ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

P. LÉVY-BRUHL

J. NOURRIGAT

États cohérents, théorie spectrale et représentations de groupes nilpotents

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 27, nº 6 (1994), p. 707-757

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1994_4_27_6_707_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 27, 1994 p. 707 à 757.

ÉTATS COHÉRENTS, THÉORIE SPECTRALE ET REPRÉSENTATIONS DE GROUPES NILPOTENTS

PAR P. LÉVY-BRUHL ET J. NOURRIGAT

ABSTRACT. – We prove that the number $N(\lambda)$ of eigenvalues less than λ of the image under a unitary irreductible representation π of the sublaplacian Δ of a stratified nilpotent Lie algebra $\mathfrak{G}$ verifies, with a constant $C > 1$ depending only on $\mathfrak{G}$:

$$1/CN_0(\lambda/C) \leqq N(\lambda) \leqq CN_0(C\lambda)$$

where $N_0(\lambda) = \mu\{l \in o(\pi),\ |||l||| \leqq \lambda^2\}$, $o(\pi)$ being the Kirillov orbit of π, μ the canonical measure on the orbit, and $|||\cdot|||$ homogeneous norm.

We also obtain an "approximate diagonalization" of the image under π of an homogeneous operator on $\mathfrak{G}$, and use it to give a proof of conjectures, formulated in the book of Helffer and Nourrigat, about limit sets of representations.

The tools in the proof are the Wick calculus, and a construction of coherent states associates with the representation π.

0. Introduction

Les travaux de A. Melin [15] et D. Manchon [13] associent, à toute représentation π d'un groupe nilpotent, un calcul pseudo-différentiel qui fournit l'inverse approché [15], ou les projecteurs spectraux approchés [14], de l'image par π de certains opérateurs invariants sur le groupe. Une catégorie d'opérateurs reste cependant exclue de ces calculs : il s'agit de l'image d'un opérateur homogène P, invariant à gauche, tel que $\pi(P)$ vérifie une « estimation L^2 maximale » sans que P lui-même soit hypoelliptique sur le groupe. Comme le montrent les articles [20] et [21], ces opérateurs servent pourtant dans la preuve d'estimations sous-elliptiques, et il semble donc utile de construire un calcul qui leur soit applicable.

A défaut de pouvoir utiliser facilement un calcul pseudo-differentiel, nous proposons, pour l'étude des opérateurs $\pi(P)$ évoqués ci-dessus, d'adapter le classique « calcul de Wick ».

Dans le cas du groupe commutatif $G = \mathbb{R}^n$, notons $Y_1, \cdots, Y_n$ une base de son algèbre de Lie $\mathcal{G}$ et, pour tout $\lambda > 0$, considérons la représentation π_λ de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ définit par :

$$\pi_\lambda(Y_j) = \lambda^{-1}\frac{\partial}{\partial x_j} \qquad (1 \leqq j \leqq n). \tag{0.1}$$

Le calcul de Wick est très classique dans ce cas. On choisit une fonction $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dont la norme L^2 est égale, par exemple, à $(2\pi)^{-n/2}$, et on pose, pour tout $(y, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}$:

$$\psi_{y\eta\lambda}(x) = \lambda^{n/2}\, e^{i(x-y)\cdot\eta}\, \psi(\lambda(x-y)). \tag{0.2}$$

Pour simplifier, posons $z = (x, \xi)$, $w = (y, \eta)$, et $dz = dx\,d\xi$. Pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $\lambda > 0$, on peut écrire, au sens faible :

$$f = \int_{\mathbb{R}^{2n}} (f, \psi_{z\lambda})\, \psi_{z\lambda}\, dz \qquad et \qquad \|f\|^2 = \int_{\mathbb{R}^{2n}} |(f, \psi_{z\lambda})|^2\, dz. \tag{0.3}$$

L'inégalité suivante joue un rôle essentiel : il existe $M > 0$, indépendant de $z \in \mathbb{R}^{2n}$ et de $\lambda > 0$, tel que :

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} |(\psi_{z\lambda}, \psi_{w\lambda})|\, dw \leqq M, \qquad \forall\, z \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \forall\, \lambda > 0. \tag{0.4}$$

Grâce à (0.3), on voit que, si $a(z, \lambda)$ est une fonction mesurable, bornée sur $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}_+$, l'opérateur A_λ défini par :

$$A_\lambda f = \int_{\mathbb{R}^{2n}} a(z, \lambda)(f, \psi_{z\lambda})\, \psi_{z\lambda}\, dz$$

est uniformément borné dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. La fonction $a(z, \lambda)$ est appelée le « symbole d'anti-Wick » de l'opérateur A_λ, les fonctions $\psi_{z\lambda}$ sont des « paquets d'ondes » [2], ou des « états cohérents » et, pour certains choix particuliers de la fonction ψ, la fonction $T f(z, \lambda) = (f, \psi_{z\lambda})$ est liée à la transformée de Bargmann, ou de Fourier-Bros-Iagolnitzer [25], de f.

La construction d'états cohérents vérifiant (0.3) et obtenus, à partir d'une seule fonction ψ, par une famille d'opérateurs unitaires liés à la représentation étudiée, a été étendue à de nombreuses situations par Perelomov [23], Unterberger (*cf.* par exemple [26]), et Ali-Antoine-Gazeau [1]. Signalons que la notion d'« états cohérents » diffère de celle des ondelettes, adaptée au cas des groupes nilpotents par Lemarié [9].

Dans la section 1, nous montrons que l'existence d'une famille d'éléments (ψ_z) dans un espace de Hilbert H, dépendant de manière mesurable d'un paramètre z dans un espace mesuré Z, tels que la norme de ψ_z soit une constante $K > 0$ et tels qu'on ait, pour tout $f \in H$, les égalités (0.3), peut avoir des conséquences en théorie spectrale. En effet, si un opérateur autoadjoint positif P de domaine $D(P) \subset H$ vérifie les inégalités suivantes, pour tout $f \in D(P)$:

$$\int_z s(z)\, |(f, \psi_z)|^2\, d(z) \leqq (Pf, f) + \lambda \|f\|^2. \tag{0.5}$$

$$(Pf, f) \leqq \int_Z S(z) |(f, \psi_z)|^2\, d(z). \tag{0.6}$$

[où $s(z)$ et $S(z)$ sont des fonctions positives mesurables sur Z], et si $S(z)$ est une « fonction poids » au sens suivant :

$$\int_Z \left(\frac{\sup (S(z),\ S(w))}{\inf (S(z),\ S(w))} \right)^{1/2} |(\psi_z,\ \psi_w)|\, d(w) \leqq A, \qquad \forall\, z \in Z \tag{0.7}$$

(où A est une constante), alors le nombre $N(\lambda)$ de valeurs propres de P, répétées selon leur multiplicité, qui sont inférieures à λ, est encadré par la « formule de Weyl » suivante :

$$N(\lambda) \leqq 2\, K^2 \operatorname{mes}\{\, z \in Z,\ s(z) \leqq 4\, \lambda \,\} \tag{0.8}$$

$$N(\lambda) \geqq \frac{K^2}{2} \operatorname{mes}\{\, z \in Z,\ S(z) \leqq c(A,\ K)\, \lambda \,\} \tag{0.9}$$

[où $c(A,\ K)$ est une constante qui ne dépend que de A et K]. On trouvera dans la section 1 un énoncé précis, où l'hypothèse (0.7) est affaiblie. La preuve repose sur la construction, à l'aide du calcul de Wick, de projecteurs spectraux approchés.

Dans la section 2, nous construisons les états cohérents analogues à (0.2) lorsque, au lieu de π_λ définie en (0.1), on est en présence d'une représentation π d'un groupe nilpotent, induite à partir d'une représentation scalaire d'un sous-groupe. Dans les sections 3 à 6, nous établissons des inégatlités analogues à (0.4), (0.5), (0.6) et (0.7). On en déduit dans la section 7 un encadrement du $N(\lambda)$ pour l'image par π du sous-Laplacien de Kohn, lorsque π est irréductible (l'énoncé précis, et les hypothèses sur $\mathcal{G}$, seront rappelées au § 7). Ce résultat, annoncé dans [10] et [11], a été démontré par une méthode plus technique avec A. Mohamed [12].

Dans les sections 8 à 12, on utilise le calcul de Wick pour prouver une propriété qui, dans le cas d'une algèbre de Lie commutative $\mathcal{G}$ de dimension n, signifie simplement que les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas commutatif, pour toute forme linéaire $l \in \mathcal{G}^*$, notons π_l la représentation unitaire irréductible du groupe $\exp \mathcal{G}$ telle que :

$$\pi_l(X) = il(X), \qquad \forall\, X \in \mathcal{G}. \tag{0.10}$$

La continuité des applications polynomiales signifie que, pour tout élément P dans l'algèbre enveloppante universelle $\mathcal{U}(\mathcal{G})$, l'application $l \to \pi_l(P)$ est continue. (Comme d'habitude, on note de la même manière une représentation du groupe et de son algèbre de Lie.) En particulier, si P est réel, homogène de degré $2m$, et si $(l_\nu)\,(\nu \in \mathbb{N})$ est une suite dans $\mathcal{G}^* \backslash \{\, 0 \,\}$ telle que $\dfrac{l_\nu}{|l_\nu|}$ tend vers une limite $l \in \mathcal{G}^*$, alors $\pi_l(P) \geqq 0$ si, et seulement s'il existe une suite (ε_ν) telle que :

$$\pi_{l_\nu}(P) + \varepsilon_\nu |l_\nu|^{2m} \geqq 0 \qquad et \qquad \varepsilon_\nu \to 0.$$

L'extension au cas d'une algèbre de Lie nilpotente $\mathcal{G}$ va sembler maintenant naturelle. Auparavant, précisons la terminologie et les notations employées dans tout ce travail.

Pour toute forme linéaire $l \in \mathcal{G}^*$, notons π_l la représentation unitaire irréductible du groupe $\exp\, \mathcal{G}$ que la théorie de Kirillov [8] associe à l. Rappelons que π_l est réalisée dans

$L^2(\mathbb{R}^{k(l)})$, où $k(l)$ est un entier dépendant de l. On dit que $\mathcal{G}$ est « graduée » si elle admet une décomposition en somme directe de sous-espaces $\mathcal{G}_j$ $(1 \leqq j \leqq r)$ tels que

$$[\mathcal{G}_j, \mathcal{G}_k] \subset \mathcal{G}_{j+k} \tag{0.11}$$

(en convenant que $\mathcal{G}_{j+k} = 0$ si $j + k > r$). Pour tout $t > 0$, on note δ_t l'unique application linéaire de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}$ telle que $\delta_j X = t^j X$ si $X \in \mathcal{G}_j$ $(1 \leqq j \leqq r)$. On dit que $\mathcal{G}$ est « stratifiée » si elle est graduée et engendrée, comme algèbre de Lie, par le sous-espace $\mathcal{G}_1$. On note $(g, l) \to g \cdot l$ $(g \in \exp \mathcal{G}, l \in \mathcal{G}^*)$ l'action coadjointe de $\exp \mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}^*$. On définit une relation d'équivalence $\sim$ dans $\mathcal{G}^*$ en écrivant $l \sim l'$ s'il existe $g \in \exp \mathcal{G}$ et $t > 0$ tels que $l' = \delta_t^* g \cdot l$

$$l \sim l' \quad \Leftrightarrow \quad l' = \delta_t^* g \cdot l. \tag{0.12}$$

Comme dans [7], on appelle « ensemble limite » d'une suite (l_ν) $(\nu \in \mathbb{N})$, et on note $\mathcal{L}$, l'ensemble des formes linéaires $l \in \mathcal{G}^*$ qui sont valeur d'adhérence d'une suite équivalente à (l_ν). On note $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ l'espace des éléments $P \in \mathcal{U}(\mathcal{G})$ tels que $\delta_t P = t^m P$, et on note (A_{jm}) une base de $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$.

La continuité des applications polynomiales est généralisée, dans le cas nilpotent, par le théorème suivant (prouvé dans la section 12).

THÉORÈME 1. – *On suppose $\mathcal{G}$ stratifiée. Soit P un élément de $\mathcal{U}_{2m}(\mathcal{G})$, formellement autoadjoint. Soient (l_ν) une suite dans $\mathcal{G}^*$, et $\mathcal{L}$ l'ensemble limite associé. Alors, il y a équivalence entre :*

1. *On a $(\pi_l(P) f, f) \geqq 0$ pour tout $l \in \mathcal{L}$ et pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{k(l)})$.*
2. *Il existe une suite (ε_ν) tendant vers 0, telle que :*

$$0 \leqq (\pi_{l_\nu}(P) f, f) + \varepsilon_\nu \sum_j \|\pi_{l_\nu}(A_{jm}) f\|^2$$

pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, et pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{k(l_\nu)})$.

Ce théorème contient celui de [19] lorsque $\mathcal{G}$ est stratifiée, et aurait pu se prouver avec les techniques de [19], mais la méthode présentée ici apporte une simplification certaine. On utilise le calcul de Wick pour construire une « diagonalisation approchée » des opérateurs $\pi(P)$ (*cf.* section 11). Cet objet est défini, dans un cadre beaucoup plus général, par Fefferman et Phong (*cf.* [3]), mais sans indication précise sur sa construction. Le théorème 1 admet le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2. – *Soit F un sous-ensemble fermé dans $\mathcal{G}^*$, stable par la relation d'équivalence définie en* (0.12). *Soit P un élément formellement autoadjoint de $\mathcal{U}_{2m}(\mathcal{G})$ $(m \geqq 1)$. On suppose que, pour tout $l \in F \backslash \{0\}$, il existe une constante $c(l)$ strictement positive telle que :*

$$(\pi_l(P) f, f) \geqq c(l) \sum_j \|\pi_l(A_{jm}) f\|^2, \qquad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{k(l)}).$$

Alors la constante $c(l) > 0$ peut être choisie indépendante de $l \in F$.

En effet, les hypothèses du corollaire entraînent que $c(\cdot)$ est constante sur les classes d'équivalence de la relation (0.12), que, si (l_ν) est une suite dans F, l'ensemble limite $\mathcal{L}$ associé est inclus dans F, et le théorème 1 montre qu'on a :

$$\limsup_{\nu \to \infty} c(l_\nu)^{-1} = \sup_{l \in \mathcal{L}} c(l)^{-1}.$$

Il est prouvé dans le livre [7] avec B. Helffer (p. 172-176) qu'alors la fonction $c(l)^{-1}$ est bornée sur F. Dans ce livre, des énoncés proches du théorème 1 et du corollaire 2 étaient conjecturés.

Nous remercions A. Unterberger pour d'utiles discussions.

1. États cohérents et théorie spectrale

Dans ce paragraphe H désigne un espace de Hilbert séparable, muni d'une famille ψ_z d'états cohérents : z appartient à un espace Z muni d'une mesure positive dz, et par définition il existe $K > 0$ tel que pour tout f de H :

$$\|\psi_z\| = K, \quad z \to \psi_z \text{ est mesurable de } Z \text{ dans } H \tag{1.1}$$

$$f = \int (f, \psi_z)\, \psi_z\, d(z) \text{ au sens faible.} \tag{1.2}$$

D'autre part P est un opérateur auto-adjoint positif dans H de domaine $D(P)$, à résolvante compacte. Soit $\mathcal{C}$ un « core » de P. [$\{f, P(f)\}$ est dense dans le graphe de P].

On suppose que pour tout z, ψ_z appartient à $D(P)$.

On peut alors obtenir un encadrement du nombre $N(\lambda)$ de valeurs propres de P inférieures à λ.

THÉORÈME 1.1. – *On suppose qu'il existe une fonction mesurable de* z, $s(z) \geqq 0$, *telle que :*

Pour tout $r > 0$, $\operatorname{mes}\{z \in Z,\ s(z) \leqq r\}$ *est finie*

$$\int s(z)|(f, \psi_z)|^2 d(z) \leqq (Pf, f) + \lambda \|f\|^2, \quad \textit{pour tout } f \textit{ de } \mathcal{C}. \tag{1.3}$$

Alors

$$N(\lambda) \leqq 2K^2 \operatorname{mes}\{z \in Z,\ s(z) \leqq 4\lambda\}. \tag{1.4}$$

S'il existe de plus une fonction mesurable $S(z) > 0$, *telle que :*

(1.5) *Pour tout* $r > 0$, $\operatorname{mes}\{z \in Z,\ S(z) \leqq r\} < \infty$, *et* $\|P\psi_z\|$ *est borné sur cet ensemble.*

(1.6) $$(Pf,\, f) \leqq \int S(z) |(f,\, \psi_z)|^2 \, d(z) \quad \textit{pour tout } f \textit{ de } D(P).$$

(1.7) $\exists\, \alpha \geqq 0$, $\exists\, C > 0$, *avec :* $\displaystyle\int (R(z,\, w))^{\alpha+\frac{1}{2}} |(\psi_z,\, \psi_w)| \, d(w) \leqq C\left(\frac{S(z)}{\lambda}\right)^{\alpha}$, *où* $R(z,\, w) = (\sup(S(z),\, S(w))/\inf(S(z),\, S(w))$.

Alors, pour tout r positif, il existe R positif, ne dépendant que de K, α et C tel que :

(1.8) $$N(R\lambda) \geqq K^2/2 \operatorname{mes}\{ z \in Z,\, S(z) \leqq r\lambda \}.$$

Dans les applications, on fera en sorte que (1.7) et (1.8) fournissent des inégalités comparables. On sera aussi à construire s et S dépendant du réel λ.

La démonstration du théorème 1.1 utilise deux lemmes abstraits inspirés des projecteurs spectraux approchés introduits par Shubin (24).

LEMME 1.2. – *S'il existe une famille d'opérateurs auto-adjoints B_λ positifs traçables de H tels que :*

(1.9) $$P + 4\lambda B_\lambda \geqq 3\lambda \operatorname{Id}.$$

Alors on a :

(1.10) $$N(\lambda) \leqq 2 \operatorname{tr} B_\lambda.$$

Démonstration. – Soit ϕ_j une base orthonormée de fonctions propres de B_λ, de valeurs propres associées α_j. Soit E_λ le sous-espace fermé engendré par les ϕ_j avec $\alpha_j \geqq 1/2$, et F_λ l'orthogonal de E_λ. On a : $\operatorname{codim} F_\lambda = \dim E_\lambda \leqq 2 \operatorname{tr} B_\lambda$. Pour f dans F_λ, on a $(B_\lambda f,\, f) \leqq 1/2 \|f\|^2$, donc pour f dans $F_\lambda \cap D(P)$:

$$3\lambda \|f\|^2 \leqq (Pf,\, f) + 4\lambda (B_\lambda f,\, f) \leqq (Pf,\, f) + 2\lambda \|f\|^2, \text{ soit } (Pf,\, f) \geqq \lambda \|f\|^2.$$

D'après le principe du minimax on a donc : $N(\lambda) \leqq \operatorname{codim} F_\lambda$.

Application à la majoration de $N(\lambda)$. – Soit $\omega_\lambda = \{ z \in Z,\, s(z) \leqq 4\lambda \}$. On définit l'opérateur B_λ par l'égalité, au sens faible :

$$B_\lambda f = \int_{\omega_\lambda} (f,\, \psi_z)\, \psi_z \, d(z).$$

L'opérateur ainsi défini est auto-adjoint, positif, traçable d'après le lemme suivant :

LEMME 1.3. – *Soit Q_s une famille d'opérateurs traçables d'un espace de Hilbert séparable, dépendant mesurablement d'un paramètre s appartenant à un espace mesuré dont la mesure est notée ds. On note $\|\ \|_1$ la norme trace. Si l'intégrale $\int \|Q_s\|_1 \, ds$ converge, alors $\int Q_s \, ds$ défini au sens faible, est traçable et : $\operatorname{tr} \int Q_s \, ds = \int \operatorname{tr} Q_s \, ds$.*

Alors $\operatorname{tr} B_\lambda$ vérifie :

$$\operatorname{tr} B_\lambda = K^2 \operatorname{mes}\{ z \in Z,\ s(z) \leqq 4\lambda \}. \tag{1.11}$$

De plus $4\lambda((\mathrm{Id} - B_\lambda) f,\ f) = 4\lambda \int_{\omega_\lambda^c} |(f,\ \psi_z)|^2\, d(z) \leqq \int s(z) |(f,\ \psi_z)|^2\, d(z)$

L'inégalité (1.9) se déduit alors de (1.3), et (1.4) résulte de (1.10).

LEMME 1.4. – *S'il existe une famille d'opérateurs auto-adjoints B'_λ positifs traçables,* $0 \leqq B'_\lambda \leqq \mathrm{Id}$, *tels que pour un certain $C > 0$ et tout f de $\mathcal{C}$:*

(1.12) *$D(P)$ contient l'image de B'_λ, et $(PB'_\lambda f,\ B'_\lambda f) \leqq C\lambda \|f\|^2$.*

et une famille d'opérateurs auto-adjoints positifs traçables $0 \leqq A_\lambda \leqq \mathrm{Id}$, *avec :*

$$3 \operatorname{tr} A_\lambda \leqq 4 \operatorname{tr}(B'_\lambda A_\lambda B'_\lambda). \tag{1.13}$$

Alors :

$$\operatorname{tr} A_\lambda \leqq 2N(4C\lambda). \tag{1.14}$$

Démonstration. – E_λ et F_λ, ϕ_j et α_j sont définis pour B'_λ comme pour B_λ au lemme (1.2). On a alors :

$$\operatorname{tr}(B'_\lambda A_\lambda B'_\lambda) = \sum (B'_\lambda A_\lambda B'_\lambda \phi_j,\ \phi_j) = \sum (A_\lambda B'_\lambda \phi_j,\ B'_\lambda \phi_j) = \sum \alpha_j^2 (A_\lambda \phi_j,\ \phi_j)$$

$$3 \operatorname{tr} A_\lambda \leqq 4 \operatorname{tr}(B'_\lambda A_\lambda B'_\lambda) \leqq 4 \sum_{\alpha_j \geqq 1/2} \alpha_j^2 (A_\lambda \phi_j,\ \phi_j) + \sum_{\alpha_j < 1/2} (A_\lambda \phi_j,\ \phi_j).$$

Puisque $0 \leqq \alpha_j \leqq 1$, et par définition de $\operatorname{tr} A_\lambda$, on en tire :

$3 \operatorname{tr} A_\lambda \leqq 4 \dim E_\lambda + \operatorname{tr} A_\lambda$, soit $\dim E_\lambda \geqq 1/2 \operatorname{tr} A_\lambda$. De plus pour $f \in E_\lambda$, $(PB'_\lambda f,\ B'_\lambda f) \leqq C\lambda \|f\|^2 \leqq 4C\lambda \|B'_\lambda f\|^2$ $\cdot$ B'_λ étant un isomorphisme de E_λ, le principe du minimax fournit (1.14).

Application à la minoration de $N(\lambda)$. – Soit $\Omega_{r,\lambda} = \{ z \in Z,\ S(z) \leqq r\lambda \}$. On définit comme précédemment des opérateurs auto-adjoints positifs traçables par :

$$B'_{R,\lambda} f = \int_{\Omega_{R,\lambda}} (f,\ \psi_z)\, \psi_z\, d(z)$$

et :

$$A_{r,\lambda} f = \int_{\Omega_{r,\lambda}} (f,\ \psi_z)\, \psi_z\, d(z).$$

Alors $\operatorname{tr} A_{r,\lambda} = K^2 \operatorname{mes}(\Omega_{r,\lambda})$.

Montrons (1.12). L'assertion sur le domaine résulte de (1.5) et de l'hypothèse initiale sur les états cohérents. On applique (1.6) à $B'_{R,\lambda} f$, et on remplace $(B'_{R,\lambda} f,\ \psi_z)$ par son expression pour obtenir :

$$(PB'_{R,\lambda} f,\ B'_{R,\lambda} f) \leqq \int |F_\lambda(z)|^2\, d(z),$$

avec

$$F_\lambda(z) = \int_{\Omega_{R,\lambda}} (S(z))^{1/2} (\psi_z,\ \psi_w)(\psi_w,\ f)\, d(w) = \int T(z,\ w)\, G_\lambda(w)\, d(w),$$

où on a posé :

$$G_\lambda(w) = (\psi_w,\ f)\, \mathbf{1}_{\Omega_{R,\lambda}}(w)\,(S(w))^{\alpha+1/2}$$

et

$$T(z,\ w) = S(z)^{-\alpha}(\psi_z,\ \psi_w)(S(z)/S(w))^{\alpha+1/2}.$$

Il résulte de (1.6) que les intégrales suivantes sont majorées indépendemment de z, w et λ : $\lambda^\alpha \int |T(z,\ w)|\, d(w)$ et $\lambda^\alpha \int |T(z,\ w)|\, d(z)$. Le noyau $\lambda^\alpha T$ définit donc un opérateur borné sur L^2, et l'inégalité (1.11) en résulte en utilisant (1.2), avec C de la forme $C_0\, R^{2\alpha+1}$. On choisira à la fin la valeur de r et R et on note seulement A_λ pour $A_{r,\lambda}$, et B'_λ pour $B'_{R,\lambda}$. On peut écrire :

$$B'_\lambda A_\lambda B'_\lambda f = \int\int\int K_\lambda(z,\ t,\ w)\, L_{\lambda,z,t}(f)\, d(z)\, d(t)\, d(w),$$

avec :

$$L_{z,t}(f) = (f, \psi_z)\,\psi_t \quad \text{et} \quad K_\lambda(z,t,w) = (\psi_z,\psi_w)(\psi_w,\psi_t)\,\mathbf{1}_{\Omega_{r,\lambda}}(w)\,\mathbf{1}_{\Omega_{R,\lambda}}(z)\,\mathbf{1}_{\Omega_{R,\lambda}}(t).$$

D'après le lemme 1.3 on a donc, puisque $\operatorname{tr} L_{z,t} = (\psi_t,\ \psi_z)$:

$$\begin{aligned}&\operatorname{tr} B'_\lambda A_\lambda B'_\lambda\\ &\quad = \int (\psi_t,\ \psi_z)(\psi_z,\ \psi_w)(\psi_w,\ \psi_t)\,\mathbf{1}_{\Omega_{r,\lambda}}(w)\,\mathbf{1}_{\Omega_{R,\lambda}}(z)\,\mathbf{1}_{\Omega_{R,\lambda}}(t)\, d(z)\, d(t)\, d(w)\end{aligned}$$

Mais d'autre part, $K^2 = \|\psi_w\|^2 = \int (\psi_t,\ \psi_z)(\psi_z,\ \psi_w)(\psi_w,\ \psi_t)\, d(z)\, d(t)$.
D'où

$$\operatorname{tr} A_\lambda = K^2 \operatorname{mes}(\Omega_{r,\lambda}) = \int (\psi_t,\ \psi_z)(\psi_z,\ \psi_w)(\psi_w,\ \psi_t)\,\mathbf{1}_{\Omega'_\lambda}(w)\, d(z)\, d(t)\, d(w).$$

Donc :

$$\begin{aligned}&|\operatorname{tr} A_\lambda - \operatorname{tr} B'_\lambda A_\lambda B'_\lambda|\\ &\quad \leqq 2 \int |(\psi_t,\ \psi_z)(\psi_z,\ \psi_w)(\psi_w,\ \psi_t)|\,\mathbf{1}_{\Omega_{r,\lambda}}(w)\,\mathbf{1}_{\Omega^c_{R,\lambda}}(t)\, d(z)\, d(t)\, d(w)\end{aligned}$$

$$|\operatorname{tr} A_\lambda - \operatorname{tr} B'_\lambda A_\lambda B'_\lambda| \\ \leqq 2K^2 \int |(\psi_z, \psi_w)(\psi_w, \psi_t)| \mathbf{1}_{\Omega_{r,\lambda}}(w) \mathbf{1}_{\Omega^c_{R,\lambda}}(t)\, d(z)\, d(t)\, d(w).$$

On majore à l'aide de (1.7) les intégrales $\int |(\psi_z, \psi_w)| \mathbf{1}_{\Omega'_\lambda}(w)\, d(z)$ par (const) $\cdot\, r^\alpha$, et les intégrales $\int |(\psi_w, \psi_t)| \mathbf{1}_{\Omega_{r,\lambda}}(w) \mathbf{1}_{\Omega^c_{R,\lambda}}(t)\, d(t)$ par (const) $\cdot\, r^\alpha (r/R)^\alpha$ on fait le produit de ces inégalités, et on intègre en $w \in \Omega_{r,\lambda}$, ce qui donne (1.13) en choisissant r/R assez petit.

2. États cohérents associés à une représentation induite

Dans toute la suite, on désigne par $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie nilpotente, et par r son rang de nilpotence. On suppose qu'on a muni $\mathcal{G}$ d'une structure euclidienne, choisie une fois pour toutes. A partir de la section 7, l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ sera supposée « stratifiée » (*cf.* Introduction).

Rappelons que, si π est une représentation du groupe $\exp \mathcal{G}$ induite à partir d'un caractère d'un sous-groupe, il existe un entier $n \geqq 0$ tel que (à une équivalence près), la différentielle de π (notée aussi π) soit réalisée dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et que, pour tout $X \in \mathcal{G}$, $\pi(X)$ est un opérateur différentiel de la forme suivante :

$$\pi(X) = A_1(X) \frac{\partial}{\partial x_1} + A_2(x_1, X) \frac{\partial}{\partial x_2} \\ + \cdots + A_n(x_1, \cdots, x_{n-1}, X) \frac{\partial}{\partial x_n} + i B(x, X) \tag{2.1}$$

où les A_j et B sont des polynômes réels, de degré $\leqq r$, ne dépendant que des variables indiquées. Si $n = 0$, π est une représentation scalaire, comme en (0.10).

On pose, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$:

$$V_j(y) = \{ X \in \mathcal{G},\ A_1(X) = \cdots = A_j(y, X) = 0 \} \qquad (1 \leqq j \leqq n). \tag{2.2}$$

Le sous-espace $V_j(y)$ ne dépend donc que de $y_1, \cdots, y_{j-1}$. L'hypothèse que π est induite à partir d'un caractère d'un sous-groupe entraîne que $V_j(y)$ est une sous-algèbre de codimension 1 dans $V_{j-1}(y)$, et, par conséquent, $n \leqq \dim \mathcal{G}$. Dans toute la suite, on écrira simplement que « π est une représentation induite dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ » pour résumer tout ce qui précède.

Nous allons maintenant généraliser la définition (0.2) des états cohérents, d'abord pour $\lambda = 1$. (Le paramètre λ sera réintroduit dans la section 7.) En omettant le paramètre $\lambda = 1$, l'égalité (0.2) s'écrit

$$\psi_{y\eta} = U_{y\eta} \psi \qquad \text{où} \quad (U^*_{y\eta} f)(t) = e^{-it\cdot\eta} (T_y f)(t) \tag{2.3}$$

où T_y est la translation $(T_y f)(t) = f(t+y)$. Examinons d'abord ce que devient T_y dans le cas nilpotent.

Le lemme suivant est facile à vérifier.

LEMME 2.1. – *Soient π une représentation induite, et $V_j(y)$ les sous-algèbres définies en (2.2). On peut trouver, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, des éléments $X_j(y)\,(1 \leqq j \leqq n)$ de $\mathcal{G}$, de norme 1, tels que $X_j(y)$ soit dans $V_{j-1}(y)$, et orthogonal à $V_j(y)$, pour la structure euclidienne de $\mathcal{G}$ (on a posé $V_0 = \mathcal{G}$). De plus, X_1 ne dépend pas de y, X_j ne dépend que de $y_1, \cdots, y_{j-1}$, et cette dépendance est C^∞.*

Pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on définit un opérateur T_y dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en posant, pour tous $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $t \in \mathbb{R}^n$:

$$(2.4) \qquad (T_y f)(t) = (e^{t_n \pi(X_n(y))} \dots e^{t_2 \pi(X_2(y))}\, e^{t_1 \pi(X_1(y))} f)(y).$$

Examinons maintenant la forme de cet opérateur T_y. Pour tout $X \in \mathcal{G}$, on note $e^{\pi(X)}$ l'image, par la représentation du groupe exp $\mathcal{G}$ dont π est la différentielle, de l'élément exp X. On note aussi $\pi^0(X)$ le champ de vecteur dans $\mathbb{R}^n$ qui est la partie principale d'ordre 1 de l'opérateur $\pi(X)$. On note $s \to \tau(x, sX, \pi)$ $(x \in \mathbb{R}^n, s \in \mathbb{R})$, où $\tau(x, sX)$ s'il n'y a pas de confusion, le flot issu de x du champ de vecteur $\pi^0(X)$. On note $\sharp$ la loi de composition définie sur $\mathcal{G}$ par la formule de Campbell-Hausdorff. Rappelons qu'on peut écrire, pour tout $X \in \mathcal{G}$:

$$(2.5) \qquad (e^{\pi(X)} f)(x) = e^{i\varphi_X(x)} f(\tau(x, X, \pi))$$

où $\varphi_X(x)$ est un réel qui s'exprime de manière polynomiale, de degré $\leqq r$, par rapport aux coordonnées de $x \in \mathbb{R}^n$ et à celles de $X \in \mathcal{G}$.

LEMME 2.2. – *On peut écrire :*

$$(2.6) \qquad (T_y f)(t) = e^{i\varphi_y(t)} f(\theta_y(t))$$

où φ_y est un polynôme à coefficients réels sur $\mathbb{R}^n$, et θ_y un difféomorphisme polynomial de $\mathbb{R}^n$, tel que $\theta_y(0) = y$, dont les composantes θ_j sont de la forme suivante :

$$(2.7) \qquad \theta_j(t) = a_j t_j + P_j(t_1, \cdots, t_{j-1})$$

où les P_j sont des polynômes, ne dépendant que des variables indiquées, et les a_j sont des constantes non nulles. De plus, il existe un entier $N(r)$, ne dépendant que du rang de nilpotence r, tel que les degrés des polynômes P_J et φ_y soient $\leqq N(r)$.

Démonstration. – Posons :

$$(2.8) \qquad X(y, t) = (t_n X_n(y)) \sharp \cdots \sharp (t_1 X_1(y)).$$

Il résulte de (2.4) et (2.5) que :

$$(T_y f)(t) = (e^{\pi(X(y,t))} f)(y) = e^{i\varphi_{X(y,t)}(y)} f(\tau(y, X(y, t))).$$

On peut donc écrire (2.6) en posant :

(2.9) $$\varphi_y(t) = \varphi_{X(y,t)}(y), \qquad \theta_y(t) = \tau(y, X(y, t)).$$

On voit que $\varphi_y(t)$ est un polynôme réel, dont le degré est bien majoré par un entier $N(r)$, et que $\theta_y(\theta) = \tau(y, 0) = y$. Posons, pour tout $k = 1, \cdots, n$:

$$x^{(k)}(t) = \tau(y, t_n X_n(y) \sharp \cdots \sharp t_k X_k(y))$$

En utilisant le fait que $X_k(y)$ est dans $V_{k-1}(y)$, on montre, par récurrence décroissante sur $k = n, n-1, \cdots, 1$, que les composantes de $x^{(k)}(t)$ sont de la forme suivante :

$$x_j^{(k)}(t) = y_j \qquad \text{si} \quad j < k$$

$$x_k^{(k)}(t) = y_k + a_k t_k$$

$$x_j^{(k)}(t) = y_j + a_j t_j + P_j^{(k)}(t_k, \cdots, t_{j-1}) \qquad \text{si} \quad j > k$$

où $a_j = A_j(y, X_j(y)) \neq 0$, et où les $P_j^{(k)}$ sont des polynômes réels, ne dépendant que des variables écrites, et dont le degré est majoré par un entier qui ne dépend que de r. Lorsque $k = n$, le lemme est démontré.

D'après (2.7), le jacobien de θ_y est constant. Sa valeur absolue sera notée $J(y)$:

(2.10) $$J(y) = |\det(\theta_y)'|.$$

Afin de bien paramétrer nos états cohérents par les points (y, η) de $T^* \mathbb{R}^n$, nous associons, à tout opérateur T de la forme suivante :

$$(T f)(t) = e^{i\varphi(t)} f(\theta(t))$$

(où φ est une fonction réelle et θ un difféomorphisme), une application symplectique χ dans $\mathbb{R}^{2n}$, telle que l'égalité $\chi(x, \xi) = (t, \tau)$ soit équivalente à :

(2.11) $$x = \theta(t), \qquad \tau_j = \frac{\partial \varphi}{\partial t_j}(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \theta_k}{\partial t_j} \xi_k \qquad (1 \leqq j \leqq n).$$

Dans toute la suite, on notera

(2.12) $$(x, \xi) \to \chi_y(x, \xi) = (u_y(x), v_y(x, \xi))$$

l'application symplectique ainsi associée à l'opérateur T_y. Les égalités

(2.13) $$u_y(x) = t \qquad \text{et} \qquad v_y(x, \xi) = \tau$$

sont donc équivalentes (si φ_y et θ_y sont comme dans le lemme 2.2) à :

(2.14) $$x = \theta_y(t)$$

(2.15) $$\tau_j = \frac{\partial \varphi_y}{\partial t_j}(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \theta_k}{\partial t_j} \xi_k \qquad (1 \leqq j \leqq n).$$

En particulier, $u_y = \theta_y^{-1}$ et $u_y(y) = 0$.

En s'inspirant de (2.3), on pose maintenant, pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$(U_{y\eta}^* f)(t) = J(y)^{1/2} e^{-it\cdot v_y(y,\eta)} (T_y f)(t). \tag{2.16}$$

D'après (2.6) et (2.16), cet opérateur $U_{y\eta}^*$ est unitaire : son adjoint sera évidemment noté $U_{y\eta}$. Notons $\chi_{y\eta}$ l'aplication symplectique associée à l'opérateur unitaire $U_{y\eta}^*$. On a :

$$\chi_{y\eta}(x, \xi) = (u_y(x), v_y(x, \xi) - v_y(y, \eta)) \tag{2.17}$$

et en particulier, $\chi_{y\eta}(y, \eta) = (0, 0)$.

On choisit une fonction $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|\psi\| = (2\pi)^{-n/2}$. Dans la suite, le support de ψ sera choisi dans un voisinage assez petit de 0.

Nous définissons la famille d'états cohérents $\psi_{y\eta}$ associés à la représentation induite π par :

$$\psi_{y\eta} = U_{y\eta}\psi, \qquad \forall (y, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}. \tag{2.18}$$

THÉORÈME 2.3. – *On a, pour tout* $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$f = \int_{\mathbb{R}^{2n}} (f, \psi_{y\eta})\,\psi_{y\eta}\,dy\,d\eta \qquad \textit{et} \qquad \|f\|^2 = \int_{\mathbb{R}^{2n}} |(f, \psi_{y\eta})|^2 dy\,d\eta \tag{2.19}$$

Démonstration. – Démontrons la seconde égalité. (La preuve de la première est identique). D'après la définition de $U_{y\eta}$, on a :

$$(f, \psi_{y\eta}) = (f, U_{y\eta}\psi) = (U_{y\eta}^* f, \psi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-itv_y(y,\eta)} J(y)^{1/2} (T_y f)(t)\,\bar{\psi}(t)\,dt.$$

Cette intégrale est la transformée de Fourier, au point $v_y(y, \eta)$, de la fonction :

$$g_y(t) = J(y)^{1/2} (T_y f)(t)\,\bar{\psi}(t).$$

Par conséquent :

$$I := \int_{\mathbb{R}^{2n}} |(f, \psi_{y\eta})|^2\,dy\,d\eta = \int_{\mathbb{R}^{2n}} |\hat{g}_y(v_y(y, \eta))|^2\,dy\,d\eta.$$

D'après (2.13)-(2.15), l'application $(y, \eta) \to (y, v_y(y, \eta))$ est un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^{2n}$, dont le jacobien a pour valeur absolue $J(y)$ [défini en (2.10)]. Par conséquent :

$$\begin{aligned} I = \int_{\mathbb{R}^{2n}} |\hat{g}(v)|^2 J(y)^{-1}\,dy\,dv &= (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^{2n}} |g_y(t)|^2 J(y)^{-1}\,dy\,dt \\ &= (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^{2n}} |T_y f(t)\,\psi(t)|^2\,dy\,dt. \end{aligned}$$

Puisque $\|\psi\| = (2\pi)^{-n/2}$, le théorème résulte facilement du lemme suivant.

LEMME 2.4. – *On a, pour tout* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *et pour tout* $t \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(T_y f)(t)|^2\,dy = \|f\|^2. \tag{2.20}$$

Démonstration. – Soient $(y_1, \cdots, y_{j-1})$ fixés. Posons $X = X_j(y_1, \cdots, y_{j-1})$. D'après (2.5), on peut écrire, pour tout $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et pour tous $s, x_j, \cdots, x_n$ réels :

$$(e^{s\pi(X)} g)(y_1, \cdots, y_{j-1}, x_j, \cdots, x_n) = e^{i\Phi(x)} g(y_1, \cdots, y_{j-1}, x_j + P_j(s), \cdots, x_n + P_n(x_j, \cdots, x_{n-1}, s))$$

où Φ est une fonction réelle, et les P_j ne dépendent que des variables écrites (de manière polynomiale), et de $y_1, \cdots, y_{j-1}$ (de manière C^∞). On a utilisé le fait que X est dans $V_{j-1}(y)$, c'est-à-dire que $A_1(y, X) = \cdots A_{j-1}(y, X) = 0$, d'où la forme particulière du flot $\tau((y_1, \cdots, y_{j-1}, x_j, \cdots, x_n), X)$. On en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(e^{t\pi(X)} g)(y_1, \cdots, y_{j-1}, x_j, \cdots, x_n)|^2 \, dx_j \cdots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y_1, \cdots, y_{j-1}, \cdots, x_n)|^2 \, dx_j \cdots dx_n.$$

Par une récurrence facile, on en déduit l'égalité (2.20).

3. Forme locale des représentations

Dans l'écriture explicite (2.1) d'une représentation induite π, les coefficients des polynômes $A_j(\cdot, X)$ et $B(\cdot, X)$ $(X \in \mathcal{G})$ ne sont pas supposés vérifier une quelconque majoration. Le but de cette section est de montrer qu'au contraire, les coefficients analogues pour les représentations déduites de π par les transformations unitaires $U_{y\eta}$ de la section 2 vérifient certaines majorations précises, où les constantes sont indépendantes de π, y et η. Ces majorations sont analogues à celles qui définissent les classes de symboles du calcul pseudodifférentiel usuel.

Soit π une représentation induite. En tout point $(y, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}$, soit $U_{y\eta}$ l'opérateur unitaire défini en (2.16). On associe à π une autre représentation $\sigma_{y\eta}$ en posant :

$$\sigma_{y\eta}(X) = U_{y\eta}^* \, \pi(X) \, U_{y\eta} \tag{3.1}$$

pour tout $X \in \mathcal{G}$. Pour tout $X \in \mathcal{G}$, le symbole de $\sigma_{y\eta}(X)$ se déduit de celui de $\pi(X)$ par l'application symplectique $\chi_{y\eta}$ définie en (2.17) :

$$\pi(X)(x, \xi) = \sigma_{y\eta}(X)(u_y(x), v_y(x, \xi) - v_y(y, \eta))) = \sigma_{y\eta}(X)(\chi_{y\eta}(x, \xi)) \tag{3.2}$$

et, en particulier, $\pi(X)(y, \eta) = \sigma_{y\eta}(X)(0, 0)$. D'après la construction (2.6), (2.16) de $U_{y\eta}$, $\sigma_{y\eta}(X)$ est d'une forme analogue à (2.1) :

$$\sigma_{y\eta}(X) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{A}_j(t, X) \frac{\partial}{\partial t_j} + i \tilde{B}(t, x) \tag{3.3}$$

où les coefficients sont des polynômes de degré $\leqq r$, et où $\tilde{A}_j$ ne dépend que de $t_1, \cdots, t_{j-1}$.

THÉORÈME 3.1. – *Avec les notations ci-dessus :*

1. *En notant $X_j = X_j(y)$ les éléments du lemme 2.1, on a :*

$$\tilde{A}_k(t, X_j) = \delta_{jk} \qquad \text{et} \qquad \tilde{B}(t, X_j) = v_{yj}(y, \eta) \quad \text{si } t_1 = \cdots = t_{j-1} = 0. \tag{3.4}$$

On a noté $v_{yj}(y, \eta)$ la j-ième composante de $v_y(y, \eta)$. En d'autres termes :

$$\sigma_{y\eta}(X_j)(t, \tau) = i(\tau_j + v_{yj}(y, \eta)) \qquad \text{si} \quad t_1 = \cdots = t_{j-1} = 0. \tag{3.5}$$

2. *Pour tout $X \in \mathcal{G}$, de norme $\leqq 1$, les coefficients des polynômes $\tilde{A}_j(t, X)$ (qui sont de degré $\leqq r$), sont bornés par une constante qui ne dépend que de $\mathcal{G}$.*

3. *Soit $(Y_1, \cdots, Y_d)$ une base orthonormée quelconque de $\mathcal{G}$. Pour tout multi-indice de dérivation α, et pour tout $X \in \mathcal{G}$, on peut écrire :*

$$\partial_t^\alpha \sigma_{y\eta}(X)(t, \tau) = \sum_{p=1}^{d} \sigma_{y\eta}(Y_p)(t, \tau)\, Q_p(t) \tag{3.6}$$

où les polynômes $Q_p(t)$ dépendent de y, η, π, α et X, mais ont leurs degrés et tous leurs coefficients bornés indépendamment de y, η, π et X, pourvu que $\|X\| \leqq 1$.

4. *On peut écrire, pour tous $X \in \mathcal{G}$ et $(y, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}$:*

$$\sigma_{y\eta}(X)(0, \tau) = \sum_{p=1}^{d} \sigma_{y\eta}(Y_p)(t, \tau)\, R_p(t) \tag{3.7}$$

où les polynômes $R_p(t)$ ont les mêmes propriétés que les $Q_p(t)$ du point 3.

Démonstration. Point 1. – D'après la définition (2.4), on voit facilement que, pour tout $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\frac{\partial}{\partial t_j}(T_y f)(0, \cdots, 0, t_j, \cdots, t_n) = (T_y \pi(X_j(y) f)(0, \cdots, 0, t_j, \cdots, t_n).$$

D'après les liens (2.16) entre T_y et $U_{y\eta}$, on en déduit que :

$$(\sigma_{y\eta}(X_j(y)) f)(t)) = \frac{\partial f}{\partial t_j} + i\, v_{yj}(y, \eta)\, f(t)$$

si $t_1 = \cdots = t_{j-1} = 0$. Les égalités (3.4) ou (3.5) s'en déduisent.

Points 2 et 3 (pour $t = 0$). 1. Tout élément X de $\mathcal{G}$ de norme $\leqq 1$ s'écrit :

$$X = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j(y) + Y \tag{3.8}$$

où $Y \in V_n(y)$ et $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 \leqq 1$, car les $X_j(y)$ forment un système orthonormé, et sont orthogonaux à $V_n(y)$ [*voir* (2.2)]. Il est clair que $\tilde{A}_k(0, Y) = 0$ $(1 \leqq k \leqq n)$ car on a

$A_k(y, Y) = 0 \, (1 \leqq k \leqq n)$ par définition de $V_n(y)$, et car la propriété, pour un champ de vecteur, de s'annuler en un point, est invariante par difféomorphisme. On déduit donc de (3.8) et (3.4) que :

$$|\tilde{A}_j(0, X)| = |\lambda_j| \leqq 1 \qquad \text{si} \quad X \in \mathcal{G}, \quad \|X\| \leqq 1. \tag{3.9}$$

2. Montrons, par récurrence sur j, que pour tout $X \in \mathcal{G}$, de norme $\leqq 1$, on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t_j} \sigma_{y\eta}(X)(t, \tau) = \sum_1^d c_p \, \sigma_{y\eta}(Y_p)(t, \tau) \qquad \text{si} \quad t_1 = \cdots = t_{j-1} = 0 \tag{3.10}$$

où les c_p sont bornés par une constante qui ne dépend que de $\mathcal{G}$. Supposons l'analogue de cette égalité démontrée pour tout entier $\leqq j - 1$. Les égalités (3.4) montrent que, si $t_1 = \cdots = t_{j-1} = 0$, et si $\|X\| \leqq 1$:

$$\frac{\partial}{\partial t_j} \sigma_{y\eta}(X)(t, \tau) = \sigma_{y\eta}([X_j, X])(t, \tau) + \sum_{\alpha<j} \tilde{A}_\alpha(0, X) \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \sigma_{y\eta}(X_j)(t, \tau).$$

Il suffit de décomposer $[X_j, X]$ sur la base des Y_p, de remarquer que $|\tilde{A}_\alpha(0, X)| \leqq 1$ d'après (3.9), et d'appliquer l'hypothèse de récurrence aux fonctions $\dfrac{\partial}{\partial t_\alpha} \sigma_{y\eta}(X_j)(t, \tau) \, (\alpha < j)$, pour démontrer l'égalité (3.10).

3. Une nouvelle récurrence nous permet d'en déduire que :

$$\partial_t^\alpha \, \sigma_{y\eta}(X)(0, \tau) = \sum_1^d c_{(p, \alpha)} \sigma_{y\eta}(Y_p)(0, \tau) \tag{3.11}$$

avec d'autres constantes $c_{(p, \alpha)}$, bornées par une constante qui ne dépend que de $\mathcal{G}$. Le point 3 est démontré pour $t = 0$. On déduit de (3.9) et (3.11) que :

$$|\partial_t^\alpha A_k(0, X)| = \left| \sum_1^d c_{(p, \alpha)} A_k(0, Y_p) \right| \leqq \sum_1^d \left| c_{(p, \alpha)} \right|.$$

Le point 2 est donc démontré.

Point 4. – Montrons, par récurrernce sur j, qu'on peut écrire, avec les notations ci-dessus :

$$\sigma_{y\eta}(X)(0, \cdots, 0, t_{j+1}, \cdots, t_n, \tau) = \sum_1^d \sigma_{y\eta}(Y_p)(t, \tau) \, R_p(t) \tag{3.12}$$

où les polynômes $R_p(t)$ ont leurs degrés et tous leurs coefficients bornés indépendamment des paramètres, pourvu que $\|X\| \leqq 1$. Supposons cette égalité démontrée pour l'entier $j - 1$. La formule de Taylor nous permet d'écrire :

$$\sigma_{y\eta}(X)(0, \cdots, 0, t_{j+1}, \cdots, t_n, \tau) = \sum_{\alpha=0}^r \frac{(-t_j)^\alpha}{\alpha!} \partial_{t_j}^\alpha \, \sigma_{y\eta}(X)(0, \cdots, 0, t_j, \cdots, t_n, \tau).$$

L'égalité (3.10) (appliquée α fois pour le terme d'indice α de la somme), nous permet d'écrire (avec des constantes $c_{p\alpha}$ uniformément bornées) :

$$\sigma_{y\eta}(X)(0, \cdots, 0, t_{j+1}, \cdots, t_n, \tau) = \sum_{\alpha=0}^r \frac{(-t_j)^\alpha}{\alpha!} \sum_{p=1}^d c_{p\alpha} \, \sigma_{y\eta}(Y_p)(0, \cdots, 0, t_j, \cdots, t_n, \tau).$$

L'égalité (3.12) se déduit facilement de l'hypothèse de récurrence et de l'égalité ci-dessus. Lorsque $j = n$, le point 4 du théorème est démontré.

Point 3 (pour t quelconque). – On peut écrire, en utilisant l'égalité (3.11) :

$$\begin{aligned}\partial_t^\alpha \sigma_{y\eta}(X)(t, \tau) &= \sum_{|\beta|\leqq r} \frac{t^\beta}{\beta!} \partial_t^{\alpha+\beta} \sigma_{y\eta}(X)(0, \tau)\\ &= \sum_{|\beta|\leqq r} \frac{t^\beta}{\beta!} \sum_1^d c_{(p,\,\alpha+\beta)} \sigma_{y\eta}(Y_p)(0, \tau).\end{aligned}$$

Le point 3 du théorème se déduit de cette égalité et du point 4.

Posons :

$$p(y, \eta, \pi) = \sup_{X\in\mathcal{G},\, \|X\|\leqq 1} |\pi(X)(y, \eta)|. \tag{3.13}$$

Si $(Y_1, \cdots Y_d)$ est une base orthonormée quelconque de $\mathcal{G}$, on peut aussi écrire, de manière équivalente :

$$p(y, \eta, \pi)^2 = \sum_{j=1}^d |\pi(Y_j)(y, \eta)|^2. \tag{3.14}$$

THÉORÈME 3.2. – *Il existe $C > 0$ tel que, pour toute représentation induite π, pour tout $(y, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}$, pour tout $X \in \mathcal{G}$ tel que $\|X\| \leqq 1$, et pour tout multi-indice de dérivation (α, β), on ait :*

$$|\partial_t^\alpha \partial_\tau^\beta \sigma_{y\eta}(X)(0, 0)| \leqq C\, p(y, \eta, \pi)^{1-|\beta|} \qquad (|\alpha| \leqq r,\ |\beta| \leqq 1). \tag{3.15}$$

Démonstration. – D'après (3.2), on a, si $\|X\| \leqq 1$:

$$|\sigma_{y\eta}(X)(0, 0)| = |\pi(X)(y, \eta)| \leqq p(y, \eta, \pi).$$

L'inégalité (3.15) s'en déduit si $\beta = 0$ en utilisant le point 3 du théorème 3.1, puisque les $|Q_p(0)|$ sont uniformément bornés. Lorsque $|\beta| = 1$, cette inégalité résulte du point 2 du théorème 3.1.

PROPOSITION 3.3. – *Il existe $C > 0$ et $N > 0$ tels que, pour toute représentation induite π, pour tous (x, ξ) et (y, η) dans $\mathbb{R}^{2n}$, on ait [avec les notations* (2.12)-(2.15)*] :*

$$p(x, \xi, \pi) \leqq C(1 + |u_y(x)|)^N (p(y, \eta, \pi) + |v_y(x, \xi) - v_y(y, \eta)|) \tag{3.16}$$

$$p(y, \eta, \pi) \leqq C(|v_y(x, \xi) - v_y(y, \eta)| + (1 + |u_y(x)|^N p(x, \xi, \pi)). \tag{3.17}$$

Démonstration. – Soit $Y_1, \cdots Y_d$ une base orthonormée de quelconque de $\mathcal{G}$. On a, d'après (3.14) et (3.2) :

$$p(x, \xi, \pi)^2 = \sum_{j=1}^d |\sigma_{y\eta}(Y_j)(u_y(x), v_y(x, \xi) - v_y(y, \eta))|^2.$$

De même :

$$p(y, \eta, \pi)^2 = \sum_{j=1}^{d} |\sigma_{y\eta}(Y_j)(0, 0)|^2.$$

D'après les points 2 et 4 du théorème 3.1, il existe deux constantes $C > 0$ et $N > 0$, ne dépendant que de $\mathcal{G}$, tels que pour tous y, η, t et τ dans $\mathbb{R}^n$, on ait :

$$|\sigma_{y\eta}(Y_j)(0, \tau) - \sigma_{y\eta}(Y_j)(0, 0)| \leqq C|\tau|$$

$$|\sigma_{y\eta}(Y_j)(0, \tau)| \leqq C(1 + |t|)^N \sum_{p=1}^{d} |\sigma_{y\eta}(Y_p)(t, \tau)|.$$

D'après la formule de Taylor, et du point 3 du théorème 3.1, appliqué en $t = 0$, on peut aussi écrire :

$$|\sigma_{y\eta}(Y_j)(t, \tau)| \leqq C(1 + |t|)^N \sum_{p=1}^{d} |\sigma_{y\eta}(Y_p)(0, \tau)|.$$

La proposition se déduit facilement de ce qui précède, appliqué à $t = u_y(x)$, $\tau = v_y(x, \xi) - v_y(y, \eta)$.

Il résulte des théorèmes 3.1 et 3.2 que, si P est un élément de degré $\leqq m$ de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathcal{G})$, (par exemple un élément de $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ lorsque $\mathcal{G}$ est stratifiée), on peut écrire, pour toute représentation induite π de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $z \in \mathbb{R}^{2n}$:

$$\sigma_z(P) = \sum_{|\alpha+\beta| \leqq m(r+1)} a_{\alpha\beta}(z, \pi)\, t^\alpha D_t^\beta \tag{3.18}$$

où les coefficients $a_{\alpha\beta}(z, \pi)$ vérifient :

$$|a_{\alpha\beta}(z)| \leqq C(1 + p(z, \pi))^m \tag{3.19}$$

avec une constante C indépendante de z et π.

Nous utiliserons plus tard la proposition suivante. Rappelons que $Y_1, \cdots, Y_d$ désigne une base orthonormée quelconque de $\mathcal{G}$. Pour toute suite $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_q)$ d'entiers compris entre 1 et d, et pour toute représentation π, on pose :

$$\pi(Y^\alpha) = \pi(Y_{\alpha_1}) \circ \cdots \circ \pi(Y_{\alpha_q}) \qquad \text{et} \qquad |\alpha| = q. \tag{3.20}$$

PROPOSITION 3.4. – *Avec les notations ci-dessus, on peut écrire, pour tout $X \in \mathcal{G}$, pour tout entier $m \geqq 0$ et pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:*

$$p(y, \eta, \pi)^m f(t) = \sum_{\substack{|\alpha| \leqq m \\ |\beta+\gamma| \leqq N}} a_{\alpha\beta\gamma}\, \sigma_{y\eta}(Y^\alpha)(t^\beta D_t^\gamma f)(t). \tag{3.21}$$

où les constantes $a_{\alpha\beta\gamma}$ dépendent de *y, η et π, mais sont bornées indépendamment de ces paramètres, et où l'entier N ne dépend que de $\mathcal{G}$ et de m.*

Démonstration. – 1. Pour $m = 1$. D'après (3.14) et (3.2) on peut écrire :

$$p(y, \eta, \pi) = \sum_{j=1}^{d} a_j(y, \eta, \pi)\, \pi(Y_j)(y, \eta) = \sum_{j=1}^{d} a_j(y, \eta, \pi)\, \sigma_{y\eta}(Y_j)(0, 0) \tag{3.22}$$

où $|a_j(y, \eta, \pi)| \leqq 1$. D'après le point 4 du théorème 3.1, on peut écrire :

$$\sigma_{y\eta}(Y_j)(0, 0) = \sum_{p=1}^{d} \sigma_{y\eta}(Y_p)(t, 0)\, R_{jp}(t) \tag{3.23}$$

où les polynômes $R_{jp}(t)$ ont leurs degrés, et tous leurs coefficients bornés indépendamment de y, η et π. D'après (3.3), on peut écrire :

$$\sigma_{y\eta}(Y_p)(t, 0) = \sigma_{yn}(Y_p) - \sum_{j=1}^{n} \tilde{A}_j(t, Y_p)(t) \frac{\partial}{\partial t_j}. \tag{3.24}$$

Comme les $\tilde{A}_j(t, Y_p)(t)$ sont des polynômes de degré $\leqq r$, dont tous les coefficients sont uniformément bornés d'après le point 2 du théorème 3.1, on déduit de (3.22), (3.23) et (3.24) l'analogue de l'égalité (3.21) pour l'entier $m = 1$.

2. Récurrence. On utilise les égalités suivantes (où $1 \leqq j \leqq n$ et $1 \leqq k \leqq d$) :

$$[t_j, \sigma_{y\eta}(Y_k)] = -\tilde{A}_j(t, Y_k). \tag{3.25}$$

$$[D_{t_j}, \sigma_{y\eta}(Y_k)] = i^{-1} \sum_{p=1}^{d} Q_p(t)\, \sigma_{y\eta}(Y_p). \tag{3.26}$$

Comme d'habitude, on note de la même manière une fonction et l'opérateur de multiplication correspondant. L'égalité (3.25) résulte de l'expression (3.3) de l'opérateur $\sigma_{y\eta}(Y_k)$. L'égalité (3.26) résulte de (3.6). Comme le degré et tous les coefficients des polynômes $Q_p(t)$ et $\tilde{A}_j(t, Y_k)$ sont uniformément bornés, on voit que le composé d'une expression analogue au membre de droite de (3.21), pour l'entier $m-1$, et d'une expression analogue pour l'entier 1 (placée à droite), est une expression analogue pour l'entier m. La proposition est donc démontrée.

4. États cohérents et espaces de Sobolev

Nous allons encadrer la norme des espaces de Sobolev naturellement associés à une représentation induite π à l'aide de la transformation en états cohérents définis en (2.18). La minoration de la norme de ces espaces sera traitée dans cette section, et la majoration à la fin de la section 6. Une équivalence de norme ne sera obtenue qu'avec la « décomposition de Littlewood-Paley » de la section 10 (*cf.* P. Gérard [5] pour les états cohérents classiques). On notera souvent $z = (x, \xi)$ ou $w = (y, \eta)$ la variable de $\mathbb{R}^{2n}$, en posant $dz = dx\, d\xi$.

ESPACES DE SOBOLEV INHOMOGÈNES. – Rappelons que $Y_1, \cdots, Y_d$ désigne une base orthonormée quelconque de $\mathcal{G}$. Pour tout entier $m \geqq 0$, et pour toute représentation induite π, on définit l'espace de Sobolev $\mathcal{H}_{m\pi}$ suivant [avec la notation (3.20)] :

$$\mathcal{H}_{m\pi} = \{ f \in L^2(\mathbb{R}^n),\ \pi(Y^\alpha) f \in L^2(\mathbb{R}^n) \,\mathrm{si}|\alpha| \leqq m \}.$$

Cet espace est muni de la norme

$$|||f|||^2_{m\pi} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\pi(Y^\alpha) f\|^2.$$

PROPOSITION 4.1. – *Pour tout entier $m \geqq 0$, il existe $C_m > 0$ tel que :*

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} p(z, \pi)^{2m} |(f, \psi_z)|^2 \, dz \leqq C_m |||f|||^2_{m\pi}$$

pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et pour toute représentation induite π.

Démonstration. – D'après (2.18), on a, pour tous $(y, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$(f, \psi_{y\eta}) = (U^*_{y\eta} f, \psi).$$

On déduit de la proposition 3.4 que :

$$p(y, \eta, \pi)^m (f, \psi_{y\eta}) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta+\gamma| \leq N}} \bar{a}_{\alpha\beta\gamma} \qquad (U^*_{y\eta} f, \sigma_{y\eta}(Y^\alpha)(t^\beta D_t^\gamma \psi))$$

où les constantes $a_{\alpha\beta\gamma}$ sont bornées indépendamment de y, η et π. D'après (3.1), on a :

$$(U^*_{y\eta} f, \sigma_{y\eta}(Y^\alpha)(t^\beta D_t^\gamma \psi)) = (-1)^{|\alpha|} (\pi(Y^{\alpha'}) f, U_{y\eta}(t^\beta D_t^\gamma \psi))$$

où $\alpha' = (\alpha_q, \cdots, \alpha_1)$ si $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_q)$. La preuve du théorème 2.3 montre que :

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} |(\pi(Y^\alpha) f, U_{y\eta}(t^\beta D_t^\gamma \psi)|^2 \, dy \, d\eta = (2\pi)^n \|\pi(Y^\alpha) f\|^2 \, \|t^\beta D_t^\gamma \psi\|^2.$$

La proposition s'en déduit facilement.

ESPACES DE SOBOLEV HOMOGÈNES. – On suppose maintenant que l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est stratifiée (*cf.* Introduction), et on désigne par $X_1, \cdots, X_p$ une base du sous-espace $\mathcal{G}_1$. Pour tout entier $m \geqq 0$, et pour toute représentation induite π, on définit [avec des notations analogues à (3.20)] l'espace de Sobolev $H_{m\pi}$ suivant :

$$H_{m\pi} = \{ f \in L^2(\mathbb{R}^n), \ \pi(X^\alpha) f \in L^2(\mathbb{R}^n) \qquad \text{si} \quad |\alpha| \leqq m \}$$

muni de la norme :

$$\|f\|^2_{m\pi} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\pi(X^\alpha) f\|^2. \tag{4.1}$$

PROPOSITION 4.2. – *Pour tout entier $m \geqq 0$, il existe $C_m > 0$ (ne dépendant que de $\mathcal{G}$), tel que :*

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} p(z, \pi)^{2m/r} |(f, \psi_z)|^2 \, dz \leqq C_m \|f\|^2_{m\pi}. \tag{4.2}$$

Pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, et pour toute représentation induite π.

Démonstration. – Lorsque m est un multiple de r $(m = kr)$, l'inégalité (4.2) est une conséquence directe de la Proposition 4.1 puisque :

$$|||f|||^2_{k\pi} \leqq C \|f\|^2_{kr\pi}.$$

Autrement dit, si m est un multiple de r, l'application T qui, à toute fonction f, associe la fonction $T f$ définie par $(T f)(z) = (f, \psi_z)$ est continue de l'espace $H_{m\pi}$ dans l'espace W_m des fonctions g telles que $p(z, \pi)^{m/r} g(z)$ soit dans $L^2(\mathbb{R}^{2n})$. De plus, ces espaces étant munis de leurs normes naturelles, la norme de $T : H_{m\pi} \to W_m$ est bornée indépendamment de π. N. Moukadem [17] a montré que, si $1 \leqq k \leqq m-1$, l'espace $H_{k\pi}$ coïncide avec l'espace d'interpolation holomorphe de Stein $[H_{m\pi}, L^2]_{k/m}$, que leurs normes sont équivalentes, et que la constante dans l'inégalité qui exprime l'équivalence des normes peut être prises indépendante de π. (Le résultat de [17] n'est pas publié, mais on en trouvera un résumé dans [7], et les arguments sont inspirés de Folland [4].) Comme les résultats analogues sont classiques pour l'espace L^2 avec poids W_m, l'inégalité (4.2) s'en déduit, pour tout entier m, par interpolation.

5. Distance sur $\mathbb{R}^n$ associée à une représentation

Il nous faut évaluer l'éloignement de deux points x et y de $\mathbb{R}^n$ selon la représentation induite π étudiée, en vue d'étendre l'inégalité (0.4) et de construire certains symboles utilisés dans la preuve du théorème 1.

Pour toute représentation induite π, pour tout point $x \in \mathbb{R}^n$, on a défini dans la section 2 un difféomorphisme θ_x tel que $\theta_x(0) = x$. La fonction suivante mesure donc bien l'éloignement de deux points x et y $\mathbb{R}^n$:

$$\rho(x, y) = |\theta_x^{-1}(y)| = |u_x(y)| \tag{5.1}$$

mais ce n'est pas une distance.

Pour tout $X \in \mathcal{G}$, notons $\pi^0(X)$ le champ de vecteur partie principale de l'opérateur $\pi(X)$. Si π est induite, on sait que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, l'application

$$\mathcal{G} \ni X \to \pi^0(X)|_x \in T_x \mathbb{R}^n$$

est surjective. On définit donc une forme quadratique g_x sur $T_x \mathbb{R}^n$ en posant

$$g_x(v) = \inf\{\|X\|^2, X \in \mathcal{G}, \pi^0(X)|_x = v\}, \qquad \forall v \in T_x \mathbb{R}^n. \tag{5.2}$$

Notons $\delta(x, y, \pi)$ [ou $\delta(x, y)$ s'il n'y a pas de confusion] la distance riemannienne sur $\mathbb{R}^n$ associée au ds^2 ainsi défini (*cf.* Nagel-Stein-Wainger [18]).

PROPOSITION 5.1. – *Il existe deux constantes $C > 0$ et $N > 0$, telles que, pour tous x et $y \in \mathbb{R}^n$ et pour toute représentation induite π, on ait :*

$$\delta(x, y) \leqq C(\rho(x, y) + \rho(x, y)^N) \tag{5.3}$$

$$\rho(x, y) \leqq C(\delta(x, y) + \delta(x, y)^N). \tag{5.4}$$

Rappelons que $\tau(x, sX, \pi)$ désigne le flot du champ de vecteur $\pi^0(X)$ issu de $x \in \mathbb{R}^n$. Dans la preuve de la Proposition 5.1, nous utiliserons la fonction suivante :

$$\mu(x, y) = \inf\{\|X\|, X \in \mathcal{G}, y = \tau(x, X, \pi)\}. \tag{5.5}$$

La preuve de la proposition 5.1 se fera en 4 étapes.

1re étape. – Montrons que :

$$\mu(x, y) \leqq C(\rho(x, y) + \rho(x, y)^r). \tag{5.6}$$

Par définition, il existe $t \in \mathbb{R}^n$ tel que $|t| = \rho(x, y)$ et $y = \theta_x(t)$. D'après (2.9), il s'ensuit que $y = \tau(x, X(x, t), \pi)$, où $X(x, t)$ est l'élément de $\mathcal{G}$ défini comme en (2.8) au point x. D'après la formule de Campbell-Hausdorff, il existe C tel que $\|X(x, t)\| \leqq C(|t| + |t|^r) = C(\rho(x, y) + \rho(x, y)^r$. D'après (5.5), $\mu(x, y) \leqq \|X(x, t)\|$ et l'inégalité (5.6) s'en déduit.

2e étape. – Montrons que :

$$\rho(x, y) \leqq C(\mu(x, y) + \mu(x, y)^N). \tag{5.7}$$

Soit $a = \mu(x, y)$. Il existe $Y \in \mathcal{G}$, de norme a, tel que $y = \tau(x, Y, \pi)$. D'après (3.1) et (2.16), le champ de vecteur partie principale de $\sigma_{x\xi}(Y)$ est indépendant de ξ. Notons-le $\sigma_x^0(Y)$: c'est l'image de $\pi^0(Y)$ par le difféomorphisme θ_x. En transportant l'égalité $y = \tau(x, Y, \pi)$ par le difféomorphisme θ_x, on en déduit que $\theta_x^{-1}(y) = \tau(0, Y, \sigma_x^0)$. D'après le point 2 du théorème 3.1, on peut écrire :

$$\sigma_x^0(Y) = A_1 \frac{\partial}{\partial t_1} + \cdots + A_n(t_1, \cdots, t_{n-1}) \frac{\partial}{\partial t_n}$$

où les A_j sont des polynômes de degré $\leqq r$, et, puisque $\|Y\| = a$, tous leurs coefficients sont bornés par $C a$, où C ne dépend que de $\mathcal{G}$. On en déduit que $|\tau(0, Y, \sigma_x^0)| \leqq C(a + a^N)$ (avec d'autres constantes C et N), d'où l'inégalité (5.7).

3e étape. – Montrons que $\delta(x, y) \leqq \mu(x, y)$.

Pour tous x et $y \in \mathbb{R}^n$, il existe $X \in \mathcal{G}$ tel que $y = \tau(x, X, \pi)$ et $\|X\| = \mu(x, y)$. La courbe $x(s) = \tau(x, sX, \pi)$ vérifie $x(0) = x$, $x(1) = y$ et

$$x'(s) = \pi^0(X)|_{x(s)}.$$

Par conséquent, $g_{x(s)}(x'(s)) \leqq \|X\| = \mu(x, y)$. D'après la définition d'une distance Riemannienne, on a bien $\delta(x, y) \leqq \mu(x, y)$.

4e étape. – Montrons qu'il existe $C > 0$ et $N > 0$ tels que:

$$\mu(x, y) \leqq C(\delta(x, y) + \delta(x, y)^N) \tag{5.8}$$

Nous utiliserons les notations suivantes (*cf.* Goodman [6]):

$$E(u) = \frac{1 - e^{-u}}{u}, \qquad B(u) = \frac{u}{1 - e^{-u}} \tag{5.9}$$

et le lemme suivant:

LEMME 5.2. – *Soit $t \to X(t)$ une application continue de $[0, T]$ dans $\mathcal{G}$, telle que $\|X(t)\| \leqq 1$ pour tout $t \in [0, T]$. Alors, il existe une application $t \to Y(t)$ de classe C^1 de $[0, T]$ dans $\mathcal{G}$, telle que:*

$$Y'(t) = B(\mathrm{ad}(Y(t)))X(t) \qquad \textit{et} \qquad Y(0) = 0. \tag{5.10}$$

Il existe une constante C, et un entier N, ne dépendant que de $\mathcal{G}$, telle que :

$$\|Y(t)\| \leqq C(t+t^N). \tag{5.11}$$

Soient π une représentation induite, et x un point de $\mathbb{R}^n$. Soit $y(t)=\tau(x, Y(t))$. Alors:

$$y'(t)=\pi^0(X(t))|_{y(t)} \qquad y(0)=x. \tag{5.12}$$

Preuve de la 4e étape. – Soient x et $y \in \mathbb{R}^n$, et $T=\delta(x, y)$. Il existe donc une courbe $x(t)$ dans $\mathbb{R}^n$, et une courbe $X(t)$ dans $\mathcal{G}$ $(0 \leqq t \leqq T)$, telles que $x(T)=y$, $\|X(t)\| \leqq 1$ et:

$$x'(t)=\pi^0(X(t))|_{x(t)} \qquad x(0)=x. \tag{5.13}$$

Soit $Y(t)$ une courbe dans $\mathcal{G}$ vérifiant (5.10), et soit $y(t)=\tau(x, Y(t), \pi)$. Les courbes $x(t)$ et $y(t)$ sont solutions du même système différentiel (5.12), ou (5.13) et, par conséquent, $x(t)=y(t)$. En particulier, $y=\tau(x, Y(T), \pi)$, et $\|Y(T)\| \leqq C(T+T^N)$. Par conséquent, $\mu(x, y) \leqq C(T+T^N)$, ce qui prouve (5.8) et achève la preuve de la Proposition.

Preuve du Lemme. – On peut trouver une base $Z_1, \ldots, Z_d$ de $\mathcal{G}$ telle que, si on note V^j le sous-espace engendré par $Z_j, \ldots, Z_d$, on ait $[\mathcal{G}, V^j] \subset V^{j+1}$. (Une telle base se construit facilement à l'aide de la suite centrale descendante). Pour tous éléments X et Y de $\mathcal{G}$, $Y=\sum_{j=1}^d y_j Z_j$, on peut écrire:

$$B(\operatorname{ad} Y)X=\sum_{j=1}^d P_j(y_1, \ldots, y_{j-1}, X) Z_j$$

où P_j est un polynôme de degré $\leqq r$ qui ne dépend que de $y_1, \ldots, y_{j-1}$ et des coordonnées de X (P_1 ne dépend que des coordonnées de X). Une fonction $Y(t)=\sum_{j=1}^d y_j(t) Z_j(t)$ sera solution du système (5.10) si:

$$y_j'(t)=P_j(y_1(t), \ldots, y_{j-1}(t), X(t)) \qquad y_j(0)=0 \qquad (1 \leqq j \leqq d). \tag{5.14}$$

Ce système admet une solution unique, qui vérifie la majoration (5.11). Si $y(t)=\tau(x, Y(t))$, nous allons maintenant montrer, avec la notation (5.9), que

$$y'(t)=\pi^0(E(\operatorname{ad} Y(t)) Y'(t))|_{y(t)}. \tag{5.15}$$

En effet, on a, pour tout réel h :

$$\begin{aligned} y(t+h) &= \tau(x, Y(t+h))=\tau(\tau(y(t), -Y(t)), Y(t+h)) \\ &= \tau(y(t), (-Y(t))\# Y(t+h)) \end{aligned}$$

où $\#$ désigne la loi de Campbell-Hausdorff. Comme $(-Y(t))\#Y(t+h)$ s'annule pour $h=0$, on a:

$$y'(t) = \pi^0\left(\frac{d}{dh}(-Y(t))\#Y(t+h)|_{h=0}\right)|_{y(t)}. \tag{5.16}$$

On a évidemment:

$$\frac{d}{dh}(-Y(t))\#Y(t+h)|_{h=0} = \frac{d}{dh}(-Y(t))\#(Y(t)+hY'(t)))|_{h=0}. \tag{5.17}$$

Une formule classique (*cf.* Goodman [6], page 40), montre que, pour tous Y et Y' dans $\mathcal{G}$, on a:

$$\frac{d}{dh}(-Y)\#(Y+hY')|_{h=0} = E(\mathrm{ad}\,Y)\,Y'. \tag{5.18}$$

L'égalité (5.15) se déduit facilement de (5.16), (5.17) et (5.18). D'après la définition (5.9), on a $E(u)B(u)=1$, et (5.12) se déduit donc de (5.10) et (5.15). Le lemme et la proposition sont démontrés.

Pour tous $x \in \mathbb{R}^n$ et $a>0$, notons $V(x, a)$ l'ensemble des $y \in \mathbb{R}^n$ tels que $\rho(x, y) = |\theta_x^{-1}(y)| = |u_x(y)| \leqq a$. Les deux corollaires suivants se déduisent facilement de la proposition 5.1.

COROLLAIRE 5.3. – *Il existe $K>0$ et $N>0$, ne dépendant que de $\mathcal{G}$, tels que:*

$$V(x, a)\cap V(y, a) \neq \varnothing \Rightarrow y \in V(x, Ka),$$

$$y \in V(x, R) \Rightarrow x \in V(y, K(R+R^N))$$

pour tous $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$, $R>0$ et $a \in]0, 1]$.

COROLLAIRE 5.4. – *On note $B(x, \pi, R)$ la boule de centre x et de rayon R pour la distance $\delta(., ., \pi)$, ω_n la mesure de la boule unité dans $\mathbb{R}^n$, C la constante de la proposition* 5.1, *et $J(x)$ la constante définie en* (2.10). *Alors, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:*

$$\mathrm{mes}\, B(x, \pi, 1) \leqq J(x)\,\omega_n\,(2C)^n$$

$$\mathrm{mes}\, B\left(x, \pi, \frac{1}{5}\right) \geqq J(x)\,\omega_n\,(10C)^{-n}.$$

6. Produits scalaires des états cohérents

Le but essentiel de cette section est d'adapter au cas nilpotent l'inégalité (0.4) de l'introduction. Les résultats principaux sont les propositions 6.3, 6.7 et 6.8.

Pour toute représentation induite π et pour tous points $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, on va d'abord étudier l'opérateur $U_{x\xi}$ de la section 2 et le difféomorphisme symplectique $\chi_{x\xi}$ de $\mathbb{R}^{2n}$ qui est associé à $U_{x\xi}^*$ [et qui est défini en (2.17)].

PROPOSITION 6.1. – *Avec les notations ci-dessus, on peut écrire, pour tous* $(x,\, \xi)$ *et* $(y,\, \eta)$ *dans* $\mathbb{R}^{2n}$, *et pour tout* $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$(6.1) \qquad (U^*_{x\xi}\, U_{y\eta}\, f)(t) = c_{xy}\, e^{i\,\Phi_{x\xi y\eta}(t)}\, f(\theta_{xy}(t))$$

où, avec les notations de la section 2, $\theta_{xy} = \theta_y^{-1}\,\theta_x$, $c_{xy} = |\det \theta'_{xy}|^{1/2}$, *et* $\Phi_{x\xi y\eta}$ *est un polynôme à coefficients réels. Il existe un entier* $N(r)$, *qui ne dépend que de* r, *tel que les degrés de* $\Phi_{x\xi y\eta}$ *et des composantes de* θ_{xy} *soient* $\leqq N(r)$. *De plus, si on pose* $t_0 = u_x(y)$, *on a*:

$$(6.2) \qquad d\Phi_{x\xi y\eta}(t_0) = v_x(y,\, \eta) - v_x(x,\, \xi).$$

Démonstration. – La première affirmation résulte de la forme (2.6), (2.16) des opérateurs $U_{x\xi}$ et $U_{y\eta}$. L'application symplectique χ associée à l'opérateur $U^*_{x\xi}\, U_{y\eta}$ comme en (2.11) vérifie $\chi(s,\, \sigma) = (t,\, \tau)$ si et seulement si

$$(6.3) \qquad s = \theta_{xy}(t) \qquad \text{et} \qquad \tau_j = \frac{\partial \Phi_{x\xi y\eta}(t)}{\partial t_j} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\,(\theta_{xy})_k}{\partial t_j}\, \sigma_k \qquad (1 \leqq j \leqq n).$$

Or cette application est égale à $\chi = \chi_{x\xi} \circ \chi^{-1}_{y\eta}$, et cette égalité, prise au point (0, 0), nous permet d'écrire:

$$(6.4) \qquad \chi(0,\, 0) = \chi_{x\xi}(y,\, \eta) = (u_x(y),\, v_x(y,\, \eta) - v_x(x,\, \xi)).$$

L'égalité (6.2) résulte de (6.3) et (6.4) (rappelons que $u_x = \theta_x^{-1}$).

LEMME 6.2. – *Pour tout* $R > 0$, *il existe* $C(R) > 0$ *tel que, pour toute représentation induite* π, *pour tous points* $(x,\, \xi)$ *et* $(y,\, \eta)$ *de* $\mathbb{R}^{2n}$ *tels que* $x \in V(y,\, R)$, *et pour tout multi-indice de dérivation* α, *on ait*:

$$(6.5) \qquad |\partial_t^\alpha\, \theta_{xy}(0)| \leqq C(R)$$

$$(6.6) \qquad |\partial_t^\alpha\, \Phi_{x\xi y\eta}(0)| \leqq C(R)\, p(y,\, \eta,\, \pi) \quad si \ |\alpha| \geqq 2.$$

Démonstration. 1^{re} étape. – Soient $\sigma_{x\xi}$ et $\sigma_{y\eta}$ les représentations associées, comme en (3.1), aux points $(x,\, \xi)$ et $(y,\, \eta)$. On peut écrire, pour tout $X \in \mathcal{G}$:

$$\sigma_{x\xi}(X) = \sum_{\alpha=1}^{n} A_\alpha(t,\, X)\, \frac{\partial}{\partial t_\alpha} + i\, B(t,\, X)$$
$$\sigma_{y\eta}(X) = \sum_{\alpha=1}^{n} \tilde{A}_\alpha(s,\, X)\, \frac{\partial}{\partial s_\alpha} + i\, \tilde{B}(s,\, X)$$

où les polynômes A_α, $\tilde{A}$, B et $\tilde{B}$ sont de degré $\leqq r$. D'après le théorème 3.1, (point 1) appliqué au point $(x,\, \xi)$, il existe des éléments $X_1, \ldots, X_n$ de norme 1 dans $\mathcal{G}$ (dépendant de x), tels que, si $t_1 = \ldots = t_{j-1} = 0$, on ait:

$$(6.7) \qquad A_\alpha(t,\, X_j) = \delta_{j\alpha} \qquad \text{et} \qquad B(t,\, X_j) = v_{xj}(x,\, \xi).$$

(On a noté $v_{xj}(x, \xi)$ la j-ième composante de $v_x(x, \xi)$. D'après le théorème 3.2, appliqué au point (y, η), il existe $C > 0$, ne dépendant que de $\mathcal{G}$, tel que ces mêmes éléments X_j vérifient :

(6.8) $$|\partial_t^\alpha \tilde{A}(0, X_j)| \leqq C \qquad \text{et} \quad |\partial_t^\alpha \tilde{B}(0, X_j)| \leqq C\, p(y, \eta, \pi).$$

Posons $A = U^*_{x\xi}\, U_{y\eta}$, et sous-entendons les indices x, ξ, y et η dans les fonctions Φ et θ_j (de sorte que $\theta = \theta_{xy}$). Rappelons que, pour tout $X \in \mathcal{G}$:

$$\sigma_{x\xi}(X)\, A = A\, \sigma_{y\eta}(X).$$

On en déduit que :

$$\tilde{A}_k(\theta(t), X) = \sum_{j=1}^{n} A_j(t, X)\, \frac{\partial \theta_k}{\partial t_j}$$

$$\tilde{B}(\theta(t), X) = B(t, X) + \sum_{j=1}^{n} A_j(t, X)\, \frac{\partial \Phi}{\partial t_j}.$$

En appliquant ces égalités aux éléments X_j, on obtient, en utilisant (6.7) :

(6.9) $$\frac{\partial \theta_k}{\partial t_j}(t) = \tilde{A}_k(\theta(t), X_j)$$

(6.10) $$\frac{\partial \Phi}{\partial t_j}(t) = \tilde{B}(\theta(t), X_j) - v_{xj}(x, \xi)$$

lorsque $t_1 = \ldots = t_{j-1} = 0$.

2[e] *étape*. – Montrons, par récurrence sur k, qu'il existe $C(R) > 0$, ne dépendant que de $\mathcal{G}$ et de R, tel que, si $x \in V(y, R)$:

(6.11) $$\sup_{|t| \leqq 1} |(\theta_1(t), \ldots, \theta_k(t))| \leqq C(R).$$

Supposons qu'une telle inégalité soit vérifiée pour l'entier $k-1$, avec une constante $C(R)$. D'après (6.8), il existe $C'(R)$ tel que :

$$|\tilde{A}_k(s_1, \ldots, s_{k-1}, X_j)| \leqq C' \quad \text{si } |(s_1, \ldots, s_{k-1})| \leqq C(R)$$

Par conséquent, si $|t| \leqq 1$, on a $|\tilde{A}_k(\theta(t), X_j)| \leqq C'$, donc, d'après (6.9) :

(6.12) $$\left| \frac{\partial \theta_k}{\partial t_j}(0, \ldots, 0, t_j, \ldots, t_{k-1}) \right| \leqq C' \qquad (1 \leqq j \leqq k,\ |t| \leqq 1).$$

[Rappelons que les composantes de $\theta(t)$ sont de la forme (2.7)]. L'hypothèse $x \in V(y, R)$ signifie que

(6.13) $$|\theta_y^{-1}(x)| = |\theta_y^{-1}\, \theta_x(0)| = |\theta(0)| \leqq R.$$

On déduit de (6.12) et (6.13) que $|\theta_k(t)| \leqq C''(R)$ si $|t| \leqq 1$, ce qui prouve (6.11). On en déduit (6.5) si on note que les composantes de θ sont des polynômes de degré $\leqq N(r)$.

3e étape. – Soit $C(R)$ la constante de la deuxième étape (pour $k = n$). D'après (6.8), il existe $C'(R) > 0$ tel que:

$$|\tilde{B}(s, X_j)| \leqq C' p(y, \eta, \pi) \quad \text{si } |s| \leqq C(R).$$

Par conséquent, la deuxième étape (pour $k = n$) entraîne que:

$$|\tilde{B}(\theta(t), X_j)| \leqq C' p(y, \eta, \pi) \quad \text{si } |t| \leqq 1.$$

D'après (6.10), qui est vraie si $t_1 = \ldots = t_{j-1} = 0$, on en déduit que, si $|t| \leqq 1$:

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial t_j}(0, \ldots, 0, t_j, \ldots, t_n) + v_x(x, \xi) \right| \leqq C' p(y, \eta, \pi).$$

L'inégalité (6.6) s'en déduit facilement.

PROPOSITION 6.3. – 1. *Pour toute représentation induite π, posons*:

$$V(R, \pi) = \{((x, \xi), (y, \eta)) \in \mathbb{R}^{4n}, p(y, \eta, \pi) \leqq R,$$
$$|u_x(y)| + |v_x(x, \xi) - v_x(y, \eta)| \leqq R\}.$$

Alors, pour toute fonction ψ fixée dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, et pour tout $R > 0$, la fonction $U_{x\xi}^* U_{y\eta} \psi$ reste bornée dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ quand le couple $((x, \xi), (y, \eta))$ parcourt $V(R, \pi)$, et quand π parcourt l'ensemble des représentations induites dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

2. *Posons aussi*:

$$W(R, \pi) = \{((x, \xi), (y, \eta)) \in \mathbb{R}^{4n}, p(y, \eta, \pi) \leqq R, |u_x(y)| \leqq R\}.$$

Alors, pour tout $R > 0$, il existe $C(R) > 0$ tel que:

$$|\chi_{x\xi} \circ \chi_{y\eta}^{-1}(s, \sigma) - \chi_{x\xi} \circ \chi_{y\eta}^{-1}(0, 0)| \leqq C(R)(1 + |\sigma|)$$

pour tout point $(s, \sigma) \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que $|s| \leqq 1$, pour tout $(x, \xi, y, \eta) \in W(R, \pi)$, et pour toute représentation induite π.

Démonstration. – Lorsque (x, ξ), (y, η) et π varient comme dans le point 1, le corollaire 5.3 montre qu'il existe R' tel que $x \in V(y, R')$, et le lemme 6.2 montre que tous les coefficients des composantes du diffeomorphisme θ_{xy} restent bornées, et qu'il en est de même du difféomorphisme inverse. La « phase » qui apparaît dans l'expression (6.1) est un polynôme de degré $\leqq N(r)$, et l'égalité (6.2) [resp. les inégalités (6.6)] montrent que les dérivées d'ordre 1 (resp. d'ordre supérieur) de cette phase au point $t_0 = u_x(y)$ (resp. à l'origine) restent bornées. Comme $|t_0| \leqq R$, les dérivées de tout ordre $\geqq 1$ de cette phase restent bornées sur tout compact. Il en résulte que le jacobien c_{xy} reste borné, et que la fonction $U_{x\xi}^* U_{y\eta} \psi$ est supportée dans un compact fixe K de $\mathbb{R}^n$, et la première affirmation résulte facilement de ce qui précède. La deuxième affirmation se démontre de même, compte tenu de l'écriture (6.3) de l'application $\chi_{x\xi} \circ \chi_{y\eta}^{-1}$.

Le théorème suivant est classique.

THÉORÈME 6.4 (DE LA PHASE NON STATIONNAIRE). – *On considère deux familles de fonction a_λ et φ_λ, C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, dépendant d'un paramètre λ dans un ensemble Λ. On étudie l'intégrale :*

$$I(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} a_\lambda(x)\, e^{i\,\varphi_\lambda(x)}\, dx.$$

On fait les hypothèses suivantes :

(H1) *les fonctions a_λ ont leurs supports dans un compact fixe K de $\mathbb{R}^n$, et toutes leurs dérivées sont bornées (indépendamment de λ), sur K.*

Posons, pour tout $\lambda \in \Lambda$:

$$m(\lambda) = \inf_{x \in K} |d\varphi_\lambda(x)|.$$

(H2) *Les fonctions φ_λ sont à valeurs réelles et, pour tout multi-indice α de dérivation, il existe $C_{\alpha\beta}$, indépendant de λ, tel que :*

$$|\partial_x^\alpha\, \varphi_\lambda(x)| \leqq C_\alpha\, m(\lambda), \qquad \forall\, x \in K.$$

Alors, pour tout entier N, il existe $C_N > 0$, indépendant de λ, tel que :

$$|I(\lambda)| \leqq C_N\,(1 + m(\lambda))^{-N}, \qquad \forall \lambda \in \Lambda.$$

LEMME 6.5. – *Il existe $a \in]0, 1]$, ne dépendant que de $\mathcal{G}$, ayant la propriété suivante. Pour toutes fonctions f et g dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, supportées dans $B(0, a)$ et pour tout entier $N > 0$, il existe C_N tel qu'on ait :*

$$|(U_{x\,\xi}\, f,\, U_{y\,\eta}\, g)| \leqq C_N\,(1 + |v_x(x, \xi) - v_x(y, \eta)|)^{-N} \tag{6.14}$$

pour toute représentation induite π, et pour tous points (x, ξ) et (y, η) dans $\mathbb{R}^{2\,n}$ tels que :

$$|v_x(x, \xi) - v_x(y, \eta)| \geqq p(y, \eta, \pi). \tag{6.15}$$

Démonstration. – D'après la proposition 6.1, on peut écrire :

$$(U_{x\,\xi}\, f,\, U_{y\,\eta}\, g) = (f,\, U_{x\,\xi}^*\, U_{y\,\eta}\, g) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\,\Phi_{x\,\xi\,y\,\eta}(t)}\, a_{xy}(t)\, dt \tag{6.16}$$

où $a_{xy}(t) = c_{xy}\, f(t)\, \overline{g}(\theta_{xy}(t))$ et où $\Phi_{x\,\xi\,y\,\eta}$ est la « phase » de (6.1).

Montrons que les hypothèses du théorème de la phase non stationnaire sont satisfaites, à condition de choisir a assez petit [le paramètre est ici (x, ξ, y, η, π)].

1. Les fonctions a_{xy} sont supportées dans $B(0, a) \subset B(0, 1)$.

2. Avec les notations de la section 5, la fonction $U_{x\,\xi}\, f$ est supportée dans $V(x, a)$ tandis que $U_{y\,\eta}\, g$ est supportée dans $V(y, a)$. D'après le corollaire 5.3, l'intégrale (6.14) est donc nulle sauf si $x \in V(y, K\,a)$:

$$(U_{x\,\xi}\, f,\, U_{y\,\eta}\, g) \neq 0 \Rightarrow x \in V(y, K\,a) \subset V(y, K) \qquad \text{et} \qquad y \in V(x, K\,a) \tag{6.17}$$

où K ne dépend que de $\mathcal{G}$. D'après le lemme 6.2, les coefficients des composantes de θ_{xy} sont uniformément bornés lorsque les conditions de (6.17) sont satisfaites. Puisque ces composantes sont des polynômes de degré $\leqq N(r)$, les dérivées de tous ordres de θ_{xy} sont uniformément bornées dans $B(0, 1)$ quand (6.17) est satisfait. En particulier, $c_{xy} = |\det \theta'_{xy}|^{1/2}$ reste borné. Par conséquent, l'hypothèse (H1) du théorème 6.4 est vérifiée : les dérivées de tous ordres de a_{xy} sont uniformément bornées dans $B(0, 1)$.

3. On a, d'après la proposition 6.1 :

$$d\Phi_{x\,\xi\,y\,\eta}(t_0) = v_x(x, \xi) - v_x(y, \eta) \qquad \text{où} \quad t_0 = u_x(y). \tag{6.18}$$

D'après la proposition 6.2 (point 2), on peut écrire, si $x \in V(y, K)$ et si $|\alpha| \geqq 2$:

$$|\partial_t^\alpha \Phi_{x\,\xi\,y\,\eta}(0)| \leqq C' p(y, \eta, \pi)$$

où C' ne dépend que de $\mathcal{G}$. Puisque $\Phi_{x\,\xi\,y\,\eta}$ est un polynôme de degré $\leqq N(r)$, il en résulte, si (6.15) est vérifié, si $|\alpha| \geqq 2$ et si $|t| \leqq 1$, que :

$$|\partial_t^\alpha \Phi_{x\,\xi\,y\,\eta}(t)| \leqq C'' p(y, \eta, \pi) \leqq C'' |v_x(x, \xi) - v_x(y, \eta)| = C'' |d\Phi_{x\,\xi\,y\,\eta}(t_0)|. \tag{6.19}$$

L'implication (6.17) nous permet de nous limiter au cas où $y \in V(x, K\,a)$, donc $|t_0| = |u_x(y)| = |\theta_x^{-1}(y)| \leqq K\,a$. Si a est assez petit, cela entraîne que $|t_0| \leqq \dfrac{1}{2}$, et on déduit de (6.19) que, pour tout t dans la boule unité :

$$|d\Phi_{x\,\xi\,y\,\eta}(t) - d\Phi_{x\,\xi\,y\,\eta}(t_0)| \leqq C'' |t - t_0|\, |d\Phi_{x\,\xi\,y\,\eta}(t_0)|.$$

La preuve de l'étape 2 ci-dessus montre que, si (6.17) est vérifié, les composantes du difféomorphisme inverse θ_{xy}^{-1} sont aussi des polynômes dont tous les coefficients sont uniformément bornés. Comme $t_0 = \theta_{xy}^{-1}(0)$, le fait que g est supportée dans $B(0, a)$ entraîne donc que :

$$\operatorname{supp} a_{xy} \subset \theta_{xy}^{-1}(B(0, a)) \subset \{t \in \mathbb{R}^n,\ |t - t_0| \leqq C\,a\}$$

où C ne dépend que de $\mathcal{G}$. Si l'on choisit a assez petit, il en résulte que :

$$\inf_{t \in \operatorname{supp} a_{xy}} |d\Phi_{x\,\xi\,y\,\eta}(t)| \geqq \frac{1}{2} |d\Phi_{x\,\xi\,y\,\eta}(t_0)|. \tag{6.20}$$

Si (6.15) est vérifié, et si f et g sont supportées dans $B(0, a)$, a étant ainsi choisi, l'hypothèse (H2) du théorème 6.4 est donc vérifiée, d'après (6.19) et (6.20). L'inégalité (6.14) est donc une conséquence de la conclusion du théorème 6.4, et des inégalités (6.20) et (6.19).

Dans toute la suite, la constante $a \in]0, 1]$ est choisie pour qu'on puisse appliquer le lemme 6.5 : cette constante ne dépend que de $\mathcal{G}$. On posera, pour tout réel $N \geqq 0$, pour tous réels j et k, et pour tous points $z = (x, \xi)$ et $w = (y, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}$:

$$R_{(j,k,N)}(z, w) = \frac{(1 + |v_x(x, \xi) - v_x(y, \eta)|)^N}{(1 + p(z, \pi))^j (1 + p(w, \pi))^k}. \tag{6.21}$$

LEMME 6.6. – *Soient deux fonctions f et $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, supportées dans $B(0, a)$, et trois réels N, j et k tels que $N \geqq 0$, $j+k=N+n$. Alors, il existe $C>0$ tel que, pour tous $z \in \mathbb{R}^{2n}$:*

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} R_{(j,k,N)}(z, w)|(U_z f, U_w g)| dw \leqq C. \tag{6.22}$$

Démonstration. – Soit K une constante telle que (6.17) soit vérifiée. D'après la proposition 3.3, il existe une constante $C_1 > 1$ telle que, si des points $z=(x, \xi)$ et $w=(y, \eta)$ vérifient $y \in V(x, K\alpha)$, on ait :

$$p(y, \eta, \pi) \leqq C_1(p(x, \xi, \pi) + |v_x(x, \xi) - v_x(y, \eta)|). \tag{6.23}$$

$$p(x, \xi, \pi) \leqq C_1(p(y, \eta, \pi) + |v_x(x, \xi) - v_x(y, \eta)|). \tag{6.24}$$

Pour tout $z=(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, posons :

$$A(z) = \{(y, \eta) \in \mathbb{R}^{2n},\, y \in V(x, Ka),\, |v_x(x, \xi) - v_x(y, \eta)| \leqq \frac{1}{2C_1} p(z, \pi)\}$$

$$B(z) = \{(y, \eta) \in \mathbb{R}^{2n},\, y \in V(x, Ka),\, |v_x(x, \xi) - v_x(y, \eta)| \geqq \frac{1}{2C_1} p(z, \pi)\}.$$

Notons $I(z)$ l'intégrale du membre de gauche de (6.22), et $F(z, w)$ la fonction sous le signe d'intégration. D'après (6.17), on a :

$$I(z) = \int_{A(z)} F(z, w)\, dw + \int_{B(z)} F(z, w)\, dw.$$

Intégrale dans $A(z)$. – Si w est dans $A(z)$, on a, d'après (6.23) et (6.24) :

$$\frac{1}{2C_1} \leqq \frac{1+p(w, \pi)}{1+p(z, \pi)} \leqq 2C_1$$

et, par conséquent, puisque $j+k=N+n$:

$$R_{(j,k,N)}(z, w) \leqq C_2(1+p(z, \pi))^{-n}$$

où C_2 ne dépend que de $\mathcal{G}$. L'application définie en (2.12) est symplectique, de sorte que l'application :

$$(y, \eta) \to (u_x(y),\, v_x(y, \eta) - v_x(x, \xi))$$

conserve la mesure, et la mesure de $A(z)$ est donc $Ka\left(\frac{1}{2C_1} p(z, \pi)\right)^n$. Comme les opérateurs U_z sont unitaires, on en déduit que :

$$\int_{A(z)} F(z, w)\, dw \leqq CC_2 \|f\|\, \|g\|$$

où C ne dépend que de $\mathcal{G}$.

Intégrale dans $B(z)$. – Si $w = (y, \eta)$ est dans $B(z)$, on a, d'après (6.23):

$$p(y, \eta, \pi) \leqq C_1 (2 C_1 + 1) |v_x(x, \xi) - v_x(y, \eta)|. \tag{6.25}$$

D'après le lemme 6.5, [qu'on peut appliquer malgré la constante dans le membre de droite de (6.25)], pour tout entier M, il existe C_M tel que:

$$|F(z, w)| \leqq C_M (1 + |v_x(x, \xi) - v_x(y, \eta)|)^{-M} \quad \text{si } w \in B(z). \tag{6.26}$$

Si $M = n + 1$, on voit que:

$$\int_{B(z)} (1 + |v_x(x, \xi) - v_x(w)|)^{-M} \, dw \leqq C \tag{6.27}$$

où C ne dépend que de $\mathcal{G}$. En effet, l'application $\chi_{x\xi}$ définie en (2.17) est symplectique, de sorte que:

$$\int_{B(z)} (1 + |v_x(x, \xi) - v_x(w)|)^{-M} \, dw = \int_{|t| \leqq C a} \int_{\tau \in \mathbb{R}^n} (1 + |\tau|)^{-n-1} \, dt \, d\tau.$$

D'après (6.26) et (6.27), on peut écrire:

$$\int_{B(z)} |F(z, w)| \leqq C C_{n+1}.$$

La proposition est démontrée.

Nous revenons maintenant à l'étude des états cohérents $\psi_{x\xi}$ construits dans la section 2. Nous supposerons que la fonction ψ qui sert à les construire est supportée dans $B(0, a)$, où a est la constante de la proposition 6.5.

PROPOSITION 6.7. – *Soit P un élément de degré m dans l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ [par exemple un élément de $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ si $\mathcal{G}$ est stratifiée], j, k et N trois réels, tels que $j + k = m + n + N$ et $N \geqq 0$. Alors, il existe $C > 0$ (qui ne dépend que de $\mathcal{G}$ et de P, j, k et N), tel que, avec la notation* (6.21):

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} R_{(j, k, N)}(z, w) |(\pi(P) \psi_z, \psi_w)| \, dw \leqq C \tag{6.28}$$

pour tout $z \in \mathbb{R}^{2n}$ et pour toute représentation induite π.

Démonstration. – D'après (2.18) et (3.1), on peut écrire:

$$(\pi(P) \psi_z, \psi_w) = (U_z \sigma_z(P) \psi, U_w \psi)$$

L'écriture (3.18) de $\sigma_z(P)$ et les majorations (3.19) des coefficients qui y apparaissent nous permettent donc de majorer l'intégrale I du membre de gauche de (6.28) de la manière suivante:

$$|I| \leqq C \sum_{|\alpha + \beta| \leqq m(r+1)} I_{\alpha\beta}$$

où, avec la notation (6.21), on a posé:

$$I_{\alpha\beta} = \int_{\mathbb{R}^{2n}} R_{(j-m,k,N)}(z,w) |(U_z(t^\alpha D_t^\beta \psi), U_w \psi)| dw.$$

En appliquant le lemme 6.6 aux fonctions $f = t^\alpha D_t^\beta \psi$ et $g = \psi$, on en déduit facilement l'inégalité (6.28).

PROPOSITION 6.8. – *Soit P un élément de degré m dans $\mathcal{U}(\mathcal{G})$. Alors, il existe $C > 0$ tel que, pour toute représentation induite π, et pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on ait:*

$$|(\pi(P)f, f)| \leqq C \int_{\mathbb{R}^{2n}} (1 + p(z, \pi))^{m+n} |(f, \psi_z)|^2 dz.$$

Démonstration. – D'après la première égalité (2.19) du théorème 2.3, on peut écrire:

$$\begin{aligned}(\pi(P)f, f) &= \int_{\mathbb{R}^{4n}} (f, \psi_z)(\pi(P)\psi_z, \psi_w)(\psi_w, f)\, dz\, dw \\ &= \int_{\mathbb{R}^{4n}} K(z,w) F(z) \overline{F}(w)\, dz\, dw\end{aligned}$$

en posant, avec la notation (6.21):

$$\begin{gathered} F(z) = (f, \psi_z)(1 + p(z, \pi))^{(m+n)/2} \\ K(z,w) = (\pi(P)\psi_z, \psi_w) R_{(\alpha,\alpha,0)}(z,w), \quad \text{où } \alpha = \frac{m+n}{2}. \end{gathered}$$

D'après la proposition 6.7, il existe $C > 0$, indépendant de π, tel que:

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} |K(z,w)| dw \leqq C, \quad \forall z \in \mathbb{R}^{2n} \qquad \text{et} \qquad \int_{\mathbb{R}^{2n}} |K(z,w)| dz \leqq C, \quad \forall w \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Par conséquent:

$$|(\pi(P)f, f)| \leqq C \int_{\mathbb{R}^{2n}} |F(z)|^2 = C \int_{\mathbb{R}^{2n}} (1 + p(z, \pi)^{m+n} |(f, \psi_z)|^2 dz.$$

La proposition est démontrée.

7. Encadrement du $N(\lambda)$

Dans toute la suite, l'algèbre $\mathcal{G}$ est stratifiée (*cf.* introduction). Dans cette section, $X_1, \ldots, X_p$ désigne une base du sous-espace $\mathcal{G}_1$ qui apparaît en (0.11), et on désigne par Δ le « sous-laplacien de Kohn »:

(7.1) $$\Delta = -\sum_{j=1}^{p} X_j^2.$$

On sait que, si π est une représentation unitaire irréductible, l'image $P = \pi(\Delta)$ est un opérateur essentiellement auto-adjoint, à résultante compacte. On note (λ_j) la suite croissante des valeurs propres de $\pi(\Delta)$, répétées selon leur multiplicité, et $N(\lambda)$ le nombre d'indices j tels que $\lambda_j \leqq \lambda$. Le but de cette section est de donner un encadrement explicite de $N(\lambda)$.

On désigne par $|||\ \ |||$ une « norme homogène » sur le dual $\mathcal{G}^*$. Il s'agit d'une fonction continue $\geqq 0$ sur $\mathcal{G}^*$, ne s'annulant qu'à l'origine, et telle que $|||\delta_t^* l||| = t|||l|||$ pour tous $t > 0$ et $l \in \mathcal{G}^*$. Le choix de cette « norme homogène » n'a pas d'importance pour la suite. On choisit une fois pour toutes une structure euclidienne sur $\mathcal{G}$. Il est logique de la choisir telle que les sous-espaces $\mathcal{G}_j$ qui apparaissent en (0.11) soient orthogonaux, puis de choisir la « norme homogène » suivante sur $\mathcal{G}^*$:

$$|||l||| = \sup\{t > 0,\ \|\delta_t^* l\| \leqq 1\} = \inf\{\lambda > 0,\ \|(\delta_{1/\lambda}^* l\| \leqq 1\}. \tag{7.2}$$

On a noté $\|\ \ \|$ la (vraie) norme sur $\mathcal{G}^*$, duale de celle qui, sur $\mathcal{G}$, est liée à la structure euclidienne. La norme homogène choisie est donc la jauge de la boule unité.

Pour toute représentation unitaire irréductible π, on notera $\mathcal{O}(\pi)$ l'orbite de la représentation coadjointe du groupe $\exp \mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}^*$ qui correspond à π dans la théorie de Kirillov [8]. On note μ la mesure canonique sur l'orbite $\mathcal{O}(\pi)$. On pose, pour tout $\lambda > 0$:

$$N_0(\lambda) = \mu(\{l \in \mathcal{O}(\pi),\ |||l||| \leqq \lambda^{1/2}\}).$$

THÉORÈME 7.1. – *Avec les notations ci-dessus, il existe une constante* $C > 1$, *ne dépendant que de* $\mathcal{G}$, *telle qu'on ait, pour toute représentation unitaire irréductible* π, *et pour tout* $\lambda > 0$:

$$\frac{1}{C} N_0\left(\frac{\lambda}{C}\right) \leqq N(\lambda) \leqq C N_0(C\lambda). \tag{7.3}$$

Ce résultat, annoncé dans [10] et [11], a été prouvé par une autre méthode, plus technique, dans [12].

Si π est une représentation unitaire irréductible de $\exp \mathcal{G}$, on peut toujours l'expliciter de telle sorte que, pour tout $X \in \mathcal{G}$, $\pi(X)$ soit un opérateur différentiel de la forme (2.1), où n est la moitié de la dimension de l'orbite $\mathcal{O}(\pi)$. On sait qu'alors l'application qui, à tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ associe la forme linéaire $l_{(x,\xi)}$ suivante:

$$l_{(x,\xi)}(X) = \frac{1}{i}\pi(X)(x, \xi), \qquad \forall X \in \mathcal{G} \tag{7.4}$$

[où $\pi(X)(x, \xi)$ désigne le symbole complet de l'opérateur $\pi(X)$], est une paramétrisation de l'orbite $\mathcal{O}(\pi)$, et que la mesure canonique sur l'orbite s'identifie à $dx\, d\xi$. Si on pose:

$$M_\pi(x, \xi) = |||l_{(x,\xi)}|||$$

on peut donc écrire:

$$N_0(\lambda) = \mathrm{mes}(\{x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n},\ M_\pi(x, \xi) \leqq \lambda^{1/2}\}).$$

Le fait que π soit irréductible entraîne que $N_0(\lambda)$ est fini (*cf.* [7] ou [22]).

Pour toute représentation induite π, la fonction $p(x, \xi, \pi)$ définie en (3.13) peut s'écrire:

$$p(x, \xi, \pi) = \|l_{(x,\xi)}\| \tag{7.5}$$

où $l_{(x,\,\xi)}$ est la forme linéaire définie en (7.4). Pour tout $\lambda > 0$, on notera π_λ la représentation $\pi_\lambda = \pi \circ \delta_\lambda^{-1}$. On déduit de (7.5) que:

$$p(x,\,\xi,\,\pi_\lambda) = \|(\delta_{1/\lambda}^* \, l_{(x,\,\xi)}\|.$$

Avec le choix (7.2) de la « norme homogène », on peut donc écrire:

$$M_\pi(x,\,\xi) = \inf\{\lambda > 0,\, p(x,\,\xi,\,\pi_\lambda) \leqq 1\}.$$

Il y a donc équivalence entre $M_\pi(x,\,\xi) \leqq \lambda$ et $p(x,\,\xi,\,\pi_\lambda) \leqq 1$, de sorte que:

$$N_0(\lambda^2) = \operatorname{mes}\{(x,\,\xi) \in \mathbb{R}^{2n},\, p(x,\,\xi,\,\pi_\lambda) \leqq 1\}. \tag{7.6}$$

Si la structure euclidienne de $\mathcal{G}$ est choisie comme on l'a indiqué, on a, si $C > 1$:

$$C^{-r}\, p(z,\,\pi_\lambda) \leqq p(z,\,\pi_{C\lambda}) \leqq C^{-1}\, p(z,\,\pi_\lambda). \tag{7.7}$$

Les états cohérents associés, comme dans la section 2, à la représentation $\pi_\lambda = \pi \circ \delta_\lambda^{-1}$ seront notés $\psi_{z\,\lambda}$ $(z = (x,\,\xi) \in \mathbb{R}^{2n})$. On peut appliquer à cette représentation π_λ tous les résultats des sections 3 à 6. Les constantes dans toutes les inégalités sont indépendantes de la représentation: en particulier, elles seront indépendantes de λ.

Majoration de $N(\lambda)$. – On a, avec les notations de la section 4, pour toute représentation induite:

$$\|f\|_{1\,\pi}^2 = (\pi(\Delta)\, f,\, f) + \|f\|^2.$$

L'application de la Proposition 4.2, pour $m = 1$, à la représentation π_λ nous donne donc l'inégalité suivante:

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} p(z,\,\pi_\lambda)^{2/r}\, |(f,\,\psi_{z\,\lambda})|^2\, dz \leqq C_1\, \|f\|_{1\,\pi_\lambda}^2 = C_1\, (\|f\|^2 + \lambda^{-2}\, (\pi(\Delta)\, f,\, f))$$

pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Nous appliquons le premier point du théorème 1.1 à l'opérateur $\pi(\Delta)$, à la famille d'états cohérents $\psi_{z\,\lambda}$, qui sont de norme $K = (2\pi)^{-n/2}$, et à la fonction:

$$s(z) = \frac{\lambda^2}{C_1}\, p(z,\,\pi_\lambda)^{2/r}.$$

Le paramètre spectral est ici $\mu = \lambda^2$. Nous obtenons:

$$\begin{aligned} N(\lambda^2) &\leqq 2\,(2\pi)^{-n} \operatorname{mes}\{z \in \mathbb{R}^{2n},\, s(z) \leqq 4\,\lambda^2\} \\ &\leqq 2\,(2\pi)^{-n} \operatorname{mes}\{z \in \mathbb{R}^{2n},\, p(z,\,\pi_\lambda) \leqq C\} \end{aligned}$$

où $C = (4\,C_1)^{r/2}$. D'après (7.7) et (7.6), on en déduit:

$$\begin{aligned} N(\lambda^2) &\leqq 2\,(2\pi)^{-n} \operatorname{mes}\{z \in \mathbb{R}^{2n},\, p(z,\,\pi_{C\,\lambda}) \leqq 1\} \\ &= 2\,(2\pi)^{-n}\, N_0(C^2\,\lambda^2), \end{aligned}$$

ce qui prouve l'inégalité de droite de (7.3).

Minoration de $N(\lambda)$. – L'application de la proposition 6.8, pour $m = 2$, à la représentation π_λ nous donne l'inégalité suivante, pour tout f dans le domaine de $\pi(\Delta)$, qui est l'espace $H_{2\pi}$ défini en (4.1):

$$\lambda^{-2}(\pi(\Delta) f, f) \leqq C_1 \int_{\mathbb{R}^{2n}} (1 + p(z, \pi_\lambda))^{2+n} |(f, \psi_{z\lambda})|^2 \, dz.$$

Cela nous conduit à appliquer le second point du théorème 1.1 à l'opérateur $\pi(\Delta)$, à la famille d'états cohérents $\psi_{z\lambda}$, et à la fonction suivante:

$$S(z) = C_1 \lambda^2 (1 + p(z, \pi_\lambda))^{2+n}.$$

On déduit de la proposition 6.7, (avec $m = 0$, $N = 0$), que, pour tout réel k :

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} \left(\frac{1 + \sup(p(z, \pi_\lambda), p(\omega, \pi))}{1 + \inf(p(z, \pi_\lambda), p(\omega, \pi_\lambda))} \right)^k |(\psi_{z\lambda}, \psi_{w\lambda})| \, dw \leqq A_k (1 + p(z, \pi_\lambda)))^n.$$

Par conséquent, (le paramètre λ de la section 1 étant ici λ^2), l'hypothèse (1.6) est vérifiée, avec une constante C qui ne dépend que de $\mathcal{G}$, et $\alpha = n/2 + n$. Nous en déduisons que, pour tout $k > 0$, il existe une constante R, indépendante de π et de λ, telle que :

$$N(R\lambda^2) \geqq \frac{1}{2} (2\pi)^{-n} \operatorname{mes} \{z \in \mathbb{R}^{2n}, \, S(z) \leqq k\lambda^2\}.$$

Si on choisi $k = C_1 2^{n+2}$, on obtient :

$$N(R\lambda^2) \geqq \frac{1}{2} (2\pi)^{-n} \operatorname{mes} \{z \in \mathbb{R}^{2n}, \, p(z, \pi_\lambda) \leqq 1\} = \frac{1}{2} (2\pi)^{-n} N_0(\lambda^2),$$

ce qui prouve l'inégalité de gauche de (7.3).

8. Partitions de l'unité dans un espace métrique

Cette section est l'une des étapes de la construction de la famille de symboles qui, par le calcul de Wick, nous fournira notre « diagonalisation approchée » (dans la proposition 9.4). Cette étape dépasse le cadre des groupes nilpotents et présente peut-être un intérêt propre.

Soient (E, d) un espace métrique localement compact, et μ une mesure de Radon positive sur E. Pour tous $x \in E$ et $R > 0$, on suppose que la boule fermée $B(x, R)$ de centre x et de rayon R est compacte, et que sa mesure, notée $m(x, R)$, est strictement positive. On suppose aussi que la fonction $x \to m(x, R)$ est continue.

THÉORÈME 8.1. – *On suppose qu'il existe* $K > 0$ *tel que*

(8.1) $$m(x, 5) \leqq K\, m(x, 1), \qquad \forall x \in E.$$

Alors, il existe une fonction $(t, x) \to a_t(x) \geqq 0$, *mesurable sur* $E \times E$, *telle que :*

1. *On a, pour tout* $x \in E$:

$$\int_E a_t(x)^2 \, d\mu(t) = 1$$

2. *On a* $a_t(x) = 0$ *si* $d(x, t) \geqq 2$.

3. *On a, pour tous x et y dans E :*

$$\int_E (a_t(x) - a_t(y))^2 \, d\mu(t) \leqq C \, d(x, y)^2$$

où la constante C ne dépend que la constante K de l'hypothèse (8.1).

1^re^ étape. – Pour tout $t \in E$, soit :

$$q(t) = \inf \{m(z, 1), \ z \in B(t, 1)\}.$$

On remarque que, pour tout $x \in E$:

$$\int_{B(x,1)} \frac{d\mu(t)}{q(t)} \geqq \int_{B(x,1)} \frac{d\mu(t)}{m(x, 1)} = \frac{m(x, 1)}{m(x, 1)} = 1. \tag{8.2}$$

Montrons maintenant que, si $x \in E$:

$$\int_{B(x,2)} \frac{d\mu(t)}{q(t)} \leqq K.$$

En effet, si $t \in B(x, 2)$, on a :

$$q(t) \geqq \inf \{m(z, 1), \ z \in B(x, 3)\}.$$

Soit z_0 l'un des points de $B(x, 3)$ ou l'inf est atteint. On a :

$$\int_{B(x,2)} \frac{d\mu(t)}{q(t)} \leqq \int_{B(x,2)} \frac{d\mu(t)}{m(z_0, 1)} = \frac{m(x, 2)}{m(z_0, 1)} \leqq \frac{m(z_0, 5)}{m(z_0, 1)} \leqq K.$$

En effet, $B(x, 2)$ est contenue dans $B(z_0, 5)$, ce qui nous permet d'appliquer l'hypothèse (8.1).

2^e^ étape. – Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que :

$$\chi(t) = 1 \quad \text{si } |t| \leqq 1, \qquad \chi(t) = 0 \quad \text{si } |t| \geqq 2, \text{ et } 0 \leqq \chi(t) \leqq 1, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Soit $M = \sup |\chi'(t)|$. Posons :

$$f(x) = \int_E \chi(d(x, t))^2 \frac{d\mu(t)}{q(t)}.$$

D'après (8.2), on a, pour tout $x \in E$:

$$f(x) \geqq \int_{B(x,1)} \frac{d\mu(t)}{q(t)} \geqq 1. \tag{8.3}$$

On a aussi, pour tous x et y dans E :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leqq 2 \int_E |\chi(d(x, t)) - \chi(d(y, t))| \frac{d\mu(t)}{q(t)} \\ &\leqq 2 M d(x, y) \left(\int_{B(x,2)} \frac{d\mu(t)}{q(t)} + \int_{B(y,2)} \frac{d\mu(t)}{q(t)} \right) \\ &\leqq 4 K M d(x, y). \end{aligned} \tag{8.4}$$

3^e étape. – On pose :

$$a_t(x) = \frac{\chi(d(x, t))}{(f(x)\, q(t))^{1/2}}.$$

Les points 1 et 2 du théorème sont faciles à vérifier. D'après (8.3) et (8.4), on a, pour tous x et y dans E :

$$\begin{aligned} |a_t(x) - a_t(y)| &\leqq q(t)^{-1/2} (|\chi(d(x, t)) - \chi(d(y, t))| + |f(x)^{-1/2} - f(y)^{-1/2}|) \\ &\leqq q(t)^{-1/2} (M\, d(x, y) + |f(x) - f(y)|) \\ &\leqq q(t)^{-1/2} M (1 + 4K)\, d(x, y). \end{aligned}$$

D'autre part, $a_t(x) - a_t(y) = 0$ si t n'est pas dans $B(x, 2) \cup B(y, 2)$. Par conséquent, pour tous x et y dans E :

$$\begin{aligned} &\int_E (a_t(x) - a_t(y))^2\, d\mu(t) \\ &\quad \leqq M^2 (1 + 4K)^2\, d(x, y)^2 \left(\int_{B(x, 2)} \frac{d\mu(t)}{q(t)} + \int_{B(y, 2)} \frac{d\mu(t)}{q(t)} \right) \\ &\quad \leqq 2KM^2 (1 + 4K)^2\, d(x, y)^2. \end{aligned}$$

Le théorème est démontré.

9. Partition de l'unité associée à une représentation

Désormais, l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est supposée stratifiée.

PROPOSITION 9.1. – *Pour toute représentation induite π de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$, il existe une fonction $(z, w) \to a_w(z) \geqq 0$, mesurable sur $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$, telle que :*

1. *Pour tout $w \in \mathbb{R}^{2n}$, on a :*

(9.1) $$\operatorname{supp} a_w \subset \{z \in \mathbb{R}^{2n},\ |\chi_w(z)| \leqq C(\varepsilon)\}$$

où $C(\varepsilon)$ dépend de $\varepsilon \in]0, 1]$, mais non de π, ni de w.

2. *On a, pour tout $z \in \mathbb{R}^{2n}$:*

(9.2) $$\int_{\mathbb{R}^{2n}} a_w(z)^2\, dw = 1.$$

3. *Pour tous $z = (x, \xi)$et $z' = (x', \xi')$ tels que (avec les notations du paragraphe 5) :*

(9.3) $$x' \in V(x, 1), \qquad p(z, \pi) \leqq \frac{1}{\varepsilon}, \quad 0 \leqq \varepsilon \leqq 1$$

on a :

(9.4) $$\int_{\mathbb{R}^{2n}} |a_w(z) - a_w(z')|^2\, dw \leqq C\, \varepsilon^2 (1 + |\chi_z(z')|^2)$$

où $C > 0$ ne dépend ni de ε, ni de π, z et z'.

Démonstration. 1re étape. – Soient π_ε la représentation $\pi_\varepsilon = \pi \circ \delta_\varepsilon^{-1}$, et $\delta(x, y, \pi_\varepsilon)$ la distance sur $\mathbb{R}^n$ associée à π_ε comme dans la section 5. D'après le corollaire 5.4, il existe $K > 0$, indépendant de ε, π et x, tel que :

$$\operatorname{mes} B(x, \pi_\varepsilon, 1) \leqq K \operatorname{mes} B\left(x, \pi_\varepsilon, \frac{1}{5}\right), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

où $B(x, \pi_\varepsilon, R)$ est la boule de centre x et de rayon R pour la distance $\delta(., ., \pi_\varepsilon)$. L'hypothèse du théorème 8.1 étant vérifiée (avec $E = \mathbb{R}^n$), il existe une fonction $(y, x) \to b_y(x) \geqq 0$, mesurable sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, telle que ;

$$\operatorname{supp} b_y \subset B\left(y, \pi_\varepsilon, \frac{2}{5}\right), \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n \tag{9.5}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} b_y(x)^2\, dy = 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{9.6}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |b_y(x) - b_y(x')|^2\, dy \leqq C\, \delta(x, x', \pi_\varepsilon)^2 \tag{9.7}$$

pour tous x et x' dans $\mathbb{R}^n$, où C ne dépend, comme K, ni de ε, ni de π et x. Admettons un instant le lemme suivant, démontré plus tard.

LEMME 9.2. – *Il existe C et $N > 0$, ne dépendant que de $\mathcal{G}$, tels qu'on ait les implications suivantes :*

$$\delta(x, y, \pi_\varepsilon) \leqq 1 \quad \Rightarrow \quad x \in V(y, C\,\varepsilon^{-N}) \tag{9.8}$$

$$y \in V(x, 1) \quad \Rightarrow \quad \delta(x, y, \pi_\varepsilon) \leqq C\,\varepsilon \tag{9.9}$$

pour tous x et y dans $\mathbb{R}^n$.

On déduit de (9.5) et (9.8) que :

$$b_y(x) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad |u_y(x)| \leqq C\,\varepsilon^{-N}. \tag{9.10}$$

On déduit de (9.7) et (9.9) que, si $x' \in V(x, 1)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |b_y(x) - b_y(x')|^2\, dy \leqq C\,\varepsilon^2. \tag{9.11}$$

2e étape. – En tout point $y \in \mathbb{R}^n$, soient $\chi_y = (u_y, v_y)$ le difféomorphisme et $J(y)$ la constante définis en (2.12) et (2.10). Soit $\Phi \geqq 0$ une fonction dans $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, supportée dans la boule unité, telle que $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(v)^2\, dv = 1$. Pour tout $(y, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}$, et pour tout $\varepsilon_1 \in]0, 1]$ (ce nouveau paramètre sera choisi plus tard en fonction de ε), posons :

$$e_{y\eta}(x, \xi) = (\varepsilon_1)^{n/2}\, J(y)^{1/2}\, \Phi(\varepsilon_1(v_y(x, \xi) - v_y(y, \eta))). \tag{9.12}$$

Si on note que $\eta \to v_y(y, \eta)$ est un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$, dont le jacobien, constant, est $J(y)$, on voit que, pour tous y, x et ξ :

$$\int_{\mathbb{R}^n} e_{y\eta}(x, \xi)^2\, d\eta = 1. \tag{9.13}$$

Il résulte de la définition (9.12) que :

$$\operatorname{supp} e_{y\eta} \subset \left\{(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n},\ |v_y(x, \xi) - v_y(y, \eta)| \leqq \frac{1}{\varepsilon_1}\right\}. \tag{9.14}$$

Il existe $M > 0$ tel que, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\Phi(v + h) - \Phi(v)|^2\, dv \leqq M|h|^2.$$

On en déduit aussitôt que, pour tous (x, ξ), (x', ξ') et y :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |e_{y\eta}(x, \xi) - e_{y\eta}(x', \xi')|^2\, d\eta \leqq M(\varepsilon_1)^2\, |v_y(x, \xi) - v_y(x', \xi')|^2. \tag{9.15}$$

Posons $(s, \sigma) = \chi_{x\xi}(x', \xi')$. Autrement dit :

$$s = u_x(x'), \qquad \sigma = v_x(x', \xi') - v_x(x, \xi). \tag{9.16}$$

Si (9.3) est vérifié, on a $|s| \leqq 1$. Soit $W(R(\varepsilon), \pi)$ l'ensemble de la proposition 6.3, correspondant à $R(\varepsilon) = \sup(\varepsilon^{-1}, C\varepsilon^{-N})$, où C et ε sont les constantes de (9.10). On déduit de (9.10) l'implication :

$$p(x, \xi, \pi) \leqq \varepsilon^{-1} \quad \text{et} \quad b_y(x) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad ((y, \eta), (x, \xi)) \in W(R(\varepsilon), \pi). \tag{9.17}$$

D'après le point 2 de la proposition 6.3, on peut écrire, si les hypothèses à gauche de (9.17) sont vérifiées :

$$|(\chi_{y\eta} \circ \chi_{x\xi}^{-1})(s, \sigma) - (\chi_{y\eta} \circ \chi_{x\xi}^{-1})(0, 0)| \leqq C(R(\varepsilon))(1 + |\sigma|). \tag{9.18}$$

Or, d'après (9.16) :

$$(\chi_{y\eta} \circ \chi_{x\xi}^{-1})(s, \sigma) = (u_y(x'), v_y(x', \xi') - v_y(y, \eta)) \tag{9.19}$$

$$(\chi_{y\eta} \circ \chi_{y\xi}^{-1})(0, 0) = (u_y(x), v_y(x, \xi) - v_y(y, \eta)). \tag{9.20}$$

Si les hypothèses de (9.17) sont vérifiées, les points (9.16) à (9.20) entraînent que :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |e_{y\eta}(x, \xi) - e_{y\eta}(x', \xi')|^2\, d\eta \\ \leqq M(\varepsilon_1)^2 C(R(\varepsilon))^2\, (1 + |v_x(x', \xi') - v_x(x, \xi)|)^2. \end{aligned} \tag{9.21}$$

3e étape. – On choisit maintenant ε_1, en fonction de ε, de telle sorte que $\varepsilon_1 C(R(\varepsilon)) \leqq \varepsilon$. Si b_y est la fonction de la première étape (pour le paramètre ε), et si $e_{y\eta}$ est celle de la deuxième étape (correspondant au paramètre ε_1 ainsi choisi), on pose :

$$a_{y\eta}(x, \xi) = b_y(x)\, e_{y\eta}(x, \xi). \tag{9.22}$$

Le point 1 de la proposition résulte de (9.10) et (9.14). Le point 2 résulte de (9.6) et (9.13). Le point 3 résulte de (9.11) et (9.21) et du choix de ε_1. La proposition est démontrée.

Preuve du lemme 9.2. – Si la structure euclidienne de $\mathcal{G}$ est telle que les sous-espaces $\mathcal{G}_j$ soient orthogonaux, on a :

$$\varepsilon^{-1} \|X\| \leqq \|\delta_\varepsilon^{-1} X\| \leqq \varepsilon^{-r} \|X\|, \qquad \forall X \in \mathcal{G}, \qquad \forall \varepsilon \in]0, 1].$$

Par conséquent, la distance Riemannienne $\delta(x, y, \pi)$ dont le ds^2 est défini en (5.2) vérifie :

$$\varepsilon^{-1} \delta(x, y, \pi_\varepsilon) \leqq \delta(x, y, \pi) \leqq \varepsilon^{-r} \delta(x, y, \pi_\varepsilon) \tag{9.23}$$

pour tous x et y dans $\mathbb{R}^n$, et ε dans $]0, 1]$. Soient C et N les constantes de la proposition 5.1. Si $\delta(x, y, \pi_\varepsilon) \leqq 1$, donc $\delta(x, y, \pi) \leqq \varepsilon^{-r}$, la proposition 5.1 montre que $x \in V(y, C(\varepsilon^{-r} + \varepsilon^{-Nr}))$, d'où l'implication (9.8). Si $y \in V(x, 1)$, ce qui entraîne $\delta(x, y, \pi) \leqq 2C$ d'après la proposition 5.1, l'inégalité (9.23) montre que $\delta(x, y, \pi_\varepsilon) \leqq 2C\varepsilon$, d'où l'implication (9.9).

COROLLAIRE 9.3. – *La fonction $a_w(z)$ de la proposition* 9.1 *possède les propriétés suivantes :*

1. *On a l'implication suivante [où $C(\varepsilon)$ ne dépend pas de z, w et π] :*

$$a_w(z) \neq 0 \qquad et \qquad p(z, \pi) \leqq \varepsilon^{-1} \quad \Rightarrow \quad p(w, \pi) \leqq C(\varepsilon). \tag{9.24}$$

2. *La mesure du support de a_w est $\leqq C(\varepsilon)$.*

3. *Soient $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\varepsilon \in]0, 1]$, fixées. Alors la fonction $U_w^* U_z \psi$ reste bornée dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, indépendamment de π et de z et $w \in \mathbb{R}^{2n}$ lorsque les conditions de* (9.24) *sont vérifiées.*

Démonstration. – Le point 1 résulte de (9.1) et de la proposition 3.3. Le point 2 résulte évidemment de (9.1) [avec un autre $C(\varepsilon)$] puisque χ_w est symplectique. Soient $C(\varepsilon)$ la constante de (9.1), et $R(\varepsilon) = \sup(C(\varepsilon), \varepsilon^{-1})$. Si z et w vérifient les conditions de (9.24), le point (9.1) montre que (w, z) est dans l'ensemble $V(R(\varepsilon), \pi)$ de la proposition 6.3, et le point 3 résulte de cette proposition.

Le calcul de Wick va nous permettre d'associer à la partition de l'unité de la proposition 9.1 une résolution approchée de l'identité, dont nous allons étudier les commutateurs avec les opérateurs $\pi(P)\,(P \in \mathcal{U}(\mathcal{G}))$.

Posons, pour toute représentation induite π et pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$:

$$A_\varepsilon = \{z \in \mathbb{R}^{2n},\ p(z, \pi) \leqq \varepsilon^{-1}\}. \tag{9.25}$$

Si $a_w(z)$ est la fonction de la proposition 9.1, on définit, pour tout $w \in \mathbb{R}^{2n}$, un opérateur $A(w)$ de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (qui dépend, comme a_w, de ε et π) en posant :

$$A(w) f = \int_{A_\varepsilon} a_w(z)\,(f, \psi_z)\,\psi_z\,dz. \tag{9.26}$$

PROPOSITION 9.4. – *Avec les notations ci-dessus :*

1. *Pour tout $P \in \mathcal{U}_{2m}(\mathcal{G})$, et pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on peut écrire :*

$$(\pi(P) f, f) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} (\pi(P) A(w) f,\ A(w) f)\,dw + E(f) \tag{9.27}$$

avec :

$$|E(f)| \leqq C\,\varepsilon\, \|f\|_{m'\pi}^2 \tag{9.28}$$

où m' est le plus petit entier $\geqq \dfrac{r}{2}(m+n+3)$, et où C est indépendant de π, de f, et de $\varepsilon \in]0,\ 1]$.

2. *L'opérateur $A(w)$ est nul si $p(w,\ \pi) \geqq C(\varepsilon)$.*

3. *Pour tout multi-indice $(\alpha,\ \beta)$, il existe $C_{\alpha,\,\beta}(\varepsilon)$ (indépendant de π), tel que :*

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} \|t^\alpha D_t^\beta U_w^* A(w) f\|^2\, dz \leqq C_{\alpha\beta}(\varepsilon)\, \|f\|^2, \qquad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{9.29}$$

Démonstration. Point 1. – On a déjà vu que :

$$(\pi(P) f,\ f) = \int_{\mathbb{R}^{4n}} (f,\ \psi_z)(\pi(P)\psi_z,\ \psi_w)(\psi_w,\ f)\, dz\, dw.$$

D'après la définition (9.26) des opérateurs $A(q)$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} (\pi(P) A(q) f,\ A(q) f)\, dq$$
$$= \int_{z\in A_\varepsilon,\, w\in A_\varepsilon} a_q(z)\, a_q(w)\, (f,\ \psi_z)(\pi(P)\psi_z,\ \psi_w)(\psi_w,\ f)\, dz\, dw\, dq.$$

Il résulte de (9.2) que, pour tous z et w dans $\mathbb{R}^{2n}$:

$$1 = \int_{\mathbb{R}^{2n}} a_q(z)\, a_q(w)\, dq + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{2n}} (a_q(z) - a_q(w))^2\, dq.$$

On déduit de ces trois égalités la majoration suivante de la quantité $E(f)$ définie par l'égalité (9.27) :

$$|E(f)| \leqq E_1(f) + E_2(f)$$

où :

$$E_1(f) = 2\int_{z\notin A_\varepsilon} |(f,\ \psi_z)(\pi(P)\psi_z,\ \psi_w)(\psi_w,\ f)|\, dz\, dw$$

$$E_2(f) = \frac{1}{2}\int_{z\in A_\varepsilon} |a_q(z) - a_q(w)|^2\, |(f,\ \psi_z)(\pi(P)\psi_z,\ \psi_w)(\psi_w,\ f)|\, dz\, dw\, dq.$$

D'après la définition (9.25) de A_ε, on peut écrire :

$$|E_1(f)| \leqq 2\,\varepsilon \int_{\mathbb{R}^{4n}} p(z,\ \pi)|(f,\ \psi_z)(\pi(P)\psi_z,\ \psi_w)(\psi_w,\ f)|\, dz\, dw.$$

On a remarqué en (6.17) que, dans l'intégrale qui définit $E_2(f)$, la fonction sous le signe d'intégration est nulle sauf si, en posant $z = (x, \xi)$ et $w = (y, \eta)$, on a $|u_x(y)| \leqq 1$. Comme, dans ce domaine d'intégration, on a $p(z, \pi) \leqq \varepsilon^{-1}$, le point 3 de la proposition 9.1 nous permet d'écrire :

$$|E_2(f)| \leqq C\varepsilon \int_{\mathbb{R}^{4n}} (1 + |v_x(x, \xi) - v_x(y, \eta)|)^2 |(f, \psi_z)(\pi(P)\psi_z, \psi_w)(\psi_w, f)| dz\, dw.$$

En ajoutant ces deux inégalités, on peut écrire :

$$|E(f)| \leqq C\varepsilon \int_{\mathbb{R}^{4n}} F(z) F(w) K(z, w)\, dz\, dw.$$

en posant, avec la notation (6.21) :

$$F(z) = |(f, \psi_z)|(1 + p(z, \pi))^\alpha, \qquad \alpha = \frac{1}{2}(m + n + 3)$$
$$F(z, w) = |(\pi(P)\psi_z, \psi_w)| R_{(\alpha-1, \alpha, 2)}(z, w).$$

D'après la proposition 6.7, $K(z, w)$ est le noyau d'un opérateur borné dans $L^2(\mathbb{R}^{2n})$, indépendamment des divers paramètres. On peut donc écrire :

$$|E(f)| \leqq C\varepsilon \int_{\mathbb{R}^{2n}} F(z)^2\, dz = C\varepsilon \int_{\mathbb{R}^{2n}} |(f, \psi_z)|(1 + p(z, \pi))^{m+n+3}\, dz$$

où $C > 0$ ne dépend ni de ε, ni de π, ni de f. Si m' est le plus petit entier $\geqq \frac{r}{2}(m+n+3)$, la proposition 4.2 nous permet d'en déduire l'inégalité (9.28).

Point 2. – D'après les définitions (9.26) de $A(w)$ et (9.25) de l'ensemble A_ε, on voit que $A(w)$ est nul sauf s'il existe z tel que $a_w(z) \neq 0$ et $p(x, \pi) \leqq \varepsilon^{-1}$, ce qui entraîne $p(w, \pi) \leqq C(\varepsilon)$ d'après (9.24).

Point 3. – On a, pour tous $w \in \mathbb{R}^{2n}$ et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$\|t^\alpha D_t^\beta U_w^* A(w) f\| \leqq \int_{A_\varepsilon} |a_w(z)(f, \psi_z)|\, \|t^\alpha D_t^\beta U_w^* \psi_z\|\, dz.$$

Par définition (2.18), on a $\psi_z = U_z \psi$, où ψ est une fonction choisie une fois pour toutes dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. La fonction sous le signe d'intégration est nulle sauf si les points z et w vérifient (9.24). Le point 3 du corollaire 9.3 nous permet donc d'écrire :

$$\|t^\alpha D_t^\beta U_w^* A(w) f\| \leqq C_{\alpha\beta}(\varepsilon, \psi) \int_{\mathbb{R}^{2n}} |a_w(z)\ (f, \psi_z)|\, dz.$$

D'après le point 2 du corollaire 9.3, la mesure du support de a_w est $\leqq C(\varepsilon)$, ce qui donne, en appliquant Cauchy-Schwarz, avec une autre constante $C_{\alpha\beta}(\varepsilon, \psi)$:

$$\|t^\alpha D_t^\beta U_w^* A(w) f\|^2 \leqq C_{\alpha\beta}(\varepsilon, \psi) \int_{\mathbb{R}^{2n}} a_w(z)^2\, |(f, \psi_z)|^2 dz.$$

En intégrant par rapport à w, et en utilisant (9.2) et (2.19), on en déduit aussitôt (9.29).

10. Décomposition de Littlewood-Paley

L'emploi du seul calcul de Wick serait insuffisant pour prouver le théorème 1. Il n'a pu aboutir qu'à la proposition 9.4, où apparaissent des termes d'erreur excessifs. Il nous faudra combiner le calcul de Wick (analogue, dans le cas classique, à un découpage de $\mathbb{R}^{2n}$ en cubes de côté constant), avec l'analogue d'une « décomposition de Littlewood-Paley » (c'est-à-dire, classiquement, d'un découpage, dans les variables ξ, en couronnes sphériques). Nous allons présenter ici un analogue de cette technique de Littlewood-Paley, qui servira peut-être dans d'autres situations où l'on dispose d'une chaîne convenable d'espaces de Sobolev.

Soit $(A,\ D(A))$ un opérateur auto-adjoint positif dans un espace de Hilbert séparable H. Pour tout réel $m > 0$, et pour tout $f \in D(A^m)$, on pose :

$$|||f|||_m = ||A^m f||$$

PROPOSITION 10.1. – *Pour tout $\delta \in]0,\ 1]$, il existe une famille d'opérateurs*

$$\Psi(\lambda) : H \to D(A^\infty) \qquad (\lambda > 0)$$

ayant les propriétés suivantes :

1. *Pour tous $m \geqq 0$, $m' \geqq 0$ et $\delta \in]0,\ 1]$, et pour tout $f \in D(A^m)$, on peut écrire :*

$$\int_0^\infty \lambda^{2m-2m'}\, |||\Psi(\lambda)\, f|||_{m'}^2\, d\lambda = C(\delta)\, |||f|||_m^2 \tag{10.1}$$

où $C(\delta)$ ne dépend que de m, m' et δ.

2. *Soit P un opérateur tel que $D(P)$ et $D(P^*)$ contiennent $D(A^{2M})$ $(m > 0)$, et tel qu'il existe $C > 0$ vérifiant :*

$$||P\, f|| + ||P^*\, f|| \leqq C|||f|||_{2m}, \qquad \forall f \in D(A^{2m}) \tag{10.2}$$

(avec $C > 0$ indépendant de f). Alors, on peut écrire, pour tout $f \in D(A^{2m})$:

$$(P\, f,\ f) = \int_0^\infty (P\, \Psi(\lambda)\, f,\ \Psi(\lambda)\, f)\, d\lambda + R(f)$$

avec $|R(f)| \leqq C'\, \delta\, |||f|||_m^2$ (où C' est une constante, indépendante de δ).

Application. – Soient $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie stratifiée, $X_1, \cdots, X_p$ une base du sous-espace $\mathcal{G}_1$ (avec les notations (0.11)), et Δ l'élément suivant de $\mathcal{U}_2(\mathcal{G})$:

$$\Delta = -\sum_{j=1}^{p} X_j^2$$

Si π est une représentation induite, on sait, d'après Folland [4] que l'opérateur $\pi(\Delta)$, avec pour domaine $H_{2\pi}$, est auto-adjoint positif. Notons A la racine carrée de cet opérateur. Il est démontré dans Folland [4] que, pour tout $m \geqq 0$, $D(A^m)$ coïncide avec l'espace $H_{m\pi}$ défini dans la section 4.

Comme dans l'introduction, notons (A_{jm}) une base de $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ (l'espace des homogènes de degré m dans l'algèbre enveloppante), et posons :

$$|||f|||^2_{m\pi} = \sum_j \|\pi(A_{jm}) f\|^2.$$

Puisqu'ici l'algèbre est supposée stratifiée, on peut écrire, de manière équivalente, (en notant $X_1, \cdots, X_p$ une base du sous-espace $\mathcal{G}_1$ et en adoptant les notations de la section 4) :

$$|||f|||^2_{m\pi} = \sum_{|a|=m} \|\pi(X^\alpha) f\|^2. \tag{10.3}$$

Folland a aussi montré que, pour tout $m \geqq 0$, il existe $C_m > 1$, indépendant de π, tel que :

$$\frac{1}{C_m}\|A^m f\| \leqq |||f|||_{m\pi} \leqq C_m \|, A^m f\|, \qquad \forall f \in H_{m\pi}.$$

Si P est un élément de $\mathcal{U}_{2m}(\mathcal{G})$, l'opérateur $\pi(P)$ vérifie évidemment l'hypothèse du point 2 de la proposition 10.1. Les inégalités du point 2 peuvent donc s'écrire, avec ces notations :

$$\int_0^\infty \lambda^{2m-2m'} |||\Psi(\lambda) f|||^2_{m'\pi} \, d\lambda = C(\delta) |||f|||^2_{m\pi} \tag{10.4}$$

$$(\pi(P) f, f) = \int_0^\infty (\pi(P)\Psi(\lambda) f, \Psi(\lambda) f) \, d\lambda + R(f) \tag{10.5}$$

avec $|R(f)| \leqq C\delta |||f|||^2_{m\pi}$. Les constantes C et $C(\delta)$ sont indépendantes de π.

La preuve de la proposition 10.1 utilise le lemme suivant.

LEMME 10.2. – *Pour tout* $\delta \in]0, 1]$, *il existe une fonction* χ_δ *dans* $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ *qui possède les trois propriétés suivantes.*

1. *Le support de* χ_δ *est contenu dans* $[e^{-1/\delta}, e^{1/\delta}]$.
2. *On a*

$$\int_0^\infty \chi_\delta(t)^2 \frac{dt}{t} = 1. \tag{10.6}$$

3. *Il existe* $C > 0$ *indépendant de* δ *tel que :*

$$\int_0^\infty (\chi_\delta(\lambda t) - \chi_\delta(\lambda s))^2 \frac{d\lambda}{\lambda} \leqq C\delta \left(\mathrm{Log}\, \frac{t}{s}\right)^2 \tag{10.7}$$

pour tout $\delta \in]0, 1]$, *pour tous* s *et* $t > 0$.

Preuve du lemme. – Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, supportée dand $[-1, 1]$, telle que $\int_{-\infty}^\infty \chi_\delta(t)^2 \, dt = 1$. On pose, pour tout $\delta > 0$:

$$\chi_\delta(t) = \delta^{1/2} \chi(\delta \,\mathrm{Log}\, t).$$

Les propriétés du lemme sont faciles à vérifier.

Preuve de la proposition 10.1. – On choisit une fonction $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ dont le support est contenu dans [1, 2], et telle que :

$$\int_0^\infty \Phi(t)\,\frac{dt}{t} = 1.$$

On pose alors :

$$\Psi(\lambda) f = \lambda^{-1/2} \int_0^\infty \chi_\delta(\lambda t)\,\Phi(t A)\, f\,\frac{dt}{t}$$

où $\Phi(t A)$ est défini par le théorème spectral.

Vérification du point 1. – Pour tous m et m' réels, l'intégrale suivante est convergente :

$$C(\delta) = \int_0^\infty s^{2(m-m')} \left| \int_0^\infty \chi_\delta(t)\,\Phi\left(\frac{t}{s}\right) \frac{dt}{t} \right|^2 \frac{ds}{s}.$$

On en déduit facilement, par homogénéité, que, pour tout $\mu > 0$:

$$\int_0^\infty \lambda^{2(m-m')}\,\mu^{2m'} \left| \int_0^\infty \chi_\delta(\lambda t)\,\Phi(t\mu)\,\frac{dt}{t} \right|^2 \frac{d\lambda}{\lambda} = C(\delta)\,\mu^{2m}.$$

D'après le théorème spectral, on a, pour tout $f \in H$ et $m' \geqq 0$:

$$\|A^{m'}\,\Psi(\lambda) f\|^2 = \lambda^{-1} \int_0^\infty \mu^{2m'} \left| \int_0^\infty \chi_\delta(\lambda t)\,\Phi(t\mu)\,\frac{dt}{t} \right|^2 d(E_\mu f,\, f)$$

où dE_μ est la mesure spectrale de l'opérateur A. Par conséquent :

$$\int_0^\infty \lambda^{2m-2m'}\,|||\Psi(\lambda) f|||_{m'}^2\, d\lambda = C(\delta) \int_0^\infty \mu^{2m}\, d\,(E_\mu f,\, f) = C(\delta) |||f|||_m^2.$$

Vérification du point 2. – Pour tous f et g dans H, on a :

$$\left| \int_0^\infty (\Phi(t A) f,\, g)\,\frac{dt}{t} \right| \leqq \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \Phi(t\mu)\,|d(E_\mu f,\, g)|\,\frac{dt}{t} = \int_{\mathbb{R}} |d(E_\mu f,\, g)| \leqq \|f\|\,\|g\|$$

Par conséquent, pour tout $f \in H$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty \Phi(t A)\, f\,\frac{dt}{t}$ existe au sens faible, et :

$$f = \int_0^\infty \Phi(t A)\, f\,\frac{dt}{t}.$$

Par conséquent, si $f \in D(A^{2m})$:

$$(P f,\, f) = \int_0^\infty \int_0^\infty (P\,\Phi(t A) f,\, \Phi(s A) f)\,\frac{dt}{t}\,\frac{ds}{s}.$$

D'après (10.6), on peut écrire, pour tous s et $t > 0$:

$$1 = \int_0^\infty \left[\chi_\delta(\lambda t)\,\chi_\delta(\lambda s) + \frac{1}{2}(\chi_\delta(\lambda t) - \chi_\delta(\lambda s))^2 \right] \frac{d\lambda}{\lambda}.$$

On déduit de ces deux égalités la suivante :

$$(P f,\, f) = I_1 + I_2 + I_3$$

où on a posé :

$$I_1 = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \chi_\delta(\lambda t)\,\chi_\delta(\lambda s)\,(P\,\Phi(t\,A)\,f,\ \Phi(s\,A)\,f)\ \frac{dt}{t}\,\frac{ds}{s}\,\frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int\int\int_{s<t} (\chi_\delta(\lambda t) - \chi_\delta(\lambda s))^2\,(P\,\Phi(t\,A)\,f,\ \Phi(s\,A)\,f)\ \frac{dt}{t}\,\frac{ds}{s}\,\frac{d\lambda}{\lambda}$$

et I_3 est l'intégrale analogue, portant sur le domaine où $s > t$. D'après la définition de $\Psi(\lambda)$ et l'hypothèse du point 2, on voit que $t \to \chi_\delta(\lambda t)\,\Phi(t\,A)\,f$ est dans $L^1\left(\frac{dt}{t},\ D(P)\right)$, et donc que :

$$I_1 = \int_0^\infty (P\,\Psi(\lambda)\ f,\ \Psi(\lambda)\,f)\,d\lambda.$$

Il reste à majorer I_2 et I_3. D'après (10.7) et (10.2), on peut écrire :

$$\begin{aligned}|I_2| &\leqq C\,\delta\int\int_{s<t}\left(\operatorname{Log}\frac{t}{s}\right)^2 |||\Phi(t\,A)\,f|||_{2m}\,||\Phi(s\,A)\,f||\ \frac{dt}{t}\,\frac{ds}{s}\\ &= C\,\delta\int_0^\infty K\left(\frac{t}{s}\right)F(t)\,G(s)\,\frac{dt}{t}\,\frac{ds}{s}\end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$\begin{aligned}F(t) &= t^m\,|||\Phi(t\,A)\,f|||_{2m}\\ G(s) &= s^{-m}\,||\Phi(s\,A)\,f||\\ K(t) &= (\operatorname{Log} t)^2\,t^{-m} \qquad \text{si} \quad t > 1\\ K(t) &= 0 \qquad \text{si} \quad t < 1.\end{aligned}$$

On voit facilement que K est dans $L^1\left(\mathbb{R}^+,\ \frac{dt}{t}\right)$. Il existe donc $C > 0$ tel que :

(10.8) $$|I_2|^2 \leqq C\,\delta^2\int_0^\infty F(t)^2\,\frac{dt}{t}\int_0^\infty G(t)^2\,\frac{dt}{t}.$$

Posons :

$$C_1 = \int_0^\infty t^{2m}\,\Phi(t)^2\,\frac{dt}{t} \qquad \text{et} \qquad C_2 = \int_0^\infty t^{-2m}\,\Phi(t)^2\,\frac{dt}{t}.$$

On a, d'après le théorème spectral :

(10.9) $$\begin{aligned}\int_0^\infty F(t)\,\frac{dt}{t} &= \int_0^\infty\int_0^\infty t^{2m}\,\lambda^{4m}\,\Phi(t\,\lambda)^2\,\frac{dt}{t}\,d(E_\lambda f,\ f)\\ &= C_1\int_0^\infty \lambda^{2m}\,d(E_\lambda f,\ f) = C_1\,|||f|||_m^2\end{aligned}$$

De même :

$$\text{(10.10)} \qquad \int_0^\infty G(t)^2 \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \int_0^\infty t^{-2m}\, \Phi(t\lambda)^2 \frac{dt}{t}\, d(E_\lambda f, f)$$
$$= C_2 \int_0^\infty \lambda^{2m}\, d(E_\lambda f, f) = C_2\, |||f|||_m^2.$$

D'après (10.8), (10.9) et (10.10), on peut écrire :

$$|I_2| \leqq C\,\delta |||f|||_m^2.$$

La majoration de I_3 est identique en permutant les rôles de s et t et en utilisant la majoration de $||P^*\,\Psi(\lambda)\, f||$ qui provient de l'hypothèse (10.2). La proposition 10.1 est démontrée.

11. Diagonalisation approchée de $\pi(P)$

Dans cette section, $\mathcal{G}$ est une algèbre stratifiée, et π est une représentation induite. Nous terminons ici la construction de la « diagonalisation approchée » (selon la terminologie de [3], Chap. IV, p. 194-195). Pour tous $z = (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ et $\lambda > 0$, notons $U_{z\lambda}$ et $\psi_{z\lambda}$ l'opérateur unitaire et l'état cohérent associés au point (x, ξ) et à la représentation $\pi_\lambda = \pi \circ \delta_\lambda^{-1}$ comme dans la section 2.

THÉORÈME 11.1. – *Avec les notations ci-dessus, pour tout* $\varepsilon \in]0, 1]$, *et pour toute représentation induite* π, *il existe une famille d'opérateurs*

$$T(z, \lambda, \pi) : L^2(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,(z \in \mathbb{R}^{2n},\ \lambda > 0),$$

telle que :

1. *Pour tout* $P \in \mathcal{U}_{2m}(\mathcal{G})$, *et pour tout* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *on peut écrire :*

$$\text{(11.1)} \qquad (\pi(P) f, f) \int_{\mathbb{R}^{2n}} \int_0^\infty (\pi(P)\, T(z, \lambda, \pi) f,\ T(z, \lambda, \pi) f)\, dz\, d\lambda + E(f)$$

et il existe $C > 0$, *indépendant de* ε, π *et* f, *tel que, avec la notation* (10.3) *:*

$$|E(f)| \leqq C\,\varepsilon\, |||f|||_{m\pi}^2.$$

2. *L'opérateur* $T(z, \lambda, \pi)$ *est nul si* $p(z, \pi_\lambda) \geqq C(\varepsilon)$.

3. *Pour tout multi-indice* (α, β)*et pour tout* $m \geqq 0$, *il existe* $C_{\alpha\beta}(\varepsilon)$ *(indépendant de* π*), tel que :*

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} \int_0^\infty ||t^\alpha D_t^\beta U_{z\lambda}^*\, T(z, \lambda, \pi) f||^2 \lambda^{2m} dz\, d\lambda \leqq C_{\alpha\beta}(\varepsilon)\, |||f|||_{m\pi}^2.$$

Démonstration. – Soient ε et δ dans $]0, 1]$. Soit $A(z, \lambda)$ l'opérateur associé, selon la proposition 9.4, à la représentation $\pi_\lambda = \pi \circ \delta_\lambda^{-1}$, au point z et au paramètre ε. Soit $\Psi(\lambda)$ l'opérateur du théorème 10.1, correspondant au paramètre δ. Posons :

$$T(z, \lambda, \pi) = A(z, \lambda)\, \Psi(\lambda).$$

Vérifions le point 1. Pour tout $\lambda > 0$, on applique la proposition 9.4 à la représentation π_λ, avec le paramètre ε, ce qui donne, après multiplication par λ^{2m} :

$$(\pi(P)\,\Psi(\lambda)\,f,\ \Psi(\lambda)\,f) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} (\pi(P)\,T(z,\ \lambda)\,f,\ T(z,\ \lambda)\,f)\,dz + E_\lambda(f)$$

avec $|E_\lambda(f)| \leqq \varepsilon\lambda^{2m} \sum_{j=0}^{m'} \lambda^{-2j}\, |||\Psi(\lambda)\,f|||^2_{j\pi}$. En intégrant en λ de 0 à $+\infty$, et en utilisant le point 2, puis le point 1 de la proposition 10.1, on obtient l'égalité (11.1) avec :

$$\begin{aligned}|E(f)| &\leqq R(f) + \int_0^\infty E_\lambda(\Psi(\lambda)\,f)\,d\lambda \\ &\leqq C\,\delta\,|||f|||^2_{m\pi} + \varepsilon \int_0^\infty \lambda^{2m} \sum_{j=0}^{m'} \lambda^{-2j}\,||\Psi(\lambda)\,f||^2_{j\pi}\,d\lambda \\ &\leqq (C\,\delta + \varepsilon\,C\,\delta))\,|||f|||^2_{m\pi}.\end{aligned}$$

Le point 1 s'en déduit facilement (avec un autre ε). Le point 2 résulte de son analogue dans la proposition 9.4. En utilisant le point 3 de cette proposition, puis le point 1 de la proposition 10.1 (avec $m' = 0$), on peut écrire :

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^{2n}} \int_0^\infty ||t^\alpha\, D_t^\beta\, U_{z\lambda}^*\, T(z,\ \lambda,\ \pi)\,f||^2\,\lambda^{2m} dz\,d\lambda \\ &\quad\leqq C_{\alpha\beta}(\varepsilon) \int_0^\infty \lambda^{2m}\,||\Psi(\lambda)\,f||^2\,d\lambda \\ &\quad\leqq C_{\alpha\beta}(\varepsilon)\,C(\,\delta)\,|||f|||^2_{m\pi}.\end{aligned}$$

Le théorème est démontré.

12. Preuve du théorème 1.

La diagonalisation approchée étant construite, la fin de la preuve du théorème 1 ne présente aucune nouveauté par rapport à [7] ou [19]. Nous la détaillons cependant pour faciliter le lecture.

Nous faisons maintenant les hypothèses du théorème 1 : en particulier, l'algèbre $\mathcal{G}$ est stratifiée. Nous allons seulement prouver l'implication $1 \Rightarrow 2$, l'autre étant plus facile. On considère donc une suite $(l_\nu)\,(\nu \in \mathbb{N})$ dans $\mathcal{G}^* \setminus \{0\}$. On explicite les représentations π_{l_ν} (notées plus simplement π_ν désormais) comme on l'a expliqué dans la section 2. Quitte à décomposer la suite étudiée en un nombre fini de sous-suites, on peut supposer que toutes ces représentations sont réalisées dans un même espace $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, comme dans la section 2. Si π est une représentation de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ de la forme (2.1), on définit, pour tout $(x,\ \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, une forme linéaire $l_{(x,\,\xi)}$ sur $\mathcal{G}$ en posant :

$$l_{(x,\,\xi)}(X) = \frac{1}{i}\,\pi(X)\,(x,\ \xi), \qquad \forall X \in \mathcal{G}.$$

On note $S_0(\pi)$ l'ensemble de ces formes linéaires. Rappelons (*cf.* [7] ou [22]) que :

1. Si π est irréductible, l'ensemble $S_0(\pi)$ coïncide avec l'orbite de la représentation coadjointe qui correspond à π dans la théorie de Kirillov.

2. Si π n'est pas irréductible, l'ensemble $S_0(\pi)$ (dont l'adhérence est, très probablement, le « spectre », ou « support » de π), posède la propriété suivante. Pour l'élément $P \in \mathcal{U}_{2m}(\mathcal{G})$ du théorème 1, les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(\pi(P) f, f) \geqq 0, \qquad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{12.1}$$

$$(\pi_l(P) f, f) \geqq 0, \qquad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{k(l)}), \quad \forall l \in S_0(\pi). \tag{12.2}$$

D'après le point 1 ci-dessus, l'ensemble limite $\mathcal{L}$ associé à la suite (l_ν) comme dans l'introduction est aussi l'ensemble des formes linéaires $l \in \mathcal{G}^*$ telles qu'il existe une suite ν_k d'entiers, tendant vers $+\infty$, et des suites $(x_k, \xi_k) \in \mathbb{R}^{2n}$ et $\lambda_k > 0$ telles que :

$$l(X) = \frac{1}{i} \lim_{k \to \infty} \pi_{\nu_k}(\delta_{\lambda_k}^{-1}(X))(x_k, \xi_k), \qquad \forall X \in \mathcal{G}. \tag{12.3}$$

Si π est une représentation induite, z un point de $\mathbb{R}^{2n}$ et λ un réel positif, on note $U_{z\lambda\pi}$ l'opérateur associé, comme dans la section 2, à la représentation $\pi \circ \delta_\lambda^{-1}$ et au point z. On note $\sigma_{(z,\lambda,\pi)}$ la représentation associée comme en (3.1) à $\pi \circ \delta_\lambda^{-1}$ et au point z :

$$\sigma_{(z,\lambda,\pi)}(X) = U_{z\lambda\pi}^* \, \pi(\delta_\lambda^{-1} X) \, U_{z\lambda\pi}. \tag{12.4}$$

La première étape de la preuve sera constituée par le lemme suivant.

LEMME 12.1. – *Si la condition 1 du théorème 1 est vérifiée, pour tous $\delta > 0$ et $K > 0$, il existe $N(\delta, K) > 0$ tel que, pour tous $\nu \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{R}^{2n}$ et $\lambda > 0$ tels que :*

$$\nu \geqq N(\delta, K) \qquad \textit{et} \qquad p(z, \pi_\nu \circ \delta_\lambda^{-1}) \leqq K$$

et pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on ait :

$$0 \leqq (\sigma_{(z,\lambda,\pi_\nu)}(P) f, f) + \delta \sum_{|\alpha+\beta| \leqq m(r+1)} \|t^\alpha D_t^\beta f\|^2. \tag{12.5}$$

Preuve du lemme. – Si ce lemme était faux, il existerait $\delta > 0$, $K > 0$ et des suites $z_j \in \mathbb{R}^{2n}$, $\lambda_j > 0$, $\nu_j \in \mathbb{N}$ et $f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telles que :

$$\nu_j \to \infty, \qquad p(z_j, \pi_{\nu_j} \circ \delta_{\lambda_j}^{-1}) \leqq K$$

$$(\sigma_{(z_j,\lambda_j,\pi_{\nu_j})}(P) f_j, f_j) + \delta \sum_{|\alpha+\beta| \leqq m(r+1)} \|t^\alpha D_t^\beta f_j\|^2 < 0. \tag{12.6}$$

D'après le théorème 3.2, pour tout $X \in \mathcal{G}$, on peut écire :

$$\sigma_{(z_j,\lambda_j,\pi_{\nu_j})}(X) = \sum_{k=1}^n A_k^{(j)}(t, X) \frac{\partial}{\partial t_k} + i B^{(j)}(t, X)$$

où les $A_k^{(j)}(t, X)$ et $B^{(j)}(t, X)$ sont des polynômes de degré $\leqq r$, et, si l'on munit l'espace des polynômes de degré $\leqq r$ sur $\mathbb{R}^n$ d'une norme quelconque, on peut écrire, si $\|X\| \leqq 1$:

$$\| A_k^{(j)}(., X)\| \leqq C \qquad \text{et} \qquad \| B^{(j)}(., X)\| \leqq C\, p(z_j, \pi_{\nu_j} \circ \delta_{\lambda_j}^{-1}) \leqq CK$$

Puisque les suites de polynômes ci-dessus sont bornées, on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, qu'elles ont des limites, et écrire :

$$\text{(12.7)} \qquad A_k^{(j)}(., X) \to A_k^{(\infty)}(., X), \qquad B^{(j)}(., X) \to B^{(\infty)}(., X) \quad \text{quand } j \to \infty,$$

où les limites sont des polynômes. On définit alors une représentation π^∞ de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en posant :

$$\pi^\infty(X) = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(\infty)}(t, X) \frac{\partial}{\partial t_k} + i\, B^{(\infty)}(t, X).$$

Cette représentation est évidemment de la forme (2.1). Montrons que :

$$\text{(12.8)} \qquad S_0(\pi^\infty) \subset \mathcal{L}.$$

Si $l \in \mathcal{G}^*$ est dans $S_0(\pi^\infty)$, il existe $(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que, pour tout $X \in \mathcal{G}$:

$$l(X) = \frac{1}{i} \pi^\infty(X)(x, \xi) = \frac{1}{i} \lim_{j\to\infty} (\sigma_{(z_j, \lambda_j, \pi_{\nu_j})}(X)(x, \xi).$$

Soit χ_j le difféomorphisme symplectique de $\mathbb{R}^{2n}$ associé, comme en (2.17), à la représentation $\pi_{\nu_j} \circ \delta_{\lambda_j}^{-1}$ au point z_j. On a, d'après (3.2), pour tout $X \in \mathcal{G}$:

$$l(X) = \frac{1}{i} \lim_{j\to\infty} \pi_{\nu_j}(\delta_{\lambda_j}^{-1} X)(\chi_j^{-1}(x, \xi)).$$

D'après (12.3), la forme linéaire l est donc dans l'ensemble limite $\mathcal{L}$ associé à la suite (l_ν), ce qui prouve (12.8). L'hypothèse 1 du théorème 1, l'inclusion (12.8) et l'équivalence de (12.1) et (12.2) entraînent que :

$$\text{(12.9)} \qquad (\pi^\infty(P) f_j, f_j) \geqq 0.$$

D'après (12.7), on peut écrire :

$$\text{(12.10)} \qquad |(\sigma_{(z_j, \lambda_j, \pi_{\nu_j})}(P) f_j - \pi^\infty(P) f_j, f_j)| \leqq \varepsilon_j \sum_{|\alpha+\beta| \leqq m(r+1)} \|t^\alpha D_t^\beta f_j\|^2$$

où (ε_j) est une suite tendant vers 0. Il y a évidemment contradiction entre (12.6), (12.9) et (12.10), et le lemme est démontré.

Fin de la preuve du théorème 1. – Soient $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $\varepsilon \in]0, 1]$. Pour tous $z \in \mathbb{R}^{2n}$, $\nu \in \mathbb{N}$ et $\lambda > 0$, soient $U_{z\lambda\pi_\nu}$ et $T(z, \lambda, \pi_\nu)$ les opérateurs définis dans la section 11, correspondant à la représentation π_ν. Soit $C(\varepsilon)$ la constante du théorème 11.1. Pour tout

$\delta \in]0, 1]$, nous appliquons le lemme 12.1 avec les paramètres δ et $K = C(\varepsilon)$, à la fonction suivante :

$$f = U^*_{z\lambda\pi_\nu} T(z, \lambda, \pi_\nu) g. \tag{12.11}$$

Si $\nu \geqq N(\delta, C(\varepsilon))$, et si $p(z, \pi_\nu \circ \delta_\lambda^{-1}) \leqq C(\varepsilon)$, l'inégalité (12.5) est vérifiée d'après le lemme 12.1. Si $p(z, \pi_\nu \circ \delta_\lambda^{-1}) \geqq C(\varepsilon)$, l'inégalité (12.5) est encore vérifiée pour la fonction f ci-dessus puisque, d'après le point 2 du théorème 11.1, cette fonction est nulle. L'inégalité (12.5) est fonc vérifiée pour cette fonction dès que $\nu \geqq N(\delta, C(\varepsilon))$. Si f et g sont liées par (12.11), on a d'après (12.4) :

$$(\sigma_{(z, \lambda, \pi_\nu)}(P) f, f) = \lambda^{-2m} (\pi_\nu(P) T(z, \lambda, \pi_\nu) g, T(z, \lambda, \pi_\nu) g).$$

Il en résulte que, si $\nu \geqq N(\delta, C(\varepsilon))$:

$$\begin{aligned} 0 \leqq &(\pi_\nu(P) T(z, \lambda) g, T(z, \lambda) g) \\ &+ \delta\lambda^{2m} \sum_{|\alpha+\beta| \leqq m(r+1)} \|t^\alpha D_t^\beta U^*_{z\lambda} T(x, \xi, \lambda) g\|^2 \end{aligned}$$

pour tous $z \in \mathbb{R}^{2n}$, $\lambda > 0$ et $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Intégrons maintenant cette inégalité sur $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^+$, pour la mesure $dz\, d\lambda$. D'après le théorème 11.1, on obtient, si $\nu \geqq N(\delta, C(\varepsilon))$:

$$0 \leqq (\pi_\nu(P)\ g, g) + (\varepsilon + \delta C'(\varepsilon)) |||g|||^2_{m\pi_\nu}.$$

Le $C'(\varepsilon)$ qui apparaît ici est la somme des $C_{\alpha\beta}(\varepsilon)$ pour tous les (α, β) tels que $|\alpha + \beta| \leqq m(r+1)$. Si l'on choisit δ assez petit, cela termine la preuve du théorème 1.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. T. Ali, J. P. Antoine et J. P. Gazeau, *Square Integrability of Group Representations on Homogeneous Spaces* (*Ann. de l'I.H.P., Physique théorique,* vol. 55, 4, 1991, p. 829-855 et 857-980).

[2] A. Cordoba et C. L. Fefferman, *Wave Packets and Fourier Integral Operators* (*Comm. in P.D.E.,* vol. 3, 11, 1978, p. 979-1005).

[3] C. L. Fefferman, *The Uncertainty Principle* (*Bull. A.M.S.,* vol. 9, 1993, p. 129-206).

[4] G. B. Folland, *Subelliptic Estimates and Function Spaces on Nilpotent Lie Groups* (*Ark. för Math.,* vol. 13, 1975).

[5] P. Gérard, *Moyennisation et régularité d'ordre deux-microlocale* (*Ann. Sc. École Norm. Sup.,*, vol. 23, 1, 1990, p. 89-121).

[6] R. Goodman, *Nilpotent Lie Groups* (*Lect. Notes in Math.*, n° 562, Springer, 1976).

[7] B. Helffer J. Nourrigat, *Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs* (*Progress in Math.,* vol. 58, Birkhauser, 1985).

[8] A. Kirillov, *Unitarity Representations of Nilpotent Groups* (*Russian Math. Survey*, vol. 17, 1962, p. 53-104).

[9] P. G. Lemarie, *Base d'ondelettes sur les groupes de Lie stratifiés* (*Bull. S.M.F.*, vol. 117, 1989, p. 211-232).

[10] P. Lévy-Bruhl, A. Mohamed et J. Nourrigat, *Étude spectrale d'opérateurs sur des groupes nilpotents* (Séminaire « Équations aux dérivées partielles », École Polytechnique, Exposé 18, 1989-90).

[11] P. Lévy-Bruhl, A. Mohamed et J. Nourrigat, *Spectral Theory and Representations of Nilpotent Groups* (*Bull. A.M.S.,* vol. 26, 2, 1992, p. 299-303).

[12] P. Lévy-Bruhl, A. Mohamed et J. Nourrigat, *Étude spectrale d'opérateurs liés à des représentations de groupes nilpotents* (*Journal of Functional Analysis*, à paraître).

[13] D. Manchon, *Calcul symbolique sur les groupes de Lie nilpotents et applications* (*Journal of Functional Analysis*, vol. 102, 1, 1991, p. 206-251).

[14] D. Manchon, *Formule de Weyl pour les groupes de Lie nilpotents*, (*J. reine angew. Math.*, vol. 418, 1991, p. 77-129).

[15] A. Melin, *Parametrix Constructions for Right Invariant Differential Operators on Nilpotent Groups* (*Ann. Global Anal. and Geom.*, vol. 1, 1, 1983, p. 79-130)..

[16] A. Mohamed et J. Nourrigat, *Encadrement du $N(\lambda)$ pour des opérateurs de Schrödinger avec champ magnétique*, (*J. de Math. pures et appl.*, vol. 70, 1990, p. 87-99).

[17] N. Moukadem, *Interpolation pour les espaces de Sobolev liés à des représentations de groupes* (Thèse, Rennes, 1981).

[18] A. Nagel, E. M. Stein et S. Wainger, *Balls and Metrics Defined by Vectors Fields* (*Acta Math.*, vol. 155, 1985, p. 103-147).

[19] J. Nourrigat, *Inégalités L^2 et représentations de groupes nilpotents* (*J. Funct. Analysis*, vol. 74, 2, 1987, p. 300-327).

[20] J. Nourrigat, *Subelliptic Systems* (*Comm. in P.D.E.*, , vol. 15, 3, 1990, p. 341-405).

[21] J. Nourrigat, *Systèmes sous-elliptiques II* (*Inventiones Math.*, vol. 104, 1991, p. 377-400).

[22] J. Nourrigat, *L^2 estimates and Représentations of Nilpotent Groups*, Cours à l'école CIMPA-UNESCO d'analyse harmonique, Wuhan (Chine), avril-mai 1991 (*World Scientific*, à paraître).

[23] A. Perelomov, *Generalized Coherent States and Their Applications* (*Texts and monographs in Physics*, Springer, 1981).

[24] M. A. Shubin, *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory*, Springer, 1978.

[25] J. Sjostrand, *Singularités analytiques microlocales* (*Astérisque*, vol. 95, 1982).

[26] A. Unterberger, *Quantification relativiste* (*Mémoires de la S.M.F.*, vol. 44-45, 1991).

(Manuscrit reçu le 14 octobre 1992;
revisé le 29 janvier 1993.)