algébrisation des tissus de codimension n de $\mathbb{C}^{2n}$

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 31, nº 1 (1998), p. 131-143
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1998_4_31_1_131_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 31, 1998, p. 131 à 143.

SUR L'ALGÉBRISATION DES TISSUS DE CODIMENSION n DE $\mathbb{C}^{2n}$

PAR ALAIN HÉNAUT

RÉSUMÉ. – Un d-tissu $\mathcal{W}(d,2,n)$ est défini par d feuilletages analytiques complexes de codimension n de $(\mathbb{C}^{2n},0)$ dont les feuilles sont en position générale. On s'intéresse à la géométrie de telles configurations. S. S. Chern et P. A. Griffiths ont donné une borne optimale du principal invariant de $\mathcal{W}(d,2,n)$ que l'on appelle le n-rang. Toute hypersurface algébrique réduite V_n de $\mathbb{P}^{n+1}$ dont le degré est d détermine, génériquement dans la grassmannienne $G(1,\mathbb{P}^{n+1})$ des droites de $\mathbb{P}^{n+1}$, un d-tisssu $\mathcal{L}_{V_n}(d,2,n)$. Grâce au théorème d'Abel, le n-rang de $\mathcal{L}_{V_n}(d,2,n)$ est maximal et égal au genre arithmétique de V_n. On caractérise pour $d \geq n+3 \geq 5$ les d-tissus $\mathcal{W}(d,2,n)$ dont le n-rang est maximal : ils sont algébriques (*i.e.* à un isomorphisme local près et avec les notations précédentes, on a $\mathcal{W}(d,2,n) = \mathcal{L}_{V_n}(d,2,n)$). © Elsevier, Paris

ABSTRACT. – A d-web $\mathcal{W}(d,2,n)$ is given by d complex analytic foliations of codimention n in $(\mathbb{C}^{2n},0)$ such that the leaves are in general position. We are interested in the geometry of such configurations. S. S. Chern and P. A. Griffiths gave a sharp upper bound for the main invariant of $\mathcal{W}(d,2,n)$ which it is called the n-rank. A reduced algebraic hypersurface V_n in $\mathbb{P}^{n+1}$ of degree d gives rise to a d-web $\mathcal{L}_{V_n}(d,2,n)$ through a general point in the Grassmannian $G(1,\mathbb{P}^{n+1})$. Moreover, using Abel's theorem it can be proved that the n-rank of $\mathcal{L}_{V_n}(d,2,n)$ is maximal and equal to the arithmetic genus of V_n. We characterize d-webs $\mathcal{W}(d,2,n)$ of maximal n-rank with $d \geq n+3 \geq 5$: they are algebraic (*i.e.* up to a local isomorphism and with the previous notations, we have $\mathcal{W}(d,2,n) = \mathcal{L}_{V_n}(d,2,n)$). © Elsevier, Paris

1. Introduction et résultat principal

La géométrie des tissus de $\mathbb{C}^N$ est l'étude géométrique des feuilletages de $\mathbb{C}^N$ en position générale. On se restreint à la situation locale, au voisinage de l'origine, dans $\mathbb{C}^N$ avec d feuilletages analytiques complexes de codimension n en position générale. Si $N = kn$, la géométrie algébrique projective fournit de tels exemples, que l'on va décrire en détail pour $k = 2$ et qui proviennent, dans ce cas, d'hypersurfaces de $\mathbb{P}^{n+1}$; la situation la mieux connue est celle de la codimension $n = 1$ naturellement liée, par dualité, aux courbes de $\mathbb{P}^k$ (*cf.* par exemple [C], [C-G1], [H2]).

Dans le sillage des travaux de S.S. Chern et P.A. Griffiths (*cf.* [G2], [C-G1], [C-G2]) et ceux de M.A. Akivis et V.V. Goldberg (*cf.* par exemple [Go]), on s'intéresse dans ce qui suit à la *géométrie* des d-tissus de codimension n de $(\mathbb{C}^{2n},0)$. Autrement dit, on étudie les propriétés, des tissus de codimension n de $\mathbb{C}^{2n}$, qui sont invariantes par les isomorphismes analytiques locaux de $\mathbb{C}^{2n}$. Ce cadre contient le cas des tissus de courbes de $\mathbb{C}^2$ étudié dès les années 30 par G. Thomsen, W. Blaschke et G. Bol (*cf.* [B-B]). Outre ce qui précède,

on verra dans le paragraphe 2 que l'hypothèse $k = 2$ permet d'obtenir, pour les feuilles des tissus considerés, des *formes normales* simples.

Soit $\mathcal{O} := \mathbb{C}\{x_1, \ldots, x_{2n}\}$ l'anneau des séries entières convergentes à $2n$ variables. Un d-tissu $\mathcal{W}(d, 2, n)$ de codimension n de $(\mathbb{C}^{2n}, 0)$ est donné par d *familles* de feuilles de dimension n, indexées par i et en position générale ; ce sont les germes d'ensembles de niveau définis par

$$\begin{cases} F_{i_1}(x) = cste \\ \quad\vdots \\ F_{i_n}(x) = cste \end{cases}$$

où $x = (x_1, \ldots, x_{2n})$ et $F_{i_m} \in \mathcal{O}$ avec $F_{i_m}(0) = 0$.

Pour $1 \leq i \leq d$ et x voisin de $0 \in \mathbb{C}^{2n}$, les "*normales*" en x

$$\Omega_i(x) = \bigwedge_{m=1}^{n} dF_{i_m}(x)$$

définissent d points de la grassmannienne $G(n-1, \mathbb{P}^{2n-1})$ des $(n-1)$-plans de $\mathbb{P}^{2n-1}$ que l'on regarde, *via* le plongement de Plücker, dans $\mathbb{P}^{\binom{2n}{n}-1}$; ces normales ne dépendent que du tissu $\mathcal{W}(d, 2, n)$ et non du choix des F_{i_m}, et la *position générale* se traduit par

$$\Omega_i(0) \wedge \Omega_j(0) \neq 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq i < j \leq d.$$

Si $d = 1$ (resp. 2), le théorème d'inversion locale montre que le modèle local d'un tissu $\mathcal{W}(d, 2, n)$ est donné par les familles de n-plans de $\mathbb{C}^{2n}$ suivantes :

$$\{x_1 = cste, \ldots, x_n = cste\}$$

$$(\text{resp. } \{x_1 = cste, \ldots, x_n = cste\} \quad \text{et} \quad \{x_{n+1} = cste, \ldots, x_{2n} = cste\})\,;$$

ce qui signifie que l'étude des configurations possibles pour les $\mathcal{W}(d, 2, n)$ est intéressante dès que $d \geq 3$.

L'invariant principal d'un tissu $\mathcal{W}(d, 2, n)$ est lié à la notion de relation abélienne. Un d-uplet $\big(g_1(F_{i_1}, \ldots, F_{i_n}), \ldots, g_d(F_{i_1}, \ldots, F_{i_n})\big) \in \mathcal{O}^d$ où $g_i \in \mathbb{C}\{t\} = \mathbb{C}\{t_1, \ldots, t_n\}$ et qui vérifie

$$\sum_{i=1}^{d} g_i(F_{i_1}, \ldots, F_{i_n}) dF_{i_1} \wedge \ldots \wedge dF_{i_n} = 0$$

est appelé une *relation abélienne de degré* n du tissu $\mathcal{W}(d, 2, n)$; on désigne par

$$\mathcal{A}^n(d) = \left\{ \big(g_i(F_{i_1}, \ldots, F_{i_n})\big)\,;\ g_i \in \mathbb{C}\{t\} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{d} g_i(F_{i_1}, \ldots, F_{i_n})\,\Omega_i = 0 \right\}$$

le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des relations abéliennes de degré n du tissu $\mathcal{W}(d, 2, n)$.

On a (*cf.* [C-G2]) la *majoration de Chern et Griffiths* :

$$0 \leq rg_n\mathcal{W}(d,2,n) := dim_{\mathbb{C}}\mathcal{A}^n(d) \leq \binom{d-1}{n+1} = \frac{(d-1)(d-2)\cdots(d-n-1)}{(n+1)!}$$

et l'on vérifie que l'entier $rg_n\mathcal{W}(d,2,n)$ défini ci-dessus est un invariant analytique du tissu $\mathcal{W}(d,2,n)$ qui ne dépend pas du choix des F_{i_m} et que l'on appelle le *n-rang* de ce tissu. La majoration ci-dessus est obtenue grâce à une généralisation de la *méthode de Poincaré-Blaschke* sur laquelle on reviendra (*cf.* paragraphe 2).

Soit V_n une hypersurface algébrique réduite de $\mathbb{P}^{n+1}$ de degré d, une droite générique $l(0) \in G(1,\mathbb{P}^{n+1})$ coupe V_n en d points lisses distincts $p_i(0)$. Dans l'identification locale $(G(1,\mathbb{P}^{n+1}), l(0)) = (\mathbb{C}^{2n}, 0)$, la variété de Schubert $\sigma_{p_i(0)}$ des droites de $\mathbb{P}^{n+1}$ passant par $p_i(0)$ correspond à un n-plan de $\mathbb{C}^{2n}$ passant par 0 ; on peut faire cette construction pour les points x voisins de $0 \in \mathbb{C}^{2n}$. On obtient ainsi un d-tissu *linéaire* $\mathcal{L}_{V_n}(d,2,n)$ de $(\mathbb{C}^{2n},0)$ dont les feuilles passant par x sont les $\sigma_{p_i(x)}$ et que l'on appelle *"le" tissu algébrique associé à $V_n \subset \mathbb{P}^{n+1}$* (cette construction se généralise à certaines variétés algébriques de $\mathbb{P}^{n+k-1}$, de dimension n et de degré d, pour donner dans $(G(k-1,\mathbb{P}^{n+k-1}), \mathbb{P}^{k-1}(0)) = (\mathbb{C}^{kn},0)$ un d-tissu de codimension n).

Pour $n = 1$, les feuilles de $\mathcal{L}_{V_1}(d,2,1)$ sont, par dualité, essentiellement les tangentes à la courbe duale $\check{V}_1 \subset G(1,\mathbb{P}^2)$ de la courbe $V_1 \subset \mathbb{P}^2$.

Dans un système convenable de coordonnées, on a d branches locales

$$p_i = (F_{i_1},\ldots,F_{i_n},\xi_i(F_{i_1},\ldots,F_{i_n})) \qquad \text{sur} \qquad G(1,\mathbb{P}^{n+1})$$

où

$$l(x) \cap V_n = \sum_{i=1}^{d} p_i(x) \quad \text{en tant que 0-cycles de } V_n.$$

Si ω_{V_n} est le faisceau dualisant sur V_n (on rappelle que $\omega_{V_n} = \Omega^n_{V_n}$ si V_n est lisse), on a une application $\mathbb{C}$-linéaire

$$A : H^0(V_n,\omega_{V_n}) \longrightarrow \mathcal{A}^n(\mathcal{L}_{V_n}(d,2,n))$$

donnée par $A(\omega) = \big(g_i(F_{i_1},\ldots,F_{i_n})\big)$ où $\omega = g_i(s_1,\ldots,s_n)ds_1\wedge\ldots\wedge ds_n$ au voisinage de $p_i(0)$. En effet, d'après le théorème d'Abel (ce qui justifie la terminologie), on a (*cf.* [G1])

$$Trace(\omega) := \sum_{i=1}^{d} p_i^*(\omega) = \sum_{i=1}^{d} g_i(F_{i_1},\ldots,F_{i_n})dF_{i_1}\wedge\ldots\wedge dF_{i_n} = 0\,;$$

de plus, en adaptant l'appendice de [H1] (cas $n = 1$), on vérifie que A est un $\mathbb{C}$-isomorphisme. Par ailleurs, on sait que $H^0(V_n,\omega_{V_n})$ est engendré sur $\mathbb{C}$ par

$$r(s,t)\frac{ds_1\wedge\ldots\wedge ds_n}{\partial_t(f)} \quad \text{où} \quad r \in \mathbb{C}[s,t] \quad \text{et} \quad \deg r \leq d-n-2$$

si $V_n = \{f(s,t) = f(s_1,\ldots,s_n,t) = 0\}$ en affine, ce qui montre que l'on a

$$rg_n\mathcal{L}_{V_n}(d,2,n) = dim_{\mathbb{C}}H^0(V_n,\omega_{V_n}) = \binom{d-1}{n+1}\,;$$

autrement dit, le n-rang de $\mathcal{L}_{V_n}(d,2,n)$ est *maximal* et égal au *genre arithmétique* de l'hypersurface réduite $V_n \subset \mathbb{P}^{n+1}$.

D'après ce qui précède, une question naturelle est la suivante :

Quels sont les tissus $\mathcal{W}(d,2,n)$ algébrisables ?

(*i.e.* Peut-on déterminer les tissus $\mathcal{W}(d,2,n)$ qui, à un isomorphisme analytique local de $\mathbb{C}^{2n}$ près, sont *algébriques*, c'est à dire de la forme $\mathcal{L}_{V_n}(d,2,n)$?).

On vient de voir que si $\mathcal{W}(d,2,n)$ est algébrisable, il est *nécessairement* de n-rang maximal. Or depuis l'exemple $\mathcal{B}(5,2,1)$ de G. Bol (*cf.* [B]), les trois exemples $\mathcal{G}_i(4,2,2)$ de V.V. Goldberg (*cf.* [Go2], [Go3] et [Go4]) et l'exemple $\mathcal{K}(4,2,2)$ de J.B. Little (*cf.* [L]), on sait que l'hypothèse de n-rang maximal *n'est pas suffisante* pour assurer l'algébrisation.

Dans [H1], on a donné une condition *nécessaire et suffisante* pour qu'un tissu $\mathcal{W}(d,2,1)$ de 1-rang maximal soit algébrisable ; de plus, dans le cas favorable, on a montré comment algébriser le tissu *via* l'espace de ses relations abéliennes.

Pour $n \geq 2$, on utilise de nouveau l'espace $\mathcal{A}^n(d)$ des relations abéliennes de degré n du tissu $\mathcal{W}(d,2,n)$ pour répondre au problème de son algébrisation ; le résultat principal de cet article (*cf.* paragraphe 3) est le suivant :

THÉORÈME. – *Tout tissu $\mathcal{W}(d,2,n)$ de n-rang maximal est algébrisable dès que $d \geq n+3 \geq 5$.*

De plus, sous les hypothèses qui précèdent, on construit géométriquement à l'aide de l'espace $\mathcal{A}^n(d)$, l'hypersurface $V_n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ et l'isomorphisme analytique local de $\mathbb{C}^{2n}$ tels que l'on ait

$$\mathcal{W}(d,2,n) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{V_n}(d,2,n).$$

Dans le cas particulier où $n=2$, le théorème ci-dessus a été démontré par V.V. Goldberg (*cf.* [Go1] et pour des détails [Go]) et ce, par une méthode complètement différente basée sur l'importante notion différentielle de tissu *presque grassmannisable* (*cf.* par exemple [Go]) et le résultat suivant dû à J.B. Little (*cf.* [L]) : *tout d-tissu $\mathcal{W}(d,k,n)$ général de codimension n de $(\mathbb{C}^{kn},0)$ et de n-rang maximal est presque grassmannisable dès que $n \geq 2$ et $d > n(k-1)+2$.* Le lien avec la méthode utilisée ici et le résultat ci-dessus de J.B. Little est l'existence (*cf.* [C-G2] et [L]) de formes normales (*cf.* paragraphe 2) pour les tissus $\mathcal{W}(d,k,n)$ généraux dont le n-rang est maximal. Pour une description des tissus $\mathcal{W}(4,2,2)$ de 2-rang maximal, on peut consulter [Go].

Il faut mentionner que l'on a préféré la notation $\mathcal{W}(d,k,n)$ à celle plus traditionnelle $\mathcal{W}(d,n,r)$ (*cf.* par exemple [Go] et [L]), essentiellement parce que dans ce qui suit $k=2$ et que les d-tissus algébriques de codimension n de $(\mathbb{C}^{kn},0)$ considérés sont ainsi associés à des hypersurfaces projectives dont la dimension est n, plutôt que r réservé aux rangs.

On se doit de terminer cette introduction en signalant que la classification des tissus $\mathcal{E}(d,2,n)$ *exceptionnels* (*i.e.* dont le n-rang est maximal et qui ne sont pas algébrisables) reste à faire, notamment dans le cas $n=1$, $d \geq 5$ et pour les $\mathcal{E}(n+2,2,n)$ avec $n \geq 2$; on notera que l'on a $rg_n\mathcal{E}(n+2,2,n)=1$. Pour $n \geq 1$ et en regard des exemples de tissus exceptionnels de Bol, Goldberg et Little déjà mentionnés, l'étude des relations

abéliennes de la forme particulière

$$\sum_{i=1}^{d} m_i\, \mathbf{g}(F_{i_1}, \ldots, F_{i_n}) dF_{i_1} \wedge \ldots \wedge dF_{i_n} = 0$$

avec $\mathbf{g} \in \mathbb{C}\{t\}$ et des $m_i \in \mathbb{Z}$ semble digne d'intérêt.

2. Sur la géométrie de l'espace des relations abéliennes ; forme normale

Soit $\mathcal{W}(d, 2, n)$ un d-tissu de codimension n de $(\mathbb{C}^{2n}, 0)$ *avec* $d \geq n+2$ et dont le n-rang est *maximal*, alors

$$r_n(d) := rg_n \mathcal{W}(d, 2, n) = \binom{d-1}{n+1} \geq 1$$

et il y a au moins une relation abélienne de degré n, non triviale.

Soit $\left(\gamma_i^j(F_{i_1}, \ldots, F_{i_n})\right)_{1 \leq i \leq d,\, 1 \leq j \leq r_n(d)}$ une base de $\mathcal{A}^n(d)$, on peut définir d'après une idée de H. Poincaré (dans le cas $n = 1, d = 4$; *cf.* [P]), d germes d'applications de *rang* n

$$Z_i \,:\, (\mathbb{C}^{2n}, 0) \longrightarrow (\mathbb{P}^{r_n(d)-1}, Z_i(0))$$

en posant $Z_i(x) = [\gamma_i^1(F_{i_1}, \ldots, F_{i_n}), \ldots, \gamma_i^{r_n(d)}(F_{i_1}, \ldots, F_{i_n})]$; on vérifie que les d points $Z_i(x)$ ne dépendent que de $\mathcal{W}(d, 2, n)$.

Par construction, on a la *relation vectorielle*

$$\sum_{i=1}^{d} Z_i(x) \,.\, \Omega_i(x) = 0$$

pour x voisin de $0 \in \mathbb{C}^{2n}$. Cette relation et l'hypothèse de position générale permettent de montrer que les $Z_i(x)$ engendrent pour $1 \leq i \leq d$ un sous-espace linéaire $\{Z_i(x)\}$ de $\mathbb{P}^{r_n(d)-1}$ de dimension au plus $d-n-2$; de même, par dérivation de la relation précédente, on vérifie que les $Z_i(x)$ et les $\dfrac{\partial Z_i}{\partial x_k}(x)$ engendrent pour $1 \leq i \leq d$ et $1 \leq k \leq 2n$ un sous-espace linéaire $\{Z_i(x), \dfrac{\partial Z_i}{\partial x_k}(x)\}$ de $\mathbb{P}^{r_n(d)-1}$ de dimension au plus $(n+1)(d-n-2)$;*etc.* pour les espaces osculateurs d'ordre ≥ 2. Cette suite croissante de sous-espaces linéaires *stationne* ; c'est le principe (*cf.* pour des détails [C-G1] et [C-G2]) de la méthode de Poincaré-Blaschke pour majorer le n-rang du tissu $\mathcal{W}(d, 2, n)$ et obtenir la borne $r_n(d)$.

Puisque par hypothèse le n-rang de $\mathcal{W}(d, 2, n)$ est maximal, on a nécessairement dans $\mathbb{P}^{r_n(d)-1}$ et pour x voisin de $0 \in \mathbb{C}^{2n}$ des sous-espaces linéaires

$$\{Z_i(x)\} = \mathbb{P}^{d-n-2}(x)$$
$$\left\{Z_i(x), \frac{\partial Z_i}{\partial x_k}(x)\right\} = \mathbb{P}^{(n+1)(d-n-2)}(x)$$

où $\mathbb{P}^{d-n-2}(x)$ (resp. $\mathbb{P}^{(n+1)(d-n-2)}(x)$) est de dimension $d-n-2$ (resp. $(n+1)(d-n-2)$).

Ce qui précède permet de généraliser un résultat classique de H. Poincaré (cas $n = 1$, *cf.* [P]) :

THÉORÈME 1. – *Tout tissu $\mathcal{W}(n+3,2,n)$ de n-rang maximal est algébrisable.*

Démonstration. – D'après l'hypothèse et les propriétés précédentes, on a $\{Z_i(x)\} = \mathbb{P}^1(x)$ et $\{Z_i(x), \dfrac{\partial Z_i}{\partial x_k}(x)\} = \mathbb{P}^{n+1}(x)$ ce qui montre que le morphisme

$$\ell : (\mathbb{C}^{2n}, 0) \longrightarrow (G(1, \mathbb{P}^{n+1}), \ell(0)) = (\mathbb{C}^{2n}, 0)$$

défini par $\ell(x) = \mathbb{P}^1(x)$ est un isomorphisme. Par construction, le tissu $\mathcal{W}(n+3,2,n)$ est grassmannisable *via* ℓ (*i.e.* les d feuilles du tissu "image" $\ell_*\big(\mathcal{W}(n+3,2,n)\big)$ sont des n-plans de $\mathbb{C}^{2n}$, non nécessairement parallèles, obtenues comme dans le paragraphe 1 à partir de la donnée de d germes d'ensembles analytiques lisses de dimension n dans $\mathbb{P}^{n+1}$, transverses à $\ell(0)$ en d points distincts). Puisque le n-rang du tissu $\mathcal{W}(n+3,2,n)$ est maximal, ce tissu admet au moins une relation abélienne

$$\sum_{i=1}^{d} g_i(F_{i_1}, \ldots, F_{i_n}) dF_{i_1} \wedge \ldots \wedge dF_{i_n} = 0$$

d'*algébrisation* (*i.e.* $g_i \neq 0$ pour $1 \leq i \leq d$). Il en est donc de même pour le tissu $\ell_*\big(\mathcal{W}(n+3,2,n)\big)$ et d'après un théorème de P.A. Griffiths (*cf.* [G1]) *tous* les $Z_i(x)$ sont en fait dans une hypersurface algébrique réduite $V_n \subset \mathbb{P}^{r_n(d)-1} = \mathbb{P}^{n+1}$ de degré $d = n+3$. Ce qui montre que l'on a

$$\ell_*\big(\mathcal{W}(n+3,2,n)\big) = \mathcal{L}_{V_n}(d,2,n).$$

Autrement dit, le germe d'application ℓ défini ci-dessus à l'aide de l'espace des relations abéliennes de degré n du tissu $\mathcal{W}(d,2,n)$ algébrise ce dernier. □

• **Forme normale pour les tissus $\mathcal{W}(d,2,n)$ de n-rang maximal avec $d \geq n+2$**

Sous les hypothèses précédentes, on peut supposer que

$$\{Z_i(x)\} = \{Z_{n+2}(x), \ldots, Z_d(x)\} = \mathbb{P}^{d-n-2}(x) \subset \mathbb{P}^{r_n(d)-1} ;$$

il y a donc $(n+1)$ relations *indépendantes* parmi les $Z_i(x)$ que l'on va présenter explicitement, et d'une manière "symétrique".

Quitte à faire un éventuel changement linéaire des coordonnées $(x_1, \ldots, x_{2n})$ de $\mathbb{C}^{2n}$ on peut supposer que l'on a

$$\delta_i(0) \neq 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq d \quad \text{où} \quad \delta_i = \frac{\partial(F_{i_1}, \ldots, F_{i_n})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} .$$

De plus, en utilisant ce qui précède et l'hypothèse de position générale, la relation vectorielle ci-dessus permet de montrer, comme dans [C-G2] pour $n = 2$ et comme dans [L] pour $n \geq 2$ (et à la dualité "formes de Pfaff-champs de vecteurs" près) que les d feuilles d'un

tissu $\mathcal{W}(d,2,n)$ de n-rang maximal sont données pour $1 \leq i \leq d$ par le *système intégrable* de champs de vecteurs ayant la *forme normale* suivante :

$$(\star) \qquad \begin{cases} X_{i_1} = \partial_{n+1} - b_i \{A_{11}\partial_1 + A_{12}\partial_2 + \cdots + A_{1n}\partial_n\} \\ X_{i_2} = \partial_{n+2} - b_i \{A_{21}\partial_1 + A_{22}\partial_2 + \cdots + A_{2n}\partial_n\} \\ \qquad\qquad \vdots \\ X_{i_n} = \partial_{2n} - b_i \{A_{n1}\partial_1 + A_{n2}\partial_2 + \cdots + A_{nn}\partial_n\} \end{cases}$$

où $\partial_k = \dfrac{\partial}{\partial x_k}$ pour $1 \leq k \leq 2n$, et avec des b_i et des A_{lm} dans $\mathcal{O}$ tels que la matrice carrée $(A_{lm}) \in \mathcal{O}^{n^2}$ vérifie $\det(A_{lm})(0) \neq 0$. L'hypothèse de position générale *impose* également que l'on ait $b_i(0) \neq b_j(0)$ pour $1 \leq i < j \leq d$.

On notera que l'hypothèse *supplémentaire* concernant la position générale, introduite par J.B. Little dans [L] (*cf.* également [C-G2]), est vérifiée ici puisque la dimension et la codimension des feuilles du tissu $\mathcal{W}(d,2,n)$ coincident.

Remarque 1. – Si $\mathcal{W}(d,2,n) = \mathcal{L}_{V_n}(d,2,n)$ est algébrique, on peut supposer avec les notations du paragraphe 1 que

$$\begin{cases} F_{i_1} = x_1 + b_i \,.\, x_{n+1} \\ \qquad \vdots \\ F_{i_n} = x_n + b_i \,.\, x_{2n} \end{cases}$$

où $b_i = \xi_i(F_{i_1}, \ldots, F_{i_n})$ avec $f(s,t) = \prod_{i=1}^{d}(t - \xi_i(s)) = 0$ comme équation affine de l'hypersurface algébrique réduite $V_n \subset \mathbb{P}^{n+1}$. Dans ce cas, la matrice (A_{lm}) de la forme normale $(\star)$ est la matrice unité. De plus, pour $1 \leq i \leq d$ et x voisin de $0 \in \mathbb{C}^{2n}$, les normales $\Omega_i(x)$ de $\mathcal{L}_{V_n}(d,2,n)$ appartiennent à une courbe rationnelle normale D d'un n-plan $\mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^{\binom{2n}{n}-1}$ (*i.e.* D est, à un automorphisme linéaire près de $\mathbb{P}^n$, paramétrée par $b \longmapsto [1, b, b^2, \ldots, b^n]$).

Plus généralement, grâce à la forme normale $(\star)$ et en prenant des mineurs convenables de la matrice inversible (A_{lm}), on vérifie que pour $1 \leq i \leq d$ et x voisin de $0 \in \mathbb{C}^{2n}$, les normales $\Omega_i(x)$ d'un tissu $\mathcal{W}(d,2,n)$ de n-rang maximal avec $d \geq n+2$ appartiennent à *une courbe rationnelle normale $D(x)$ d'un n-plan $\mathbb{P}^n(x) \subset \mathbb{P}^{\binom{2n}{n}-1}$* (cette propriété se généralise à certains tissus de codimension n de $\mathbb{C}^{kn}$ où $k \geq 2$; *cf.* [C-G2] pour $n = 2$ et [L] pour $n \geq 2$).

De plus, les $(n+1)$ relations indépendantes entre les $Z_i(x)$ s'écrivent

$$(R_q) \qquad \sum_{i=1}^{d} b_i^q(x)\delta_i(x)Z_i(x) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leq q \leq n$$

pour x voisin de $0 \in \mathbb{C}^{2n}$ et l'on a

$$\sum_{i=1}^{d} b_i^{n+1}(0)\delta_i(0)Z_i(0) \neq 0$$

puisque $b_i(0) \neq b_j(0)$ pour $1 \leq i < j \leq d$.

3. Sur l'algébrisation des tissus $\mathcal{W}(d,2,n)$ de n-rang maximal

Soit $\mathcal{W}(d,2,n)$ un d-tissu de codimension n de $(\mathbb{C}^{2n},0)$ *avec* $d \geq n+3$ et dont le n-rang est *maximal*, alors

$$r_n(d) = rg_n\mathcal{W}(d,2,n) = \binom{d-1}{n+1} \geq n+2\,.$$

On va généraliser le théorème 1 en utilisant les propriétés géométriques des $Z_i(x)$, en tant que configurations de points de $\mathbb{P}^{r_n(d)-1}$, obtenues grâce à la forme normale $(\star)$ du paragraphe précédent.

D'après la fin de ce dernier, on a une application

$$E\,:\,(\mathbb{C}^{2n},0)\times\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^{r_n(d)-1}$$

définie par

$$E(x,b) = \prod_{i=1}^{d}(b-b_i(x))\,.\,\sum_{i=1}^{d}\frac{\delta_i(x)}{b-b_i(x)}\,Z_i(x)$$
$$E(x,\infty) = \sum_{i=1}^{d} b_i^{n+1}(x)\delta_i(x)Z_i(x)$$

et qui vérifie

$$E(x,b_i(x)) = Z_i(x) \quad \text{pour} \quad 1\leq i\leq d\,.$$

Sous les hypothèses qui précèdent, et avec les notations et propriétés du paragraphe 2, on a le résultat suivant :

PROPOSITION. – *Pour x voisin de $0\in\mathbb{C}^{2n}$, l'application $b \longmapsto E(x,b)$ paramètre une courbe rationnelle normale $E(x)$ de $\mathbb{P}^{d-n-2}(x)$ contenant les $Z_i(x)$ pour $1\leq i\leq d$; de plus, on a $rg\,E \geq n+1$.*

Démonstration. – Si $\prod_{i=1}^{d}(b-b_i) = b^d+\sigma_1 b^{d-1}+\cdots+\sigma_d$, on a

$$\begin{aligned}E(x,b) &= b^{d-1}\Big(\sum_{i=1}^{d}\delta_i Z_i\Big) + b^{d-2}\Big(\sum_{i=1}^{d} b_i\delta_i Z_i + \sigma_1\sum_{i=1}^{d}\delta_i Z_i\Big)+\cdots\\ &= b^{d-n-2}\Big(\sum_{i=1}^{d} b_i^{n+1}\delta_i Z_i\Big)+\cdots+\sum_{i=1}^{d} b_i^{d-1}\delta_i Z_i+\cdots+\sigma_{d-n-2}\sum_{i=1}^{d} b_i^{n+1}\delta_i Z_i\end{aligned}$$

d'après les relations (R_q). Puisque le n-rang de $\mathcal{W}(d,2,n)$ est maximal, on peut supposer que

$$\begin{aligned}\{Z_i(x)\} &= \{Z_{n+2}(x),\dots,Z_d(x)\} = \mathbb{P}^{d-n-2}(x)\\ \left\{Z_i(x),\frac{\partial Z_i}{\partial x_k}(x)\right\} &= \left\{Z_{n+2}(x),\dots,Z_d(x),\frac{\partial Z_{n+3}}{\partial x_1}(x),\dots,\frac{\partial Z_d}{\partial x_1}(x),\dots,\right.\\ &\qquad\left.\frac{\partial Z_{n+3}}{\partial x_n}(x),\dots,\frac{\partial Z_d}{\partial x_n}(x)\right\}\\ &= \mathbb{P}^{(n+1)(d-n-2)}(x)\end{aligned}$$

à l'aide de la forme normale $(\star)$. Ce qui montre, en dérivant E modulo $\{Z_i(x)\}$, que le sous-espace linéaire

$$\{E,\partial_b(E),\partial_1(E),\dots,\partial_n(E)\}$$

de $\mathbb{P}^{r_n(d)-1}$ est de dimension $n+1$. Ainsi $rg\,E \geq n+1$ et chaque courbe algébrique $E(x)$ de $\mathbb{P}^{r_n(d)-1}$ paramétrée par $b \longmapsto E(x,b)$ est lisse (et irréductible), de degré $d-n-2$, contenue dans $\mathbb{P}^{d-n-2}(x)$ et non dégénérée par définition et ce qui précède. Ce qui montre (*cf.* par exemple [G-H]) que pour x voisin de $0 \in \mathbb{C}^{2n}$, $E(x)$ est une courbe rationnelle normale de $\mathbb{P}^{d-n-2}(x)$ passant par les $Z_i(x)$ pour $1 \leq i \leq d$. $\square$

Les calculs qui suivent ont pour objet de préciser la nature de la famille $\bigcup_{x\in(\mathbb{C}^{2n},0)} E(x)$ et notamment de déterminer pour $n \geq 2$ le rang de l'application E, dite dans [H1] (cas $n=1$) de Darboux-Blaschke pour $\mathcal{W}(d,2,1)$. Puisque $d \geq (d-n-2)+3$, on notera que pour x voisin de $0 \in \mathbb{C}^{2n}$, $E(x)$ est *l'unique* courbe rationnelle normale de $\mathbb{P}^{d-n-2}(x)$ contenant les $Z_i(x)$ pour $1 \leq i \leq d$.

Si l'on pose $\Pi(x,b) = \prod_{i=1}^{d}(b-b_i(x))$, alors d'après les relations (R_0) et (R_1), on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{d}\frac{\delta_i}{b-b_i}Z_i &= \frac{E}{\Pi}\\ \sum_{i=1}^{d}\frac{b_i\delta_i}{b-b_i}Z_i &= \sum_{i=1}^{d}\frac{(b-(b-b_i))\delta_i}{b-b_i}Z_i = b\,\frac{E}{\Pi}\\ \sum_{i=1}^{d}\frac{b_i^2\delta_i}{b-b_i}Z_i &= \sum_{i=1}^{d}\frac{(bb_i-(b-b_i)b_i)\delta_i}{b-b_i}Z_i = b^2\,\frac{E}{\Pi}\,.\end{aligned}$$

Ce qui montre que l'on a pour $1 \leq m \leq n$ et $1 \leq l \leq n$

$$\begin{aligned}\partial_{n+m}\left(\frac{E}{\Pi}\right) &= \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial_{n+m}(\delta_i)}{b-b_i}Z_i + \sum_{i=1}^{d}\frac{\delta_i\partial_{n+m}(Z_i)}{b-b_i} + \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial_{n+m}(b_i)\delta_i}{(b-b_i)^2}Z_i\\ b\partial_l\left(A_{ml}\,\frac{E}{\Pi}\right) &= \sum_{i=1}^{d}\frac{\partial_l(b_iA_{ml}\delta_i)}{b-b_i}Z_i + \sum_{i=1}^{d}\frac{b_iA_{ml}\delta_i\partial_l(Z_i)}{b-b_i} + \sum_{i=1}^{d}\frac{b_iA_{ml}\partial_l(b_i)\delta_i}{(b-b_i)^2}Z_i\,.\end{aligned}$$

Par addition, on obtient que l'on a pour $1 \leq m \leq n$

$$\partial_{n+m}\left(\frac{E}{\Pi}\right) - b\left[\partial_1\left(A_{m1}\,\frac{E}{\Pi}\right) + \cdots + \partial_n\left(A_{mn}\,\frac{E}{\Pi}\right)\right] = \sum_{i=1}^{d} \frac{X_{i_m}(b_i)\delta_i}{(b-b_i)^2}\, Z_i\,.$$

En effet, on vérifie essentiellement à l'aide de la forme normale $(\star)$ que l'on a pour $1 \leq m \leq n$ et $1 \leq i \leq d$

$$\begin{aligned}\partial_{n+m}(\delta_i) &= \partial_1(b_i A_{m1}\delta_i) + \cdots + \partial_m(b_i A_{mn}\delta_i)\\ \partial_{n+m}(Z_i) &= b_i\,\{A_{m1}\partial_1(Z_i) + \cdots + A_{mn}\partial_n(Z_i)\}\,.\end{aligned}$$

Si *de plus* $n \geq 2$, les conditions d'*intégrabilité* de la forme normale $(\star)$ imposent que pour $1 \leq i \leq d$ l'on ait

$$X_{i_m}(b_i A_{lv}) = X_{i_l}(b_i A_{mv})$$

pour $1 \leq m < l \leq n$ et $1 \leq v \leq n$. Dans ce cas, à partir de mineurs 2×2 convenables de la matrice inversible (A_{lm}), on obtient que pour $1 \leq i \leq d$ et $1 \leq m \leq n$

$$X_{i_m}(b_i) = H_{m1}\, b_i + H_{m2}\, b_i^2$$

avec des H_{mj} dans $\mathcal{O}$. Soit pour $n \geq 2$ et $1 \leq m \leq n$

$$\partial_{n+m}\left(\frac{E}{\Pi}\right) - b\left[\partial_1\left(A_{m1}\,\frac{E}{\Pi}\right) + \cdots + \partial_n\left(A_{mn}\,\frac{E}{\Pi}\right)\right] + H_{m1}\,\partial_b\left(b\,\frac{E}{\Pi}\right) + H_{m2}\,\partial_b\left(b^2\,\frac{E}{\Pi}\right) = 0\,,$$

grâce aux conséquences des relations (R_0) et (R_1) rappelées ci-dessus.

LEMME. – *Pour $d \geq n+3 \geq 5$, on a $rg\, E = n+1$. De plus, par tout point $E(x_0, b_0)$ de $E(x_0)$ passe exactement une famille à n-paramètres d'éléments de $\bigcup_{x \in (\mathbb{C}^{2n}, 0)} E(x)$, et chaque membre de cette famille différent de $E(x_0)$ ne rencontre $E(x_0)$ qu'au point $E(x_0, b_0)$.*

Démonstration. – On peut supposer que localement $E = [1, \frac{E_2}{E_1}, \ldots, \frac{E_{r_n(d)}}{E_1}]$, or d'après ce qui précède chaque $\frac{E_j}{E_1}$ vérifie le système différentiel linéaire suivant :

$$(\star\star)\qquad \begin{cases} \partial_{n+1}(z) - b\,[A_{11}\partial_1(z) + \cdots + A_{1n}\partial_n(z)] + b\,[H_{11} + b\,H_{12}]\,\partial_b(z) = 0\\ \qquad\qquad\vdots\\ \partial_{2n}(z) - b\,[A_{n1}\partial_1(z) + \cdots + A_{nn}\partial_n(z)] + b\,[H_{n1} + b\,H_{n2}]\,\partial_b(z) = 0\,. \end{cases}$$

Ce qui prouve, d'après la proposition précédente que le rang de E est exactement $n+1$ (on rappelle que l'on a

$$dim\,\{E, \partial_b(E), \partial_1(E), \ldots, \partial_n(E)\} = n+1$$

pour $n \geq 1$). D'après le théorème des fonctions implicites, on a donc

$$E^{-1}(E(x_0, b_0)) = \{ (x, b) = (x_1, \ldots, x_n; x', b) = (g_1(x'), \ldots, g_n(x'); x', g_b(x')) \}$$

où le $(n+1)$-uplet $(g, g_b) = (g_1, \ldots, g_n, g_b)$ est analytique local, unique et vérifie $(g(x'_0); x'_0, g_b(x'_0)) = (x_0, b_0)$ avec $x' = (x_{n+1}, \ldots, x_{2n})$. Ce qui montre que la famille à n-paramètres cherchée est

$$b \longmapsto E(g(x'); x', b)$$

où chaque membre de cette famille passe par $E(x_0, b_0)$ en $b = g_b(x')$. De plus, par dérivation de

$$E(g_1(x'), \ldots, g_n(x'); x', g_b(x')) = E(x_0, b_0),$$

on vérifie à l'aide du rappel ci-dessus et du système $(\star\star)$ que l'on a

$$\frac{\partial g_m}{\partial x_{n+l}}(x') + A_{lm}(g(x'); x') \,.\, g_b(x') = 0$$

pour $1 \leq m \leq n$ et $1 \leq l \leq n$, et

$$\frac{\partial g_b}{\partial x_{n+l}}(x') - g_b(x') \,.\, [H_{l1}(g(x'); x') + g_b(x') \,.\, H_{l2}(g(x'); x')] = 0$$

pour $1 \leq l \leq n$. Or la matrice (A_{lm}) est inversible, ce qui permet d'exprimer g_b à partir d'un $\dfrac{\partial g_m}{\partial x_{n+l}}$ convenable et de montrer que le n-uplet $g = (g_1, \ldots, g_n)$ vérifie un système différentiel du second ordre (S). Si l'on a

$$E(x_0, \beta_0) = E(g(x'); x', \beta)$$

pour $x_0 \neq (g(x'); x')$ mais suffisamment voisins, alors par *unicité* des solutions du système (S) passant par x_0 et $(g(x'); x')$, on obtient que

$$\beta_0 = b_0 \quad \text{et} \quad \beta = g_b(x')$$

puisque g_b s'exprime à partir de la donnée de g. $\square$

THÉORÈME 2. – *Pour $d \geq n+3 \geq 5$, tout tissu $\mathcal{W}(d, 2, n)$ de n-rang maximal est algébrisable.*

Démonstration. – Quitte à modifier l'ordre des composantes de E, on peut supposer d'après le lemme précédent que l'application

$$e = [E_1, \ldots, E_{n+2}] \,:\, (\mathbb{C}^{2n}, 0) \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^{n+1}$$

est de rang $n+1$. Pour x voisin de $0 \in \mathbb{C}^{2n}$, l'application $b \longmapsto e(x, b)$ paramètre une courbe algébrique $e(x)$ de $\mathbb{P}^{n+1}$ qui est une *droite*. En effet, pour x_0 voisin de $0 \in \mathbb{C}^{2n}$, on a deg $e(x_0) = 1$; ce degré se calcule à l'aide d'une projection générique dans un $\mathbb{P}^2$

où il suffit d'utiliser le théorème de Bézout puisque d'après le lemme précédent, $e(x_0, b_0)$ est le seul point commun à $e(x_0)$ et $e(g(x'); x')$ pour x' voisin de $0 \in \mathbb{C}^n$. On obtient ainsi un morphisme

$$\phi : (\mathbb{C}^{2n}, 0) \longrightarrow (G(1, \mathbb{P}^{n+1}), e(0)) = (\mathbb{C}^{2n}, 0)$$

défini par $\phi(x) = e(x)$, et qui est un isomorphisme puisque $\mathcal{W}(d, 2, n)$ est de n-rang maximal. De plus, d'après un théorème de P.A. Griffiths (*cf.* [G1]) déjà utilisé dans la démonstration du théorème 1, les $e(x, b_i(x))$ sont pour $1 \leq i \leq d$ dans une hypersurface algébrique réduite $V_n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ de degré d (non nécessairement irréductible et éventuellement singulière). La construction qui précède montre que l'on a

$$\phi_*\big(\mathcal{W}(d, 2, n)\big) = \mathcal{L}_{V_n}(d, 2, n)\,,$$

d'où le résultat. □

Remarque 2. – Sous les hypothèses du théorème 2 :

a) on retrouve pour $d = n + 3$, la construction du théorème 1 avec $\ell(x) = \phi(x)$;

b) d'après la description de $H^0(V_n, \omega_{V_n})$ (*cf.* paragraphe 1), la famille $\bigcup_{x \in (\mathbb{C}^{2n}, 0)} E(x)$ est contenue dans une *variété de Veronese* $v_{d-n-2}(\mathbb{P}^{n+1}) \subset \mathbb{P}^{r_n(d)-1}$ où, à un automorphisme linéaire près de $\mathbb{P}^{r_n(d)-1}$, on a

$$v_{d-n-2}([1, s_1, \ldots, s_n, t]) = [1, s_1, \ldots, s_n, t, s_1^2, s_1 s_2, \ldots, t^{d-n-2}]\,;$$

de plus, chaque germe défini par Z_i pour $1 \leq i \leq d$ est contenu dans la varieté algébrique $v_{d-n-2}(V_n)$ de $\mathbb{P}^{r_n(d)-1}$ dont la dimension est n et le degré est $d(d-n-2)^n$.

BIBLIOGRAPHIE

[B-B] W. Blaschke et G. Bol, *Geometrie der Gewebe*, Springer, Berlin, 1938.

[B] G. Bol, *Über ein bemerkenswertes Fünfgewebe in der Ebene*, (*Abh. Hamburg*, Vol. 11, 1936, p. 387-393).

[C] S.S. Chern, *Web Geometry*, (*Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 6, 1982, p. 1-8).

[C-G1] S.S. Chern et P.A. Griffiths, *Abel's Theorem and Webs*, (*Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.*, Vol. 80, 1978, p. 13-110) and *Corrections and Addenda to Our Paper : Abel's Theorem and Webs*, (*Jahresber. Deutsch. Math.-Verein.*, Vol. 83, 1981, p. 78-83).

[C-G2] S.S. Chern et P.A. Griffiths, *An Inequality for the Rank of a Web and Webs of Maximum Rank*, (*Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa,* Vol. 5, 1978, p. 539-557).

[Go1] V.V. Goldberg, *Tissus de codimension r et de r-rang maximum*, (*C. R. Acad. Sc. Paris*, Vol. 297, 1983, p. 339-342).

[Go2] V.V. Goldberg, *4-tissus isoclines exceptionnels de codimension deux et de 2-rang maximal*, (*C. R. Acad. Sc. Paris*, Vol. 301, 1985, p. 593-596).

[Go3] V.V. Goldberg, *Isoclinic webs $W(4, 2, 2)$ of maximum 2-rank*, in Differential Geometry - Peñiscola 1985, (*Lect. Notes Math.*, Vol. 1209, Springer, Berlin, 1986, p. 168-183).

[Go4] V.V. Goldberg, *Nonisoclonic 2-codimensional 4-webs of maximum 2-rank*, (*Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 100, 1987, p. 701-708).

[Go] V.V. GOLDBERG, *Theory of Multicodimensional* $(n+1)$*-Webs*, Kluwer, Dordrecht, 1988.

[G1] P.A. GRIFFITHS, *Variations on a Theorem of Abel*, (*Invent. Math.*, Vol. 35, 1976, p. 321-390).

[G2] P.A. GRIFFITHS, *On Abel's Differential Equations*, Algebraic Geometry, The Johns Hopkins Centennial Lectures, Ed. J.-I. Igusa, 1977, p. 26-51.

[G-H] P.A. GRIFFITHS et J. HARRIS, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley and Sons, New York, 1978.

[H1] A. HÉNAUT, *Caractérisation des tissus de* $\mathbb{C}^2$ *dont le rang est maximal et qui sont linéarisables*, (*Compositio Math.*, Vol. 94, 1994, p. 247-268).

[H2] A. HÉNAUT, *Systèmes différentiels, nombre de Castelnuovo et rang des tissus de* $\mathbb{C}^n$, (Publ. R.I.M.S., Kyoto Univ., Vol. 31, (1995), p. 703-720).

[L] J.B. LITTLE, *On Webs of Maximum Rank*, (*Geom. Dedicata*, Vol. 31, 1989, p. 19-35).

[P] H. POINCARÉ, *Sur les surfaces de translation et les fonctions abéliennes*, (*Bull. Soc. Math.*, France, Vol. 29, 1901, p. 61-86.)

(Manuscrit reçu le 7 novembre 1996;
révisé le 8 juillet 1997.)

A. HÉNAUT
Laboratoire de Mathématiques pures,
Université Bordeaux-I et C.N.R.S.,
351, cours de la Libération,
33405 Talence Cedex, France.