ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

MYRIAM OUNAIES

Estimations du type Nevanlinna pour les applications holomorphes de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 30, nº 6 (1997), p. 797-819

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1997_4_30_6_797_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 30, 1997, p. 797 à 819.

ESTIMATIONS DU TYPE NEVANLINNA POUR LES APPLICATIONS HOLOMORPHES DE $\mathbb{C}^n$ DANS $\mathbb{C}^n$

PAR MYRIAM OUNAIES

RÉSUMÉ. – Nous considérons des familles d'ensembles $\{E_a,\ a \in \mathbb{C}^n \setminus \{z : \prod_{i=1}^n z_i = 0\}\}$, qui rencontrent l'image de toute application holomorphe F non dégénérée et nous montrons que la croissance asymptotique de $F^{-1}(E_a) \cap B(0,r)$ quand r tend vers l'infini est la même pour tout $a \in \mathbb{C}^n \setminus \{z : \prod_{i=1}^n z_i = 0\}$.

ABSTRACT. – We consider families of sets $\{E_a,\ a \in \mathbb{C}^n \setminus \{z : \prod_{i=1}^n z_i = 0\}\}$, which intersect the image of $\mathbb{C}^n$ by every non-degenerate holomorphic map and we show that the asymptotic growth of $F^{-1}(E_a) \cap B(0,r)$ when r tends to infinity is the same for every $a \in \mathbb{C}^n \setminus \{z : \prod_{i=1}^n z_i = 0\}$.

Introduction

En une variable, on sait d'après le théorème de Picard que l'image d'une fonction méromorphe ne peut éviter plus de deux valeurs sur la sphère de Riemann.

On sait de plus, grâce à la théorie de Nevanlinna [13], que, en dehors d'un ensemble exceptionnel dénombrable, chaque valeur est prise avec la même fréquence asymptotique.

Si on s'intéresse maintenant à l'image d'une application holomorphe de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$, pour $n \geq 2$, on se rend compte d'un phénomène différent.

On sait depuis longtemps que le théorème de Picard n'est plus vrai en plusieurs variables. Fatou (1922, [8]), puis Bieberbach (1933, [2], [3]) ont construit une application non dégénérée de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$ dont l'image n'est pas dense dans $\mathbb{C}^2$. L'application construite par Bieberbach est de plus injective, à Jacobien identiquement égal à 1, et son image évite un ouvert de $\mathbb{C}^2$. C'est ce qu'on appelle les applications de Fatou-Bieberbach et leur image est un domaine de Fatou-Bieberbach. (Voir [18] pour la généralisation de l'exemple de Bieberbach à $n \geq 2$) Plus récemment, J. Esterle et P. G. Dixon (1986, [7]) ont donné de nouvelles méthodes pour construire de telles applications, notamment, ils ont montré le résultat suivant :

THÉORÈME 1 [7]. – *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une application holomorphe $F : \mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$ telle que*

$$J_{F_\varepsilon}(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}^2,$$
$$F_\varepsilon(\mathbb{C}^2) \cap B(0, 1-\varepsilon) = \emptyset,$$

et pour tout $u = (u_1, u_2) \in F_\varepsilon(\mathbb{C}^2)$,

$$\begin{aligned}
&u_1 \neq 0\ ,\ u_2 \neq 0,\\
&\inf(|u_1|, |u_2|^{1+\varepsilon}|u_1|) \leq 1 \ \ \textit{et}\ \ \inf(|u_2|, |u_1|^{1+\varepsilon}|u_2|) \leq 1,\\
&\inf(|u_1|, |u_2|) \leq 1 \ \ \textit{et}\ \ \inf(|u_1|, |u_2|) \to_{|u|\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

J. P. Rosay et W. Rudin (1988, [16]) ont même construit une application dont le volume de l'image est fini :

THÉORÈME 2 [16]. – *Soit* $\varepsilon > 0$ *et* K *un cube de* $\mathbb{C}^n$, *il existe une application holomorphe de* $\mathbb{C}^n$ *dans* $\mathbb{C}^n$ *et un ouvert* Z *de volume* $< \varepsilon$ *tels que*

$$\begin{aligned}
&J_F \equiv 1\\
&F(\mathbb{C}^n) \subset K \cup Z
\end{aligned}$$

Cette application n'est évidemment pas injective car, si F est injective, $\mathrm{Vol}(F(\mathbb{C}^n) \cap B(0,r)$ tend vers ∞ quand r tend vers ∞, $B(0,r)$ étant la boule euclidienne de rayon r. Cependant, cette convergence peut être arbitrairement lente : Rosay et Rudin (1993, [17]) ont montré que quelque soit $\mu : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ avec $\lim_{r\to+\infty} \mu(r) = \infty$, on peut trouver une application injective F à Jacobien identiquement égal à 1 telle que $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{\mathrm{Vol}\ (F(\mathbb{C}^n) \cap B(0,r))}{\mu(r)} = 0$. C'est la conséquence du théorème suivant :

THÉORÈME 3 [17]. – *Soit* $\varepsilon > 0$, $K_j, j = 1, 2, \ldots$ *des cubes unitaires fermés et disjoints de* $\mathbb{C}^n$. *Il existe une application holomorphe injective de* $\mathbb{C}^n$ *dans* $\mathbb{C}^n$ *et un ouvert* Z *de volume* $< \varepsilon$ *tels que*

$$\begin{aligned}
&J_F \equiv 1\\
&F(\mathbb{C}^n) \subset \bigcup_j K_j \cup Z
\end{aligned}$$

Tous ces exemples montrent à quel point l'image d'une application holomorphe de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ peut être « petite ». Pourtant, il existe des ensembles que ces images ne peuvent pas éviter.

Par exemple, Al Vitter (1977, [19]) a montré que la réunion de $n+1$ hyperplans est inévitable.

L. Gruman (1978, [9]) a exhibé des ensembles inévitables "plus petits". Ce sont des réunions finies d'ensembles de la forme $\{w \in \mathbb{C}^n, \Re g_1(w) = \ldots = \Re g_n(w) = 0\}$ où les g_i sont des fonctions holomorphes.

J. P. Rosay et W. Rudin (1988, [16] ont montré l'existence d'ensembles inévitables encore plus petits : des ensembles discrets.

L. Gruman (1991, [9]) a montré qu'une condition suffisante pour qu'un ensemble discret soit inévitable est que ses points se resserrent à l'infini avec une certaine vitesse.

Soit $\mathbb{C}_0^n = \mathbb{C}^n \setminus \{z/\ \prod_{j=1}^n z_j = 0\}$ et $M_F(r) = \sup_{z\in B(0,r)} \|F(z)\|$. Gruman [10] a construit explicitement une famille de tels ensembles, $\{\widehat{E}_a,\ a \in \mathbb{C}_0^n\}$, inévitables pour la famille $\widehat{\mathcal{F}}$ des applications holomorphes dont le Jacobien est une constante non nulle.

De plus, il a montré que, pour $F \in \widehat{\mathcal{F}}$, pour $a \in \mathbb{C}_0^n \setminus \phi_F$, où ϕ_F est un ensemble pluripolaire dans $\mathbb{C}^n$, la fréquence asymptotique de $F^{-1}(\widehat{E}_a) \cap B(0,r)$ est la même, de l'ordre de $M_F(r)^{4n^2}$.

De même, il a construit une famille $\{E_a,\ a \in \mathbb{C}_0^n\}$ d'ensembles inévitables pour la famille $\mathcal{F}$ des applications holomorphes non dégénérées. Il a montré là encore que, pour $a \in \mathbb{C}_0^n \setminus \psi_F$, où ψ_F est un ensemble pluripolaire dans $\mathbb{C}^n$, la fréquence asymptotique de $F^{-1}(E_a) \cap B(0,r)$ est de l'ordre de $M_F(r)^{\log\log M_F(r)^{2n-1}}$.

Nous montrons ici que, si F est dans la famille $\widehat{\mathcal{F}}$, l'ensemble exceptionnel ϕ_F est en fait vide. Nous avons aussi montré que, pour F dans $\mathcal{F}$, l'ensemble ψ_F est vide, mais ce cas sera traité dans un travail ultérieur.

0. Notations et définitions

Nous désignerons par $||z|| = (\sum_{i=1}^n |z_i|^2)^{1/2}$ et $[z] = \sup_{j=1\ldots,n} |z_j|$.

Si $z = (z_1, \ldots, z_n)$ et $w = (w_1, \ldots, w_n)$ sont dans $\mathbb{C}^n$, $\langle z, w\rangle = \displaystyle\sum_{j=1}^n z_j\, w_j$.

Nous noterons $B(a,r)$ la boule euclidienne de $\mathbb{C}^n$ de centre a et de rayon r.

Soient

$$\beta = \frac{i}{2}\partial\overline{\partial}||z||^2,\ \beta_k = \frac{1}{k!}\beta^k,$$
$$\alpha = i\partial\|z\|^2 \wedge \overline{\partial}\|z\|^2,\ \gamma = i\partial\overline{\partial}\log\|z\|^2.$$

Si w est dans $\mathbb{C}$, nous noterons $\Re w = \dfrac{w+\bar{w}}{2}$ et $\Im w = \dfrac{w-\bar{w}}{2i}$.

Pour une application holomorphe $F = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, nous notons $J_F(z)$ le Jacobien de F au point z, pour $a \in \mathbb{C}^n$, $F^{-1}(a)$ l'image réciproque de a par F et

$$M_F(r) = \sup_{z \in B(0,r)} \|F(z)\|.$$

Nous utiliserons également les notations suivantes :

$$e^{F(z)} = (e^{f_1(z)}, \ldots, e^{f_n(z)}),$$

si $N = (N_1, \ldots, N_n) \in \mathbb{Z}^n, F(N)(z) = (f_1(z) + 2\pi N_1, \ldots, f_n(z) + 2\pi N_n)$.

Si $V : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction plurisousharmonique, nous notons

$$M_V(r) = \sup_{z \in B(0,r)} |V(z)|,\ V^+(z) = \max(V(z), 0) \text{ et } V^-(z) = \max(-V(z), 0).$$

Nous avons donc $V = V^+ - V^-$ et $|V| = V^+ + V^-$.

Si A est une matrice, nous notons $||A|| = \sup_{||u||=1} \|Au\|$.

Nous noterons $\mathbb{C}_0^n = \mathbb{C}^n \setminus \left\{ z / \displaystyle\prod_{j=1}^n z_j = 0 \right\}$.

DÉFINITION 0.1. – *Soit $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}^{(j)}, j = 1, \ldots, 2n-1\}$ une famille de $2n-1$ vecteurs de $\mathbb{C}^n$. Nous dirons que les vecteurs de $\mathcal{C}$ sont* **en position générale** *si toute partie de n éléments de $\mathcal{C}$ forme un système linéairement indépendant.* □

DÉFINITION 0.2. – *Soient $\mathcal{F}$ une famille d'applications holomorphes de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ et E un ensemble de $\mathbb{C}^n$. Nous dirons que E est un* **ensemble essentiel** *pour $\mathcal{F}$ si pour tout $F \in \mathcal{F}$, pour tout r et r' dans $\mathbb{R}^+$ nous avons*

$$F(\{z/\|z\| \geq r\}) \cap E \cap \{z/\|z\| \geq r'\} \neq \emptyset. \quad \square$$

Nous noterons $\widehat{\mathcal{F}} = \{\mathcal{F} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n,$ holomorphe, à jacobien constant non nul$\}$.

I. Résultats préliminaires sur les applications holomorphes

I.1. Injectivité locale

Nous savons que si le Jacobien d'une application F ne s'annule pas en un point, F est injective dans un voisinage de ce point : c'est le théorème d'inversion locale. Mais ici nous avons besoin d'une version quantitative de ce résultat. Autrement dit, nous voulons une estimation de la taille de ce voisinage. Pour cela, nous établissons le théorème suivant qui est une conséquence d'un théorème dû à I. Ono [15] :

THÉORÈME I.1. – *Soient $F = (f_1, \ldots, f_n)$ une application holomorphe de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$, $r > 0$, $r' > r$.*
Soit $z_0 \in B(0, r)$ tel que $J_F(z_0) \neq 0$. Alors F est injective sur la boule $B(z_0, S)$, où

$$S = C_n\,(r' - r)^{n+1} M_F(r')^{-n} |J_F(z_0)|.$$

De plus, l'image par F de $B(z_0, S)$ contient $B(F(z_0), S')$ avec

$$S' = C'_n\,(r' - r)^{2n} M_F(r')^{-2n+1} |J_F(z_0)|^2.$$

Les constantes C_n et C'_n ne dépendent que de n. $\square$

Démonstration. – On pose $\widetilde{F}(z) = F(z_0 - z) - F(z_0)$.
Si $z \in B(0, r' - r)$, alors $\|\widetilde{F}(z)\| \leq 2\,M_F(r')$.

$$F'(z_0)^{-1} = \frac{1}{J_F(z_0)} A_{z_0}.$$

où A_{z_0} est la comatrice de $F'(z_0)$. Ses coefficients sont donc des combinaisons linéaires de produits de $n-1$ termes de la forme $\dfrac{\partial f_j}{\partial z_k}(z_0)$.

En utilisant les formules intégrales de Cauchy, chaque coefficient est majoré par $\dfrac{M_F(r')^{n-1}}{(r' - r)^{n-1}}$. Donc

$$\|\widetilde{F}'(0)^{-1}\| = \|F'(z_0)^{-1}\| \leq \frac{C'_n}{|J_F(z_0)|} \frac{M_F(r')^{n-1}}{(r' - r)^{n-1}}.$$

Le résultat découle du théorème d'Ono.

I.2. Comparaison de mesures

Nous renvoyons à [11] ou [12] pour la théorie des courants positifs fermés.

LEMME I.2.1. – *Soit θ un courant positif fermé de degré $p \leq n-1$ à coefficients $\mathcal{C}^\infty$. Soit h une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Nous noterons $\varrho = \|z\|^2 - r^2$.*

$$\int_{B(0,r)} h\,\theta \wedge i\partial\overline{\partial}\varrho^2 \wedge \beta_{n-p-1} = \int_{B(0,r)} \varrho^2\, i\partial\overline{\partial}h \wedge \theta \wedge \beta_{n-p-1}. \quad \square$$

Ce lemme est une conséquence directe de la formule de Stokes (appliquée deux fois) et du fait que $\overline{\partial}\varrho^2 = \varrho\overline{\partial}\varrho = 0$ sur $bB(0,r)$.

LEMME I.2.2. – *Soient $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$, $k < n$ des fonctions plurisousharmoniques et localement bornées sur $B(0,r) \setminus K$, K étant un compact dans $B(0,r)$.*

Soit $\varphi = \sum_{j=1}^k \alpha_j\, \varphi_j$ une combinaison linéaire réelle des fonctions φ_j. Alors

$$\text{(i)} \quad \int_{B(0,r)} \varphi \bigwedge_{j=1}^k i\partial\overline{\partial}\varphi_j \wedge i\partial\overline{\partial}\varrho^2 \wedge \beta_{n-k-1} = \int_{B(0,r)} \varrho^2 i\partial\overline{\partial}\varphi \wedge \bigwedge_{j=1}^k i\partial\overline{\partial}\varphi_j \wedge \beta_{n-k-1}.$$

$$\text{(ii)} \quad \int_{B(0,r)} \varphi \bigwedge_{j=1}^k i\partial\overline{\partial}\varphi_j \wedge i\partial\overline{\partial}\varrho^2 \wedge \beta_{n-k-1} \leq 8\, r^2(n-k) \int_{B(0,r)} |\varphi| \bigwedge_{j=1}^k i\partial\overline{\partial}\varphi_j \wedge \beta_{n-k}.$$

Si $\varphi_1, \cdots, \varphi_k$ sont bornées en module sur $B(0,r)$, alors pour $r' > r$

$$\text{(iii)} \quad \int_{B(0,r)} \bigwedge_{j=1}^k i\partial\overline{\partial}\varphi_j \wedge \beta_{n-k} \leq C(k,n)\; r'^{2n}\; (r'-r)^{-2k} \prod_{j=1}^k M_{\varphi_j}(r'). \quad \square$$

Démonstration. – (i) $\forall j \in \{1, \ldots, k\}$ soient φ_j^ν des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ telles que $\varphi_j^\nu \searrow_{\nu \to +\infty} \varphi_j$. D'après le lemme I.2.1, pour tout ν et pour tout $l \in \{1, \cdots, k\}$,

$$\int_{B(0,r)} \varphi_l^\nu \bigwedge_{j=1}^k i\partial\overline{\partial}\varphi_j^\nu \wedge i\partial\overline{\partial}\varrho^2 \wedge \beta_{n-k-1} = \int_{B(0,r)} \varrho^2 i\partial\overline{\partial}\varphi_l^\nu \wedge \bigwedge_{j=1}^k i\partial\overline{\partial}\varphi_j^\nu \wedge \beta_{n-k-1}.$$

Le courant $\varphi_l^\nu \bigwedge_{j=1}^k i\partial\overline{\partial}\varphi_j^\nu$ converge vers $\varphi_l \bigwedge_{j=1}^k i\partial\overline{\partial}\varphi_j$ et $i\partial\overline{\partial}\varphi_l^\nu \wedge \bigwedge_{j=1}^k i\partial\overline{\partial}\varphi_j^\nu$ converge vers $i\partial\overline{\partial}\varphi_l \wedge \bigwedge_{j=1}^k i\partial\overline{\partial}\varphi_j$ (cf [6]). D'où le résultat (i) par passage à la limite.

(ii) Posons $\theta = \bigwedge_{j=1}^k i\partial\overline{\partial}\varphi_j$. C'est un courant positif fermé.

$$i\partial\overline{\partial}\varrho^2 = 2i\partial\varrho \wedge \overline{\partial}\varrho + 2i\,\varrho\partial\overline{\partial}\varrho = 2\alpha + 2\,\varrho\,\beta.$$

$$i\partial\overline{\partial}\log\|z\|^2 = \frac{i\partial\overline{\partial}\|z\|^2}{\|z\|^2} - \frac{i\partial\varrho \wedge \overline{\partial}\varrho}{\|z\|^4} = \frac{1}{\|z\|^4}[|z\|^2\beta - \alpha].$$

$\|z\|^2\beta - \alpha$ est donc une forme positive.

$$\begin{aligned}
&\int_{B(0,r)} \varphi\ \theta \wedge i\partial\overline{\partial}\varrho^2 \wedge \beta_{n-k-1} = \\
&= 2\int_{B(0,r)} \varphi^+\theta \wedge \alpha \wedge \beta_{n-k-1} - 2\int_{B(0,r)} \varphi^-\theta \wedge \alpha \wedge \beta_{n-k-1} \\
&\quad + 4\,(n-k)\int_{B(0,r)} \varrho\,\varphi^+\theta \wedge \beta_{n-k} - 4(n-k)\int_{B(0,r)} \varrho\,\varphi^-\theta \wedge \beta_{n-k} \leq \\
&\leq 2\int_{B(0,r)} \varphi^+\theta \wedge \alpha \wedge \beta_{n-k-1} - 4\,(n-k)\int_{B(0,r)} \varrho\,\varphi^-\theta \wedge \beta_{n-k} \leq \\
&\leq 8\,r^2(n-k)\int_{B(0,r)} |\varphi|\theta \wedge \beta_{n-k}.
\end{aligned}$$

(iii) Posons $r_j = r + j\dfrac{r'-r}{k}$.

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,r)} \bigwedge_{j=1}^{k} i\partial\overline{\partial}\varphi_j \wedge \beta_{n-k} &\leq \frac{1}{(r_1^2-r^2)^2}\int_{B(0,r_1)} (r_1^2 - \|z\|^2)^2 \bigwedge_{j=1}^{k} i\partial\overline{\partial}\varphi_j \wedge \beta_{n-k} \\
&= \frac{1}{(r_1^2-r^2)^2}\int_{B(0,r_1)} \varphi_k \bigwedge_{j=1}^{k-1} i\partial\overline{\partial}\varphi_j \wedge i\partial\overline{\partial}(r_1^2 - \|z\|^2)^2 \wedge \beta_{n-k} \\
&\leq \frac{4\,(n-k+1)\ r_1^2}{(r_1^2-r^2)^2} M_{\varphi_k}(r_1)\int_{B(0,r)} \bigwedge_{j=1}^{k-1} i\partial\overline{\partial}\varphi_j \wedge \beta_{n-k+1} \\
&\leq \cdots \\
&\leq C(k,n)\ r'^{2n}\ (r'-r)^{-2k}\ \prod_{j=1}^{k} M_{\varphi_j}(r').
\end{aligned}$$

La dernière ligne s'obtient après itération et en observant que

$$\int_{B(0,r_k)} \beta_n = \int_{B(0,r')} \beta_n = \pi^n (n!)^{-1} r'^{2n}.$$

LEMME I.2.3. – *Soit G une application holomorphe de $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, Soient $r > 0$, $r' > r$. Posons $\varrho = \|z\|^2 - r^2$.*
Il existe une constante C qui ne dépend que de n telle que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{B(0,r)} \varrho^2[(i\partial\overline{\partial}\log(\|G\|^2+1))^n - (i\partial\overline{\partial}\log^+[G]^2)^n]\right| \leq \\
&\qquad\qquad \leq C\,r'^{2n+2}\,(r'-r)^{-2n+2}\,[\log(M_G(r')^2+1)]^{n-1} \quad \square
\end{aligned}$$

Démonstration. – Nous avons d'après le Lemme I.2.2,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{B(0,r)} \varrho^2[(i\partial\overline{\partial}\log(\|G\|^2+1))^n - (i\partial\overline{\partial}\log^+[G]^2)^n]\right| = \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{B(0,r)} \varrho^2 i\partial\overline{\partial}[\log(\|G\|^2+1) - \log^+[G]^2]\wedge\right. \\
&\qquad\qquad \left.\wedge\left(i\partial\overline{\partial}\log(\|G\|^2+1)\right)^{n-1-k}\wedge(i\partial\overline{\partial}\log^+[G]^2)^k\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{B(0,r)} [\log(\|G\|^2+1) - \log^+[G]^2]\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left(i\partial\overline{\partial}\log(\|G\|^2+1)\right)^{n-1-k}\wedge(i\partial\overline{\partial}\log^+[G]^2)^k\wedge i\partial\overline{\partial}\varrho^2\right| \leq \\
&\leq C_1\, r^2\sum_{k=0}^{n-1}\int_{B(0,r)} (i\partial\overline{\partial}\log(\|G\|^2+1))^{n-1-k}\wedge(i\partial\overline{\partial}\log^+[G]^2)^k\wedge\beta \leq \\
&\leq C\, r'^{2n+2}(r'-r)^{-2n+2}[\log(M_G(r')^2+1)]^{n-1}.
\end{aligned}$$

LEMME I.2.4. – *Soient G une application holomorphe de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$, $r' > r > 0$, $a \in \mathbb{C}^n$. On suppose que les zéros de $G - a$ sont isolés. Soit η_a une constante strictement positive. Alors il existe $C(a) > 0$ telle que*

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{B(0,r)} \varrho^2[\left(i\partial\overline{\partial}\log(\|G\|^2+1)\right)^n - \left(i\partial\overline{\partial}\log\|G-a\|^2\right)^n]\right| \leq \\
&\leq 4\, r^2\sum_{k=0}^{n-1}\int_{B(0,r)}\left(C(a) + \log^+\frac{\eta_a}{\|G-a\|}\right) \\
&\qquad \left(i\partial\overline{\partial}\log(\|G\|^2+1)\right)^{n-1-k}\wedge\left(i\partial\overline{\partial}\log\|G-a\|^2\right)^k\wedge\beta. \quad \square
\end{aligned}$$

Démonstration. – $\exists\, C_1(a) > 0$, $\exists C_2(a) > 0$ telles que

$$-C_2(a) \leq \log(\|G\|^2+1) - \log^+\frac{\|G-a\|^2}{\eta_a} \leq C_1(a).$$

Nous avons avec le lemme I.2.2,

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{B(0,r)} \varrho^2 [\big(i\partial\overline{\partial}\log(\|G\|^2+1)\big)^n - \big(i\partial\overline{\partial}\log\|G-a\|^2\big)^n] \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{B(0,r)} \varrho^2 i\partial\overline{\partial}\big[\log(\|G(z)\|^2+1) - \log\|G-a\|^2\big] \wedge \right. \\
&\qquad \left. \wedge \big(i\partial\overline{\partial}\log(\|G\|^2+1)\big)^{n-1-k} \wedge \big(i\partial\overline{\partial}\log\|G-a\|^2\big)^k \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{B(0,r)} \big[\log(\|G(z)\|^2+1) - \log\|G-a\|^2\big] \right. \\
&\qquad \left. \big(i\partial\overline{\partial}\log(\|G\|^2+1)\big)^{n-1-k} \wedge \big(i\partial\overline{\partial}\log\|G-a\|^2\big)^k \wedge i\partial\overline{\partial}\varrho^2 \right| \\
&\leq 4\, r^2 \sum_{k=0}^{n-1} \int_{B(0,r)} \left[C(a) + \log^+ \frac{\eta_a}{\|G-a\|} \right] \\
&\qquad \big(i\partial\overline{\partial}\log(\|G\|^2+1)\big)^{n-1-k} \wedge \big(i\partial\overline{\partial}\log\|G-a\|^2\big)^k.
\end{aligned}$$

I.3. Estimation de certaines intégrales

Soient $F = (f_1, \ldots, f_n)$ une application holomorphe de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$.
Soient $h_1, \ldots, h_n$ des fonctions entières sur $\mathbb{C}$.
On pose $G = (g_1, \ldots, g_n)$ avec

$$g_j = \exp(h_j \circ f_j), \ j = 1, \ldots, n$$

et on notera pour $R > 0$, $M_h(R) = \max_{j=1,\ldots,n} \sup_{|w|\leq R} |h_j(w)|$.

On prend a dans $\mathbb{C}_0^n$. Pour chaque $j \in \{1, \ldots, n\}$, on définit une branche du log sur $\mathbb{C}$ privé d'une demi-droite Δ_{a_j}, passant par l'origine, ne contenant pas a_j et faisant un angle θ_{a_j} avec la demi-droite réelle positive.

On choisit une constante η_a strictement positive assez petite pour que, si $|w - a_j| < \eta_a$, alors w est encore dans le complémentaire de Δ_{a_j} et

$$|w - a_j| \geq \frac{1}{2}\,|a_j|\,|\log w - \log a_j|.$$

Dans ce paragraphe, nous voulons estimer l'intégrale suivante :

$$\int_{B(0,r)\cap\Sigma_A} \left(\log^+ \frac{\eta_a}{\|G-a\|} \right)^p (i\partial\overline{\partial}\log\|G-a\|)^l \wedge \big(i\partial\overline{\partial}\log(\|G\|^2+1)\big)^k \wedge \beta_{n-k-l}$$

où Σ_A est un ensemble sur lequel le Jacobien de F n'est pas trop petit, p est un réel positif, l et k des entiers tels que $l + k \leq n - 1$.

Grâce au théorème d'Ono, nous pourrons dans ce cas écrire l'intégrale comme une somme d'intégrales portant sur des petites boules sur lesquelles F est injective tout en

contrôlant le nombre de ces boules. Ceci nous permettra d'effectuer le changement de variables $\xi = F(z)$ et de nous ramener à des fonctions entières d'une variable, h_j. En fait, nous aurons d'abord besoin du lemme suivant :

LEMME I.3.1. – *Soient $R > 0$, $R_1 = 2\ R$, $R_2 = 3\ R$.*
Soient $h_1, \dots, h_n$ des fonctions entières sur $\mathbb{C}$.
Soient $\beta_1, \dots, \beta_n$ des nombres complexes tels que

$$\forall\ j \in \{1, \dots, n\},\ |\beta_j| \leq M_{h_j}(R_1).$$

Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on note x_j^μ les zéros de $h_j - \beta_j$, dans la boule $B(0, R_1)$ et M_j le nombre de ces zéros comptés avec multiplicité.
Pour $w \in \mathbb{C}$ on pose $\delta_j(w) = \min\limits_{\mu=1,\dots,M_j} |w - x_j^\mu|$.
On note $M_h(R) = \max\limits_{j=1,\dots,n} \big(\log M_{h_j}(R)\big)$.
Alors pour R assez grand, on a

(i) $\exists\, C_1 > 0\ /\ \forall j\ \in \{1, \dots, n\},\quad M_j \leq C_1\ \log M_{h_j}(R_2)$.

(ii) $\exists\, C_2 > 0\ , \exists C_3 > 0\ /\ \forall j\ \in \{1, \dots, n\}\ ,\ \forall\ w \in B(0, R)$,

$$\log \frac{1}{|h_j(w) - \beta_j|} \leq C_2\ \log M_{h_j}(R_2)\ \max\left(\log R, \log \frac{1}{\delta_j(w)}\right),$$

$$\frac{|h_j'(w)|}{|h_j(z) - \beta_j|} \leq C_3\ \log M_{h_j}(R_2)\ \max\left(\frac{1}{R}, \frac{1}{\delta_j(w)}\right).$$

(iii) *Soient $p > 1$ et un entier $m \leq n - 1$.*
Soit $\mathcal{J}$ l'ensemble de tous les m-uplets $J = (j_1, \dots, j_m)\ /\ j_i \in \{1, \dots, n\}$ pour $i = 1, \dots, m$ avec $j_i \neq j_{i'}$ si $i \neq i'$..
Pour $w_1, w_2, \dots, w_n$ dans $\mathbb{C}$, soit

$$\Gamma(w_1, \dots, w_n) = \left(\log^+ \frac{1}{\sum_{j=1}^n |h_j(w_j) - \beta_j|^2}\right)^p \frac{\displaystyle\sum_{J \in \mathcal{J}} \prod_{j \in J} |h_j'(w_j)|^2}{\left(\sum_{j=1}^n |h_j(w_j) - \beta_j|^2\right)^m}$$

Alors $\quad \exists\, C = C(n, p) > 0$ *telle que*

$$\int_{B(0,R)} \cdots \int_{B(0,R)} \Gamma(w_1, \dots, w_n) d\lambda(w_1) \dots d\lambda(w_n) \leq$$
$$\leq C\ [\log M_h(R_2)]^{4m+p} (\log R)^{p+m} \max\left(R^2\ ,\ \frac{\log M_h(R_2)\,(\log R)^{p+m}}{R^2}\right). \quad \square$$

Démonstration. – Nous reprenons les notations de Nevanlinna [13].
Dans (i) et (ii) fixons j dans $\{1, \dots, n\}$ et notons $h = h_j,\ M = M_j,\ \beta = \beta_j,\ \delta(w) = \delta_j(w)$.

(i) D'après Nevanlinna, $M = n(R_1, \frac{1}{h-\beta})$,

$$T(R_2, h) = m(R_2, h) + N(R_2, h) = m(R_2, h), \text{ car } h \text{ n'a pas de pôle,}$$
$$\text{et } m(R_2, h) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ |h(R_2\, e^{i\theta}|\, d\theta \leq \log M_h(R_2).$$

En utilisant le premier théorème fondamental, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\begin{aligned} N\left(R_2, \frac{1}{h-\beta}\right) \leq T\left(R_2, \frac{1}{h-\beta}\right) &\leq T(R_2, h) + \log^+ |\beta| + C \\ &\leq \log M_h(R_2) + \log^+ |\beta| + C \\ &\leq \widetilde{C}\ \log M_h(R_2), \quad \text{pour } R_2 \text{ assez grand.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N\left(R_2, \frac{1}{h-\beta}\right) = \int_0^{R_2} n\left(t, \frac{1}{h-\beta}\right)\frac{dt}{t} &\geq \int_{R_1}^{R_2} n\left(t, \frac{1}{h-\beta}\right)\frac{dt}{t} \\ &\geq n\left(R_1, \frac{1}{h-\beta}\right)\frac{R_2 - R_1}{R_2}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } n\left(R_1, \frac{1}{h-\beta}\right) \leq \frac{R_2}{R_2 - R_1} N\left(R_2, \frac{1}{h-\beta}\right) \leq 3\,\widetilde{C} \log M_h(R_2).$$

(ii) D'après la formule de Poisson-Jensen,

$$\begin{aligned} \forall w \in B(0, R), \quad \log \frac{1}{|h(w) - \beta|} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \frac{1}{|h(R_1\, e^{i\theta}) - \beta|} \frac{R_1^2 - |w|^2}{|R_1\, e^{i\theta} - w|^2}\, d\theta + \\ &\quad + \sum_{\mu=1,\ldots,M} \log \left| \frac{R_1^2 - \bar{x}_\mu\, w}{R_1(w - x_\mu)} \right| \\ &\leq \frac{1}{R_1} m\left(R_1, \frac{1}{h-\beta}\right) + \sum_{\mu=1,\ldots,M} \log \left| \frac{R_1^2 - \bar{x}_\mu\, w}{R_1} \right| + \\ &\quad + \sum_{\mu=1,\ldots,M} \log \frac{1}{|w - x_\mu|}. \end{aligned}$$

Là encore grâce au premier théorème fondamental,

$$\begin{aligned} m\left(R_1, \frac{1}{h-\beta}\right) \leq T\left(R_1, \frac{1}{h-\beta}\right) &\leq \log M_h(R_1) + \log^+ |\beta| + C \\ &\leq \widetilde{C}'\ \log M_h(R_1), \quad \text{pour } R_1 \text{ assez grand.} \end{aligned}$$

Regardons les autres termes.

$$\forall \mu \in \{1, \ldots, M\}, \ \frac{|R_1^2 - \bar{x}_\mu\, w|}{R_1} \leq \frac{R_1^2 + R_1\, R}{R_1} = 3R.$$

D'où $\displaystyle\sum_{\mu=1,\dots,M} \log\left|\frac{R_1^2-\bar{x}_\mu\, w}{R_1}\right| \leq M\log(3R) \leq C_1\,\log(3R)\,\log M_h(R_2).$

De plus, $\displaystyle\sum_{\mu=1,\dots,M} \log\frac{1}{|w-x_\mu|} \leq M\,\log\frac{1}{\delta(w)} \leq C_1\,\log M_h(R_2)\,\log\frac{1}{\delta(w)}.$

Finalement, pour R assez grand et $w \in B(0,R)$, on a

$$\log\frac{1}{|h(w)-\beta|} \leq C_2\,\log M_h(R_2)\,\max\left(\log R\ ,\ \log\frac{1}{\delta(w)}\right).$$

Toujours d'après la formule de Poisson-Jensen mais après dérivation on a pour tout $w \in B(0,R)$,

$$\begin{aligned}\frac{h'(w)}{h(w)-\beta} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|h(R_1\,e^{i\theta})-\beta|\,\frac{2\,R_1\,e^{i\theta}}{(R_1\,e^{i\theta}-w)^2}\,d\theta+\\ &\quad+\sum_{\mu=1,\dots,M}\frac{R_1^2-|x_\mu|^2}{(w-x_\mu)\,(R_1^2-x_\mu\,w)}.\end{aligned}$$

Majorons d'abord en norme le premier terme.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big|\log|h(R_1\,e^{i\theta})-\beta|\big|\,\frac{2\,R_1}{|R_1\,e^{i\theta}-w|^2}\,d\theta \leq\\ &\leq \frac{2\,R_1}{(R_1-R)^2}\left[m\left(R_1,\frac{1}{h-\beta}\right)+m(R,h-\beta)\right]\\ &\leq \frac{4}{R}[T(R_1,h)+\log^+|\beta|+C+\log 2\,M_h(R_1)] \leq \frac{\widetilde{C}'}{R}\log M_h(R_1)\end{aligned}$$

Regardons le deuxième terme.

$$\forall\mu\in\{1,\dots,M\},\ \frac{R_1^2-|x_\mu|^2}{|R_1^2-x_\mu\,w|} \leq \frac{(R_1-|x_\mu|)\,(R_1+|x_\mu|)}{R_1^2-|x_\mu|\,R} \leq \frac{R_1+|x_\mu|}{R} \leq \frac{2\,R_1}{R} = 4.$$

Donc $\displaystyle\left|\sum_{\mu=1,\dots,M}\frac{R_1^2-|\bar{x}_\mu|^2}{(w-x_\mu)\,(R_1^2-\bar{x}_\mu\,w)}\right| \leq 4\,M\,\frac{1}{\delta(w)} \leq 4\,C_1\,\log M_h(R_2)\,\frac{1}{\delta(w)}.$

Finalement, si $w \in B(0,R)$, nous avons

$$\left|\frac{h'(w)}{h(w)-\beta}\right| \leq C_3\,\log M_h(R_2)\,\max\left(\frac{1}{R}\ ,\ \frac{1}{\delta(w)}\right).$$

(iii) Soit $J \in \mathcal{J}$. Quitte à renuméroter les variables, on peut supposer que $J = (2,\dots,m)$. Pour $k = 1,\dots,n$, posons pour alléger les écritures :

$$\begin{aligned}&\alpha_j(w) = |h_j(w)-\beta_j|^2 \text{ pour } j = 1,\dots,n,\\ &S_k(w_1,\dots,w_k) = \sum_{j=1}^{k}\alpha_j(w_j),\\ &M(R) = M_h(R),\\ &B_k = B(0,R)\cap\{w\in\mathbb{C}\ /\ |h_k(w)-\beta_k| \leq 1\}.\end{aligned}$$

Nous voulons majorer

$$I = \int_{B_1} \cdots \int_{B_{m+1}} \left(\log^+ \frac{1}{S_n(w_1, \ldots, w_n)} \right)^p \frac{\prod_{j=2}^{m} |h_j'(w_j)|^2}{(S_n(w_1, \ldots, w_n))^m} \, d\lambda(w_1) \ldots d\lambda(w_n)$$

Nous avons les inégalités suivantes, (Rappelons que $m \leq n-1$)

$$\begin{aligned}(S_n(w_1, \ldots, w_n))^m &\geq (S_{m+1}(w_1, \ldots, w_{m+1}))^m \geq \\ &\geq (S_m(w_1, \ldots, w_m))^{m-1} \, \alpha_{m+1}(w_{m+1}) + \alpha_1^m(w_1).\end{aligned}$$

Par Fubini,

$$I \leq \int_{B_1} \left(\log^+ \frac{1}{\alpha_1(w_1)} \right)^p J_1(w_1) \, d\lambda(w_1)$$

$$\text{où} \qquad J_1(w_1) = \int_{B_2} |h_2'(w_2)|^2 J_2(w_1, w_2) \, d\lambda(w_2),$$

$$J_2(w_1, w_2) = \int_{B_3} |h_2'(w_3)|^2 J_3(w_1, w_2, w_3) \, d\lambda(w_3),$$

$$\vdots$$

$$J_m(w_1, \ldots, w_m) = \int_{B_{m+1}} \frac{|h_{m+1}'(w_{m+1})|^2}{(S_{m+1}(w_1, \ldots, w_{m+1}))^m} \, d\lambda(w_{m+1}).$$

Séparons B_{m+1} en deux parties :

$$B' = \{w \in B_{m+1} \ / \ \delta_{m+1}(w) \leq R\}$$

$$\text{et} \qquad B'' = \{w \in B_{m+1} \ / \ \delta_{m+1}(w) \geq R\}.$$

D'aprés les inégalités ci-dessus et (ii),

$$\begin{aligned}J_m' &= \int_{B'} \frac{|h_{m+1}'(w_{m+1})|^2}{\left(S_{m+1}(w_1, \ldots, w_{m+1})\right)^m} \, d\lambda(w_{m+1}) \\ &\leq \frac{1}{(S_m(w_1, \ldots, w_m))^{m-1}} \int_{B'} \frac{|h_{m+1}'(w)|^2}{\alpha_{m+1}(w)} \, d\lambda(w) \\ &\leq \frac{1}{(S_m(w_1, \ldots, w_m))^{m-1}} C_3^2 \, [\log M(R_2)]^2 \, \frac{1}{R^2} \int_{B'} d\lambda(w) \\ &\leq \frac{1}{(S_m(w_1, \ldots, w_m))^{m-1}} C_4 \, [\log M(R_2)]^2.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J_m'' &= \int_{B''} \frac{|h_{m+1}'(w_{m+1})|^2}{(S_{m+1}(w_1, \ldots, w_{m+1}))^m} \, d\lambda(w_{m+1}) \\ &\leq \int_{B''} \frac{|h_{m+1}'(w)|^2}{\alpha_{m+1}(w) \, (S_m(w_1, \ldots, w_m))^{m-1} + \alpha_1^m(w_1)} d\lambda(w) \\ &\leq \int_{B''} \left[(\delta_{m+1}(w))^2 \, \frac{(S_m(w_1, \ldots, w_m))^{m-1}}{C_3^2 \, (\log M(R_2))^2} + (\alpha_1(w_1))^m \, \frac{R^2}{M(R_1)^2} \right]^{-1} d\lambda(w) \\ &\leq \sum_{\mu=1}^{M_{m+1}} I_\mu.\end{aligned}$$

Avec

$$I_\mu = \int_{B(x^\mu_{m+1},R)} \left[|w - x^\mu_{m+1}|^2 \, \frac{(S_m(w_1,\cdots,w_m))^{m-1}}{C_3^2\,(\log M(R_2)^2} + (\alpha_1(w_1))^m \, \frac{R^2}{M(R_1)^2} \right]^{-1} d\lambda(w),$$

car $(\delta_{m+1}(w))^2 \leq \sum_{\mu=1}^{M_{m+1}} |w - x^\mu_{m+1}|^2$ et, sur B'', $\delta_{m+1}(w) \leq R$.

On fait alors dans chaque I_μ le changement de variables $w' = w - x^\mu_{m+1}$, on passe en coordonnées polaires puis on intègre. On obtient pour $\mu = 1, \ldots, M_{m+1}$,

$$\begin{aligned} I_\mu \leq C_3^2 & \frac{(\log M(R_2))^2}{2\,(S_m(w_1,\cdots,w_m))^{m-1}} \\ & \left(\log \left[\frac{R^2}{C_3^2(\log M(R_2))^2} (S_m(w_1,\cdots,w_m))^{m-1} + (\alpha_1(w_1))^m \, \frac{R^2}{M(R_1)^2} \right] + \right. \\ & \left. + \log \left[\frac{M(R_1)^2}{(\alpha_1(w_1))^m \, R^2} \right] \right). \end{aligned}$$

Si R_2 est assez grand, il existe une constante C_m telle que

$$I_\mu \leq C_m \frac{(\log M(R_2))^2}{(S_m(w_1,\cdots,w_m))^{m-1}} \left(\log M(R_1) + \log \frac{1}{\alpha_1(w_1)} \right).$$

Finalement, on obtient :

$$J_m \leq C_m (\log M(R_2))^2 \, \max\left(\log M(R_1)\,,\, \log \frac{1}{\alpha_1(w_1)} \right) \frac{1}{(S_m(w_1,\cdots,w_m))^{m-1}}.$$

Posons $A(w_1) = C_m\,(\log M(R_2))^3 \, \max\left(\log M(R_1)\,,\, \log \frac{1}{\alpha_1(w_1)} \right)$. Nous avons montré que

$$J_m(w_1,\ldots,w_m) \leq A(w_1) \frac{1}{(S_m(w_1,\cdots,w_m))^{m-1}}.$$

Donc

$$J_{m-1} \leq A(w_1) \int_{B_m} \frac{|h'_m(w)|^2}{(S_m(w_1,\cdots,w_m))^{m-1}} \, d\lambda(w).$$

On recommence avec $m-1$ puis $m-2$, $\cdots$, jusqu'à

$$J_1(w_1) \leq A(w_1)^m \leq C'_m\,(\log M(R_2))^{3m} \left(\max\left(\log M(R_1)\,,\, \log \frac{1}{|h_1(w_1) - \beta_1|} \right) \right)^m.$$

$$\text{Soient } \bar{B} = B_1 \cap \left\{ w \in \mathbb{C} \,/\, |h_1(w) - \beta_1| \geq \frac{1}{M(R_1)} \right\}$$

$$\text{et } \quad \widetilde{B} = B_1 \cap \left\{ w \in \mathbb{C} \,/\, |h_1(w) - \beta_1| \leq \frac{1}{M(R_1)} \right\}.$$

$$\int_{\bar{B}}\left(\log^+\frac{1}{\alpha_1(w)}\right)^p J_1(w)\,d\lambda(w)\le C'_m\,R^2\,(\log M(R_2))^{4m+p},$$

$$\int_{\widetilde{B}}\left(\log^+\frac{1}{\alpha_1(w)}\right)^p J_1(w)\,d\lambda(w)\le C'_m\,(\log M(R_2))^{3m}\int_{\widetilde{B}}\left(\log\frac{1}{|h_1(w)-B_1|}\right)^{p+m}.$$

$$\text{Soient } \widetilde{B}'=\widetilde{B}\cap\left\{w\ /\delta_1(w)\ge\frac{1}{R}\right\}$$

$$\widetilde{B}''=\widetilde{B}\cap\left\{w\ /\delta_1(w)\le\frac{1}{R}\right\}$$

$$\int_{\widetilde{B}'}\left(\log\frac{1}{|h_1(w)-\beta_1|}\right)^{p+m}\le R^2(C_2\,\log M(R_2)\,\log R)^{p+m},$$

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{B}''}\left(\log\frac{1}{|h_1(w)-\beta_1|}\right)^{p+m}&\le(C_2\,\log M(R_2))^{m+p}\int_{\widetilde{B}''}\left(\log\frac{1}{\delta_1(w)}\right)^{m+p}d\lambda(w)\\&\le(C_2\,\log M(R_2))^{m+p}\sum_{\mu=1}^{M_1}\int_{\widetilde{B}''}\left(\log\frac{1}{|w-x_1^\mu|}\right)^{m+p}d\lambda(w).\end{aligned}$$

Comme précédemment, on fait dans chaque intégrale le changement de variables $w'=w-x_1^\mu$, puis on passe en coordonnées polaires. D'où,

$$\begin{aligned}\int_{B'}\left(\log\frac{1}{|h_1(w)-\beta_1|}\right)^{p+m}&\le C_4\,M_1\,(\log M(R_2))^{m+p}\int_0^{\frac{1}{R}}\rho\left(\log\frac{1}{\rho}\right)^{m+p}d\rho\\&\le C_1(n,p)\,(\log M(R_2))^{m+p+1}\log R^{p+m}\,\frac{1}{R^2}.\end{aligned}$$

On a finalement

$$I\le C_2(n,p)\,(\log M(R_2))^{4m+p}\,\max\left(R^2\,,\,\frac{\log M(R_2)\,(\log R)^{p+m}}{R^2}\right)$$

On somme ensuite sur $J\in\mathcal{J}$, sachant que cardinal $(\mathcal{J})=\dfrac{n!}{(n-m)!}\le n!$.

On prendra $C(n,p)=n!\,C_2(n,p)$.

Nous pouvons maintenant montrer le résultat suivant qui est fondamental pour la suite.

LEMME I.3.2. – *Soient l,k des entiers positifs tels que $m=l+k\le n-1$ et $p>1$. Soient $\beta>1$, $r>0$ et $r'=r+r[\log\log M_F(r)]^{-\beta}$.*
Soit $A=A(r)\ge 1$ pour r assez grand. On note Σ_A l'ensemble

$$\left\{z\in\mathbb{C}^n/|J_F(z)|\ge\frac{1}{A}\right\}.$$

Alors il existe $r_p>0$ et $C=C(a,n,p)$ tels que, si $r\ge r_p$,

$$\int_{B(0,r)\cap\Sigma_A}\left(\log^+\frac{\eta_a}{\|G-a\|)}\right)^p(i\partial\overline{\partial}\log\|G-a\|)^l\wedge\left(i\partial\overline{\partial}\log(\|G\|^2+1)\right)^k\wedge\beta_{n-k-l}\le$$

$$\leq C\,\frac{r'^{2n}A^{2n+2}}{(r'-r)^{2m}}M_F(r')^{2n^2+2m}M_h\big(3\,R\big)^{n+1}\max\left(R^2,\frac{\log M_h\big(3\,R\big)}{R}\right),$$

où $R = M_F(r')$. $\square$

Démonstration. – Si $G(z) - a \neq 0$, en posant $m = l + k$, $\mathcal{J}$ l'ensemble des m-uplets $J = (j_1, \ldots, j_n)$ tels que $j_i \in \{1, \ldots, n\}$ et $j_i \neq j_i'$ si $i \neq i'$,

$$\begin{aligned}(i\partial\overline{\partial}\log\|G(z)-a\|^2)^l \wedge (i\partial\overline{\partial}\log\big(\|G(z)\|^2+1\big))^k \wedge \beta_{n-m}\\ \leq \frac{C(n)}{\|G-a\|^{2l}}\sum_{J\in\mathcal{J}}\bigwedge_{j\in J}\partial g_j(z)\wedge\overline{\partial}\bar{g}_j(z)\wedge\beta_{n-m}.\end{aligned}$$

Si $z \in B(0,r)$, $\left|\dfrac{\partial f_j(z)}{\partial z_j}\right| \leq \dfrac{M_F(r')}{r'-r}$, donc

$$\sum_{J\in\mathcal{J}}\bigwedge_{j\in J}\partial g_j(z)\wedge\overline{\partial}\bar{g}_j(z) \leq$$

$$\leq \frac{M_F(r')^{2m}}{(r'-r)^{2m}}\sum_{J\in\mathcal{J}}\prod_{j\in J}|h_j'\circ f_j|^2\,|g_j|^2\left(\sum_{i,j=1}^{n}dz_i\wedge d\bar{z}_j\right)^m.$$

Et si $\|G(z) - a\| \leq 1$,

$$\begin{aligned}(i\partial\overline{\partial}\log\|G(z)-a\|^2)^l \wedge (i\partial\overline{\partial}\log\big(\|G(z)\|^2+1\big))^k \wedge \beta_{n-m}\\ \leq C(a,n)\frac{M_F(r')^{2m}}{(r'-r)^{2m}}\frac{\displaystyle\sum_{J\in\mathcal{J}}\prod_{j\in J}|h_j'\circ f_j|^2}{\|G-a\|^{2m}}\,\beta_n.\end{aligned}$$

Posons pour $w \in \mathbb{C}^n$,

$$\phi(w) = \left(\log^+\frac{\eta_a}{\sum_{j=1}^n|\exp h_j(w)-a_j|^2}\right)^p\frac{\displaystyle\sum_{J\in\mathcal{J}}\prod_{j\in J}|h_j'(w_j)|^2}{(\sum_{j=1}^n|\exp h_j(w)-a_j|^2)^m}.$$

Il s'agit de majorer $\qquad I = \displaystyle\int_{B(0,r)\cap\Sigma_A}\phi\circ F(z)\,d\lambda(z)$.

Si $z \in B(0,r)\cap\Sigma_A$, d'après le théorème I.1, F est injective sur $B(z,S)$, où

$$S = C_n M_F(r')^{-n}(r'-r)^{n+1}A^{-1}.$$

On peut donc recouvrir $B(0,r)\cap\Sigma_A$ par $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathcal{I}}B(z_i,S)$, les z_i étant dans $B(0,r)\cap\Sigma_A$ et

$$\text{card}\,\mathcal{I} \leq C_n'\frac{r^{2n}}{S^{2n}} \leq C_n''r^{2n}(r'-r)^{-2n^2-2n}M_F(r')^{2n^2}A^{2n}.$$

$$\begin{aligned} I &\leq A^2 \sum_{i\in\mathcal{I}} \int_{B(z_i,S)} \phi\circ F(z)\,|J_F(z)|^2\,d\lambda(z) \\ &= A^2 \sum_{i\in\mathcal{I}} \int_{F\left(B(z_i,S)\right)} \phi(w)\,d\lambda(w) \leq A^2 \sum_{i\in\mathcal{I}} \int_{B(0,R)} \phi(w)\,d\lambda(w) \\ &\leq C_n'' r^{2n}(r'-r)^{-2n^2-2n} A^{2n+2} M_F(r')^{2n^2} \int_{B(0,R)} \phi(w)\,d\lambda(w). \end{aligned}$$

On notera $R_1 = 2R$, $R_2 = 3R$.

$$\int_{B(0,R)} \phi(w)\,d\lambda(w) = \sum_{N\in\mathbb{Z}^n} \int_{B_N} \phi(w)\,d\lambda(w),$$

avec

$$\begin{aligned} B_N = \{w = (w_1,\ldots,w_n) \in B(0,R) \ / \ |e^{h_j(w_j)} - a_j| < \eta_a \\ \text{et } \theta_a < \Im h_j(w_j) - 2\pi N_j < \theta_a + 2\pi \quad \forall j \in \{1,\ldots,n\}\}. \end{aligned}$$

Si B_N n'est pas vide, on a $|2\pi N_j| < \theta_a + 2\pi + |\Im h_j(w_j)| < \theta_a + 2\pi + M_h(R)$.

Autrement dit, le nombre de n-uplets N pour lesquels l'intégrale n'est pas nulle est plus petit que $C_a M_h(R)^n$, où C_a ne dépend que de a et de n.

Si w est dans B_N, alors $\log e^{h_j(w_j)} = h_j(w_j) - 2i\pi N_j$ et $|e^{h_j(w_j)} - a_j| < \eta_a$ donc

$$|e^{h_j(w_j)} - a_j| \geq \frac{1}{2}\,|a_j|\,|h_j(w_j) - \beta_j|, \text{ avec } \beta_j = 2i\pi N_j + \log a_j.$$

Finalement, si $\beta = (\beta_1 \ldots, \beta_n)$, nous pouvons écrire que

$$\begin{aligned} \int_{B_N} \phi(w)\,d\lambda(w) &\leq C_1 \int_{B(0,R)} \left(\log^+ \frac{1}{\|h(w)-\beta\|}\right)^p \frac{\sum_{J\in\mathcal{J}} \prod_{j\in J} |h_j'(w)|^2}{\|h(w)-\beta\|^{2m}}\,d\lambda(w), \\ &\leq C_2(\log M_h(R_2))^{4m+p} \max\left(R^2\,,\ \frac{\log M_h(R_2)\,(\log R)^{p+m}}{R^2}\right), \end{aligned}$$

d'après le lemme I.3.1. Ceci achève la démonstration.

II. Estimation de $F^{-1}(\widehat{E}_a) \cap B(0,r)$

L. Gruman a montré qu'une condition suffisante pour qu'un ensemble soit essentiel pour $\widehat{\mathcal{F}}$ est que ses points forment un réseau qui se resserre suffisamment à l'infini (cf [10]). De plus, il a donné une construction explicite de tels ensembles. Nous en rappelons ici le procédé.

Soit $\mathcal{C} = \{C^{(j)}, j = 1,\cdots,2n-1\}$ une famille de vecteurs en position générale.

Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble de tous les n-uplets $\Lambda = (\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ où $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ sont des entiers distincts dans $\{1,\ldots,2n-1\}$.

On considère un entier $S > 0$ et on définit sur $\mathbb{C}^n$ l'application polynomiale

$$G(\Lambda, N)(w) = (\langle C^{(\lambda_1)}, w\rangle^S + 2\pi N_1, \cdots, \langle C^{(\lambda_n)}, w\rangle^S + 2\pi N_n).$$

Pour tout $a \in \mathbb{C}_0^n$, on considère l'ensemble

$(II.1)$

$$\begin{aligned}\widehat{E}_a &= \bigcup_{\substack{\Lambda\in\mathcal{L}\\ N\in\mathbb{Z}^n}} \{(\exp G(\Lambda, N))^{-1}(a)\}\\ &= \bigcup_{\substack{\Lambda\in\mathcal{L}\\ N,N'\in\mathbb{Z}^n}} \{w \in \mathbb{C}^n \ / \ \langle C^{(\lambda_j)}, w\rangle^S = \log a_j + 2\pi N_j + 2i\pi N'_j,\ j = 1, \ldots, n\}.\end{aligned}$$

L. Gruman a montré le résultat suivant

THÉORÈME II.2 [10]. – *Si $S > 2n$ alors*
(i) *Pour tout $a \in \mathbb{C}_0^n$, $\widehat{E}_a$ est $\widehat{\mathcal{F}}$-essentiel.*
(ii) *Soit $F \in \widehat{\mathcal{F}}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble*

$$\phi_F = \left\{a \in \mathbb{C}_0^n \ / \limsup_{r\to+\infty} \frac{card\ F^{-1}(\widehat{E}_a) \cap B(0, r)}{M_F(r)^{2n(S-1)-\varepsilon}} < +\infty\right\}$$

est pluripolaire dans $\mathbb{C}^n$. $\square$

Le but de ce paragraphe est de montrer que l'ensemble ϕ_F est en fait vide.

Soit F un élément de $\widehat{\mathcal{F}}$.

D'après une formule de E. Bedford [1], [4], si G est une application holomorphe de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$,

$$(i\partial\overline{\partial} \log \|G\|^2)^n = (4\pi)^n \sum_{w/G(w)=0} \deg_G(w)\, \delta_w,$$

avec $\deg_G(w)$ le degré de G en w et δ_w la mesure de Dirac en w.

Nous notons

$$\widehat{n}_F(r, a) = (4\pi)^{-n} \sum_{\substack{\Lambda\in\mathcal{L}\\ N\in\mathcal{N}}} \int_{B(0,r)} \left(i\partial\overline{\partial} \log \|\exp(G(\Lambda, N) \circ F(z)) - a\|^2\right)^n.$$

D'après la formule,

$$\begin{aligned}\widehat{n}_F(r, a) &= \sum_{\substack{\Lambda\in\mathcal{L}\\ N\in\mathcal{N}}} \sum_{\substack{w\in B(0,r)/F(w)\in\\ \exp(G(\Lambda,N))^{-1}(a)}} \deg_{(\exp(G(\Lambda,N))}(F(w)) \deg_F(w)\\ &\le \widehat{C} \sum_{w\in B(0,r)/F(w)\in\widehat{E}_a} \deg_F(w) = \widehat{C}\ \text{card}\ F^{-1}(\widehat{E}_a) \cap B(0, r).,\end{aligned}$$

où $\widehat{C} = S^n\, C_{2n-1}^n$.

Nous définissons les termes suivants,

$$\widehat{N}_F(r,a) = (4\pi)^{-n} \sum_{\substack{\Lambda\in\mathcal{L}\\ N\in\mathcal{N}}} \int_{B(0,r)} (r^2 - ||z||^2)^2 \big(i\partial\overline{\partial}\log||\exp(G(\Lambda,N)\circ F(z)) - a||^2\big)^n,$$

$$\widehat{S}_F(r) = (2\pi)^{-n} \sum_{\substack{\Lambda\in\mathcal{L}\\ N\in\mathcal{N}}} \int_{B(0,r)} (r^2 - ||z||^2)^2 \big(i\partial\overline{\partial}\log^+[\exp(G(\Lambda,N)\circ F(z))]\big)^n,$$

$$\widehat{T}_F(r) = \int_{B(0,r)} (r^2 - ||z||^2)^2 \|F(z)\|^{2n(S-1)} d\lambda(z).$$

En écrivant $\widehat{N}_F(r,a)$ comme une intégrale de Stieljes puis en intégrant par parties,

$$\widehat{N}_F(r,a) = 4\int_0^r t\,(r^2 - t^2)\,\widehat{n}_F(t,a)\,dt.$$

$\widehat{N}_F(r,a)$ tient le rôle de la fonction de comptage dans la théorie classique de Nevanlinna et $\widehat{T}_F(r)$ celui de la fonction caractéristique.

D'après Gruman (cf [10] p91), pour $\varepsilon > 0$ fixé, on peut trouver une suite $r_\nu \nearrow +\infty$ telle que, si $r'_\nu = r_\nu + r_\nu[\log\log M_F(r_\nu)]^{-2}$, on a $\widehat{T}_F(r_\nu) \geq r_\nu^4\, M_F(r'_\nu)^{2n(S-1)-\varepsilon}$.

$\widehat{S}_F(r)$ est un terme intermédiaire qu'on sait estimer. En effet, d'après Gruman [10], il existe des constantes C_1, D_1, et D_2 telles que :

$(II.3)$

$$\begin{aligned} &C_1^{-1}\,\widehat{T}_F(r) - D_1\, r^{2n+2}(r'-r)^{-2(n-1)}\, M_F(r')^{2S(n-1)} \leq \\ &\leq \widehat{S}_F(r) \leq \\ &\leq C_1\,\widehat{T}_F(r) + D_2\, r^{2n+2}(r'-r)^{-2(n-1)}\, M_F(r')^{2S(n-1)}, \end{aligned}$$

C_1 ne dépendant que de $n, S, \mathcal{C}$, D_1 et D_2 ne dépendant que de n. Le but de ce paragraphe est de minorer la croissance asymptotique du cardinal de $F^{-1}(\widehat{E}_a)\cap B(0,r)$ uniformément en a pour tout $a \in \mathbb{C}_0^n$. Dans le cas présent, nous obtenons aussi une majoration.

Pour estimer $\widehat{N}_F(r,a)$, nous allons comparer ce terme à $\widehat{S}_F(r)$. Dans cette perspective, commençons par établir un lemme intermédiaire qui est une conséquence du lemme (I.3.2).

Nous fixons $\Lambda \in \mathcal{L}$ et $N \in \mathbb{Z}^n$ et nous supposons qu'il existe une constante C_2 (dépendant de a et de $\mathcal{C}$) telle que $\|N\| \leq C_2 M_F(r)^S$.

Nous posons

$\widetilde{F} = (\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n)$ avec $\tilde{f}_j =< C^{(\lambda_j)}, f >$,

donc $J_{\widetilde{F}} = \det(C^{(\lambda_1)}, \ldots, C^{(\lambda_n)}) \neq 0$ et $M_{\widetilde{F}}(r) \leq C(\mathcal{C})\, M_F(r)\ \forall r > 0$,

pour $w \in \mathbb{C}, h_j(w) = w^S + 2\pi N_j$, pour $j = 1, \ldots, n$, $h = (h_1, \ldots, h_n)$,

et $G = \exp\big(G(\Lambda,N)\circ F\big) = \exp(h\circ\widetilde{F}) = (g_1, \ldots, g_n)$ avec $g_j = \exp(h_j \circ \tilde{f}_j)$.

$\varphi = \log(\|G\|^2 + 1)$, $\psi = \log\|G(z) - a\|^2$.

Appliquons le lemme (I.3.2) : Pour tout $p > 1$, il existe $r_p > 0$ et une constante $C_4 = C_4(a, n, \mathcal{C}, \mathcal{S}, p)$ tels que, si $r > r_p$, alors

$$(II.4) \quad \int_{B(0,r)} \left(\log^+ \frac{1}{\|G-a\|)}\right)^p (i\partial\overline{\partial}\psi)^l \wedge (i\partial\overline{\partial}\log\varphi)^k \wedge \beta_{n-k-l} \leq$$
$$\leq C_3 \frac{r'^{2n}}{(r'-r)^{2(k+l)}} M_F(r')^{2n^2+2(k+l)+S+Sn+2}.$$

LEMME II.5. – *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des constantes K_1 et K_2 strictement positives, dépendant de $a, n, \mathcal{C}, S$ et ε, il existe r_ε tel que $\forall r > r_\varepsilon$, si $r' = r + r[\log(\log M_F(r))]^{-2}$, $\forall\ k\,/\,0 \leq k \leq n-1$,*

$$\int_{B(0,r)} \left(i\partial\overline{\partial}(\log\|G-a\|^2)\right)^{n-1-k} \wedge \left(i\partial\overline{\partial}(\log\|G\|^2+1)\right)^k \wedge \beta \leq$$
$$\leq K_1 \frac{r'2n}{(r'-r)^{2(n-1)}} M_F(r')^{S(n-1)},$$
$$\int_{B(0,r)} \log^+ \frac{\eta_a}{\|G-a\|} \left(i\partial\overline{\partial}(\log\|G-a\|^2)\right)^{n-1-k} \wedge \left(i\partial\overline{\partial}(\log\|G\|^2+1)\right)^k \wedge \beta \leq$$
$$\leq K_2 \frac{r'^{2n}}{(r'-r)^{2(n-1)}} M_F(r')^{S(n-1)+\varepsilon}. \quad \square$$

Démonstration. – Les constantes C_i et $\widetilde{C}_i$ ne dépendront que de $n, a, \mathcal{C}, \varepsilon$ et S. Soit $r'' = \dfrac{r'+r}{2}$. On fixe $k \in \{0, \ldots, n\}$. Pour $0 \leq l \leq n-1-k$, posons

$$r_l = r'' - l\frac{r''-r}{n-1-k}, \quad \Theta_l = (i\partial\overline{\partial}\psi)^l \wedge (i\partial\overline{\partial}\varphi)^k,$$
$$I_l = \int_{B(0,r_l)} \Theta_l \wedge \beta_{n-k-l}, \quad \tilde{I}_l = \int_{B(0,r_l)} \log^+ \frac{\eta_a}{\|G-a\|} \Theta_l \wedge \beta_{n-k-l}.$$

Nous procédons par récurrence.

D'après le lemme I.2.2, (iii), $I_0 \leq C_0\, r'^{2n}(r'-r'')^{-2k} M_F(r')^{Sk}$

Soient $p > \dfrac{2n^2+S+Sn+2}{\varepsilon}$, $q > 1$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. L'inégalité de Hölder donne

$$\tilde{I}_0 \leq \left[\int_{B(0,r'')} \left(\log^+ \frac{\eta_a}{\|G-a\|}\right)^p (i\partial\overline{\partial}\varphi)^k \wedge \beta_{n-k}\right]^{\frac{1}{p}} I_0^{\frac{1}{q}}.$$

En utilisant (II.4), $\quad \tilde{I}_0 \leq \widetilde{C}_0 \dfrac{r'^{2n}}{(r'-r)^{2k+2l}} M_F(r')^{Sk+\varepsilon}.$

Supposons que $\quad I_{l-1} \leq C_{l-1} \dfrac{r'^{2n}}{(r'-r)^{2k+2l}} M_F(r')^{S(k+l-1)}$

et que $\quad \tilde{I}_{l-1} \leq \widetilde{C}_{l-1} \dfrac{r'^{2n}}{(r'-r)^{2k+2l}} M_F(r')^{S(k+l-1)+\varepsilon},$

$$\begin{aligned}
I_l &= \int_{B(0,r_l)} \Theta_l \wedge \beta_{n-k-l} \leq \frac{1}{(r_{l-1}^2 - r_l^2)^2} \int_{B(0,r_{l-1})} (r_{l-1}^2 - \|z\|^2)^2\, \Theta_l \wedge \beta_{n-k-l} \\
&= \frac{1}{(r_{l-1}^2 - r_l^2)^2} \int_{B(0,r_{l-1})} \psi\, \Theta_{l-1} \wedge i\partial\overline{\partial}(r_{l-1}^2 - \|z\|^2)^2 \wedge \beta_{n-k-l} \\
&\leq C_n \frac{r_{l-1}^2}{(r_{l-1}^2 - r_l^2)^2} \int_{B(0,r_{l-1})} \left(\log^+ \|G-a\| + \log^+ \frac{1}{\|G-a\|}\right) \Theta_{l-1} \wedge \beta_{n-k-l+1} \\
&\leq C'_n \frac{1}{(r'-r)^2} \left[M_F(r)^S\, I_{l-1} + \tilde{I}_{l-1}\right] \leq C_l \frac{r'^{2n}}{(r'-r)^{2k+2(l+1)}} M_F(r')^{S(k+l)}.
\end{aligned}$$

Pour la deuxième intégrale, utilisons l'inégalité de Hölder et (II.4),

$$\tilde{I}_l \leq \left[\int_{B(0,r_l)} \left(\log^+ \frac{\eta_a}{\|G-a\|}\right)^p \Theta_l \wedge \beta_{n-k-l}\right]^{\frac{1}{p}} I_l^{\frac{1}{q}} \leq \widetilde{C}_l \frac{r'^{2n}}{(r'-r)^{2k+2l}} M_F(r')^{S(k+l)+\varepsilon}$$

PROPOSITION II.6. – *Soit F dans $\widehat{\mathcal{F}}$ et $a \in \mathbb{C}_0^n$.*

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des constantes strictement positives C_2 et C_3 , dépendant de $a, n, \mathcal{C}, \mathcal{S}$ et ε, C_1 ne dépendant que de n, S et $\mathcal{C}$, telles que,
pour $r > r_\varepsilon$ et $r' = r + r[\log\log M_F(r)]^{-2}$,

$$\begin{aligned}
&C_1^{-1}\, \widehat{T}_F(r) - C_2\, r^4\, M_F(r')^{S(2n-1)+\varepsilon} \leq \\
&\leq \widehat{N}_F(r,a) \leq \\
&\leq C_1\, \widehat{T}_F(r) + C_3\, r^4\, M_F(r')^{S(2n-1)+\varepsilon}. \quad \square
\end{aligned}$$

Démonstration. – Les constantes K_3 et K_4 et K_5 ne dépendront que de $a, n, \mathcal{C}, \varepsilon$ et S. Nous notons pour $N = (N_1, \ldots, N_n) \in \mathbb{Z}^n$ et $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \in \mathcal{L}$,

$$G = \exp\big(G(\Lambda, N) \circ F\big).$$

Si $\|N\| \leq C(a, \mathcal{C})\, M_F(r)^S$, $r > r_\varepsilon$ et $r' = r + [\log(\log M_F(r))]^{-2}$, d'après les lemme I.2.4 et II.5,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{B(0,r)} (r^2 - \|z\|^2)^2 \left[\left(i\partial\overline{\partial}\log(\|G\|^2+1)\right)^n - \left(i\partial\overline{\partial}\log\|G-a\|^2\right)^n\right]\right| \leq \\
&\leq K_3 \frac{r^{2n+2}}{(r'-r)^{2(n-1)}} M_F(r')^{S(n-1)+\varepsilon/2}.
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme I.2.3, nous avons

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{B(0,r)} (r^2 - \|z\|^2)^2 \left[(i\partial\overline{\partial}\log^+[G]^2)^n - (i\partial\overline{\partial}\log\|G-a\|^2)^n\right]\right| \leq \\
&\leq K_4 \frac{r^{2n+2}}{(r'-r)^{2(n-1)}} M_F(r')^{S(n-1)+\varepsilon/2}.
\end{aligned}$$

Nous sommons ensuite sur $\Lambda \in \mathcal{L}$ et $N \in \mathbb{Z}^n$. Remarquons que

$$\begin{aligned}
&\text{Support } (i\partial\overline{\partial}\log^+[G])^n \subset \{|g_j| = 1, j = 1, \ldots, n\} \\
&\text{et Support } (i\partial\overline{\partial}\log\|G-a\|^2)^n \subset \{G - a = 0\}.
\end{aligned}$$

La somme ne porte donc que sur N tel que $\|N\| \leq C(a, S, \mathcal{C})\mathcal{M}_{\mathcal{F}}(r)^{\mathcal{S}}$. Nous obtenons alors

$$(II.7) \qquad |\widehat{S}_F(r) - \widehat{N}_F(r,a)| \leq K_5 \frac{r^{2n+2}}{(r'-r)^{2(n-1)}} M_F(r')^{S(2n-1)+\varepsilon/2}.$$

Nous en déduisons alors le résultat en utilisant la relation (II.3).

Nous arrivons enfin au théorème principal.

THÉORÈME II.8. – *Soit F dans $\widehat{\mathcal{F}}$.*

Il existe une constante $C_1 > 0$ qui ne dépend que de $\mathcal{C}, n$ et S telle que, pour tout $a \in \mathbb{C}_0^n$,

$$(*) \quad \limsup_{r\to+\infty} \frac{\widehat{N}_F(r,a)}{\widehat{T}_F(r)} \geq C_1^{-1}, \ (**) \quad \liminf_{r\to+\infty} \frac{\widehat{N}_F(r,a)}{\widehat{T}_F(r)} \leq C_1. \quad \square$$

Démonstration. – Soit $a \in \mathbb{C}_0^n$ et soit $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \dfrac{S-2n}{2}$. Il existe une suite r_ν (cf [10]) telle que

$$\widehat{T}_F(r_\nu) \geq r_\nu^4 M_F(r'_\nu)^{2n(S-1)-\varepsilon}, \text{ avec } r'_\nu = r_\nu + r_\nu[\log\log M_F(r_\nu)]^{-2}.$$

D'après la proposition précédente, si ν est assez grand,

$$\widehat{N}_F(r_\nu, a) \geq C_1^{-1}\,\widehat{T}_F(r_\nu) - C_2\, r_\nu^4\, M_F(r'_\nu)^{S(2n-1)+\varepsilon}.$$

$$\text{Divisons par } \widehat{T}_F(r_\nu) \ : \ \frac{\widehat{N}_F(r_\nu,a)}{\widehat{T}_F(r_\nu)} \geq C_1^{-1} - K\, M_F(r'_\nu)^{2n-S+2\varepsilon}.$$

Pour avoir $(*)$, on fait tendre ν vers $+\infty$, le terme de droite tend vers 0. De même, nous avons

$$\widehat{N}_F(r_\nu, a) \leq C_1\widehat{T}_F(r_\nu) + C_3\, r_\nu^4 M_F(r'_\nu)^{S(2n-1)+\varepsilon}.$$

$$\text{D'où } \frac{\widehat{N}_F(r_\nu,a)}{\widehat{T}_F(r_\nu)} \leq C_1 + K\, M_F(r'_\nu)^{2n-S+2\varepsilon}.$$

Le terme de droite tend vers 0 quand ν tend vers $+\infty$.

COROLLAIRE II.9. – *Soit $F \in \widehat{\mathcal{F}}$. Pour tout $a \in \mathbb{C}_0^n$ et pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$(1) \qquad \limsup_{r\to+\infty} \frac{\mathit{card}\ F^{-1}(\widehat{E}_a) \cap B(0,r)}{M_F(r)^{2n(S-1)-\varepsilon}} = +\infty.$$

$$(2) \qquad \liminf_{r\to+\infty} \frac{\mathit{card}\ F^{-1}(\widehat{E}_a) \cap B(0,r)}{r^{2n}\, M_F(r)^{2n(S-1)+\varepsilon}} = 0. \quad \square$$

Démonstration. – Supposons $\varepsilon < S - 2n$ et prenons $\varepsilon' \ / \ 0 < \varepsilon' < \inf(S-2n-\varepsilon, \varepsilon)$. Il existe une suite $r_k \nearrow +\infty$, associée à ε' avec

$$\widehat{T}_F(r_k) \geq r_k^4 M_F(r'_k)^{2n(S-1)-\varepsilon'}, \text{ où } r'_k = r_k + r_k[\log\log M_F(r_k)]^{-2}.$$

Si k est assez grand, $\widehat{N}_F(r_k,a) \geq C_1^{-1}\,\widehat{T}_F(r_k) - C_2'\,r_k^4 M_F(r_k')^{S(2n-1)+\varepsilon'}$. Rappelons que

$$\begin{aligned}\widehat{N}_F(r_k,a) &= 4\int_0^{r_k} t\,(r_k^2-t^2)\,\widehat{n}_F(t,a)\,dt \leq \widehat{n}_F(r_k,a)\int_0^{r_k} 4\,t\,(r_k^2-t^2)\,dt\\ &= r_k^4\,\widehat{n}_F(r_k,a) \leq r_k^4\,\widehat{C}\,\text{card}\,F^{-1}(\widehat{E}_a)\cap B(0,r_k).\end{aligned}$$

D'où

$$\frac{\text{card}\,F^{-1}(\widehat{E}_a)\cap B(0,r_k)}{M_F(r_k)^{2n(S-1)-\varepsilon}} \geq (C_1\,\widehat{C})^{-1} r_k^{2n} M_F(r_k')^{\varepsilon-\varepsilon'} - C_2'\,\widehat{C}^{-1} M_F(r_k')^{2n-S+\varepsilon'+\varepsilon}.$$

D'où le résultat (1) par passage à la limite.

Pour montrer (2), utilisons la suite $r_j \nearrow +\infty$ telle que

$$M_F(r_j') \leq 2\,M_F(r_j) \quad \text{pour} \quad r_j' = r_j + \frac{1}{2}\,r_j[\log M_F(r_j)]^{-2}.$$

Posons $r_j'' = r_j + \dfrac{1}{2} r_j[\log M_F(r_j)]^{-2}$.

$$\begin{aligned}\widehat{N}_F(r_j'',a) &= 4\int_0^{r_j''} t\,(r^2-t^2)\,\widehat{n}_F(t,a)\,dt \geq 4\int_{r_j}^{r_j''} t\,(r^2-t^2)\,\widehat{n}_F(t,a)\,dt\\ &= \widehat{n}_F(r_j,a)\,(r_j''^2-r_j^2)^2 \geq r_j^4[\log M_F(r_j)]^{-4}\,\text{card}\,F^{-1}(\widehat{E}_a)\cap B(0,r_j).\end{aligned}$$

Pour majorer $\widehat{N}_F(r_j'',a)$, utilisons la proposition II.6. Si j est assez grand,

$$\widehat{N}_F(r_j'',a) \leq C_1\widehat{T}_F(r_j'') + C_3\,r^4\,M_F(r_j')^{S(2n-1)+\varepsilon'} \leq K_1\,r_j^{4+2n}\,M_F(r_j)^{2n(S-1)}.$$

Donc, pour j assez grand, $\dfrac{\text{card}\,F^{-1}(\widehat{E}_a)\cap B(0,r_j)}{r^{2n}\,M_F(r_j)^{2n(S-1)+\varepsilon}} \leq K_2\,M_F(r_j)^{\varepsilon'-\varepsilon}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. Bedford, *Survey of pluripotential theory*, Several complex variables: Proceedings of the Mittag-Leffler Institute, 1987-88, edited by J. E. Fornaess, Mathematical Notes 38, Princeton Univ. Press, 1993, p. 48-97.

[2] L. Bieberbach, *Beispiel zweier ganzer Funktionen zweier komplexer variablen, welche eine schlichte volumtreue Abbildung des* $\mathbb{R}^4$ *auf einen Teil seiner selbst vermitteln* (*S. B. Preuss Akad. Wiss.*, vol. 14/15, 1933, p. 476-479).

[3] S. Bochner et W. T. Martin, *Several complex variables*, Princeton University Press, 1948.

[4] E. Bedford et B. A. Taylor, *The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampère equation* (*Inventiones Math.*, vol. 37, 1976, p. 1-44).

[5] M. Cornalba et B. Shiffman, *A counterexample to the "Transcendental Bezout problem"* (*Ann. of Math.*, vol. 96, 2, 1972, p. 402-406).

[6] J. P. Demailly, *Mesures de Monge-Ampère et caractérisation géométrique des variétés algébriques affines*, Mémoire de la SMF, n 19. Supplément au bulletin de la S.M.F., vol. 113, fascicule 2, 1985.

[7] P. G. Dixon et J. Esterle, *Michael's problem and the Poincaré-Fatou-Bieberbach phenomenon* (*Bull. Amer. math. Soc* (new series), vol. 15, 1986, p. 127-187).

[8] P. Fatou, *Sur les fonctions méromorphes de deux variables* (*C. R. Acad. Sc. Paris*, vol. 175, 1922, p. 1030-1033).

[9] L. GRUMAN, *Value distribution for holomorphic maps in* $\mathbb{C}^n$ (*Mathematische Annalen*, vol. 245, 1978, p. 199-218).

[10] L. GRUMAN, *L'image d'une application holomorphe* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, vol. 12, 1991, p. 75-100).

[11] M. KLIMEK, *Pluripotential theory*, Clarendon Press.

[12] P. LELONG et L. GRUMAN, *Entire functions of several complex variables*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo.

[13] R. NEVANLINNA, *Analytic functions*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

[14] M. OKADA, *Une estimation modifiée du type de Bezout pour les applications holomorphes équidimensionnelles entières de* $\mathbb{C}^n$ (*C. R. Acad. Sc. Paris*, vol. 291, Série A, 7 Juillet 1980, p. 35-37).

[15] I. ONO, *Analytic vector functions of several complex variables* (*J. Math. Soc. Japan*, vol. 8, 1956, p. 216-246).

[16] J. P. ROSAY et W. RUDIN, *Holomorphic maps from* $\mathbb{C}^n$ *to* $\mathbb{C}^n$ (*Trans. Amer. math. Soc.*, vol. 310, 1988, p. 47-86).

[17] J. P. ROSAY et W. RUDIN, *Growth of volume in Fatou-Bieberbach regions* (*Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, vol. 29, 1993, p. 161-166).

[18] J. L. STEHLÉ, *Plongements du disque dans* $\mathbb{C}^2$ (*Séminaire P. Lelong (Analyse) Lect. Notes Math.*, vol. 275, 1970, p. 119-130).

[19] A. VITTER, *The lemma of the logarithmic derivative in several complex variables* (*Duke Math. J.*, vol. 44, 1970, p. 89-104).

(Manuscrit reçu le 8 juillet 1996;
révisé le 29 avril 1997.)

M. OUNAIES
Université Louis Pasteur,
UFR de mathématiques
et d'informatique,
7, rue René Descartes,
67084 Strasbourg Cedex.
E-mail: ounaies@math.u-strasbg.fr