MAX KAROUBI

Formes topologiques non commutatives

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 28, no 4 (1995), p. 477-492
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1995_4_28_4_477_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 28, 1995, p. 477 à 492.

FORMES TOPOLOGIQUES NON COMMUTATIVES

PAR MAX KAROUBI

ABSTRACT. – Let X be a simplicial complex with a base point $*$ and let $L(X)$ be the free abelian group generated by X with the relation $* = 0$. As it is well known (Dold-Thom), the homotopy groups of $L(X)$ are naturally the reduced homology groups of X. The purpose of this paper is to relate this classical result with the theory of noncommutative differential forms.

More precisely, we define here a noncommutative de Rham complex for an arbitrary CW-complex. Its elements are noncommutative differential forms with values in a commutative ring R which may be $\mathbf{Z}$ or $\mathbf{Z}/p$ for instance.

With such noncommutative differential forms, it is quite easy to develop the formalism of ordinary cohomology theory, including cup-products, Steenrod powers and analogs of Thomas-Pontrjagin powers. Although simplicial structures are implicit in the proofs, they may be avoided in the basic definitions, in contrast with the classical approach.

Soit X un complexe simplicial (1) avec un point base $*$. Le n-ième produit symétrique de X, noté $SP^n(X)$, est le quotient topologique de X^n par l'action naturelle du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. La limite inductive des $SP^n(X)$, inclus les uns dans les autres par adjonction du point base, est par définition le produit symétrique infini $SP^\infty(X)$: c'est un monoïde abélien topologique pour la loi induite par la juxtaposition des suites.

Le théorème classique de Dold et Thom [4] est le suivant : si X est connexe, les groupes d'homotopie $\pi_i(SP^\infty(X))$ sont naturellement isomorphes aux groupes d'homologie entière $H_i(X; \mathbf{Z})$ pour $i > 0$.

Le groupe symétrisé $L(X)$ de $SP^\infty(X)$ s'identifie algébriquement au $\mathbf{Z}$-module libre de base les points de $X - \{*\}$. Pour une topologie adéquate, le théorème de Dold-Thom est aussi valable pour $L(X)$: ses groupes d'homotopie sont isomorphes aux groupes d'homologie entière de X (cet isomorphisme étant même valable pour X non connexe). Il convient de noter que l'inclusion évidente de $X = SP^1(X)$ dans $L(X)$ induit l'homomorphisme de Hurewicz $\pi_i(X) \to \pi_i(L(X)) \approx H_i(X; \mathbf{Z})$.

En particulier, si X est la sphère S^n, $SP^\infty(S^n)$ et $L(S^n)$ sont des modèles de l'espace d'Eilenberg-Mac Lane $K(\mathbf{Z}, n)$. Par conséquent, pour tout CW-complexe M, les classes d'homotopie d'applications de M dans $L(S^n)$ ou $SP^\infty(S^n)$ sont en correspondance naturelle bijective avec les éléments du groupe de cohomologie $H^n(M; \mathbf{Z})$.

(1) Tous les complexes simpliciaux considérés ici sont dénombrables et localement finis (hypothèses de [4], p. 264).

Un des objectifs de cet article est de relier ces théorèmes au formalisme plus récent des « formes différentielles non commutatives » (*cf.* [2], [6]). Dans un prolongement topologique du travail commencé dans [7], nous définissons ici un « complexe de de Rham » pour un CW-complexe arbitraire. Ses éléments sont par définition les « formes topologiques non commutatives » : elles fournissent une description plus géométrique de la cohomologie à coefficients dans un groupe abélien R qui n'est plus restreint à $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Cette nouvelle présentation d'outils classiques de la topologie algébrique présente quelques avantages majeurs sur la présentation traditionnelle. Si R est un anneau commutatif, le cup-produit en cohomologie à coefficients dans R se décrit aussi simplement que dans le cas des formes différentielles sur les variétés. En outre, dans cette définition « à la de Rham », le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ opère de manière naturelle sur le R-module des cocycles (ou « formes topologiques fermées ») de degré n. Ceci permet de construire les opérations de Steenrod et de démontrer leurs propriétés essentielles sans formalisme excessif (*cf.* [8] et [9]). Cette action du groupe symétrique (en fait du groupe cyclique associé) permet de définir aussi très simplement des opérations cohomologiques analogues à celles de Thomas-Pontrjagin (*cf.* [12], [13] ou [1]). On trouvera une avant-présentation de ces opérations cohomologiques, mises au goût du jour, aux §4 et 5 de cet article.

Remerciements. – Je remercie Albrecht Dold et le referee pour des commentaires forts utiles.

Plan de l'article

1. Le théorème de Dold et Thom 478

2. Formes topologiques non commutatives (coefficients entiers) 481

3. Homologie et cohomologie à coefficients arbitraires 483

4. Cup-produit et opérations de Steenrod 486

5. Analogie avec les puissances de Thomas-Pontrjagin 488

Références 492

1. Le théorème de Dold et Thom [4]

1.1. Soit X un complexe simplicial avec un point base noté $*$. Le groupe $L(X)$, symétrisé du monoïde abélien $SP^\infty(X)$ (*cf.* l'introduction), s'identifie à la limite inductive des $SP^n(X \vee X)/\mathcal{R}$, où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence engendrée par les « simplifications » : la suite $(x_1, \dots, x_n)$ est identifiée à $(*, *, x_3, \dots, x_n)$ si $x_1 = \tau(x_2)$, τ étant la symétrie naturelle de $X \vee X$. En outre, l'élément $*$ est identifié à 0 dans le groupe $L(X)$. Muni de la topologie limite inductive, $L(X)$ est un groupe abélien topologique. Un élément essentiel du travail de Dold et Thom est le théorème suivant :

1.2. THÉORÈME ([4], satz 5.4). – *Supposons que X soit dénombrable et que Y soit un sous complexe de X contenant le point base. On a alors une fibration principale localement triviale*

$$L(Y) \to L(X) \to L(X/Y)$$

1.3. *Remarque*. – Si on munit X de la k-topologie (*i.e.* celle engendrée par les compacts [5]), le théorème est encore vrai sans hypothèse de dénombrabilité. En particulier, il s'applique à la réalisation géométrique du complexe singulier associé à tout espace topologique. Cette remarque est utilisée en 1.6 plus loin.

1.4. Soit $\tilde{C}_n(X) = C_n(X)/\mathbf{Z}$ le $\mathbf{Z}$-module libre formé des chaînes singulières réduites sur l'espace pointé X et soit $C_n^\natural(X)$ le $\mathbf{Z}$-module des applications continues de Δ_n dans $L(X)$, Δ_n étant le n-simplexe standard. A une chaîne singulière « formelle » $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_r f_r$ où $\lambda_i \in \mathbf{Z}$ et $f_i : \Delta_n \to X$, on peut associer l'application continue

$$f : \Delta_n \to L(X)$$

définie par $f(t) = \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) + \ldots + \lambda_r f_r(t)$, la somme étant maintenant calculée dans le $\mathbf{Z}$-module $L(X)$. Cette correspondance définit un morphisme de complexes

$$(\tilde{C}_*(X), d) \to (C_*^\natural(X), d^\natural),$$

où d et $d^\natural$ sont définis par la somme alternée des opérateurs face ∂_i usuels. Par ailleurs, puisque $C_*^\natural(X)$ est un groupe simplicial, le complexe $(C_*^\natural(X), d^\natural)$ est quasi-isomorphe au complexe normalisé associé $(\overline{C}_*^\natural(X), \overline{d}^\natural)$, où $\overline{C}_*^\natural(X)$ est l'intersection des noyaux des opérateurs face ∂_i pour $i > 0$ et où $\overline{d}^\natural$ est égal à ∂_0 (plus précisément, l'inclusion de $\overline{C}_*^\natural(X)$ dans $C_*^\natural(X)$ est un quasi-isomorphisme). L'homologie du complexe normalisé s'identifiant de manière évidente à $\pi_i(L(X))$, on a $H_i(C_*^\natural(X)) \approx \pi_i(L(X))$. En prenant l'homologie, on en déduit un homomorphisme canonique

$$\tilde{H}_i(X; \mathbf{Z}) \to \pi_i(L(X))$$

où $\tilde{H}_i(X; \mathbf{Z})$ désigne l'homologie réduite de l'espace pointé X.

1.5. Soit maintenant Y un sous-complexe de X. D'après les théorèmes généraux en homologie singulière, on a les fibrations homotopiques de groupes abéliens simpliciaux suivants :

$$\begin{array}{ccccc}
\tilde{C}_*(Y) & \to & \tilde{C}_*(X) & \to & \tilde{C}_*(X/Y) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
C_*^\natural(Y) & \to & C_*^\natural(X) & \to & C_*^\natural(X/Y)
\end{array}$$

En raisonnant par récurrence sur la dimension des cellules et en utilisant le lemme des cinq, on en déduit immédiatement que la flèche $\tilde{C}_*(X) \to C^\natural_*(X)$ est un quasi-isomorphisme ([2]). Donc $\tilde{H}_1(X; \mathbf{Z}) \approx H_i(C^\natural_*(X), d^\natural) \approx H_i(\overline{C}^\natural_*(X), \overline{d}^\natural) \approx \pi_i(L(X))$. En conclusion, nous obtenons ainsi une version légèrement plus précise du théorème de Dold et Thom :

1.6. PROPOSITION. – *Soit X un complexe simplicial pointé dénombrable (ou un complexe simplicial quelconque muni de la k-topologie). L'homomorphisme de complexes*

$$(\tilde{C}_*(X), d) \to (C^\natural_*(X), d^\natural)$$

défini plus haut induit alors un isomorphisme $\tilde{H}_i(X; \mathbf{Z}) \approx \pi_i(L(X))$ pour tout $i \geq 0$.

1.7. Cette proposition peut être énoncée sous une forme un peu différente en évitant toute référence explicite aux structures simpliciales, mais en utilisant des boules B^n et des sphères S^n. Convenons d'abord que $S^0 = B^0$ est réduit aux deux points $\{0, 1\}$ de $B^1 = [0, 1]$ et que $B^n = S^n = \varnothing$ pour $n < 0$. Pour $n > 0$, prenons comme modèle de S^n le produit « smash » (n facteurs $S^1 = B^1/S^0$)

$$S^n \approx S^1 \wedge S^1 \wedge \ldots \wedge S^1 \approx S^0 \wedge S^1 \wedge S^1 \wedge \ldots \wedge S^1$$

et comme modèle de B^{n+1} le produit smash

$$B^{n+1} \approx B^1 \wedge S^1 \wedge S^1 \wedge \ldots \wedge S^1$$

Avec ces définitions, on a une cofibration évidente pour $n \in \mathbf{Z}$:

$$S^n \to B^{n+1} \to S^{n+1}$$

Définissons maintenant $\check{C}_n(X)$ comme le $\mathbf{Z}$-module $\operatorname{Mor}(B^n, L(X))$ formé des applications continues pointées de la boule B^n dans $L(X)$. Les applications

$$B^n \to S^n \to B^{n+1}$$

définissent par composition un « opérateur bord » :

$$\partial_{n+1} : \check{C}_{n+1}(X) \to \check{C}_n(X),$$

On a $\partial_n \partial_{n+1} = 0$, car B^{n+1}/S^n s'identifie à S^{n+1}.

1.8. PROPOSITION. – *L'homologie du complexe $\check{C}_*(X)$ est naturellement isomorphe à l'homologie réduite de l'espace pointé X.*

Démonstration. – Écrivons les quasi-isomorphismes suivants :

$$\tilde{C}_*(X) \to C^\natural_*(X) \leftarrow \overline{C}^\natural_*(X) \to \check{C}_*(X)$$

La dernière flèche associe à $f : \Delta_n \to X$, nulle sur la réunion Δ_n^0 de n faces (toutes sauf une), l'application sur B^n correspondante (noter que Δ_n/Δ_n^0 est homéomorphe à

([2]) Il convient de noter par exemple que, pour $Y = S^0$, $X = B^1$ et donc $X/Y = S^1$, on a une fibration principale localement triviale $L(B^1) \to L(S^1)$ de fibre $\mathbf{Z}$. En particulier, $L(S^1)$ et $M(S^1)$ ont le type d'homotopie du cercle S^1.

B^n). Pour démontrer que cette flèche est un quasi-isomorphisme, il suffit d'expliciter l'homologie du complexe $\check{C}_*(X)$. Le noyau de $\partial_n : \check{C}_n(X) \to \check{C}_{n-1}(X)$ s'identifie à l'ensemble des applications continues pointées de la sphère S^n dans $L(X)$. L'image de $\partial_{n+1} : \check{C}_{n+1}(X) \to \check{C}_n(X)$ est le sous-ensemble formé des applications se prolongeant à B^{n+1}, c'est-à-dire homotopes à 0. Donc $H_n(\check{C}_*(X), \partial_*) \approx \pi_n(L(X)) \approx \tilde{H}_n(X; \mathbf{Z})$.

1.9. *Remarque.* – En remplaçant X par $X^+ = X \cup \infty$, les théorèmes précédents peuvent aussi s'écrire en homologie non réduite.

2. Formes topologiques non commutatives (coefficients entiers)

2.1. Nous nous proposons de définir un complexe Ω^*, dont les éléments sont les « formes topologiques non commutatives universelles » [3]. De manière précise, Ω^n est égal à $L(B^{n+1})$ pour $n \geq 0$ et est nul pour $n < 0$. La différentielle $d : \Omega^{n-1} \to \Omega^n$ est l'application composée évidente (*cf.* 1.7)

$$L(B^n) \to L(S^n) \to L(B^{n+1}),$$

soit encore

$$\Omega^{n-1} \to Z^n \to \Omega^n,$$

avec $Z^n = L(S^n)$.

2.2. THÉORÈME. – *Soit M un espace qui a le type d'homotopie d'un CW-complexe et soit $\Omega^n(M) = \mathrm{Mor}(M, \Omega^n)$, l'ensemble des applications continues de M dans Ω^n. La cohomologie du complexe $\Omega^*(M)$ est alors naturellement isomorphe à la cohomologie entière usuelle.*

Démonstration. – D'après 1.2 et [4], on a pour tout n une fibration localement triviale

$$Z^{n-1} \to \Omega^{n-1} \to Z^n$$

d'espace total contractile, avec $Z^1 \approx K(\mathbf{Z}, 1) \approx S^1$. Il en résulte immédiatement que Z^n a le type d'homotopie d'un $K(\mathbf{Z}, n)$. Par ailleurs, $Z^n(M) \approx \mathrm{Mor}(M, Z^n)$ et $B^n(M)$, sous-groupe des cobords de dimension n du complexe $\Omega^*(M)$, s'identifie à l'ensemble des applications de M dans Z^n qui se relèvent en des applications continues de M dans l'espace contractile Ω^{n-1}. Ainsi, la cohomologie en dimension n est isomorphe à l'ensemble des classes d'homotopie d'applications de M dans $Z^n \approx K(\mathbf{Z}, n)$. Cet isomorphisme est naturel car l'application $Z^n(M)/B^n(M) \to [M, Z^n] = [M, L(S^n)]$ est fonctorielle en M. Par ailleurs, définissons une application

$$\gamma : [M, Z^n] \to H^n(M, \mathbf{Z})$$

[3] Nous commençons par traiter le cas des coefficients entiers. Le cas général est étudié au paragraphe suivant.

en associant à $f : M \to Z^n \approx K(\mathbf{Z}, n)$ l'image réciproque de la classe fondamentale $\chi_n \in H^n(K(\mathbf{Z}, n); \mathbf{Z})$ par

$$f^* : H^n(K(\mathbf{Z}, n); \mathbf{Z}) \to H^n(M; \mathbf{Z})$$

La théorie de l'obstruction classique [5] montre que γ est un isomorphisme ([4]).

2.3. Nous allons montrer que ces dernières définitions sont en fait très proches de celles de [2] et [6] (l'anneau commutatif de base étant $\mathbf{Z}$). En particulier, $\Omega^*(M)$ peut être munie d'une structure d'algèbre différentielle graduée, ce qui permet de retrouver le caractère multiplicatif de la cohomologie entière par une méthode à la de Rham (*cf.* le §4 pour une étude plus complète). Les éléments de $\Omega^*(M)$ sont par définition les « formes topologiques non commutatives » mentionnées dans l'introduction.

Définissons tout d'abord un « $\mathbf{Z}$-module universel » A en posant $A = \Omega^0 = L(B^1)$, où $B^1 = [0, 1]$, $0 = *$ étant le point base (notations de 2.1). Le groupe abélien $L(S^1)$ s'identifie ainsi à $A/\mathbf{Z} = A/\mathbf{Z}.\{1\}$ ([1] étant considéré comme « élément unité » : voir plus loin). Par ailleurs, nous pouvons écrire les homéomorphismes suivants (*cf.* 1.7) :

$$S^n = S^1 \wedge S^1 \wedge \ldots \wedge S^1 \,(n \,\text{facteurs}\, S^1)$$

et

$$B^n = B^1 \wedge S^1 \wedge \ldots \wedge S^1 \,(n-1 \,\text{facteurs}\, S^1)$$

Nous en déduisons les identifications usuelles de $\mathbf{Z}$-modules (*cf.* [7] §1) :

$$Z^n = A/\mathbf{Z} \otimes A/\mathbf{Z} \otimes \ldots \otimes A/\mathbf{Z} \,(n \,\text{facteurs}\, A/\mathbf{Z})$$

et

$$\Omega^n = A \otimes A/\mathbf{Z} \otimes \ldots \otimes A/\mathbf{Z} \,(n-1 \,\text{facteurs}\, A/\mathbf{Z})$$

2.4. D'après une recette éprouvée (*cf.* [2] ou [6]), $\Omega^*(M) = \mathrm{Mor}(M, \Omega^*)$ peut être muni d'une structure d'anneau (non commutatif) si $A = L(B^1) = L([0, 1])$ est une $\mathbf{Z}$-algèbre unitaire topologique dont $\{1\}$ est l'élément unité. Une telle structure est induite par une application continue

$$m : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$$

telle que $m(u, 0) = m(0, u) = 0$ et $m(1, v) = m(v, 1) = v$ (la multiplication des nombres réels par exemple ; des choix différents de m produiront des structures isomorphes). Notons qu'on retrouve le produit des nombres sur $\mathbf{Z} \approx \mathbf{Z}\{1\} \approx \mathrm{Ker}(d : \Omega^0 \to \Omega^1)$. Cette structure sur $\Omega^*(M)$ induit bien le cup-produit usuel en cohomologie. En effet, $H^n(M; \mathbf{Z})$ est isomorphe à l'ensemble des classes d'homotopie d'applications de M dans $Z^n = L(S^n) = K(\mathbf{Z}, n)$; la multiplication sur $\mathbf{Z}$ et le produit tensoriel des formes topologiques non commutatives fermées à coefficients dans $\mathbf{Z}$ induit alors l'accouplement bien connu

$$K(\mathbf{Z}, n) \wedge K(\mathbf{Z}, p) \to K(\mathbf{Z}, n+p)$$

entre les espaces d'Eilenberg-Mac Lane correspondants.

([4]) Il convient de noter aussi que l'isomorphisme de suspension est le cup-produit avec le générateur de $H^1(S^1)$ (*cf.* 2.4).

3. Homologie et cohomologie à coefficients arbitraires

3.1. Pour un groupe abélien R quelconque, définissons l'homologie réduite de X à coefficients dans R comme celle du complexe suivant

$$\check{C}_*(X;\,R) = \check{C}_*(X) \otimes_{\mathbf{Z}} R,$$

où $\check{C}_*(X)$ est défini en 1.7. Puisque $\check{C}_*(X)$ a le type d'homotopie du complexe des chaînes singulières réduites de X, on retrouve bien l'homologie usuelle. De même, la cohomologie réduite à coefficients de X dans R est celle du complexe dual

$$\check{C}^*(X;\,R) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(\check{C}_*(X),\,R)$$

Si R est un corps, on a notamment $\check{C}^*(X;\,R) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{R}}(\check{C}_*(X;\,R);\,R)$.

3.2. Soit maintenant R un groupe abélien de type fini. Posons $L(X;\,R) = L(X) \otimes_{\mathbf{Z}} R$. Alors $L(X;\,R)$ est la somme directe de groupes topologiques du type $L(X)$ ou $L(X)/n$; il est muni de la topologie somme directe.

Si Y est un sous-complexe de X contenant le point base, on a la suite exacte

$$0 \to L(Y;\,R) \to L(X;\,R) \to L(X/Y;\,R) \to 0$$

car $L(X/Y)$ est un **Z**-module libre. La suite précédente se réduit en fait à une somme directe de suites exactes du type suivant :

$$0 \to L(Y) \to L(X) \to L(X/Y) \to 0$$

ou

$$0 \to L(Y)/n \to L(X)/n \to L(X/Y)/n \to 0.$$

Dans ces deux cas, on obtient des fibrations localement triviales ([4] satz 5.4 et 5.7), avec les hypothèses mentionnées en 1.2 et 1.6. En particulier, $L(S^n;\,R)$ est un modèle de l'espace d'Eilenberg-Mac Lane $K(R,\,n)$.

Plus généralement, si R est un groupe abélien dénombrable, il est limite inductive dénombrable de ses sous-groupes de type fini R_α et $L(X;\,R) = L(X) \otimes_{\mathbf{Z}} R$ peut être muni de la topologie limite inductive des $L(X;\,R_\alpha)$ (5). On a alors $\pi_i(L(X;\,R)) \approx H_i(X;\,R)$. Sauf risque de confusion, on notera souvent $L(X)$ (resp. $\check{C}_*(X)$, $\check{C}^*(X)$) au lieu de $L(X;\,R)$ (resp. $\check{C}_*(X;\,R)$, $\check{C}^*(X;\,R)$). Avec ces définitions, les considérations du §2 s'étendent sans problème en remplaçant **Z** par R.

3.3. Il est un peu plus délicat d'établir une relation directe entre la cohomologie des formes topologiques non commutatives à valeurs dans R (c'est-à-dire du complexe noté plus haut $\Omega^*(X)$) et celle du complexe dual $\check{C}^*(X)$ introduit en 3.1. Si R est un corps par exemple, le R-module des formes fermées $\omega \in Z^n(X)$ s'identifie à l'espace fonctionnel

(5) On a donc $\pi_i(L(X;\,R)) = \varinjlim \pi_i(L(X;\,R_\alpha)) = \varinjlim H_i(X : R_\alpha) = H_i(X;\,R)$. En particulier, si X est une sphère S^n, $L(X;\,R)$ est un espace d'Eilenberg-Mac Lane $K(R,\,n)$.

$\mathrm{Mor}(X, L(S^n))$ tandis que l'ensemble des cycles c de degré n du complexe $\overset{\vee}{C}_*(X)$, soit $Z_n(X)$, s'identifie à $\mathrm{Mor}(S^n, L(X))$. On établit ainsi une dualité entre $Z^n(X)$ et $Z_n(X)$ en considérant le degré de l'application composée $S^n \xrightarrow{c} L(X) \xrightarrow{L(\omega)} L(L(S^n))$. Si $f : Y \to X$ est une application continue, elle induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} Z^n(X) & \to & Z^n(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z_n(X)^\natural & \to & Z_n(Y)^\natural \end{array}$$

(où $^\natural$ désigne le dual sur R). Cet homomorphisme entre cycles et cocycles induit évidemment un homomorphisme entre la cohomologie de de Rham (nouvelle manière) et le dual de l'homologie (qui est une théorie de la cohomologie car R est un corps). Par un argument standard à la Mayer-Vietoris, on en déduit un homomorphisme explicite entre les deux définitions de la cohomologie (à la de Rham et sous la forme de cochaînes du type $\overset{\vee}{C}_*(X)$).

3.4. Dans le cas où R est un anneau commutatif dénombrable quelconque, considérons l'homomorphisme suivant (suggéré par le referee) :

$$\overset{\vee}{C}_p(X) \otimes \Omega^q(X) \to \mathrm{Mor}(B^p, L(B^{q+1}) \to \bigoplus_{r \le n} \mathrm{Mor}(B^r, L(B^{s+1}))$$

(avec $n > \mathrm{Sup}(p, q)$), où la première flèche s'obtient en composant

$$B^p \to L(X) \to L(L(B^{q+1})) \to L(B^{q+1})$$

L'homologie du bicomplexe $\bigoplus_{r \le n} \mathrm{Mor}(B^r, L(B^{s+1}))$ se calcule en remarquant que $\bigoplus_s \mathrm{Mor}(S^n, L(B^{s+1}))$ est un sous-complexe qui a la même cohomologie (celle de la sphère S^n, qu'on peut concentrer au point $\mathrm{Mor}(B^n, L(B^{n+1}))$. Pour plus de clarté, illustrons ce propos si $n = 2$. Voici alors le bicomplexe obtenu :

$$\begin{array}{ccccccc} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Mor}(S^2, L(B^3)) & \to & \mathrm{Mor}(B^2, L(B^3)) & \to & \mathrm{Mor}(B^1, L(B^3)) & \to & \mathrm{Mor}(B^0, L(B^3)) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Mor}(S^2, L(B^2)) & \to & \mathrm{Mor}(B^2, L(B^2)) & \to & \mathrm{Mor}(B^1, L(B^2)) & \to & \mathrm{Mor}(B^0, L(B^2)) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Mor}(S^2, L(B^1)) & \to & \mathrm{Mor}(B^2, L(B^1)) & \to & \mathrm{Mor}(B^1, L(B^1)) & \to & \mathrm{Mor}(B^0, L(B^1)) \end{array}$$

En général, il existe un homomorphisme de la cohomologie du complexe

$$D^t = \bigoplus_{\substack{q-p=t \\ p \le n}} \overset{\vee}{C}_p(X) \otimes \Omega^q(X) \qquad (t \text{ appartenant à } \mathbf{Z})$$

vers celle du complexe total C^t associé au bicomplexe précédent (privé de sa première colonne). Cette cohomologie est précisément isomorphe à R en degré $t = 0$. De toutes ces considérations, on déduit un morphisme

$$\Omega^q(X) \to \bigoplus_{\substack{p+t=q \\ p \leq n}} \operatorname{Mor}(\overset{\vee}{C}_p(X), C^t)$$

compatible avec les différentielles. Puisque la cohomologie de C^* est celle de R (concentré en degré 0), on en déduit l'isomorphisme entre les deux types de cohomologie (en choisissant $n > \operatorname{Sup}(p, q)$). En particulier, on a un accouplement (*)

$$H_q(X) \oplus H^q(X) \to R$$

où $H^*(X)$ désigne la cohomologie des formes topologiques non commutatives.

3.5. Par ailleurs, le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ opère sur la sphère S^n, vue comme compactifiée d'Alexandrof de $\mathbf{R}^n$ ou, ce qui revient au même, comme le produit « smash » $S^1 \wedge S^1 \wedge \ldots \wedge S^1$ (*cf.* 1.7). Il opère donc aussi sur l'espace d'Eilenberg-Mac Lane $K(R, n) = L(S^n; R)$. Le théorème suivant joue un rôle essentiel dans [8] :

3.6. THÉORÈME. – *Soit R un anneau commutatif dénombrable. L'action du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ sur le modèle d'espace d'Eilenberg-Mac Lane $K(R, n)$ défini ci-dessus est homotopiquement équivalente à celle induite par la signature des permutations.*

Démonstration. – Nous allons utiliser d'autres modèles de $K(R, n)$ décrits explicitement en [7] §2. L'un d'entre eux est la réalisation géométrique $\Lambda\overline{G}_n$ du R-module simplicial $s \mapsto Z^n_\Lambda(\overline{A}_s)$ avec les notations de [7] §2.11. Sur cette réalisation géométrique le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ opère via la signature. Nous pouvons aussi utiliser les modèles $\overline{G}_n$ et G_n, réalisations géométriques des R-modules simpliciaux $s \mapsto Z^n(\overline{A}_s)$ et $s \mapsto Z^n(A_s)$ respectivement avec les notations de [7] §2.

Représentons maintenant le générateur de $\pi_1(G_1)$ par une application continue $S^1 \to G_1$. Grâce au cup-produit des formes différentielles non commutatives introduit dans [7], on définit une application équivariante de $S^n = S^1 \wedge S^1 \wedge \ldots \wedge S^1$ dans G_n, donc de $L(S^n; R)$ dans G_n. On obtient ainsi des équivalences d'homotopie équivariantes de groupes abéliens topologiques

$$\Lambda\overline{G}_n \to \overline{G}_n \leftarrow G_n \leftarrow L(S^n; R),$$

ce qui démontre le théorème, puisque le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ opère sur $\Lambda\overline{G}_n$ via la signature des permutations.

3.7. *Remarques.* – L'hypothèse R dénombrable peut être levée si on remplace $L(S^n; R)$ par la réalisation géométrique du complexe singulier de la sphère S^n. Le théorème précédent est utilisé dans la démonstration du théorème 4.4 énoncé plus loin (*cf.* [8] et [9]).

(*) Celui-ci peut-être aussi défini grâce à la cohomologie bivariante (*cf.* [9], annexe A).

4. Cup-produit et opérations de Steenrod

4.1. Dans ce paragraphe, nous allons montrer que le cup-produit et les opérations de Steenrod en cohomologie s'introduisent naturellement dans notre contexte. On trouvera plus de détails dans [8] et [9] et nous nous limiterons ici aux aspects les plus simples de la théorie. Pour alléger les notations, nous écrirons de nouveau $L(T)$ au lieu de $L(T;\, R)$ en général, R étant un anneau commutatif dénombrable ([6]) quelconque donné de manière implicite.

On a un accouplement continue (déjà vu en 2.3 dans un cas particulier) :

$$L(X) \wedge L(Y) \to L(X \wedge Y)$$

Il est défini par la formule suivante :

$$(\sum \lambda_i\, x_i) \cup (\sum \mu_j\, y_j) = \sum \lambda_i\, \mu_j\, x_i \wedge y_j$$

En choisissant $X = S^m$ et $Y = S^n$, on en déduit un accouplement entre espaces d'Eilenberg-Mac Lane

$$K(R,\, m) \wedge K(R,\, n) \to K(R,\, m+n)$$

Pour tout CW-complexe M, le cup-produit

$$H^m(M) \oplus H^n(N) \to H^{m+n}(M \wedge N)$$

en cohomologie à coefficients dans R en résulte, les H^* étant identifiés aux R-modules formés des classes d'homotopie d'applications continues pointées dans les $K(R,\, q)$, pour $q = m,\, n$ ou $m+n$.

4.2. Pour définir les opérations de Steenrod avec le minimum de formalisme, introduisons le produit cyclique normalisé $CP_p^+(X)$ de X comme le quotient ([7]) de $X^{\wedge p}$, d'une part par l'action du groupe cyclique C_p permutant les facteurs et d'autre part par X en tant que diagonale dans $X^{\wedge p}$ (p étant un nombre premier). Comme plus haut, écrivons un élément typique de $L(X)$ sous la forme $x = \sum \lambda_i\, x_i$ avec $\lambda_i \in R$ et $x_i \in X$. Sa puissance p-ième (pour le cup-produit sur les espaces L) s'exprime sous la forme suivante

$$x^p = \sum_{(i_1,\dots,\, i_p)} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_p}\, x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_p}$$

où les $x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_p}$ appartiennent à $L(X^{\wedge p})$. Par définition, sa « puissance réduite » $\wp(x)$ est l'élément de $L(CP_p^+(X))$ défini formellement par l'expression $\wp(x) = x^p/p$. Plus précisément, elle est définie par la formule suivante :

$$\wp(X) = \sum_{\langle i_1,\, i_2,\dots,\, i_p\rangle} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_p}\, \varphi(x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \dots \wedge x_{i_p})$$

([6]) Cette hypothèse de dénombrabilité peut être levée si on se place dans un cadre simplicial (*cf.* 5.7 par exemple).

([7]) $X^{\wedge p}$ désigne le produit « smash » de p copies de X (quotient de X^p par le sous-espace formé des suites $(x_1,\, x_2, \dots,\, x_p)$ où un des x_i est le point base). Le produit smash a été déjà utilisé en 1.7, 2.3, etc.

où $\langle i_1, \ldots, i_p \rangle$ est la classe de $(i_1, \ldots, i_p)$ modulo l'action du groupe cyclique C_p et où $\varphi : X^{\wedge p} \to CP_p^+(X)$ est l'application quotient canonique (noter que si les x_{i_α} sont égaux, leur produit « smash » est réduit à 0 dans $CP_p^+(X)$).

4.3. Soit $EC_p \to BC_p$ le fibré universel sur BC_p de fibre C_p. Puisque le groupe C_p opère librement sur $X^{\wedge p} - X$, $CP_p^+(X)$ a le type d'homotopie du quotient des espaces de Borel associés à $X^{\wedge p}$ et à X respectivement (l'action de C_p sur X étant triviale). Ceci se traduit par une cofibration homotopique

$$BC_p \times X \to EC_p \times_{C_p} X^{\wedge p} \to CP_p^+(X),$$

De la suite de Puppe associée à cette cofibration, on déduit une application bien définie à homotopie près

$$CP_p^+(X) \to S^1 \wedge (BC_p \times X),$$

d'où un homomorphisme $L(CP_p^+(X)) \to L(S^1 \wedge (BC_p \times X))$. En le composant avec la puissance réduite $\wp : L(X) \to L(CP_p^+(X))$, on définit une application

$$L(X) \to L(S^1 \wedge (BC_p \times X))$$

Le foncteur π_n (pour $n > 1$) produit ainsi des opérations homologiques

$$H_n(X) \to H_n(S^1 \wedge (BC_p \times X)) \approx H_{n-1}(BC_p \times X),$$

les homologies étant prises à coefficients dans R, anneau commutatif dénombrable quelconque.

Supposons maintenant que R soit le corps $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. Grâce à la formule de Künneth, le deuxième groupe se décompose en la somme directe $\bigoplus_\alpha H_{n-\alpha}(X)$, une fois que les générateurs ([8]) de la cohomologie de BC_p sont choisis. Le théorème suivant est démontré dans [8] et [9] :

4.4. THÉORÈME. – *Les opérations homologiques $P_\alpha : H_n(X) \to H_{n-\alpha}(X)$ sont les opérations de Steenrod usuelles* [11]. *De manière plus précise, si $p = 2$, P_α est duale du carré de Steenrod Sq^α. Si p est impair et si α est pair, l'opération cohomologique duale $H^q(X) \to H^{q+2r}(X)$ (avec $n = q + 2r$ et $\alpha = 2r$) est nulle pour $r \neq i(p-1)$ et coïncide*

([8]) Soit $\pi = C_p$. Si p est impair, l'algèbre de cohomologie $H^*(B\pi)$ est le produit tensoriel d'une algèbre de polynômes $R[x]$ par une algèbre extérieure $\Lambda(y)$ avec $\deg(x) = 2$ et $\deg(y) = 1$. On a $\beta(y) = x$, où β désigne le Bockstein. Si on choisit $x_1 = y \in H^1(B\pi) = \mathrm{Hom}(\pi, \pi)$ égal à l'application identique de π, $x_{2n} = x^n$ et $x_{2n+1} = yx^n$, les générateurs x_r de $H^r(B\pi)$ sont bien déterminés. Si $p = 2$, l'algèbre de cohomologie $H^*(B\pi)$ est une algèbre de polynômes $R[y]$ avec y de degré 1 ; on choisit alors $x_r = (y)^r$.

avec l'opération de Steenrod P^i telle qu'elle est définie dans [11], *pour* $r = i(p-1)$ *à une normalisation près* ([9]).

4.5. *Remarque.* – On peut aussi définir directement les opérations cohomologiques duales des précédentes en choisissant pour X une sphère S^q et en décomposant $L(CP_p^+(X)) \approx SP^\infty(CP_p^+(X))/pSP^\infty(CP_p^+(X))$ en un produit d'espaces d'Eilenberg-Mac Lane. En effet, la puissance réduite définit dans ce cas une application de l'espace d'Eilenberg-Mac Lane $K(\mathbf{Z}/p,\, q) \approx SP^\infty(S^q)/pSP^\infty(S^q)$ dans le groupe abélien topologique quotient $SP^\infty(CP_p^+(S^q))/pSP^\infty(CP_p^+(S^q))$ qui s'écrit comme le produit ([10])

$$K(\mathbf{Z}/p,\, q+1) \times K(\mathbf{Z}/p,\, q+2) \times \ldots \times K(\mathbf{Z}/p,\, pq)$$

Les composantes de cette application sont essentiellement les puissances de Steenrod ou leurs composées par le Bockstein à une normalisation près (*cf.* [8], [9]).

5. Analogie avec les puissances de Thomas-Pontrjagin

5.1. Une opération cohomologique, introduite par Pontrjagin en 1942, puis généralisée par E. Thomas en 1956 [12] (*cf.* aussi [13] et [1]), est dans sa forme la plus simple une opération de la forme

$$\wp_p : H^{2m}(X;\, \mathbf{Z}/p^r) \to H^{2mp}(X;\, \mathbf{Z}/p^{r+1})$$

où p est un nombre premier impair ([11]), vérifiant des propriétés remarquables. Nous allons voir que les méthodes développées dans cet article permettent de définir de manière beaucoup plus simple des opérations analogues dans un contexte légèrement plus général. Nous espérons montrer dans un prochain travail que ces opérations coïncident bien avec celles de Thomas-Pontrjagin.

5.2. Commençons par rappeler la définition de l'homomorphisme de Bockstein dans notre contexte. Soit $\theta \in Z^r(X;\, \mathbf{Z}/n)$ une forme différentielle non commutative fermée de degré q et à coefficients dans le groupe abélien $\mathbf{Z}/n$. Soit p un nombre quelconque (divisant n et non nécessairement premier) et soit $\tilde{\theta} \in \Omega^r(X;\, \mathbf{Z}/np)$ une forme (non

([9]) Plus précisément, avec le choix précédent des générateurs de l'homologie du groupe C_p, l'opération cohomologique obtenue :

$$Q^i : H^q(X;\, \mathbf{Z}/p) \to H^{q+2i(p-1)}(X;\, \mathbf{Z}/p),$$

est l'opération P^i de Steenrod multipliée par le facteur de normalisation $(-1)^r(m!)^q$, où $m = (p-1)/2$ et $r = m.i + m.(q^2 - q)/2$ (*cf.* [8] §1.14, l'annexe de [9] et [10] p. 259, avec les « bonnes » conventions de signe).

([10]) Cette décomposition en produit dépend du choix d'une base de l'homologie de $CP_p^+(S^q)$, c'est-à-dire essentiellement de l'espace classifiant BC_p en degrés $\leq pq$: il est habituel de prendre la base duale de celle considérée dans la Note 8.

([11]) Si $p = 2$, on a aussi une opération cohomologique $H^q(X;\, \mathbf{Z}/2) \to H^{2q}(X;\, \mathbf{Z}/4)$ pour tout nombre q qui est celle définie au départ par Pontrjagin.

nécessairement fermée) à coefficients dans $\mathbf{Z}/np$ dont la classe dans $\mathbf{Z}/n$ est égale à θ. La suite exacte classique de complexes

$$0 \to \Omega^*(X;\, \mathbf{Z}/p) \to \Omega^*(X;\, \mathbf{Z}/np) \to \Omega^*(X;\, \mathbf{Z}/n) \to 0$$

permet de définir alors l'homomorphisme de Bockstein :

$$\beta_p \,:\, H^r(X;\, \mathbf{Z}/n) \to H^{r+1}(X;\, \mathbf{Z}/p)$$

au niveau des cocycles par la formule $\beta(\theta) = d\tilde{\theta}$ (le groupe $\mathbf{Z}/p \cong n\mathbf{Z}/np$ étant naturellement inclus dans $\mathbf{Z}/np$).

5.3. Appliquons ces considérations générales au cas où $r = pq$, $\theta = \omega^p$, ω étant une forme fermée de degré q. On peut évidemment choisir $\tilde{\theta} = \tilde{\omega}^p$, où $\tilde{\omega}$ est un élément de $\Omega^q(X;\, \mathbf{Z}/np)$ de classe ω dans $\Omega^q(X;\, \mathbf{Z}/n)$. Il s'en suit que $\mathrm{d}\tilde{\theta} = \mathrm{d}\tilde{\omega}.(\tilde{\omega})^{p-1} + (-1)^q\tilde{\omega}.\mathrm{d}\tilde{\omega}.(\tilde{\omega})^{p-2} + \ldots + (-1)^{q(p-1)}(\tilde{\omega})^{p-1}.\mathrm{d}\tilde{\omega}$ dans le groupe $\Omega^{pq}(X;\, \mathbf{Z}/p) \cong \Omega^{pq}(X;\, n\mathbf{Z}/np)$. Supposons maintenant que q soit pair ou que $p = 2$. Au niveau cohomologique, la formule précédente s'écrit de la manière familière $\beta_p(x^p) = p.x^{p-1}.\beta_p(x) = 0$. En raisonnant de manière universelle au niveau des espaces d'Eilenberg-Mac Lane, on en déduit l'existence d'une application de $H^q(X;\, \mathbf{Z}/n)$ dans $H^{pq}(X;\, \mathbf{Z}/np)$ telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} H^q(X;\, \mathbf{Z}/n) & \to & H^{pq}(X;\, \mathbf{Z}/np) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & H^{pq}(X;\, \mathbf{Z}/n) & \end{array}$$

5.4. Nous allons maintenant construire une telle application (analogue à celle de Thomas-Pontrjagin)

$$\wp_p \,:\, H^q(X;\, \mathbf{Z}/n) \to H^{pq}(X;\, \mathbf{Z}/np)$$

de manière plus canonique. Pour cela, considérons l'automorphisme des formes non commutatives

$$\kappa \,:\, \Omega^m(X) \to \Omega^m(X)$$

qui, au niveau algébrique, est défini par la formule suivante (*cf.* [6] et [3])

$$\kappa(a_0 da_1 \ldots da_{m-1} da_m) = (-1)^{m-1} da_m.a_0.da_1 \ldots da_{m-1}$$

Si ω_2 est une forme fermée de degré q et si ω_1 est une forme quelconque de degré r, on a la formule

$$\kappa^q(\omega_1\omega_2) = (-1)^{qr}\omega_2\omega_1$$

Par ailleurs, l'opérateur bord de Hochschild $b \,:\, \Omega^m(X) \to \Omega^{m-1}(X)$ est défini par la formule

$$b(a_0 da_1 \ldots da_{m-1} da_m) = (-1)^{m-1}[a_0.da_1 \ldots da_{m-1}.a_m - a_m.a_0.da_1 \ldots da_{m-1}]$$

Il peut être interprété comme une homotopie entre 1 et κ en raison de la formule

$$db + bd = 1 - \kappa$$

démontrée dans [6]. Celle-ci montre en particulier que κ commute avec b et d. Plus généralement, on posant $N_r = 1 + \kappa + \ldots + \kappa^{r-1}$ et $b_r = b.N_r = N_r.b$, on a évidemment $db_r + b_r d = 1 - \kappa^r$.

Ces définitions étant rappelées, la forme différentielles $d\tilde{\theta}$ ci-dessus peut s'écrire ([12])

$$\mathrm{d}\tilde{\theta} = \sum_{s=0}^{p-1} \kappa^{qs}\,(\mathrm{d}\tilde{\omega}.\omega^{p-1})$$

Puisque $0 = \sum_{s=0}^{p-1} \mathrm{d}\tilde{\omega}.\omega^{p-1}$, il en résulte l'identité

$$-\mathrm{d}\tilde{\theta} = \sum_{s=0}^{p-1} (db_{qs} + b_{qs}d)\,(\mathrm{d}\tilde{\omega}.\omega^{p-1}) = \sum_{s=0}^{p-1} db_{qs}\,(\mathrm{d}\tilde{\omega}.\omega^{p-1})$$

car $\mathrm{d}\tilde{\omega}.\omega^{p-1}$ est une forme fermée. Posons maintenant

$$\gamma_p\,(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega}^p + \sum_{s=0}^{p-1} b_{qs}\,(\mathrm{d}\tilde{\omega}.\omega^{p-1})$$

Alors $\gamma_p\,(\tilde{\omega}) \in Z^{pq}\,(X;\, \mathbf{Z}/np)$ et son image dans $Z^{pq}\,(X;\, \mathbf{Z}/p)$ est ω^p.

5.5. Théorème. – *Supposons q pair ou $p = 2$ et que p divise n. Alors la correspondance $\omega \mapsto \gamma_p\,(\tilde{\omega})$ induit une application naturelle*

$$\wp_p\ :\ H^q\,(X;\, \mathbf{Z}/n) \to H^{pq}\,(X;\, \mathbf{Z}/np)$$

telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} H^q\,(X;\, \mathbf{Z}/np) & \longrightarrow & H^{pq}\,(X;\, \mathbf{Z}/np) \\ \downarrow & \wp_p\nearrow & \downarrow \\ H^q\,(X;\, \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & H^{pq}\,(X;\, \mathbf{Z}/n) \end{array}$$

les flèches horizontales représentant les puissances p-ièmes et les flèches verticales la réduction mod. n. En outre, ce diagramme est « naturel » par rapport à tout morphisme $\mathbf{Z}/n \to \mathbf{Z}/m$ et au morphisme correspondant $\mathbf{Z}/np \to \mathbf{Z}/mp$.

Démonstration. – Si $\tilde{\omega}_0$ et $\tilde{\omega}_1$ sont deux relevés quelconques de ω, ils sont « homotopes », c'est-à-dire restrictions à $X \times \{0\}$ et à $X \times \{1\}$ respectivement d'une forme sur $X \times [0, 1]$. Par conséquent, $\gamma_p\,(\tilde{\omega}_0)$ et $\gamma_p\,(\tilde{\omega}_1)$ sont des cocycles homotopes et par suite cohomologues (invariance par homotopie de la cohomologie). L'application $\wp_p$ est ainsi bien définie. La commutativité du premier diagramme triangulaire résulte immédiatement des définitions. Pour démontrer la commutativité du second, considérons une forme $\tilde{\omega}$ telle que $\mathrm{d}\tilde{\omega} = 0$ (la classe de cohomologie de ω se remontant ainsi à $H^q\,(X;\, \mathbf{Z}/np)$). On a évidemment $\gamma_p\,(\tilde{\omega}) = \tilde{\omega}^p$, ce qui achève la démonstration du théorème.

([12]) Si $\tilde{\omega}_1 \in \Omega^*\,(X;\, \mathbf{Z}/np)$ et $\tilde{\omega}_2 \in \Omega^*\,(X;\, n\mathbf{Z}/np)$, leur cup-produit ne dépend que de la classe de $\tilde{\omega}_1$ modulo n car p divise n.

5.6. Examinons de plus près les ingrédients de la démonstration précédente. Le point important a été l'existence de l'opérateur $\tilde{b} = \sum_{s=0}^{p-1} b_{qs}$ qui réalise une homotopie entre $\tilde{\kappa} = \sum_{s=0}^{p-1} \kappa^{qs}$ et $\sum_{s=0}^{p-1} 1 = p$. Cette homotopie est décrite au niveau de l'algèbre des formes différentielles « universelles » Ω^*. Si $\tilde{b}'$ est une autre homotopie universelle et si on pose $c = \tilde{b} - \tilde{b}$, on aura $dc + cd = 0$. Ainsi, en changeant le signe de c suivant le degré, c définit un morphisme de Ω^* dans Ω^{*-1} compatible avec la différentielle. Puisque la cohomologie du complexe universel Ω^* est concentrée en degré 0, ceci implique l'existence d'un endomorphisme σ de degré –2 tel que $c = d\sigma - \sigma d$. Utilisons maintenant les mêmes notations pour le complexe $\Omega^*(X) = \mathrm{Mor}(X, \Omega^*)$ et posons $\delta_p(\omega) = \tilde{\omega}^p + \tilde{b}'(\mathrm{d}\tilde{\omega}.\omega^{p-1})$ avec les définitions de 5.4. On a alors l'égalité

$$\gamma_p(\omega) - \delta_p(\omega) = (d\sigma - \sigma d)(\mathrm{d}\tilde{\omega}.\omega^{p-1}) = d(\sigma(\mathrm{d}\tilde{\omega}.\omega^{p-1}))$$

qui est une forme exacte. Ainsi la définition de $\wp_p$ est indépendante du choix de $\tilde{b}$ dans le complexe universel.

5.7. On peut remarquer que la construction de ces opérations peut se faire aussi bien dans un contexte simplicial que dans un contexte topologique (comme d'ailleurs les opérations de Steenrod étudiées dans le paragraphe précédent) : il convient de remplacer le complexe universel topologique par l'analogue simplicial décrit en détail dans [7] et noté $\Omega^*(\overline{A})$. Pour comparer ces deux constructions, considérons le recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ du segment [0, 1] formé des ouverts [0, 1[et]0, 1]. Son nerf est l'ensemble simplicial évident $\{0, 1\}$; le groupe abélien simplicial libre de base $\{0, 1\}$ (avec la relation $\{0\} = 0$) s'identifie à l'anneau simplicial $\overline{A}$ (pour la structure d'anneau induite par la multiplication des nombres 0 et 1). En choisissant une partition de l'unité associée au recouvrement $\mathcal{U}$, on définit un homéomorphisme de sa réalisation géométrique $|\mathcal{U}|$ sur le segment [0, 1]. On voit ainsi que le complexe universel topologique a le type d'homotopie de la réalisation géométrique du complexe simplicial $\Omega^*(\overline{A})$, cette équivalence d'homotopie étant compatible avec les structures supplémentaires ([13]) définies par les endomorphismes b, κ, etc.

5.8. Enfin, dans le contexte simplicial, il existe un choix canonique du relevé $\tilde{\omega}$ de ω construit en 5.4 pour définir l'opération :

$$\wp_p : K(\mathbf{Z}/n, q) \to K(\mathbf{Z}/np, pq)$$

au niveau des espaces classifiants. Si $[s] = \{0, 1, \ldots, s\}$ désigne le simplexe standard de dimension s, le modèle simplicial de $K(\mathbf{Z}/n, q)$ est ici le $\mathbf{Z}/n$-module des fonctions $f(x_0, x_1, \ldots, x_q)$ sur $[s]^{q+1}$ à valeurs dans $\mathbf{Z}/n$ qui sont nulles si deux variables consécutives sont égales et qui sont « fermées » pour le cobord usuel.

L'application $\lambda \mapsto \lambda^p$ est bien définie de $\mathbf{Z}/n$ dans $\mathbf{Z}/np$ car p divise n, ce qui nous donne un relevé canonique $\tilde{\omega}$ de $f = \omega$ en tant que cochaîne à valeur dans $\mathbf{Z}/np$. La suite de la construction est en tout point semblable à celle décrite en détail dans 5.4.

([13]) Ce formalisme sera explicité dans un prochain travail.

RÉFÉRENCES

[1] R. COHEN, LADA et P. MAY, *The homology of iterated loop spaces* (*Springer Lectures Notes*, n° 533, 1976, p. 62-66).

[2] A. CONNES, *Non commutative differential geometry* (*Publ. Math. IHES*, n° 62, 1985, p. 257-360).

[3] J. CUNTZ et D. QUILLEN, *Operators on noncommutative differential forms and cyclic homology* (à paraître au *Journal of Differential Geometry*).

[4] A. DOLD et R. THOM, *Quasifaserungen und unendliche symmetrische produkte* (*Annals of Math*, vol. 67, n° 2, 1958, p. 239-281). Voir aussi : *Une généralisation de la notion d'espace fibré. Application aux produits symétriques infinis* (*C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 242, 1956, p. 1680-1682).

[5] B. GRAY, *Homotopy theory*, Academic Press, 1975.

[6] M. KAROUBI, *Homologie cyclique et K-théorie, Astérisque*, n° 149 (*Société Mathématique de France*, 1987).

[7] M. KAROUBI, *Formes différentielles non commutatives et cohomologie à coefficients arbitraires* (à paraître aux *Transactions of the American Math. Society*), Voir aussi *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* (t. 316, 1993, p. 833-836).

[8] M. KAROUBI, *Formes différentielles non commutatives et opérations de Steenrod* (à paraître dans *Topology*), Voir aussi *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* (t. 316, 1993, p. 917-920).

[9] M. KAROUBI, *Produit cyclique d'espaces et opérations de Steenrod*, à paraître (Birkhauser).

[10] J. E. MCCLURE, *Power operations in H_∞^d ring theories* (*Springer Lecture Notes*, n° 1176, 1986).

[11] N STEENROD et D. EPSTEIN, *Cohomology operations* (*Annals of Math. Studies*, Nr. 50, Princeton University Press, 1962).

[12] E. THOMAS, *The generalized Pontrjagin cohomology operations and rings with divided powers* (*Memoirs of the American Math. Society*, n° 27, 1957. Voir aussi la référence suivante).

[13] W. BROWDER et E. THOMAS, *Axioms for the generalized Pontrjagin cohomology operations* (*Quart J. Math. Oxford* (2), 13, 1962, p. 55-60).

(Manuscrit reçu le 25 février 1994;
révisé le 26 juin 1994.)