MARCO BRUNELLA

Feuilletages holomorphes sur les surfaces complexes compactes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 30, nº 5 (1997), p. 569-594
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1997_4_30_5_569_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4^e^ série, t. 30, 1997, p. 569 à 594.

FEUILLETAGES HOLOMORPHES SUR LES SURFACES COMPLEXES COMPACTES

PAR MARCO BRUNELLA

RÉSUMÉ. – On étudie dans cet article les feuilletages holomorphes non singuliers sur les surfaces complexes compactes et on aboutit à une classification essentiellement complète de ces objets. Il y a principalement deux cas à étudier : les surfaces qui possèdent une fibration elliptique ou rationnelle, et les surfaces de type général. Dans le premier cas la classification est obtenue en comparant le feuilletage avec la fibration, par exemple en analysant la courbe des tangences entre les deux. Le théorème d'annulation de Bott et les travaux de Kodaira sur les surfaces complexes seront les ingrédiants principaux. Dans le deuxième cas le point central est la construction d'une métrique transverse invariante, qui, bien que singulière, permettra d'utiliser la théorie des feuilletages Riemanniens.

ABSTRACT. – In this work we study nonsingular holomorphic foliations on compact complex surfaces and we obtain a classification of these objects. Mainly, there are two different cases : foliations on surfaces admitting a rational or elliptic fibering, and foliations on surfaces of general type. In the first case the method consists in comparing the foliation and the fibration, for exemple looking at the curve of tangencies between them. Bott's vanishing theorem and Kodaira's work on complex surfaces will play a fundamental rôle. In the second case the main step is the construction of a transverse invariant metric, which, even if singular, will reduce the problem to the context of Riemannian foliations.

Introduction

Le but principal de cet article est la classification des feuilletages holomorphes sans singularités sur les surfaces complexes compactes. Dans le cas algébrique le résultat est résumé dans le théorème suivant (on renvoie à la section 4 pour la définition de feuilletage tourbillonné, et à la section 5 pour le cas non algébrique).

THÉORÈME. – *Soit X une surface complexe compacte algébrique et soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe sans singularités sur X. Alors on a une des possibilités suivantes (non exclusives) :*

1) *$\mathcal{F}$ est une fibration;*

2) *$\mathcal{F}$ est transverse à une fibration, et donc il est suspension d'un groupe d'automorphismes d'une courbe algébrique;*

3) *$\mathcal{F}$ est un feuilletage tourbillonné sur une surface elliptique;*

4) *$\mathcal{F}$ est un feuilletage linéaire sur un tore complexe;*

5) *$\mathcal{F}$ est un feuilletage transversalement hyperbolique à feuilles denses, dont le revêtement universel est une fibration en disques sur le disque.*

En fait, il nous semble que la densité des feuilles pourrait permettre de montrer que la fibration qui apparaît en 5) est triviale, *i.e.* que $(X, \mathcal{F})$ est un quotient de $(\mathbf{D} \times \mathbf{D}$, feuilletage vertical).

Signalons quelques conséquences de cette classification qui nous semblent amusantes. La seule surface non minimale qui supporte un feuilletage régulier est l'éclaté de $\mathbf{C}P^2$ en un point p (et le feuilletage est l'éclaté du feuilletage radial centré en p). La signature d'une surface qui supporte un feuilletage régulier est non négative (il y a des exemples, les fibrations de Kodaira [BPV], où cette signature est strictement positive). En particulier, la seule intersection complète avec un feuilletage régulier est la quadrique $\bar{\mathbf{C}} \times \bar{\mathbf{C}}$.

La preuve que nous donnons de ce théorème exploitera à fond la classification des surfaces de Enriques-Kodaira [BPV], et on trouvera des différences sensibles entre le cas des surfaces de type général et le cas des surfaces de type non général. Dans la deuxième situation, on utilisera la présence sur (la plupart de) ces surfaces de fibrations (singulières) avec fibre générique rationnelle ou elliptique. Ces fibrations seront regardées comme « fibrations de référence », avec lesquelles comparer le feuilletage $\mathcal{F}$: essentiellement, il s'agit de montrer que soit $\mathcal{F}$ coïncide avec la fibration, soit est transverse, soit est tourbillonné. Les méthodes ici sont surtout algébriques, il s'agit de montrer que tel ou tel fibré a des sections, que certaines courbes ne se coupent pas, etc.. Par contre, sur les surfaces de type général (où il n'y a pas de fibrations rationnelles ou elliptiques) nous adopterons un point de vue plus dynamique qui consiste (grâce à un résultat de [Dem]) à construire une « métrique singulière » invariante par l'holonomie de $\mathcal{F}$. Finalement on arrivera à montrer que le feuilletage est transversalement riemannien [God], et ensuite la voie vers la conclusion sera lisse.

À la base de tout le travail il y a, bien sûr, la formule de Baum - Bott [BB], que nous rappelerons dans la section 2 avec beaucoup de détails et de digressions en espérant rendre accessible l'article au lecteur non spécialisé. Nous travaillerons en partie dans le contexte des feuilletages *avec* singularités. La raison principale est que l'opération d'éclatement et son inverse, qui sont bien sûr essentielles dans la théorie des surfaces, ne préservent pas l' éventuelle régularité d'un feuilletage. L'étude des feuilletages réguliers sur les surfaces non minimales se réduit à l'étude des feuilletages avec (certains types de) singularités sur les surfaces minimales.

1. Fibrés linéaires associés à un feuilletage

Soit X une surface complexe compacte et soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe sur X, avec singularités isolées $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$. On va rappeler, d'après [GM1], la construction de certains fibrés linéaires associés à $\mathcal{F}$.

On peut d'abord définir le fibré tangent à $\mathcal{F}$ hors des singularités, et étendre en suite ce fibré au dessus des singularités par un théorème d'extension à la Hartog ou Levi. De façon équivalente, $\mathcal{F}$ est donné par un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de X et des champs des vecteurs holomorphes v_i dans U_i, avec singularités isolées, tels que $v_i = f_{ij} v_j$ sur $U_i \cap U_j$. Les fonctions holomorphes f_{ij} sont sans zéros et forment un $\mathcal{O}^*$-cocycle, donc elles définissent un fibré linéaire qui est le dual du fibré cherché. On dénotera par $T_{\mathcal{F}}$ ce *fibré tangent à* $\mathcal{F}$. À cause des singularités de $\mathcal{F}$, $T_{\mathcal{F}}$ n'est pas un sous-fibré de TX, mais il est muni d'une application fibrée

$$f\ : T_{\mathcal{F}} \to TX$$

telle que : i) f envoie $(T_{\mathcal{F}})_x$ dans $T_xX, \forall x \in X$; ii) f est injective sur $(T_{\mathcal{F}})_x$ si et seulement si x n'est pas un point singulier de $\mathcal{F}$, et dans ce cas $f((T_{\mathcal{F}})_x)$ est l'usuelle droite tangente à $\mathcal{F}$ en x. Une telle application est uniquement définie modulo multiplication par une constante (car X est compacte).

Si s est une section holomorphe (méromorphe) de $T_{\mathcal{F}}$ (non identiquement nulle), la composition $f \circ s$ est une section holomorphe (méromorphe) de TX qui engendre $\mathcal{F}$. On obtient de cette manière les champs de vecteurs holomorphes ou méromorphes engendrant $\mathcal{F}$. D'après la correspondence fibrés-diviseurs (au moins dans le cas algébrique) si v est un champ de vecteurs méromorphe engendrant $\mathcal{F}$ alors $T_{\mathcal{F}}$ est représenté par le diviseur $(v)_0 - (v)_\infty$, où $(v)_0$ = diviseur des zéros de v, $(v)_\infty$ = diviseur des poles.

De façon tout à fait analogue on peut définir le *fibré conormal* de $\mathcal{F}$, $N_{\mathcal{F}}^*$, en remplaçant les champs de vecteurs par les 1-formes différentielles. Ce fibré conormal est muni d'une application fibrée

$$g\ : N_{\mathcal{F}}^* \to T^*X$$

injective hors de $\mathrm{Sing}(\mathcal{F})$. La composition d'une section méromorphe de $N_{\mathcal{F}}^*$ avec g donne une 1-forme méromorphe ω qui engendre $\mathcal{F}$. On a alors $N_{\mathcal{F}}^* = (\omega)_0 - (\omega)_\infty$.

Enfin, le *fibré cotangent* $T_{\mathcal{F}}{}^*$ et le *fibré normal* $N_{\mathcal{F}}$ sont définis comme fibrés duaux de $T_{\mathcal{F}}$ et $N_{\mathcal{F}}^*$.

On dénote par K_X le fibré canonique de X : $K_X = T^*X \wedge T^*X$.

LEMME 1

$$K_X = T_{\mathcal{F}}{}^* \otimes N_{\mathcal{F}}^*.$$

Preuve. – Si Ω est une section holomorphe locale de K_X sans zéros (*i.e.*, une 2-forme non singulière) alors, à travers l'opération de contraction, Ω établie un isomorphisme entre les champs de vecteurs locaux avec singularités isolées engendrant $\mathcal{F}$ et les 1-formes différentielles locales avec les mêmes propriétés. Donc $K_X \simeq \mathrm{Hom}(T_{\mathcal{F}}, N_{\mathcal{F}}^*) = T_{\mathcal{F}}{}^* \otimes N_{\mathcal{F}}^*$. ■

On déduit de ce lemme que

$$c_1(X) = c_1(T_{\mathcal{F}}) + c_1(N_{\mathcal{F}}).$$

En utilisant les formules de Baum-Bott, on obtiendra une expression pour le produit d'intersection $c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot c_1(N_{\mathcal{F}})$.

Pour donner un sens plus géométrique à $c_1(T_{\mathcal{F}})$ et $c_1(N_{\mathcal{F}})$, il est utile de calculer la valeur de ces classes sur une courbe holomorphe (compacte) $S \subset X$. Soit donc S une telle courbe, et supposons d'abord que toutes les composantes irréductibles de S ne soient pas $\mathcal{F}$-invariantes. À tout $p \in S$ on peut alors associer l'indice suivant :

$$I(p, S, \mathcal{F}) = \dim_{\mathbf{C}} \frac{\mathcal{O}(p)}{< F, v(F) >}$$

où : $\mathcal{O}(p)$ est l'algèbre locale de X en p, F est une fonction holomorphe réduite définissante S au voisinage de p, v est un champ holomorphe à singularités isolées définissant $\mathcal{F}$ au voisinage de p. On voit sans peine que cette définition est bien posée, et $I(p, S, \mathcal{F}) < +\infty$ par la non-invariance de S. En outre, $I(p, S, \mathcal{F}) = 0$ si et seulement si S est régulière en p et $\mathcal{F}$ est transverse à S en p. Donc il y a seulement un nombre fini de points p où $I(p, S, \mathcal{F}) > 0$, et on peut poser

$$\operatorname{tang}(S, \mathcal{F}) = \sum_{p \in S} I(p, S, \mathcal{F}).$$

C'est un nombre entier non négatif. Le symbole tang est motivé par le fait que si S est lisse en p alors $I(p, S, \mathcal{F})$ est l'ordre de tangence de $\mathcal{F}$ avec S en p. Une telle interprétation subsiste même si S est singulière en p, en remplaçant (localement) $S = \{F = 0\}$ par $S_\epsilon = \{F = \epsilon\}$: si ϵ est petit et tel que S_ϵ soit lisse, alors S_ϵ est tangente à $\mathcal{F}$ (près de p) en $p_1^\epsilon, \ldots, p_N^\epsilon$ et $I(p, S, \mathcal{F}) = \sum_{j=1}^N I(p_j^\epsilon, S_\epsilon, \mathcal{F})$. En effet, $I(p, S, \mathcal{F})$ est la multiplicité d'intersection entre $\{F = 0\}$ et $\{v(F) = 0\}$, et cette deuxième courbe est la courbe de tangences entre $\mathcal{F}$ et les courbes $\{F = \epsilon\}$.

On rappelle que si $S \subset X$ est une courbe holomorphe sa caractéristique d'Euler virtuelle $\chi(S)$ est définie par la formule d'adjonction [BPV], [GH] :

$$c_1(X) \cdot S = S \cdot S + \chi(S).$$

Elle dépend seulement de la classe de (co)homologie de S et coïncide avec la caractéristique d'Euler (ordinaire) d'une surface différentiable lisse $\tilde{S} \subset X$ obtenue en lissant les singularités de S, *i.e.* en replaçant près des singularités de S la courbe singulière $S = \{F = 0\}$ par la courbe régulière $S_\epsilon = \{F = \epsilon\}$ (souvent, mais pas toujours, on peut choisir comme $\tilde{S}$ une courbe holomorphe).

Les formules suivantes sont évidentes si S est transverse à $\mathcal{F}$, dans le cas général il s'agit seulement de comprendre avec quel poids $\operatorname{tang}(S, \mathcal{F})$ intervient.

LEMME 2. – (*S non $\mathcal{F}$-invariante*)

$$c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot S = \chi(S) + \operatorname{tang}(S, \mathcal{F})$$

$$c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot S = S \cdot S - \operatorname{tang}(S, \mathcal{F}).$$

Preuve. – La deuxième formule est conséquence de la première, du lemme 1 et de la formule d'adjonction, il suffit donc démontrer la première. Supposons d'abord que S soit lisse et disjointe de $\operatorname{Sing}(\mathcal{F})$. Supposons aussi, pour simplifier, que X soit algébrique ; on peut alors choisir une 1-forme méromorphe ω engendrant $\mathcal{F}$ et telle que les diviseurs $(\omega)_0$ et $(\omega)_\infty$ soient transverses à S (Bertini). La 1-forme méromorphe $\eta = \omega|_S$ a des poles en correspondence des intersections entre S et $(\omega)_\infty$ et des zéros en correspondence des intersections entre S et $(\omega)_0$ *et* des points de tangence entre $\mathcal{F}$ et S. Plus exactement, si p est un tel point de tangence alors η a en p un zéro d'ordre $I(p, S, \mathcal{F})$. En appliquant la formule de Poincaré-Hopf à η (ou $Re\ \eta$) on a alors

$$\chi(S) = S \cdot (\omega)_\infty - S \cdot (\omega)_0 - \operatorname{tang}(S, \mathcal{F})$$

et donc

$$c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot S = ((\omega)_\infty - (\omega)_0) \cdot S = \chi(S) + \operatorname{tang}(S, \mathcal{F}).$$

Le cas où S a des singularités ou contient des singularités de $\mathcal{F}$ se ramène au précédent cas "générique" par un argument perturbatif, grâce aux propriétés de $I(p, S, \mathcal{F})$. ■

Le corollaire le plus important du lemme 2 est le suivant : puisque $\operatorname{tang}(S, \mathcal{F})$ est non négative, on a toujours

$$c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot S \geq \chi(S) \qquad c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot S \leq S \cdot S$$

avec égalités si et seulement si S est lisse et transverse à $\mathcal{F}$.

Considérons maintenant le cas où S est $\mathcal{F}$-invariante. Soit $p \in S$ un point singulier de $\mathcal{F}$ (remarquons que $\operatorname{Sing}(S) \subset \operatorname{Sing}(\mathcal{F})$), on peut alors définir comme en [GSV] un indice $Z(p, S, \mathcal{F}) \in \mathbf{Z}$. Soit $\{F = 0\}$ l'équation réduite locale de S et soit v un champ de vecteurs holomorphe engendrant $\mathcal{F}$ au voisinage de p, avec p singularité isolée. L'indice $Z(p, S, \mathcal{F})$ est alors l'indice de Poincaré-Hopf d'un champ de vecteurs différentiable obtenu en "déplaçant" v sur la fibre de Milnor $\{F = \epsilon\}$. Nous renvoyons à [GSV] pour les détails, et remarquons seulement que si S est lisse en p alors $Z(p, S, \mathcal{F})$ coïncide avec l'ordre du zéro de $v|_S$ en p. Dans ce dernier cas, donc, $Z(p, S, \mathcal{F})$ est positif; mais des exemples simples montrent que si S est singulière en p alors $Z(p, S, \mathcal{F})$ peut être négatif.

Posons enfin

$$Z(S, \mathcal{F}) = \sum_{p \in S \cap \operatorname{Sing}(\mathcal{F})} Z(p, S, \mathcal{F}).$$

LEMME 3. – (S *$\mathcal{F}$-invariante*)

$$c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot S = S \cdot S + Z(S, \mathcal{F})$$

$$c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot S = \chi(S) - Z(S, \mathcal{F}).$$

Preuve. – Analogue au lemme 2, en utilisant cette fois un champ de vecteurs méromorphe engendrant $\mathcal{F}$. ■

Remarque. – si S est lisse on a donc $c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot S \geq S \cdot S$, mais cette inégalité peut ne pas être satisfaite dans le cas singulier, où $Z(S, \mathcal{F})$ peut être négatif.

À côté des tangences entre un feuilletage et une courbe, il sera utile considérer les tangences entre deux feuilletages. Soient donc $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux feuilletages sur X et soit D le *diviseur des tangences* entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, dont la définition est la suivante. Le support $|D|$ est constitué des points de X où $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ ne sont pas transverses; c'est une courbe holomorphe qui contient $\operatorname{Sing}(\mathcal{F})$ et $\operatorname{Sing}(\mathcal{G})$. Si $p \in |D|$, soient v et ω un champ de vecteurs et une 1-forme différentielle à singularités isolées engendrant $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ près de p, et soit $\operatorname{ind}(p) =$ ordre du zéro de $i_v\omega$ en p. Si D_ν est une composante irréductible de $|D|$, alors $\operatorname{ind}(p)$ sur D_ν est égal à un nombre entier positif m_ν hors d'un ensemble fini de points (où $\operatorname{ind}(p) > m_\nu$). On pose alors $D = \cup_{\nu=1}^N m_\nu D_\nu$, où $D_1, \ldots, D_N$ sont les composantes irréductibles de $|D|$. Le diviseur D est donc effectif.

LEMME 4.

$$\mathcal{O}(D) = N_{\mathcal{F}} \otimes T_{\mathcal{G}}^*.$$

Preuve. – La définition de D montre qu' une section locale non singulière de $N_{\mathcal{F}}^* \otimes T_{\mathcal{G}}$ correspond à une fonction qui s'annulle sur D_ν à l'ordre m_ν, c'est-à-dire $N_{\mathcal{F}}^* \otimes T_{\mathcal{G}} = \mathcal{O}(-D)$ et donc $N_{\mathcal{F}} \otimes T_{\mathcal{G}}^* = \mathcal{O}(D)$. ■

En particulier :

$$[D] = c_1(N_{\mathcal{F}}) + c_1(T_{\mathcal{G}}^*) = c_1(N_{\mathcal{F}}) + c_1(N_{\mathcal{G}}) - c_1(X)$$

où $[D]$ désigne la classe de (co)homologie determinée par D.

Voici un exemple d'application de ces considérations. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux feuilletages réguliers transverses, et soit $S \subset X$ une courbe qui n'est ni $\mathcal{F}$-ni $\mathcal{G}$-invariante (par exemple, $S \cdot S \neq 0$). Alors $N_{\mathcal{F}} \simeq T_{\mathcal{G}}$ et d'après le lemme 2 :

$c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot S = \chi(S) + \mathrm{tang}(S, \mathcal{F})$

$c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot S = c_1(T_{\mathcal{G}}) \cdot S = S \cdot S - \mathrm{tang}(S, \mathcal{G})$

donc $S \cdot S \geq \chi(S)$. Par exemple, X ne contient pas de sphères holomorphes avec auto-intersection négative, en particulier X est minimale.

2. Formules de Baum-Bott. Éclatements

Soit $p \in X$ un point singulier de $\mathcal{F}$ et soit v un champ de vecteurs holomorphe au voisinage de p engendrant $\mathcal{F}$ et avec un zéro isolé en p. En coordonnées locales :

$$v(z,w) = F(z,w)\frac{\partial}{\partial z} + G(z,w)\frac{\partial}{\partial w}, \qquad p = (0,0).$$

Soit $J(z,w)$ la matrice jacobienne de (F,G), on va considérer les deux indices suivants [BB] :

$$\mathrm{Det}(p,\mathcal{F}) = \mathrm{Res}_0\left\{\frac{det J(z,w)}{F(z,w)G(z,w)} dz \wedge dw\right\}$$

$$\mathrm{Tr}(p,\mathcal{F}) = \mathrm{Res}_0\left\{\frac{(tr J(z,w))^2}{F(z,w)G(z,w)} dz \wedge dw\right\}$$

où $\mathrm{Res}_0\{\ \}$ indique le résidu en $(0,0)$ de la 2-forme méromorphe en parenthèse [GH, ch.5]. Ces indices sont des nombres complexes bien définis, *i.e.* indépendents du choix de v. Le nombre $\mathrm{Det}(p,\mathcal{F})$ est la multiplicité d'intersection entre $\{F=0\}$ et $\{G=0\}$, c'est-à-dire la multiplicité de la singularité $p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F})$ (parfois appelée nombre de Milnor [CLS]). Donc $\mathrm{Det}(p,\mathcal{F})$ est un nombre entier positif, une propriété qu'on utilisera souvent. L'interprétation de $\mathrm{Tr}(p,\mathcal{F})$ est plus subtile. D'après [GH, ch.5], on peut calculer cet indice comme $\int_{\mathbf{S}^3} \eta$ où $\mathbf{S}^3$ est une petite sphère autour de l'origine et η est la 3-forme différentielle fermée de type $(2,1)$

$$\eta = \frac{1}{(2\pi i)^2}\frac{(tr J(z,w))^2}{(|F(z,w)|^2 + |G(z,w)|^2)^2}(\bar{F}d\bar{G} - \bar{G}d\bar{F}) \wedge dz \wedge dw.$$

Si $\omega = Gdz - Fdw$ (ω engendre $\mathcal{F}$) et $\gamma = \frac{trJ}{|F|^2+|G|^2}(\bar{F}dz + \bar{G}dw)$ (γ est lisse hors de $(0,0)$) on obtient, hors de $(0,0)$:

$$d\omega = \gamma \wedge \omega \qquad\qquad \eta = \frac{1}{(2\pi i)^2}\gamma \wedge d\gamma$$

ce qui montre que $\mathrm{Tr}(p,\mathcal{F})$ est une sorte de nombre de Godbillon - Vey local.

Si $J(0,0)$ a deux valeurs propres λ, μ différents de zéro (on dit alors que p est non dégénéré) on obtient $\mathrm{Det}(p,\mathcal{F}) = 1$ et $\mathrm{Tr}(p,\mathcal{F}) = 2 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\mu}{\lambda}$. Le nombre $\mathrm{Tr}(p,\mathcal{F})$ peut donc être n'importe quel nombre complexe.

Revenons maintenant à la situation globale. Posons

$$\mathrm{Det}(\mathcal{F}) = \sum_{p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F})} \mathrm{Det}(p,\mathcal{F})$$

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{F}) = \sum_{p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{F})} \mathrm{Tr}(p,\mathcal{F}).$$

Les formules de Baum-Bott expriment alors ces quantités en fonction des classes de Chern de la variété X et du feuilletage $\mathcal{F}$. Ce sont des versions « tordues » des formules de Poincaré-Hopf différentiable et holomorphe [GH, ch.3].

PROPOSITION 1 [BB].

$$\mathrm{Det}(\mathcal{F}) = c_2(X) - c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot c_1(X) + c_1^2(T_{\mathcal{F}})$$

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{F}) = c_1^2(X) - 2c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot c_1(X) + c_1^2(T_{\mathcal{F}}).$$

(le fibré L qui apparait dans [BB] correspond à ce que nous avons appellé ${T_{\mathcal{F}}}^*$).

On déduit de cette proposition :

$$c_1^2(T_{\mathcal{F}}) = c_1^2(X) - 2c_2(X) + 2\mathrm{Det}(\mathcal{F}) - \mathrm{Tr}(\mathcal{F})$$

$$c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot c_1(X) = c_1^2(X) - c_2(X) + \mathrm{Det}(\mathcal{F}) - \mathrm{Tr}(\mathcal{F})$$

et pour $c_1(N_{\mathcal{F}}) = c_1(X) - c_1(T_{\mathcal{F}})$ on obtient

$$c_1^2(N_{\mathcal{F}}) = \mathrm{Tr}(\mathcal{F})$$

$$c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot c_1(X) = c_2(X) - \mathrm{Det}(\mathcal{F}) + \mathrm{Tr}(\mathcal{F}).$$

À partir de ces rélations on peut aussi calculer le produit

$$c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot c_1(N_{\mathcal{F}}) = c_2(X) - \mathrm{Det}(\mathcal{F}).$$

Une première conséquence remarquable des formules de Baum-Bott est l'intégralité de $\mathrm{Tr}(\mathcal{F})$. Dans le même esprit, une deuxième conséquence est la parité du nombre entier $c_2(X) - \mathrm{Det}(\mathcal{F})$, qui s'obtient en appliquant le théorème de Riemann-Roch au fibré linéaire $N_{\mathcal{F}}$. En particulier, si $c_2(X)$ est impair alors tout feuilletage sur X possède des singularités (mais on peut prouver ça sans faire appel à Riemann-Roch...).

Remarque. – Dans le cas non singulier, une des deux formules de Baum-Bott ($c_1^2(N_{\mathcal{F}}) = 0$) s'exprime aussi de la façon suivante : il existe une 2-forme C^∞ fermée Ω qui représente $c_1(N_{\mathcal{F}})_{\mathbf{R}}$ et telle que $\Omega|_{\mathcal{F}} = 0$ et $\Omega \wedge \Omega = 0$. En effet, $\mathcal{F}$ est donné par 1-formes holomorphes fermées non singulières $\omega_i \in \Omega^1(U_i)$, avec $\omega_i = g_{ij}\omega_j$ sur $U_i \cap U_j$, où $\{g_{ij}\}$ est un $\mathcal{O}^*$-cocycle représentant $N_{\mathcal{F}}$. Donc $\{dg_{ij}/g_{ij}\}$ est un cocycle de 1-formes (de type (1,0)) qui s'annullent sur $T\mathcal{F}$, *i.e.* sections locales de $N^*_{\mathcal{F}}$. Le faisceau des sections C^∞ de type (1,0) de $N^*_{\mathcal{F}}$ est mou, donc $\frac{dg_{ij}}{g_{ij}} = \eta_i - \eta_j$, où η_i sont des 1-formes C^∞ de type (1,0) qui s'annullent sur $T\mathcal{F}$. La 2-forme fermée Ω localement définie par $\Omega = \frac{1}{2\pi i} d\eta_i$ représente $c_1(N_{\mathcal{F}})_{\mathbf{R}}$, et $\Omega|_{\mathcal{F}} = 0$, $\Omega \wedge \Omega = 0$. Dans le cas singulier une construction analogue donne Ω avec $\Omega|_{\mathcal{F}}$ et $\Omega \wedge \Omega$ localisés autour des singularités.

Nous allons maintenant examiner le comportement de $\mathrm{Det}(\mathcal{F})$ et $\mathrm{Tr}(\mathcal{F})$ par effet d'un éclatement [GH], [CM]. Soit $\pi : \tilde{X} \to X$ un éclatement en $p \in X$ et soit $D = \pi^{-1}(p)$ le diviseur exceptionnel. Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage sur X, le feuilletage $\pi^*(\mathcal{F}|_{X \setminus \{p\}})$ sur $\tilde{X} \setminus D$ admet une unique extension $\tilde{\mathcal{F}}$ sur $\tilde{X}$. Réciproquement, tout feuilletage sur $\tilde{X}$ peut être contracté le long de D en donnant origine à un feuilletage sur X. L'opérateur π^* réalise donc une corréspondence 1-1 entre les espaces des feuilletages sur X et $\tilde{X}$.

Si ω est une 1-forme différentielle holomorphe avec singularités isolées qui engendre $\mathcal{F}$ au voisinage de p, la 1-forme $\tilde{\omega} = \pi^*(\omega)$ engendre $\tilde{\mathcal{F}}$ au voisinage de D, mais elle n'a pas (en général) singularités isolées : $\tilde{\omega}$ a en correspondence de D une courbe de zéros, avec multiplicité $m \geq 0$ (et $m = 0$ ssi p n'est pas singulier pour $\mathcal{F}$). On obtient alors les expressions suivantes pour les fibrés linéaires associés à $\tilde{\mathcal{F}}$:

$$N^*_{\tilde{\mathcal{F}}} = \pi^*(N^*_{\mathcal{F}}) \otimes \mathcal{O}(mD) \qquad N_{\tilde{\mathcal{F}}} = \pi^*(N_{\mathcal{F}}) \otimes \mathcal{O}(-mD)$$

$$T^*_{\tilde{\mathcal{F}}} = \pi^*(T_{\mathcal{F}}{}^*) \otimes \mathcal{O}((1-m)D) \qquad T_{\tilde{\mathcal{F}}} = \pi^*(T_{\mathcal{F}}) \otimes \mathcal{O}((m-1)D)$$

où on a utilisé le lemme 1 et l'isomorphisme $K_{\tilde{X}} = \pi^*(K_X) \otimes \mathcal{O}(D)$. En particulier, pour ce qui concerne les classes de Chern du fibré normal :

$$c_1(N_{\tilde{\mathcal{F}}}) = \pi^* c_1(N_{\mathcal{F}}) - m[D]$$

$$c_1^2(N_{\tilde{\mathcal{F}}}) = c_1^2(N_{\mathcal{F}}) - m^2$$

$$c_1(N_{\tilde{\mathcal{F}}}) \cdot c_1(\tilde{X}) = c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot c_1(X) - m$$

puisque $c_1(\tilde{X}) = \pi^* c_1(X) - [D]$. Les formules de Baum-Bott donnent alors la variation de $\mathrm{Det}(\cdot)$ et $\mathrm{Tr}(\cdot)$:

$$\mathrm{Tr}(\tilde{\mathcal{F}}) = \mathrm{Tr}(\mathcal{F}) - m^2$$

$$\mathrm{Det}(\tilde{\mathcal{F}}) = \mathrm{Det}(\mathcal{F}) - m^2 + m + 1.$$

Bien sûr, cela peut se déduire même par un calcul direct en étudiant les singularités de $\tilde{\mathcal{F}}$ sur D [CM], [CLS].

On a alors l'observation suivante, qui sera très utile pour examiner les feuilletages sur les surfaces non minimales.

LEMME 5.

$$\mathrm{Det}(\tilde{\mathcal{F}}) - \mathrm{Tr}(\tilde{\mathcal{F}}) > \mathrm{Det}(\mathcal{F}) - \mathrm{Tr}(\mathcal{F}).$$

Preuve. – Rappeler que $m \geq 0$. ■

Les lemmes 2 et 3 de la section précédente conduisent à l'interprétation suivante du nombre entier m introduit ci-dessus. Distinguons deux cas :

i) le diviseur exceptionnel est $\tilde{\mathcal{F}}$-invariant : le lemme 3 donne

$$Z(D, \tilde{\mathcal{F}}) = c_1(N_{\tilde{\mathcal{F}}}) \cdot D - D \cdot D = m + 1 ;$$

ii) le diviseur exceptionnel n'est pas $\tilde{\mathcal{F}}$-invariant : le lemme 2 donne

$$\mathrm{tang}(D, \tilde{\mathcal{F}}) = c_1(N_{\tilde{\mathcal{F}}}) \cdot D - \chi(D) = m - 2.$$

Signalons aussi que $\mathrm{Det}(\tilde{\mathcal{F}}) < \mathrm{Det}(\mathcal{F})$ si $m \geq 2$, et (puisque $\mathrm{Det}(\cdot) \in \mathbf{N}$) cette inégalité est à la base du théorème de désingularisation de Seidenberg-Van Essen [CM] : après un nombre fini d'éclatements on arrive à un feuilletage tel que « $m \leq 1$ » pour chaque ultérieur éclatement. On a déjà remarqué que $m = 0$ correspond à l'éclatement d'un point régulier ; on vérifie sans peine que $m = 1$ correspond à l'éclatement d'un point singulier avec partie linéaire non nulle et non radiale.

3. Feuilletages sur les fibrations

Une surface complexe compacte X est dite *fibration* [BPV, p. 90-112] s'il existe une application holomorphe $f : X \to B$ au dessus d'une courbe complexe compacte B. On peut supposer (et on supposera) que les fibres de f sont connexes. Le type topologique d'une fibre générique de f (*i.e.* une fibre au dessus d'une valeur régulière de f) est constant. Si la fibre générique de f est rationnelle (elliptique) on parlera de fibration rationnelle (elliptique). Une fibre non générique peut être singulière ou multiple, les deux propriétés n'étant pas exclusives. Contrairement à la tradition, nous réserverons l'appellation de « singulière » pour une fibre qui n'est pas lisse au sens ensembliste ; donc une fibre multiple mais lisse sera considérée non singulière.

Pour étudier les feuilletages sur telles surfaces, nous commençons avec des remarques tout à fait générales. On utilisera la notation $h^k(\cdot) = \dim H^k(\cdot)$.

LEMME 6. – *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe régulier sur une surface complexe compacte X tel que $h^0(T_{\mathcal{F}}{}^*) > 0$. Alors*

$$c_1^2(X) \geq 2c_2(X).$$

Preuve. – Puisque $T_{\mathcal{F}}{}^*$ admet des sections non triviales, on a

$$c_1(T_{\mathcal{F}}{}^*) = \sum_{j=1}^{N} m_j [S_j]$$

avec $m_j > 0$, S_j courbes irréductibles sur X. D'après Baum-Bott (prop. 1) l'inégalité en question est équivalente à $c_1^2(T_{\mathcal{F}}{}^*) \geq 0$, et pour démontrer cela il suffit prouver que $c_1(T_{\mathcal{F}}{}^*) \cdot S_j \geq 0$ pour tout $j = 1, ..., N$. Si $S_j \cdot S_j \geq 0$ on a évidemment $c_1(T_{\mathcal{F}}{}^*) \cdot S_j \geq 0$, puisque $S_j \cdot S_k \geq 0$ si $j \neq k$. Si $S_j \cdot S_j < 0$ alors S_j n'est pas invariante (une courbe invariante a une auto-intersection nulle, voir par exemple [CS]) et on peut appliquer le lemme 2 :

$$c_1(T_{\mathcal{F}}{}^*) \cdot S_j = -S_j \cdot S_j + \operatorname{tang}(S_j, \mathcal{F}) > 0. \quad \blacksquare$$

Remarque. – L'inégalité $c_1^2(X) \geq 2c_2(X)$ exprime la non négativité de la signature $\tau(X) = \frac{1}{3}(c_1^2(X) - 2c_2(X))$ [BPV, p. 18].

La condition $h^0(T_{\mathcal{F}}{}^*) > 0$ semble être « souvent » verifiée (même dans le cas singulier), de même que la condition opposée, $h^0(T_{\mathcal{F}}) > 0$, semble assez rare. Ce dernier cas se présente en supposant $\mathcal{F}$ engendré par un champ de vecteurs holomorphe (global!); au contraire, $h^0(T_{\mathcal{F}}{}^*) > 0$ s'obtient quand $\mathcal{F}$ est engendré par un champ de vecteurs méromorphe et sans diviseur de zéros.

Un critère pour établir l'existence de sections de $T_{\mathcal{F}}{}^*$ est le suivant. On suppose que X possède une 1-forme diffèrentielle holomorphe ω (non triviale) définissant un feuilletage $\mathcal{G}$ distinct de $\mathcal{F}$. Alors la restriction de ω à $T_{\mathcal{F}}$ (plus exactement, la composition $T_{\mathcal{F}} \xrightarrow{f} TX \xrightarrow{\omega} \mathbf{C}$) définie une section non triviale de $T_{\mathcal{F}}{}^*$ (on pourrait aussi appliquer le lemme 4 : $T_{\mathcal{F}}{}^* = \mathcal{O}(D) \otimes N_{\mathcal{G}}^*$ et $h^0(T_{\mathcal{F}}{}^*) > 0$ car $h^0(\mathcal{O}(D)) > 0$ et $h^0(N_{\mathcal{G}}^*) > 0$).

D'autre part, beaucoup de surfaces ne possèdent pas de 1-formes holomorphes non triviales, et cette méthode n'est donc pas applicable. Le lemme suivant sera utilisé dans telle situation.

LEMME 7. – *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage holomorphe régulier sur une surface complexe compacte algébrique X tel que $h^0(T_{\mathcal{F}}{}^*) = 0$, $h^0(N_{\mathcal{F}}) > 0$. Alors $\mathcal{F}$ est une fibration localement holomorphiquement triviale au dessus d'une courbe rationnelle ou elliptique.*

Preuve. – Puisque $T_{\mathcal{F}}{}^* = K_X \otimes N_{\mathcal{F}}$, les hypothèses entraînent $h^0(K_X) = 0$, *i.e.* $h^2(\mathcal{O}_X) = 0$.

Supposons d'abord $h^1(\mathcal{O}_X) > 0$. L'algébricité de X entraîne $h^0(\Omega_X^1) = h^1(\mathcal{O}_X) > 0$ [BPV, ch. IV], c'est-à-dire l'espace des 1-formes holomorphes est de dimension strictement positive. D'autre part la nullité de $h^0(T_{\mathcal{F}}{}^*)$ implique que chaque 1-forme holomorphe s'annulle sur $T_{\mathcal{F}}$ et définit donc une section globale de $N_{\mathcal{F}}^*$: plus exactement, $H^0(\Omega_X^1) \simeq H^0(N_{\mathcal{F}}^*)$. On en déduit que $h^0(N_{\mathcal{F}}^*) > 0$, ce qui, joint à l'hypothèse $h^0(N_{\mathcal{F}}) > 0$ et à l'algébricité de X, implique la trivialité du fibré $N_{\mathcal{F}}^*$. Par conséquent, $\mathcal{F}$ est engendré par une 1-forme holomorphe sans zéro. Puisque $h^0(\Omega_X^1) = h^0(N_{\mathcal{F}}^*) = 1$, en intégrant cette 1-forme (fermée) on obtient une fibration (sans fibres singulières ni multiples) $f : X \to E$ sur une courbe elliptique E, qu'on peut identifier avec le tore d'Albanese de X [BPV, p. 35]. Les feuilles du feuilletages coïncident avec les fibres de f. Cette fibration est localement holomorphiquement triviale d'après [BPV, III.15.4].

Supposons maintenant $h^1(\mathcal{O}_X) = 0$. Par hypothèse, $N_{\mathcal{F}}$ est représenté par un diviseur effectif (non vide, car $N_{\mathcal{F}}$ n'est pas triviale à cause de $h^1(\mathcal{O}_X) = 0$) :

$$N_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}\left(\sum_{j=1}^{k} m_j S_j\right), \qquad m_j > 0$$

où S_j sont des courbes irréductibles. D'après la suite exacte associée à chaque S_j $(0 \to \mathcal{O}_X(-S_j) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_{S_j} \to 0)$ et $h^1(\mathcal{O}_X) = h^2(\mathcal{O}_X) = 0$ on a

$$H^1(\mathcal{O}_{S_j}) \simeq H^2(\mathcal{O}_X(-S_j)) \simeq H^0(K_X \otimes \mathcal{O}_X(S_j)).$$

Mais $h^0(K_X \otimes \mathcal{O}_X(S_j)) = 0$: le fibré $N_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{O}_X(-S_j)$ est encore représenté par un diviseur effectif, donc $h^0(N_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{O}_X(-S_j)) > 0$, et alors une éventuelle section non triviale de $K_X \otimes \mathcal{O}_X(S_j)$ engendrerait une section non triviale de $T_{\mathcal{F}}{}^* = (K_X \otimes \mathcal{O}_X(S_j)) \otimes (N_{\mathcal{F}} \otimes \mathcal{O}_X(-S_j))$. On a ainsi $h^1(\mathcal{O}_{S_j}) = 0$, *i.e.* chaque courbe S_j est une courbe rationnelle lisse.

Si S_j n'est pas $\mathcal{F}$-invariante, le lemme 2 donne

$$c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot S_j = \chi(S_j) + \operatorname{tang}(S_j, \mathcal{F}) > 0$$

et si au contraire S_j est $\mathcal{F}$-invariante le lemme 3 donne

$$c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot S_j = S_j \cdot S_j = 0;$$

l'équation de Baum Bott $c_1^2(N_{\mathcal{F}}) = 0$ implique alors que toutes les composantes S_j sont $\mathcal{F}$-invariantes. On voit facilement qu' un feuilletage régulier qui possède une courbe rationnelle invariante est en fait une fibration rationnelle (donc localement holomorphiquement triviale); la base de cette fibration doit être rationnelle, puisque $h^1(\mathcal{O}_X) = 0$. ■

Remarquons que pour une fibration localement holomorphiquement triviale on a $c_1^2 = 2c_2$, *i.e.* la signature est nulle [BPV, p.139-149]. Donc (au moins dans le cas algébrique) en rassemblant les lemmes 7 et 6 on a

$$h^0(N_{\mathcal{F}}) > 0 \Rightarrow \tau(X) \geq 0.$$

On peut maintenant revenir aux feuilletages sur les fibrations.

Dans la proposition suivante on utilisera cette constatation : si $X \xrightarrow{f} B$ est une fibration rationnelle ou elliptique ayant (au moins) une fibre singulière, alors $c_1^2(X) < 2c_2(X)$. En effet, dans le cas elliptique on a toujours $c_1^2(X) \leq 0$ (par exemple, grâce à la formule du fibré canonique [BPV, V.12.3] et au lemme de Zariski [BPV, III.8.2]) et $c_2(X) > 0$ en présence de fibres singulières [BPV, III.11.4 et 5]. Dans le cas rationnel, les fibres singulières doivent contenir de (-1)-sphères qu'on peut contracter jusqu'à obtenir une surface reglée [BPV, V.4.3], pour laquelle $c_1^2 = 2c_2$; on conclut en rappelant que, lors d'un éclatement, c_1^2 décroit et c_2 croit (strictement). Par les mêmes arguments, la réciproque est aussi vraie : une fibration rationnelle ou elliptique sans fibres singulières satisfait $c_1^2 = 2c_2$. Cette propriété n'est plus valable dans le cas des fibrations de genre supérieure [BPV, V.14].

PROPOSITION 2. – *Soit X une fibration rationnelle ou elliptique et soit $\mathcal{F}$ un feuilletage régulier. Alors X n'a pas de fibres singulières.*

Preuve. – Soit $f : X \to B$ la fibration et soit $\mathcal{G}$ le feuilletage associé. Si $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ alors, évidemment, f n'a pas de fibre singulière. On supposera donc dans la suite que $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$.

Si genre $(B) > 0$ on dispose de 1-formes holomorphes ne s'annullant pas sur $T_{\mathcal{F}}$: les relevés des 1-formes holomorphes sur B. Donc $h^0(T_{\mathcal{F}}{}^*) > 0$ et le lemme 6 montre que $c_1^2(X) \geq 2c_2(X)$ et donc que f est régulière.

Si genre $(B) = 0$, on dispose au contraire seulement d'une 1-forme méromorphe ω telle que $\omega|_{\mathcal{F}} \neq 0$ et $(\omega)_\infty = 2F$, F étant une fibre régulière de f ; c'est-à-dire,

$$h^0(T_{\mathcal{F}}{}^* \otimes \mathcal{O}(2F)) > 0.$$

Distinguons deux cas :

1) $h^0(K_X \otimes N^*_{\mathcal{F}}) > 0$. Alors $h^0(K_X \otimes K_X \otimes \mathcal{O}(2F)) > 0$ (car $K_X \otimes K_X \otimes \mathcal{O}(2F) = (K_X \otimes N^*_{\mathcal{F}}) \otimes (T_{\mathcal{F}}{}^* \otimes \mathcal{O}(2F))$), *i.e.* $2K_X$ est représenté par la différence entre un diviseur effectif D et $2F$:

$$2K_X = \mathcal{O}(D - 2F).$$

D'après la formule d'adjonction :

$$\chi(F) = \chi(F) + F \cdot F = -c_1(K_X) \cdot F = -\frac{1}{2} D \cdot F + F \cdot F = -\frac{1}{2} D \cdot F \leq 0.$$

Donc la fibre générique F doit être elliptique et en plus $D \cdot F = 0$. Ce diviseur D est la somme des diviseurs effectifs associés aux sections de $T_{\mathcal{F}}{}^* \otimes \mathcal{O}(2F)$ et $K_X \otimes N^*_{\mathcal{F}}$, il contient en particulier le diviseur des tangences entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ (la 1-forme méromorphe ω restricte à $T_{\mathcal{F}}$ s'annulle où $\mathcal{F}$ est tangent à $\mathcal{G}$). Donc $D \cdot F = 0$ implique que $\mathcal{F}$ est transverse aux fibres génériques de f et tangent à $\mathcal{G}$ le long de certaines courbes (lisses et avec auto-intersection nulle) contenues dans les fibres. Le lemme de Zariski [BPV, III.8.2] montre que ces courbes coïncident avec des fibres entières (et pas seulement des composantes des fibres). Donc ces fibres $\mathcal{F}$-invariantes doivent être lisses, ainsi que les fibres $\mathcal{F}$-transverses, et $\mathcal{G}$ est donc une fibration elliptique régulière (dans la prochaine section on appellera « tourbillonné » un tel feuilletage $\mathcal{F}$).

2) $h^0(K_X \otimes N^*_{\mathcal{F}}) = 0$. Appliquons le théorème de Riemann-Roch au fibré $N_{\mathcal{F}}$, en tenant compte des formules de Baum-Bott :

$$h^0(N_{\mathcal{F}}) = h^0(N_{\mathcal{F}}) + h^0(K_X \otimes N^*_{\mathcal{F}}) \geq \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{1}{2} c_2(X).$$

Si f est une fibration rationnelle alors $\chi(\mathcal{O}_X) = 1$ et $c_2(X) \geq 4$ (puisque la base aussi est rationnelle [BPV, V.4]). On obtient ainsi $h^0(N_{\mathcal{F}}) > 0$ et les lemmes 6 et 7 montrent la régularité de $\mathcal{G}$. Si f est une fibration elliptique alors $\chi(\mathcal{O}_X) \geq 0$ [BPV, p. 162], $c_2(X) \geq 0$ [BPV, III.11.4] et $c_2(X) > 0$ s'il y a des fibres singulières [BPV, III.11.5]. Mais ce dernier cas ne se présente pas : on aurait $h^0(N_{\mathcal{F}}) > 0$, incompatible avec les fibres singulières, au moins dans le cas algébrique (on a utilisé le lemme 7).

Si X est non algébrique la situation est encore plus simple. Puisque X possède des fonctions méromorphes non constantes, sa dimension algébrique [BPV, p.23] ne peut être qu'égale à 1, et donc f est une fibration elliptique [BPV, VI.4.1]. Toute courbe de X est contenue dans une fibre (voir la preuve de [BPV, VI.4.1]), en particulier le diviseur des tangences entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ est composé de composantes de fibres et on conclut encore avec le lemme de Zariski comme dans le cas 1). ∎

4. Classification des feuilletages sur les fibrations

Les idées de la section précédente permettent aussi une classification des feuilletages sur les fibrations elliptiques et rationnelles, qu'on supposera désormais régulières (*i.e.* sans fibres singulières). Signalons que dans le cas rationnel on trouve ces résultats dans [GM2], avec des techniques un peu plus algébriques mais, finalement, toujours fondées sur la comparaison du feuilletage avec la fibration.

Commençons avec le cas elliptique, avec une définition inspirée de [Gh].

DÉFINITION. – Un *feuilletage tourbillonné* sur une surface complexe compacte X est un feuilletage régulier $\mathcal{F}$ avec la propriété suivante. Il existe une fibration elliptique régulière sur X telle que : i) il y a un nombre fini de fibres $F_1, ..., F_N$ qui sont $\mathcal{F}$-invariantes; ii) toutes les autres fibres sont $\mathcal{F}$ - transverses.

Voici un exemple : si X est une surface de Hopf elliptique [BPV, V.18] et $\mathcal{F}$ est un feuilletage régulier différent de la fibration, alors les courbes de tangence entre $\mathcal{F}$ et la fibration sont nécessairement des fibres, puiqu'il n'y a pas d'autres courbes sur une surface de Hopf. Donc $\mathcal{F}$, qui ne peut pas être transverse à la fibration, est un feuilletage tourbillonné.

Une fibration elliptique qui possède un feuilletage tourbillonné est très particulière : hors des fibres invariantes et des fibres multiples (invariantes ou non) la fibration est en fait localement holomorphiquement trivial, la trivialisation étant donnée par le feuilletage; cette trivialisation s'étend évidemment aux fibres invariantes non multiples. Avec un peu de chirurgie holomorphe, on peut montrer que cette condition nécessaire est aussi suffisante.

PROPOSITION 3. – *Soit X une fibration elliptique avec $kod(X) \geq 0$ et soit $\mathcal{F}$ un feuilletage régulier sur X. Alors $\mathcal{F}$ est soit transverse à la fibration, soit la fibration, soit tourbillonné.*

Preuve. – Supposons $\mathcal{F}$ différent de la fibration $\mathcal{G}$, et soit D le diviseur des tangences entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. Puisque $c_1(T_\mathcal{G}) = 0$, $T_\mathcal{G}$ étant topologiquement trivial, on a

$$[D] = c_1(N_\mathcal{F})$$

et les formules de Baum-Bott ($c_1^2(N_\mathcal{F}) = 0$, $c_1(N_\mathcal{F}) \cdot c_1(X) = 0$) se réduisent à

$$D \cdot D = 0 \qquad\qquad c_1(X) \cdot D = 0.$$

Soit $D = \sum_{j=1}^N m_j S_j$, $m_j > 0$, S_j irréductibles. Puisque $c_1(X) \cdot S_j \leq 0$ $\forall j$ (car X est minimale et $kod(X) \geq 0$: voir [BPV, III.2.3]), on a nécessairement

$$c_1(X) \cdot S_j = 0 \qquad \forall j = 1, ..., N.$$

Si S_j est une fibre, évidemment $S_j \cdot S_j = 0$. Si au contraire S_j n'est pas une fibre alors le lemme 2 donne

$$\operatorname{tang}(S_j, \mathcal{G}) = S_j \cdot S_j$$

et donc $S_j \cdot S_j \geq 0$. L'égalité $D \cdot D = 0$ implique alors

$$S_j \cdot S_k = 0 \qquad \forall j, k = 1, ..., N.$$

On a aussi que, si S_j n'est pas une fibre, $\mathrm{tang}(S_j, \mathcal{G}) = 0$ et donc S_j est lisse et transverse à la fibration. Enfin, par la formule d'adjonction,

$$\chi(S_j) = c_1(X) \cdot S_j - S_j \cdot S_j = 0$$

et donc chaque S_j est une courbe elliptique. Puisque ces courbes sont deux à deux disjointes, on a seulement deux possibilités. Soit chaque S_j est une fibre, et alors $\mathcal{F}$ est tourbillonné (ou transverse à la fibration si $D = \emptyset$). Soit chaque S_j est une courbe elliptique transverse à la fibration :

Affirmation : dans ce cas il existe sur X une deuxième fibration elliptique $\mathcal{H}$, transverse à $\mathcal{G}$ et ayant les courbes S_j comme fibres.

En effet, la projection de S_j sur la base B est un revêtement ramifié, dont les points des ramification coïncident avec les intersections de S_j avec les fibres multiples de $\mathcal{G}$. La formule de Hurwitz montre alors que B est soit rationnelle soit elliptique, et en plus dans ce dernier cas il n'y a pas de points de ramification (*i.e.* il n'y a pas de fibres multiples). Si B est elliptique alors $\mathcal{G}$ est localement holomorphiquement triviale [BPV, III.15.4]. Si B est rationnelle, on peut encore adapter la preuve de [BPV, III.15.4], car les seules fibres singulières (au sens de [BPV]) de $\mathcal{G}$ sont les fibres multiples (lisses) : l'application des périodes a une évidente extension holomorphe aux points de B correspondants aux fibres multiples. Donc, si B est rationnelle, $\mathcal{G}$ est localement holomorphiquement triviale hors des fibres multiples. Quelque soit B, on construit aisement $\mathcal{H}$ en translatant une des courbes S_j. On peut aussi remarquer qu'une telle surface est soit un tore soit une surface hyperelliptique [BPV, p. 148].

Revenons au feuilletage $\mathcal{F}$: il est transverse à chaque S_j (puisque $\mathcal{G}$ l'est), et on déduit de cela que les (éventuelles) courbes de tangence entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{H}$ sont des fibres de $\mathcal{H}$, *i.e.* $\mathcal{F}$ est tourbillonné par rapport à $\mathcal{H}$. ■

D'après la classification des surfaces [BPV, p. 188] les seules fibrations elliptiques régulières avec $kod(X) = -\infty$ sont certaines fibrations rationnelles à base elliptique, qu'on traitera dans la prop. 6, et certaines surfaces de Hopf [BPV, V.18], plus exactement celle de dimension algébrique 1, qu'on a déjà traité après la définition de feuilletage tourbillonné.

Pour les fibrations rationnelles distinguons trois cas, selon le genre de la base.

PROPOSITION 4. – *Soit X une fibration rationnelle avec base B rationnelle et soit $\mathcal{F}$ un feuilletage régulier sur X. Alors $\mathcal{F}$ est soit la fibration soit transverse à la fibration (et alors $X = \bar{\mathbf{C}} \times \bar{\mathbf{C}}$, $\mathcal{F}$ = feuilletage horizontal).*

Preuve. – Supposons $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$ = fibration. Au cours de la démonstration de la proposition 2 on a vu que $h^0(N_{\mathcal{F}}) > 0$. On voit facilement que si $\mathcal{F}$ est une (deuxième) fibration, nécessairement rationnelle, alors $X = \bar{\mathbf{C}} \times \bar{\mathbf{C}}$ et $\mathcal{F}$ est le feuilletage horizontal. Si ce cas ne se présente pas le lemme 7 affirme que $h^0(T_{\mathcal{F}}^*) > 0$, *i.e.* $T_{\mathcal{F}}^*$ est effectif : $T_{\mathcal{F}}^* = \sum_{j=1}^N m_j S_j$, $m_j > 0$, S_j courbes irréductibles. Les formules de Baum-Bott se réduisent à

$$c_1^2(T_{\mathcal{F}}^*) = 0, \qquad c_1(T_{\mathcal{F}}^*) \cdot c_1(X) = c_2(X) - c_1^2(X) = -4.$$

En regardant la preuve du lemme 6 on voit que pour obtenir $c_1^2(T_{\mathcal{F}}^*) = 0$ on doit avoir en fait

$$c_1(T_{\mathcal{F}}^*) \cdot S_j = 0, \qquad S_j \cdot S_k = 0 \qquad \forall j, k.$$

Dans les surfaces en question [BPV, p. 141] la propriété $S_j \cdot S_j = 0$ implique que S_j est soit une fibre soit une section (si $X = \bar{\mathbf{C}} \times \bar{\mathbf{C}}$), donc $\chi(S_j) = 2$. Voici alors une contradiction :

$$-4 = c_1(T_{\mathcal{F}}{}^*) \cdot c_1(X) = \sum_{j=1}^{N} m_j c_1(X) \cdot S_j = 2 \sum_{j=1}^{N} m_j \geq 0.$$

Cette contradiction achève la preuve. ■

PROPOSITION 5. – *Soit X une fibration rationnelle avec base B de genre $g \geq 2$ et soit $\mathcal{F}$ un feuilletage régulier sur X. Alors $\mathcal{F}$ est soit la fibration soit transverse à la fibration.*

Preuve. – Supposons $\mathcal{F} \neq \mathcal{G} =$ fibration. On a $c_1(N^*_{\mathcal{G}}) = 2(g-1)[F]$, où F est une fibre, et donc

$$c_1(T_{\mathcal{F}}{}^*) = [D] + c_1(N^*_{\mathcal{G}}) = [D] + 2(g-1)[F]$$

où D est le diviseur des tangences qui, évidemment, ne contient pas de fibres. Les formules de Baum-Bott donnent en ce cas

$$D \cdot D + 4(g-1) F \cdot D = 0 \qquad\qquad c_1(X) \cdot D = 0.$$

Si $D = \sum_{j=1}^{N} m_j S_j$, $m_j > 0$, S_j irréductibles, comme dans la proposition précédente on doit avoir $c_1(T_{\mathcal{F}}{}^*) \cdot S_j = 0$ $\forall j$, $S_j \cdot S_k = 0$ $\forall j,k$, $c_1(T_{\mathcal{F}}{}^*) \cdot F = 0$, $F \cdot S_j = 0$ $\forall j$. Donc $D \cdot F = 0$, *i.e.* $D = \emptyset$ et $\mathcal{F}$ est transverse à $\mathcal{G}$. ■

Comme dans [GM2], le cas le plus délicat est le cas d'une base elliptique.

PROPOSITION 6. – *Soit X une fibration rationnelle avec base B elliptique et soit $\mathcal{F}$ un feuilletage régulier sur X. Alors $\mathcal{F}$ est soit la fibration soit transverse à la fibration soit tourbillonné par rapport à une fibration elliptique transverse à la fibration rationnelle.*

Preuve. – On reprend la démonstration de la proposition 5 : pour le diviseur des tangences D (qui représente $c_1(T_{\mathcal{F}}{}^*)$, et qu'on supposera non vide) on obtient

$$D \cdot D = 0 \qquad\qquad c_1(X) \cdot D = 0$$

$$c_1(X) \cdot S_j = 0 \qquad \forall j = 1, ..., N \qquad\qquad S_j \cdot S_k = 0 \qquad \forall j,k = 1, ..., N$$

$\{S_j\}$ étant les composantes irréductibles de D. On a donc $\chi(S_j) = 0$ $\forall j$ et le lemme 2 (le fibré normal de $\mathcal{G}$ est trivial) donne la transversalité à la fibration des courbes S_j, qui sont donc des courbes lisses elliptiques deux à deux disjointes et avec auto-intersection nulle.

Si les courbes S_j font partie d'une fibration elliptique $\mathcal{H}$ transverse à $\mathcal{G}$, alors $\mathcal{F}$ est tourbillonné par rapport à $\mathcal{H}$, comme déjà remarqué à la fin de la preuve de la prop. 3. Supposons donc qu'une telle $\mathcal{H}$ n'existe pas, avec le but d'arriver à une contradiction. Dans un revêtement fini $\hat{X}$ les courbes S_j deviennent des sections d'auto-intersection nulle de la fibration rationnelle relevée $\hat{\mathcal{G}}$. D'après [Su] et dans sa terminologie, un tel revêtement est un $\mathbf{C}^*$-fibré de degré 0 ou bien la surface A_0. Plus explicitement, $\hat{X} = \mathbf{C} \times \bar{\mathbf{C}}/\Gamma$ où $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\mathbf{C} \times \bar{\mathbf{C}})$ est engendré par $\gamma_1(z,w) = (z+1, w)$ et $\gamma_2(z,w) = (z+\tau, A(w))$, avec $A(w) = \lambda w$ ($\lambda \in \mathbf{C}^*$) ou bien $A(w) = w+1$. La non existence de $\mathcal{H}$ implique que λ n'est pas racine de l'unité; on vérifie alors que les seules courbes elliptiques dans $\hat{X}$ transverses à $\hat{\mathcal{G}}$ et d'auto-intersection nulle sont les sections $\{w = 0\}$, $\{w = \infty\}$ (si

$A(w) = \lambda w)$ ou $\{w = \infty\}$ (si $A(w) = w + 1$). D'autre part, ces surfaces possèdent assez de champs de vecteurs holomorphes nonsinguliers [Su], en particulier étant donné un point p hors des sections d'auto-intersection nulle on peut construire un feuilletage $\mathcal{K}$ transverse à $\hat{\mathcal{G}}$ et tangent à $\hat{\mathcal{F}}$ en p. Si D' est le diviseur des tangences entre $\hat{\mathcal{F}}$ et $\mathcal{K}$ on obtient, comme dans la proposition 3 :

$$D' \cdot D' = 0 \qquad c_1(X) \cdot D' = 0 \qquad S'_j \cdot S'_k = 0 \quad \forall j, k$$

et comme auparavant on obtient encore que les courbes S'_j sont des courbes elliptiques d'auto-intersection nulle et transverses à $\hat{\mathcal{G}}$, donc contenues dans $\{w = 0\} \cup \{w = \infty\}$. C'est une contradiction car $p \in D'$ avait été choisi hors de ces sections. ■

On est ainsi arrivé à la conclusion suivante.

THÉORÈME 1. – *Les seuls feuilletages réguliers sur les fibrations elliptiques ou rationnelles sont les suivants :*

i) *les fibrations elliptiques ou rationnelles*

ii) *les feuilletages transverses aux fibrations elliptiques ou rationnelles*

iii) *les feuilletages tourbillonnés.*

5. Feuilletages sur les surfaces de type non général

Les sections 3 et 4 fournissent une classification, essentiellement complète, des feuilletages sans singularités sur les surfaces complexes admettant une fibration rationnelle ou elliptique. Nous allons maintenant insérer ce résultat dans le contexte de la classification des surfaces de Enriques-Kodaira [BPV, ch. VI]. D'après cette classification toute surface complexe compacte appartient à la liste suivante :

a) le plan projectif $\mathbf{C}P^2$
b) les fibrations rationnelles ou elliptiques
c) les surfaces avec modèle minimal un tore complexe
d) les surfaces avec modèle minimal une surface K3
e) les surfaces de classe VII : $kod(X) = -\infty$, $b_1(X) = 1$
f) les surfaces de type général : $kod(X) = 2$.

On a déjà traité les cas a) et b) ($\mathbf{C}P^2$ n'a pas de feuilletages réguliers puisque, par example, c_2 est impair), ici on va étudier les cas c), d), e) en laissant le dernier cas pour les sections suivantes. Observons que ces cas ne sont pas exclusifs : par exemple, certains tores complexes et certaines surfaces K3 admettent des fibrations elliptiques.

PROPOSITION 7. – *Il n'y a pas de feuilletages réguliers sur les surfaces de la classe d).*

Preuve. – Si X est une surface K3 et $\mathcal{F}$ un feuilletage quelconque on a, d'après Baum-Bott et $c_1(X) \equiv 0$, $c_2(X) = 24$:

$$\mathrm{Det}(\mathcal{F}) - Tr(\mathcal{F}) = 24 > 0$$

et donc $\mathcal{F}$ est singulier. On conclut grâce au lemme 5 dans le cas non minimal. ■

PROPOSITION 8. – *Les seules feuilletages réguliers des surfaces de la classe c) sont les feuilletages linéaires et les feuilletages tourbillonnés sur les tores complexes.*

Preuve. – Sur les tores complexes et leurs éclatements on dispose de beaucoup de 1-formes holomorphes, ce qui permet de démontrer, grâce au lemme 6, que sur l'éclaté d'un tore complexe il n'y a pas de feuilletage régulier : la signature d'un tore éclaté est strictement négative.

Sur les tores complexes il n'y a pas, en général, de fibrations elliptiques ; mais on dispose toujours des feuilletages linéaires, qui ont les mêmes propriétés « homologiques » des fibrations elliptiques et avec lesquels on peut répéter les arguments de la section 4 (avec beaucoup de simplifications). ■

Signalons que la classification des feuilletages sur les tores complexes se trouve également dans [Gh], dans un contexte plus général.

PROPOSITION 9. – *Les seules surfaces de la classe e) admettantes des feuilletages réguliers sont les surfaces de Hopf et les surfaces de Inoue* [In].

Preuve. – La classe de Chern d'un fibré linéaire appartient au « groupe de Néron-Severi » $H^{1,1}(X,\mathbf{Z}) = H^{1,1}(X) \cap H^2(X,\mathbf{Z}) \subset H^2(X,\mathbf{Z})$. La forme d'intersection d'une surface avec $b_1(X)$ impair est définie négative sur $H^{1,1}(X,\mathbf{R}) = H^{1,1}(X) \cap H^2(X,\mathbf{R}) \subset H^2(X,\mathbf{R})$, par le théorème de l'indice de Hodge généralisé par Kodaira [BPV, IV.2.13]. Donc si $\mathcal{F}$ est régulier la relation $c_1^2(N_{\mathcal{F}}) = 0$ entraîne $c_1(N_{\mathcal{F}}) \equiv 0$ modulo torsion, et donc $c_2(X) = c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot c_1(X) = 0$. Puisque $b_1(X) = 1$, on a alors $b_2(X) = c_2(X) + 2b_1(X) - 2 = 0$, et les théorèmes de Kodaira [BPV, V.18.7] et de Inoue [In] complètent la preuve. À remarquer que parmi les hypothèses de [In] il y a, justement, l'existence d'un feuilletage, et la preuve de Inoue consiste en l'étude de ce feuilletage. ■

Rappellons que si, au contraire, $b_1(X)$ est pair, la forme d'intersection n'est pas définie sur $H^{1,1}(X,\mathbf{R})$ et donc l'équation $c_1^2(N_{\mathcal{F}}) = 0$ a beaucoup de solutions. Pour cette raison, il nous semble que les seules formules de Baum-Bott (bien que fondamentales) ne sont pas suffisantes pour obtenir une classification. D'autre part, ces formules sont en nombre de deux, et leur inconnue $c_1(N_{\mathcal{F}})$ appartient à $H^{1,1}(X,\mathbf{Z})$ qui peut avoir un rang quelconque ; on est donc en presence d'un « système sous-déterminé ». Dans certaines situations, toutefois, $H^{1,1}(X,\mathbf{Z})$ est trivial bien que $H^{1,1}(X,\mathbf{R})$ ne le soit pas : c'est le cas, par example, des surfaces K3 génériques [BPV], [GH], où $H^{1,1}(X,\mathbf{R}) = \mathbf{R}^{20}$ et $H^{1,1}(X,\mathbf{Z}) = (0)$. Dans ces surfaces tout fibré linéaire est (topologiquement et donc holomorphiquement) trivial. Puisque ces surfaces ne possèdent pas de champs de vecteurs ou 1-formes différentielles, on en déduit que elles ne possèdent aucun feuilletage (même singulier!). Des considerations analogues montrent que un tore complexe générique possède seulement les feuilletages linéaires.

Voyons maintenant la classification des feuilletages réguliers sur les surfaces de Hopf et Inoue.

Le cas des surfaces de Hopf est tout à fait analogue au cas des fibrations rationnelles à base elliptique (prop. 6). Ce n'est pas mystérieux, car avec une transformation logarithmique [BPV, p. 164] on transforme une surface de Hopf en une telle fibration (de ce point de vue les fibrations rationnelle à base elliptique sont un cas limite des surface de Hopf, au même sens que $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^1$ est un cas limite des espaces lenticulaires $\mathbf{S}^3/\Gamma$). Soit donc X une surface de Hopf. Si X est elliptique on revient aux sections 3 et 4 : un feuilletage (régulier) différent de la fibration est tourbillonné. Dans le revêtement universel $\mathbf{C}^2 \setminus (0,0)$

le feuilletage est donné par un champ de vecteurs quasi-homogène.

Si X n'est pas elliptique, on sait [BPV, V.18] [Sun] que X contient exactement soit 1 soit 2 courbes (lisses, elliptiques, avec auto-intersection nulle). En régardant la forme normale de X [Sun] on voit que sur X il existe une famille à un paramètre de feuilletages $\{\mathcal{H}_\lambda\}$, tangents aux courbes de X : dans le revêtement universel $\mathbf{C}^2 \setminus (0,0)$ ces feuilletages correspondent à des feuilletages linéaires si X contient deux courbes et à des feuilletage « en forme normale de Poincaré-Dulac » si X contient seulement une courbe. En plus, sur X il y a soit un soit deux feuilletages dont les relevés sont des feuilletages par droites parallèles aux relevés des courbes de X. On appellera *évidents* les feuilletages ainsi construits; ils coincident avec les feuilletages engendrés par un champ de vecteurs holomorphe [Sun] (avec diviseur des zéros peut-être non vide). Comme dans les fibrations rationnelles à base elliptique, ces feuilletages évidents engendrent tous les espaces tangents à X hors des courbes elliptiques, et exactement comme dans la proposition 6 on arrive à la conclusion que ces feuilletages sont les seuls feuilletages (réguliers) de X.

Les surfaces de Inoue [In] sont des quotients de $\mathbf{D} \times \mathbf{C}$, répartis naturellement en deux classes : S_0 et $S_\pm$. Ces surfaces ne contiennent pas de courbes, et donc deux feuilletages quelconques doivent être transverses. On obtient un premier feuilletage en prenant le quotient du feuilletage vertical, et un éventuel deuxième feuilletage doit donc se relever en un feuilletage « presque » horizontal. Une étude plus approfondie, basé sur la lecture attentive du très riche article de Inoue, montre que dans le cas $S_\pm$ un tel deuxième feuilletage n'existe pas, et dans le cas S_0 il doit coïncider avec le quotient du feuilletage horizontal. On appellera *évidents* les feuilletages ainsi décrits.

Ces remarques complètent la démonstration du résultat suivant.

THÉORÈME 2. –*Tout feuilletage régulier sur une surface complexe compacte X avec $kod(X) < 2$ appartient à la liste suivante :*

i) *les fibrations elliptiques ou rationnelles*

ii) *les feuilletages transverses aux fibrations elliptiques ou rationnelles*

iii) *les feuilletages tourbillonnés*

iv) *les feuilletages linéaires des tores*

v) *les feuilletages évidents des surfaces de Hopf et de Inoue.*

Observons que dans tous ces exemples on a $c_1^2(X) = 2c_2(X)$.

6. feuilletages sur les surfaces de type général : métrique invariante

Pour classifier les feuilletages sur les surfaces avec dimension de Kodaira non maximale on a utilisé la présence sur (la plupart de) ces surfaces de certains feuilletages « simples » : les fibrations elliptiques ou rationnelles. Une telle structure feuilletée remarquable n'existe plus, en général, sur les surfaces avec dimension de Kodaira égale à deux. On utilisera alors un autre point de vue, qui tiendra compte de la dynamique du feuilletage et non seulement des propriétés algébriques de ses fibrés : nous allons construire une métrique transverse invariante.

D'abord, on va se réduire au cas minimal. Rappellons que si X est de type général et minimal alors $c_1(X)$ est semi-définie négative [BPV, VII.2.3] : $c_1(X) \cdot C \leq 0$ pour toute courbe $C \subset X$. En plus, $c_2(X) > 0$ [BPV, VII.2.4]. On utilisera l'estimation suivante de Bogomolov [BPV, VII.4.2] : si $N_{\mathcal{F}}$ est le fibré normal d'un feuilletage $\mathcal{F}$ sur une surface algébrique X, alors il existe une constante positive c telle que

$$h^0((N_{\mathcal{F}}^*)^n) \leq cn \qquad \forall n \geq 1.$$

(cette inégalité est conséquence du fait que si $h^0((N_{\mathcal{F}}^*)^n) \geq 2$ pour un certain $n > 0$ alors $\mathcal{F}$ est une fibration [BPV, IV.4.1]).

Le lemme suivant se trouve, essentiellement, au cours de la preuve de l'inégalité de Bogomolov-Miyaoka-Yau [BPV, VII.4.3]. Nous le reformulons dans notre contexte.

LEMME 8. – *Soit X une surface complexe compacte minimale et de type général, et soit $\mathcal{F}$ un feuilletage sur X. Alors*

$$\operatorname{Det}(\mathcal{F}) - Tr(\mathcal{F}) \geq 0.$$

Preuve. – Si $Tr(\mathcal{F}) \leq 0$ il n'y a rien à démontrer car $\operatorname{Det}(\mathcal{F}) \geq 0$. Supposons alors $Tr(\mathcal{F}) > 0$, donc $c_1^2(N_{\mathcal{F}}^*) > 0$. Le théorème de Riemann-Roch appliqué aux fibrés $(N_{\mathcal{F}}^*)^n$, $n \in \mathbf{N}$, donne

$$h^0((N_{\mathcal{F}}^*)^n) + h^0(K_X \otimes N_{\mathcal{F}}^n) \geq an^2 + b$$

avec $a, b \in \mathbf{R}$ et $a > 0$. La précédente estimation sous-linéaire de Bogomolov entraîne alors

$$h^0(K_X \otimes N_{\mathcal{F}}^n) > 0 \qquad \forall n > n_0.$$

Le fibré $K_X \otimes N_{\mathcal{F}}^n$ est alors, pour $n > n_0$, représenté par un diviseur effectif et par conséquence

$$c_1(X) \cdot (K_X \otimes N_{\mathcal{F}}^n) \leq 0 \qquad \forall n > n_0$$

i.e.

$$c_1^2(X) - nc_1(X) \cdot c_1(N_{\mathcal{F}}) \geq 0 \qquad \forall n > n_0.$$

À la limite on obtient ainsi

$$c_1(X) \cdot c_1(N_{\mathcal{F}}) \leq 0$$

et les formules de Baum-Bott montrent enfin

$$\operatorname{Det}(\mathcal{F}) - \operatorname{Tr}(\mathcal{F}) \geq c_2(X) > 0. \quad \blacksquare$$

COROLLAIRE 1. – *Soit X une surface de type général et soit $\mathcal{F}$ un feuilletage régulier sur X, alors X est minimale.*

Preuve. – Conséquence des lemmes 8 et 5. ∎

Dans la suite on supposera donc que X est une surface minimale de type général et $\mathcal{F}$ un feuilletage régulier sur X.

Soit $\Gamma_+ \subset H^{1,1}(X, \mathbf{R})$ le cône convexe fermé engendré par les classes de Chern des diviseurs effectifs [Dem]. Le lemme suivant dit donc que $\mathcal{F}$ est « presque » engendré par une forme différentielle holomorphe.

LEMME 9.

$$c_1(N_{\mathcal{F}}^*) \in \Gamma_+.$$

Preuve. – Puisque $c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot c_1(X) = c_2(X) > 0$ et puisque $c_1(X)$ est semi-définie négative, on a $h^0(N_{\mathcal{F}}^n) = 0$ $\forall n > 0$ et le théorème de Riemann-Roch entraîne

$$h^0(K_X \otimes (N_{\mathcal{F}}^*)^n) \geq \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{n}{2} c_2(X) > 0 \qquad \forall n > 0.$$

Donc $K_X \otimes (N_{\mathcal{F}}^*)^n = \mathcal{O}(D_n)$, D_n effectif, et

$$c_1(N_{\mathcal{F}}^*) = \frac{1}{n}[D_n] + \frac{1}{n} c_1(X) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}[D_n]. \quad ∎$$

Remarque. – On pourrait aussi montrer une propriété légèrement plus forte, l'effectivité numérique de $c_1(N_{\mathcal{F}}^*)$: pour toute courbe C on a $c_1(N_{\mathcal{F}}^*) \cdot C \geq 0$ (indication : si $c_1(N_{\mathcal{F}}^*) \cdot C < 0$ on peut fixer $N > 0$ tel que $c_1^2((N_{\mathcal{F}}^*)^N \otimes \mathcal{O}(-C)) > 0$ et $c_1((N_{\mathcal{F}}^*)^N \otimes \mathcal{O}(-C)) \cdot c_1(X) < 0$, et on obtient que $h^0(((N_{\mathcal{F}}^*)^N \otimes \mathcal{O}(-C))^n)$ a une croissance quadratique en n, contrédisant l'estimation de Bogomolov). En particulier, d'après le lemme 2, X ne contient pas de sphère holomorphe et donc K_X est ample, *i.e.* $c_1(X)$ est définie négative [BPV, VII.2.2 et 3]. Le théorème de Yau [Ya] produit une métrique Kähler-Einstein sur X, par conséquent TX est K_X - semi-stable [Ko]. L'inégalité de semi-stabilité s'exprime, en terme de feuilletages, comme

$$c_1(T_{\mathcal{F}}) \cdot c_1(X) \geq \frac{1}{2} c_1^2(X)$$

i.e., en utilisant Baum-Bott,

$$\mathrm{Det}(\mathcal{F}) - Tr(\mathcal{F}) \geq c_2(X) - \frac{1}{2} c_1^2(X).$$

En particulier, si $\mathcal{F}$ est régulier on a encore une fois la non négativité de la signature : $c_1^2(X) \geq 2c_2(X)$. Les fibrations de Kodaira [BPV, V.14] fournissent des exemples où cette signature est strictement positive. Remarquons qu'il y a des surfaces complexes qui possèdent plusieures fibrations de Kodaira.

On va exploiter le résultat suivant de Demailly [Dem] : si L est un fibré linéaire (sur une variété compacte Kählerienne) avec $c_1(L) \in \Gamma_+$, alors il existe sur L une « métrique hermitienne singulière » avec courbure non négative. Plus exactement, dans une trivialisation locale de L, $L|_U \simeq U \times \mathbf{C}$, $U \subset X$, cette métrique est donnée par $\|\xi\| = e^{-F}|\xi|$, où $F : U \to [-\infty, +\infty)$ est plurisousharmonique (on remarquera que cette propriété de plurisousharmonicité ne dépend pas du choix de la trivialisation). Le courant fermé positif Ω localement défini par $\Omega = \frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}F$ représente alors $c_1(L)$. Une telle métrique existe évidemment pour les fibrés effectifs (*voir* [Dem, ex. 2.2]), le cas général s'obtient par une limite vague et on ne peut pas dire grande chose sur la régularité de cette limite.

Le fibré conormal $N^*_{\mathcal{F}}$ du feuilletage régulier $\mathcal{F}$ satisfait la condition $c_1(N^*_{\mathcal{F}}) \in \Gamma_+$, on obtient donc, par dualité, une métrique hermitienne singulière g sur $N_{\mathcal{F}}$ dont la courbure est non positive. La forme d'aire η associée à cette métrique peut être étendue en une 2-forme de type $(1,1)$ sur X (encore dénotée par η), grâce à la projection de TX sur $N_{\mathcal{F}}$. Si (z, w) sont des coordonnées locales telles que $\mathcal{F} = \{dz = 0\}$, alors

$$\eta = e^{2F(z,w)} dz \wedge d\bar{z}$$

où F est plurisousharmonique. Une telle 2-forme singulière définie un courant sur X, puisque les fonctions plurisousharmoniques sont supérieurement bornées sur les compacts. Elle définie aussi une mesure transverse à $\mathcal{F}$, et notre but est de montrer que cette mesure est invariante par holonomie [God]. C'est un argument proche de celui qui prouve que une 1-forme holomorphe sur une surface compacte est fermée [BPV, IV.2.1].

LEMME 10. – *La 2-forme η est invariante par l'holonomie de $\mathcal{F}$.*

Preuve. – En coordonnées locales (z, w) comme ci-dessus η s'écrit

$$\eta = e^{2F(z,w)} dz \wedge d\bar{z}, \qquad F \text{ psbh},$$

et il s'agit de montrer que F est constante le long des feuilles, *i.e.* ne dépend pas de w. Considérons le courant $i\partial\bar{\partial}\eta$. Localement :

$$i\partial\bar{\partial}\eta = i\frac{\partial^2}{\partial w \partial \bar{w}}(e^{2F(z,w)}) dw \wedge d\bar{w} \wedge dz \wedge d\bar{z}.$$

Puisque F est sousharmonique sur les feuilles, son exponentiel l'est aussi, donc $i\frac{\partial^2}{\partial w \partial \bar{w}}(e^{2F})$ est positif (au sens des distributions) et $i\partial\bar{\partial}\eta$ est une mesure positive. Mais la masse totale de cette mesure est évidemment nulle, donc $i\partial\bar{\partial}\eta$ doit être identiquement nulle, c'est-à-dire e^F est harmonique le long des feuilles. On termine avec la constatation suivante : les seules fonctions sousharmoniques avec exponentiel harmonique sont les constantes. ■

Évidemment, la métrique singulière g est aussi invariante par holonomie. Dans une coordonnée holomorphe transverse z cette métrique s'écrit

$$e^{F(z)}|z|, \qquad F \text{ sousharmonique}.$$

Dans le lemme 10 on a utilisé seulement la sousharmonicité de $F(z, w)$ le long des feuilles ; dans la prochaine section on utilisera la sousharmonicité transverse pour en déduire des propriétés de non dégénérescence.

7. Structure des feuilletages sur les surfaces de type général

Soient X de type général et $\mathcal{F}$ régulier.

Si la métrique invariante $g = e^{F(z)}|z|$ construite dans la section précédente était lisse, on pourrait utiliser directement la théorie des feuilletages riemanniens [God] pour compléter la classification. Cette théorie a été généralisée dans [Kel] au cas « uniformément quasi-isométrique », et on va alors montrer que notre feuilletage satisfait cette hypothèse. La difficulté est que g a des zéros, en correspondence avec les pôles de F, et on doit alors exploiter le fait que ces ensembles polaires sont négligéables [Ran].

On fixe, à coté de la métrique transverse singulière g, une métrique hermitienne lisse h sur X. Pour tout $x \in X$, soit $T(x,\delta)$ l'image par l'application exponentielle de h du disque fermé de rayon δ dans $(T_x\mathcal{F})^{\perp} \subset T_xX$. Pour δ assez petit (uniformément en x) $T(x,\delta)$ est un disque fermé plongé dans X et transverse à $\mathcal{F}$; on fixe un tel δ. Sur chacun de ces disques on a les deux métriques induites par g et h, dénotées par les mêmes lettres.

On peut supposer $g \leq h$, puisque les fonctions sousharmoniques sont supérieurement bornées sur les compacts. Donc si $\gamma \subset T(x,\delta)$ est une courbe de Jordan rectifiable on a

$$l_g(\gamma) \leq l_h(\gamma)$$

où l_g, l_h sont les longueurs par rapport à g, h.

Soit $U(x,\epsilon)$ le ϵ-voisinage de x dans $T(x,\delta)$ par rapport à g :
$U(x,\epsilon) = \{y \in T(x,\delta) | \exists$ une courbe rectifiable $\gamma \subset T(x,\delta)$ joignant x et y, telle que $l_g(\gamma) < \epsilon\}$,
et soit $V(x,\epsilon)$ l'objet analogue mais par rapport à h. Donc

$$V(x,\epsilon) \subset U(x,\epsilon).$$

LEMME 11. – *Pour $\epsilon > 0$ assez petit on a*

$$U(x,\epsilon) \cap \partial T(x,\delta) = \emptyset \qquad \forall x \in X.$$

Preuve. – Considérons la fonction $d : X \to [0,+\infty)$ donnée par
$d(x) = \mathrm{Inf}\{l_g(\gamma) | \gamma \subset T(x,\delta)$ courbe rectifiable joignant x et $\partial T(x,\delta)\}$.

C'est une fonction continue, puisque $g \leq h$, et il s'agit donc de montrer que $d(x) > 0$ pour tout $x \in X$. Soit z une coordonnée holomorphe sur $T(x,\delta)$; la métrique g s'écrit comme $e^{F(z)}|dz|$, avec F sousharmonique, et pour toute courbe rectifiable on a

$$l_g(\gamma) = \int_\gamma e^{F(z)} d\mathcal{H}(z)$$

où $\mathcal{H}$ désigne la mesure de Hausdorff de dimension 1. Les propriétés des ensembles polaires (les ensembles où une fonction sousharmonique prend la valeur $-\infty$, *voir* [Ran]) garantissent que $l_g(\gamma) > 0$: la mesure de Hausdorff 1-dim d'un ensemble polaire est nulle. Raisonnons par contraposée. S'il y a un point x où $d(x) = 0$, alors il existe une suite $\{\gamma_n\}$ de courbes rectifiable joignantes x à $\partial T(x,\delta)$ telle que

$$l_g(\gamma_n) \to 0.$$

Modulo sous-suites, cette suite γ_n converge, dans la topologie de Hausdorff, vers un compact connexe $K \subset T(x,\delta)$, avec $x \in K$ et $K \cap \partial T(x,\delta) \neq \emptyset$. Si a est un réel positif quelconque, la convergence vers 0 des $l_g(\gamma_n)$ entraîne

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{H}\{z \in \gamma_n | e^{F(z)} \geq a\} = 0$$

et on peut donc trouver des compacts $K_{n,a} \subset \gamma_n$ tels que : i) $e^{F(z)} \leq a \ \forall z \in K_{n,a}$, ii) $\lim_{n\to\infty}\mathcal{H}(K_{n,a}^c) = 0$. Soit $K_a = \cup_n K_{n,a}$. Le critère de Wiener [Ran] montre que K_a est épais (« non thin ») en tout $y \in K$ (grâce à ii)), donc

$$F(y) = \limsup_{z\to y, z\in K_a} F(z) \leq \log a.$$

L'arbitrarité de a prouve que $F = -\infty$ sur tout K, ce qui est impossible puisque K est un compact connexe nontrivial [Ran]. ■

Choisissons $\epsilon > 0$ comme dans le lemme précédent. Soit $c : [0,1] \to X$ un chemin dans une feuille et soit ϕ l'holonomie de $\mathcal{F}$ le long de c. Les voisinages $U(c(t),\epsilon)$ n'échappent pas des disques $T(c(t),\delta)$, et la métrique g est invariante par holonomie ; on en déduit que ϕ est définie sur tout $U(c(0),\epsilon)$ et

$$\phi(U(c(0),\epsilon)) = U(c(1),\epsilon).$$

En particulier, $\phi(V(c(0),\epsilon)) \subset T(c(1),\delta)$ et, d'après le lemme de Schwarz, on obtient que $|\phi'|$ (la norme de la dérivée de ϕ en $c(0)$, calculée avec la métrique h) est bornée par une constante A qui ne dépend pas de ϕ mais seulement de h, ϵ, δ (essentiellement, $A = \frac{\delta}{\epsilon}$).

Dans la terminologie de [Kel], on est arrivé à montrer que $\mathcal{F}$ est *uniformément quasi-isométrique*. Le théorème de [Kel] affirme que :

a) X est union disjointe de minimaux de $\mathcal{F}$

b) chaque minimal est soit une feuille compacte soit une sous- variété réelle (C^0) de dimension 3 soit X entière.

LEMME 12. – *On a l'alternative suivante : soit toutes les feuilles de $\mathcal{F}$ sont compactes, soit elles sont toutes denses.*

Preuve. – Il s'agit de montrer qu'il n'y a pas de feuilles dont l'adhérence est de dimension 3. Si une telle feuille existait on aurait, comme dans le cas riemannien [God], deux possibilités :

i) l'adhérence de chaque feuille est de dimension 3, et ces adhérences forment une fibration de X sur le cercle ; impossible, car $c_2(X) > 0$.

ii) il y a exactement deux feuilles compactes L_1, L_2, les autres feuilles ont des adhérences de dimension 3 qui forment une fibration de $X \setminus (L_1 \cup L_2)$ sur $(0,1)$ dont les bouts sont L_1 et L_2. Pour avoir $c_2(X) > 0$ les deux feuilles L_1 et L_2 doivent être des sphères, mais alors $\mathcal{F}$ serait une fibration rationnelle et X ne serait pas de type général. ■

Si toutes les feuilles de $\mathcal{F}$ sont compactes, il n'y a plus rien à dire : $\mathcal{F}$ est une fibration (avec, peut-être, des fibres multiples).

Si, au contraire, toutes les feuilles sont denses alors $\mathcal{F}$ est transversalement homogène [Kel] et son revêtement universel $\tilde{\mathcal{F}}$ est une fibration sur une surface de Riemann S simplement connexe [God]. Le groupe $\pi_1(X)$ agit sur $\tilde{X}$ préservant $\tilde{\mathcal{F}}$, et cette action se projecte sur S en une action minimale. Cette action préserve la métrique $\tilde{g}$ de S qui provient de la métrique transverse g, et donc elle doit préserver aussi la métrique « propre » de S (euclidienne si $S = \mathbf{C}$, hyperbolique si $S = \mathbf{D}$, elliptique si $S = \bar{\mathbf{C}}$). Le quotient entre ces deux métriques (hermitiennes) est alors une fonction semicontinue et invariante ; par densité des orbites, elle est constante et donc ces deux métriques coïncident (modulo une constante de proportionnalité). En particulier, $\tilde{g}$ est lisse. Rappelons que $\tilde{g}$ est du type $e^{F(z)}|dz|$, avec F sousharmonique ; en fait, F est strictement sousharmonique (*i.e.* elle n'est pas harmonique partout) sinon $c_1(N_{\mathcal{F}}^*)$ serait nulle, en contradiction avec $c_1(N_{\mathcal{F}}) \cdot c_1(X) = c_2(X) \neq 0$. La courbure de cette métrique a le même signe de $-\Delta F$, on doit donc avoir $S = \mathbf{D}$, c'est-à-dire $\mathcal{F}$ est *transversalement hyperbolique.*

Examinons maintenant la structure tangente de $\mathcal{F}$. Rappelons [God] que toute mesure transverse invariante μ permette l'intégration des formes différentielles le long des feuilles et définit donc un courant fermé et une classe de cohomologie $[\mu]$. On peut aussi définir la caractéristique d'Euler $\chi(\mu)$ d'une telle mesure [Can]. Le lemme suivant est la version feuilletée de la formule d'adjonction.

LEMME 13. – *Soit $\mathcal{G}$ un feuilletage régulier sur une surface complexe compacte X et soit μ une mesure transverse invariante. Alors*

$$c_1(X) \cdot [\mu] = \chi(\mu).$$

Preuve.– Choisissons une 2-forme fermée Ω telle que $c_1(N_{\mathcal{G}})_{\mathbf{R}} = [\Omega]$ et $\Omega|_{T\mathcal{G}} = 0$ (voir §2) ; on a donc $[\Omega] \cdot [\mu] = 0$. Soit Θ une 2-forme fermée telle que $c_1(T_{\mathcal{G}})_{\mathbf{R}} = [\Theta]$; on a donc $[\Theta] \cdot [\mu] = \chi(\mu)$, par définition de $\chi(\mu)$. Puisque $c_1(X) = c_1(N_{\mathcal{G}}) + c_1(T_{\mathcal{G}})$:

$$c_1(X) \cdot [\mu] = [\Theta] \cdot [\mu] + [\Omega] \cdot [\mu] = \chi(\mu). \quad \blacksquare$$

Revenons à $\mathcal{F}$. Puisque $\tilde{\mathcal{F}}$ est une fibration sur $\mathbf{D}$, et puisque aucune feuille de $\mathcal{F}$ n'est sphérique, la variété X ne contient pas de sphères holomorphes et en particulier K_X est ample. La classe $c_1(X) = -c_1(K_X)$ est alors représentée par une 2-forme de type $(1,1)$ et négative, en particulier négative sur les feuilles de $\mathcal{F}$. On déduit que

$$\chi(\mu) = c_1(X) \cdot [\mu] < 0$$

pour toute mesure transverse invariante μ. Le théorème de [Can] montre alors que toutes les feuilles de $\mathcal{F}$ sont hyperboliques, et donc les feuilles de $\tilde{\mathcal{F}}$ sont des disques.

Nous sommes ainsi arrivés à la suivante conclusion.

THÉORÈME 3. – *Soit X une surface de type général et soit $\mathcal{F}$ un feuilletage régulier. Alors soit $\mathcal{F}$ est une fibration soit $\mathcal{F}$ est un feuilletage transversalement hyperbolique et à feuilles denses, dont le revêtement universel est une fibration en disques sur le disque.*

Exemples de la deuxième situation s'obtiennent en quotientant le bidisque par certains sous-groupes discrets cocompacts de $\mathrm{Aut}(\mathbf{D} \times \mathbf{D}) = PSL(2, \mathbf{R}) \times PSL(2, \mathbf{R})$ (nous n'en connaissons pas d'autres). Dans un tel quotient on dispose de deux feuilletages réguliers $\mathcal{F}_h$ et $\mathcal{F}_v$, provenants des feuilletages horizontal et vertical. En utilisant la formule sur les tangences entre feuilletages on voit que $\mathcal{F}_h$ et $\mathcal{F}_v$ sont les seuls feuilletages réguliers sur une telle surface : un troisième feuilletage devrait être transverse à $\mathcal{F}_h$ et $\mathcal{F}_v$, donc X aurait son fibré tangent projectivisé trivial et alors [Ko] $c_1^2(X) = 4c_2(X)$, ce qui n'est pas vrai. Bien sûr, cela découle aussi de notre classification. Puisque le groupe d'automorphismes d'une courbe hyperbolique est fini, on voit aussi que $\mathcal{F}_v$ est une fibration si et seulement si $\mathcal{F}_h$ est une fibration ; donc sur ces surfaces on ne peut pas avoir une situation mixte, où coexistent feuilletages des deux types prévus par le théorème 3.

Si $\mathcal{F}$ est une fibration son revêtement universel est encore un fibré en disques sur le disque. Kodaira [BPV, V.14] a donné des exemples où ce fibré est non triviale. Il semble possible que sa construction puisse être adaptée au cas où toutes les feuilles sont denses, en prenant des revêtements ramifiés au dessus d'un feuilletage à feuilles denses uniformisé par le bidisque.

Remarque. – On a déjà noté dans la section précedente que l'inégalité de semi-stabilité implique $c_1^2(X) \geq 2c_2(X)$. Si on a l'égalité $c_1^2(X) = 2c_2(X)$, alors $\mathcal{F}$ est un feuilletage destabilisant [Ko] et le champ de droites complexes orthogonales à $T\mathcal{F}$ (par rapport à la métrique Kähler - Einstein) est holomorphe. On obtient ainsi un feuilletage holomorphe $\mathcal{G}$ transverse à $\mathcal{F}$, et on conclut aisement que X est uniformisée par le bidisque.

BIBLIOGRAPHIE

[BB] P. Baum et R. Bott, *On the zeroes of meromorphic vector fields*, (*Essais en l'honneur de G. De Rham*, 1970, p. 29-47)

[BPV] W. Barth, C. Peters et A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, Springer Ergebnisse 4, 1984.

[Can] A. Candel, *Uniformization of surface laminations*, (*Ann. Sci. E.N.S.*, vol. 26, 1993, p. 489-516).

[CS] C. Camacho et P. Sad, *Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields*, (*Ann. Math.*, vol. 115, 1988, p. 579-595).

[CLS] C. Camacho, A. Lins neto et P. Sad, *Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields*, (*Jour. Diff. Geom.* , vol. 20, 1984, p. 143-174).

[CM] D. Cerveau et J.-F. Mattei, *Formes intégrables holomorphes singulières*, Astérisque 97, 1982.

[Dem] J.-P. Demailly, *Singular hermitian metrics on positive line bundles*, (*Algebraic varieties*, Bayreuth 1990, Springer LN 1507, 1992).

[God] C. Godbillon, *Feuilletages, études géométriques*, Birkhauser PM 98, 1991.

[GH] P. Griffiths et J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, Wiley, 1978.

[Gh] É. Ghys, *Feuilletages holomorphes de codimension un sur les espaces homogènes*, prépubl. 1995.

[GM1] X. Gomez-Mont, *Universal families of foliations by curves*, Astérisque 150-151, 1987, p. 109-129.

[GM2] X. Gomez-Mont, *Holomorphic foliations in ruled surfaces*, *Trans. AMS 312*, 1989, p. 179-201.

[GSV] X. Gomez-Mont, J. Seade et A. Verjovsky, *The index of a holomorphic flow with an isolated singularity*, (*Math. Ann.*, vol. 291, 1991, p. 737-751).

[In] M. Inoue, *On surfaces of class VII_0*, (*Inv. Math.*, vol. 24, 1974, p. 269-310).

[Kel] M. Kellum, *Uniformly quasi isometric foliations*, (*Erg. Th. Dyn. Sys.*, vol. 13, 1993, p. 101-122).

[Ko] S. KOBAYASHI, *Differential geometry of complex vector bundles*, *Princeton Univ. Press*, 1987.

[Ran] T. RANSFORD, *Potential theory in the complex plane*, *Cambridge Univ. Press*, 1995.

[Sun] D. SUNDARARAMAN, *On holomorphic vector fields (maps) with singularities (fixed points) of Poincaré type*, Aport. Matem., vol. 1, 1985, p. 127-151.

[Su] T. SUWA, , *On ruled surfaces of genus 1*, (*J. Math. Soc. Japan,* vol. 21, 1969, p. 291-311).

[Ya] S. T. YAU, *Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry*, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, vol. 74, 1977, p. 1798-1799).

(Manuscrit reçu le 9 avril 1996 ;
révisé le 1er avril 1997.)

M. BRUNELLA,
CNRS UMR 5584,
Laboratoire de topologie
Université de Bourgogne,
BP 400, 21011 Dijon