Emmanuel Giroux

Une structure de contact, même tendue, est plus ou moins tordue

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 27, nº 6 (1994), p. 697-705

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1994_4_27_6_697_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 27, 1994, p. 697 à 705.

UNE STRUCTURE DE CONTACT, MÊME TENDUE, EST PLUS OU MOINS TORDUE

PAR EMMANUEL GIROUX*

ABSTRACT. – This paper proves the existence of non isomorphic tight contact structures on $\mathbf{T}^3$. It also shows that all Lagrangian incompressible embedded tori in $\mathbf{T}^2 \times (\mathbf{R}^2 \backslash \{0\})$ are homotopic.

Introduction

Ces dernières années, les travaux de Ya. Eliashberg ont révélé que le monde des structures de contact en dimension 3 se scinde en deux : les structures vrillées et les structures tendues (cf. définition 2.1). Les premières, du moins sur les variétés fermées, se laissent classifier par un h-principe approprié [El1] tandis que les secondes vérifient des propriétés communes remarquables, les inégalités de D. Bennequin, qui les rendent « rares » [El2]. La structure usuelle est par exemple la seule structure tendue sur $\mathbf{S}^3$ et, sur toute variété fermée, les classes d'homotopie de champs de plans qui contiennent des structures de contact tendues sont en nombre fini. L'objet du présent article est, en réponse à une question posée par Ya. Eliashberg dans [El2], de montrer que, dans une même classe, peuvent néanmoins coexister des structures tendues non isomorphes. On en donne des exemples explicites sur $\mathbf{T}^2 \times [0,1]$ et sur $\mathbf{T}^3$. Les structures que l'on considère sur $\mathbf{T}^3$ sont en outre symplectiquement remplissables (cf. définition 2.4) et admettent une infinité de remplissages topologiquement distincts ayant un second groupe d'homotopie nul.

Les ingrédients clés sont les résultats fondamentaux de rigidité en géométrie symplectique et de contact, à savoir le théorème de D. Bennequin [Be] concernant la structure de contact usuelle sur $\mathbf{R}^3$ et les théorèmes de M. Gromov [Gr] sur les sous-variétés lagrangiennes exactes des espaces cotangents (ainsi que certains corollaires de ceux-ci, découverts par F. Lalonde et J.-C. Sikorav [LaSi]). On répond au passage à une question de J.-C. Sikorav [Si1] sur la classe d'homotopie des tores lagrangiens dans le cotangent de $\mathbf{T}^2$ privé de la section nulle.

Je tiens à remercier Yasha Eliashberg avec qui j'ai longuement discuté des questions abordées ici et qui m'a suggéré, pour $\mathbf{T}^3$, l'approche par symplectisation. D'ailleurs, par une approche semblable, lui-même a déjà exhibé des invariants pour les structures de contact tendues sur certaines variétés ouvertes [El3].

* Centre National de la Recherche Scientifique (UMR 128).

1. Rigidité homotopique des tores lagrangiens incompressibles

A. Vocabulaire et observations de base

Une *structure de contact* sur une variété V de dimension 3 est un champ de plans ξ complètement non intégrable, c'est-à-dire défini localement par une 1-forme α telle que $\alpha \wedge d\alpha$ ne s'annule pas. La multiplication de α par une fonction f partout non nulle change $\alpha \wedge d\alpha$ en $f^2 \alpha \wedge d\alpha$, si bien que la seule donnée de ξ oriente la variété V. Dans la suite, on ne considère que des structures de contact transversalement orientées, donc orientées, et on définit chacune d'elles par une équation α globale, déterminée à multiplication près par une fonction positive.

On dit que deux structures de contact sur V sont *isomorphes* s'il existe un difféomorphisme de V qui envoie l'une sur l'autre.

Un des outils géométriques essentiels pour étudier une variété de contact (V, ξ) est le feuilletage de dimension 1 (singulier) que ξ trace sur toute surface F plongée dans V. Ce feuilletage est défini par la 1-forme qu'induit sur F n'importe quelle équation de ξ. Ses singularités sont exactement les points où F est tangente à ξ et sont génériquement isolées. Ce feuilletage est appelé *feuilletage caractéristique* de F. De fait, avec l'orientation mentionnée plus haut, il détermine entièrement le germe de ξ le long de F. Ainsi, si F sépare V, deux structures de contact données de part et d'autre, dont les orientations coïncident le long de F et qui tracent sur F le même feuilletage, se recollent pour former une structure de contact sur V tout entière.

La *symplectisation* d'une variété de contact (V, ξ), quand ξ est transversalement orientée, est la variété $V \times]0, \infty[$ munie de la forme symplectique $d(t\alpha)$, où t désigne la coordonnée réelle dans $]0, \infty[$ et où α est (le rappel d') une équation globale de ξ. Pour toute fonction positive f sur V, le difféomorphisme$(x, t) \mapsto \big(x, t/f(x)\big)$ envoie $t\alpha$ sur $tf\alpha$ de sorte que la symplectisation dépend, à isomorphisme près, uniquement de la structure ξ et pas de l'équation α choisie. Noter que tout difféomorphisme de contact (local) se relève de manière évidente en un difféomorphisme symplectique (local).

On dit qu'un champ de vecteurs X sur une variété de contact (V, ξ) est un *champ (de vecteurs) de contact* si son flot préserve ξ. L'ensemble des points où un tel champ est tangent (i.e. appartient) à la structure ξ est un ensemble invariant par le flot appelé *(hyper)-surface caractéristique* de X : c'est une surface lisse en dehors des singularités dégénérées de X [Gi].

Enfin, on rappelle qu'une sous-variété d'une variété symplectique est dite *lagrangienne* quand elle est de dimension moitié et quand la 2-forme induite par la structure symplectique est nulle.

B. Visite de la structure de contact usuelle sur le tore de dimension 3

Comme tout espace cotangent, $T^\star \mathbf{T}^2 = \mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}^2$ possède une structure symplectique naturelle, différentielle de la forme de Liouville $\lambda = y_1\, dx_1 + y_2\, dx_2$, où $(x_1, x_2) \in \mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ et $(y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$. En notant $(r, \theta) \in]0, \infty[\times (\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})$ les coordonnées polaires définies sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ par $y_1 = r\cos\theta$, $y_2 = r\sin\theta$, la restriction de λ au complémentaire de la section nulle, $\mathbf{T}^2 \times (\mathbf{R}^2 \setminus \{0\})$, s'écrit $r(\cos\theta\, dx_1 + \sin\theta\, dx_2)$. Elle induit, sur chaque hypersurface d'équation $r = f(x_1, x_2, \theta)$, où f est une fonction positive, une forme de contact et toutes ces formes définissent une même structure de contact ζ_1 sur $\mathbf{T}^3 = \{(x_1, x_2, \theta)\}$: c'est la structure de contact naturelle sur l'espace des droites orientées tangentes à $\mathbf{T}^2$. Il est ainsi clair que la symplectisation de la variété de contact $(\mathbf{T}^3, \zeta_1)$ est $\mathbf{T}^2 \times (\mathbf{R}^2 \setminus \{0\})$ muni de la structure symplectique naturelle $d\lambda$.

Dans la suite, on considère toujours le tore $\mathbf{T}^3$ comme le produit du tore $\mathbf{T}^2$, muni de coordonnées $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$, par le cercle muni d'une coordonnée $\theta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$. On dira qu'un tore de dimension 2 plongé dans $\mathbf{T}^2 \times (\mathbf{R}^2 \setminus \{0\})$ est horizontal s'il est homotope à $\mathbf{T}^2 \times \{*\}$. L'objectif de cette partie est de montrer qu'un tore lagrangien plongé dans $\mathbf{T}^2 \times (\mathbf{R}^2 \setminus \{0\})$ et incompressible (c'est-à-dire dont le groupe fondamental s'injecte) est nécessairement horizontal. Pour cela, il importe de noter les faits suivants.

1. Tout tore incompressible F plongé dans $\mathbf{T}^2 \times (\mathbf{R}^2 \setminus \{0\})$ est homotope à un tore linéaire de $\mathbf{T}^3 = \{r = 1\}$ (quotient par $\mathbf{Z}^2 \times 2\pi\mathbf{Z}$ d'un plan de $\mathbf{R}^3$).

2. La structure ζ_1 sur $\mathbf{T}^3$ est invariante par tous les champs de vecteurs du type $a_1\, \partial/\partial x_1 + a_2\, \partial/\partial x_2$, où a_1, a_2 sont des constantes réelles. La surface caractéristique d'un tel champ a pour équation $a_1 \cos\theta + a_2 \sin\theta = 0$.

3. Tout tore linéaire F_0 non horizontal dans $\mathbf{T}^3$ est transversal à un champ X du type précédent et coupe la surface caractéristique de X suivant une courbe dont aucune composante connexe n'est homotope à zéro dans F_0. On a alors :

Proposition 1.1 (cf. [Gi, proposition II.3.1]). – *Soit (V, ξ) une variété de contact de dimension 3 et soit F_0 un tore de dimension 2 plongé dans V. On suppose qu'il existe un champ (de vecteurs) de contact X transversal à F_0 (en particulier, X est non singulier le long de F_0) et que la surface caractéristique de X (ensemble des points où $X \in \xi$) ne trace sur F_0 aucune courbe homotope à zéro. Dans ces conditions, F_0 est isotope, parmi les tores transversaux à X, à un tore F_1 transversal à ξ. Le feuilletage caractéristique de F_1 présente alors des orbites fermées qui sont toutes hyperboliques, c'est-à-dire non dégénérées.*

Il résulte immédiatement de ces observations que :

Proposition 1.2. – *Soit F un tore incompressible et non horizontal plongé dans l'espace $\mathbf{T}^2 \times (\mathbf{R}^2 \setminus \{0\})$. Il existe sur $\mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}$ une structure de contact ξ ayant les propriétés suivantes :*

(i) *$(\mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}, \xi)$ revêt $(\mathbf{T}^3, \zeta_1)$ et, par la symplectisation de ce revêtement, F se relève en tores incompressibles ;*

(ii) *ξ est $\mathbf{R}$-invariante et trace sur chaque tore $\mathbf{T}^2 \times \{*\}$ un feuilletage non singulier qui possède des orbites fermées, toutes hyperboliques.*

Démonstration. – Le revêtement en (i) est donné par le flot du champ X de 3, en prenant pour F_0 le tore linéaire de 1 homotope à F. La proposition 1.1 permet de garantir (ii). ■

C. Classe d'homotopie des tores lagrangiens incompressibles

Le théorème qui suit répond à une question de J.-C. Sikorav [Si1] et se démontre d'ailleurs, moyennant la proposition 1.2, en adaptant certains des arguments développés dans [Si1].

THÉORÈME 1.3. – *Tout tore lagrangien incompressible plongé dans* $\mathbf{T}^2 \times (\mathbf{R}^2 \setminus \{0\})$ *est homotope aux tores lagrangiens* $\mathbf{T}^2 \times \{*\}$.

Remarque. - Il existe de nombreux tores lagrangiens non incompressibles plongés dans $\mathbf{T}^2 \times (\mathbf{R}^2 \setminus \{0\})$. Par exemple, toute courbe plongée dans $\mathbf{T}^3$ transversalement à ζ_1 possède un système fondamental de voisinages bordés par des tores qui se relèvent en tores lagrangiens dans la symplectisation.

Démonstration du théorème 1.3. – Il s'agit de montrer que les classes d'homotopie de tores incompressibles non horizontaux ne contiennent aucun tore lagrangien plongé. Ceci découle de la proposition 1.2 et du résultat suivant :

LEMME 1.4. – *Soit* ξ *une structure de contact transversalement orientée sur* $\mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}$. *On suppose que* ξ *est* $\mathbf{R}$*-invariante et qu'elle trace sur chaque tore* $\mathbf{T}^2 \times \{*\}$ *un feuilletage non singulier et ayant des orbites fermées toutes hyperboliques. Alors la symplectisation de* $(\mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}, \xi)$ *ne contient aucun tore lagrangien incompressible plongé.*

Démonstration. – Soit α la 1-forme induite sur $\mathbf{T}^2 = \mathbf{T}^2 \times \{0\} \subset \mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}$ par une quelconque équation de ξ, soit G_α le graphe de α dans $T^\star\mathbf{T}^2$ et soit U un voisinage conique de G_α dans $T^\star\mathbf{T}^2$, c'est-à-dire un voisinage invariant par le champ $Y = y_1\, \partial/\partial y_1 + y_2\, \partial/\partial y_2$ (champ radial dans les fibres de $T^\star\mathbf{T}^2$). Il est facile de trouver une fonction positive $f(x_1, x_2, \theta)$ telle que l'hypersurface V d'équation $r = f(x_1, x_2, \theta)$ dans $T^\star\mathbf{T}^2$ contienne G_α. Les propositions II.2.2 et II.2.6 de [Gi] disent alors qu'il existe un plongement symplectique de la symplectisation de $(\mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}, \xi)$ tout entier dans U qui envoie $\mathbf{T}^2 \times \{0\}$ sur G_α. Il suffit donc de trouver un voisinage conique de G_α qui ne contienne aucun tore lagrangien incompressible plongé.

Pour cela, on considère, autour d'une orbite fermée (hyperbolique) du feuilletage défini par α sur $\mathbf{T}^2$, un anneau bordé par deux courbes Γ_0 et Γ_1 transversales au feuilletage et orientées par α. Ainsi, Γ_0 et Γ_1 sont isotopes mais sont orientées en sens contraires.

LEMME 1.5. – *Dans l'espace cotangent* $T^\star\mathbf{T}^2$, *on considère l'ouvert conique* U *obtenu en retirant, au-dessus de chaque* Γ_i, $i = 0, 1$, *les covecteurs qui sont négatifs ou nuls sur la tangente orientée à* Γ_i. *Alors* U *ne contient aucun tore lagrangien incompressible plongé.*

Démonstration. – Soit F un tore lagrangien incompressible plongé dans U et soit π la projection de $T^\star\mathbf{T}^2$ sur $\mathbf{T}^2$. Comme F est lagrangien, la forme induite par λ sur F est fermée et, comme F est incompressible, la classe de cohomologie de cette forme provient, par π, d'une classe de cohomologie sur la base $\mathbf{T}^2$. Autrement dit, il existe une 1-forme fermée β sur $\mathbf{T}^2$ (dont seule la classe de cohomologie est imposée) telle que la translation par β dans $T^\star\mathbf{T}^2$ transforme F en un tore lagrangien exact, c'est-à-dire pour lequel la forme induite par λ est exacte. Par ailleurs, $\int_{\Gamma_0} \beta = -\int_{\Gamma_1} \beta$ et, en ajoutant à β la différentielle d'une fonction, on peut faire en sorte que β soit de signe constant sur Γ_0 et $-\Gamma_1$ (β est éventuellement nulle sur chacune de ces courbes si son intégrale y est nulle). Si β est positive sur Γ_0 (respectivement négative), en translatant F par β, on trouve un tore lagrangien exact qui ne coupe pas le conormal de Γ_0 (respectivement de Γ_1). Or, d'après un théorème de F. Lalonde et J.-C. Sikorav [LaSi] fondé sur les travaux de M. Gromov [Gr], un tore lagrangien exact plongé dans $T^\star\mathbf{T}^2$ coupe le conormal de toute courbe fermée simple de $\mathbf{T}^2$. ■

Remarque 1.6. :

a) Dans [Si2], J.-C. Sikorav montre que deux ouverts de $T^\star \mathbf{T}^n = \mathbf{T}^n \times \mathbf{R}^n$ du type $\mathbf{T}^n \times U$ et $\mathbf{T}^n \times V$ (où U et V sont des ouverts de $\mathbf{R}^n$ dont le premier nombre de Betti est nul) sont symplectiquement difféomorphes si et seulement s'il existe $B \in \mathbf{R}^n$ et $A \in GL(n, \mathbf{Z})$ tels que $V = AU + B$. Le théorème 1.3 entraîne que, pour $n = 2$, ce fait est encore vrai même si U et V ne sont pas simplement connexes.

b) Les arguments ci-dessus montrent aussi que l'espace cotangent $T^\star S$ d'une surface fermée S quelconque, muni de sa structure symplectique naturelle et privé de la section nulle, ne contient aucun tore lagrangien incompressible plongé. En effet, un tel tore est homotope à la préimage, dans l'espace cotangent unitaire, d'une courbe fermée simple homotopiquement non nulle sur S. Au sous-groupe cyclique de $\pi_1(S)$ engendré par cette courbe, correspond un revêtement de S par un cylindre $C \simeq \mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$. On en déduit un revêtement symplectique de $T^\star C$ sur $T^\star S$ qui envoie section nulle sur section nulle. Or $T^\star C$ privé de sa section nulle est isomorphe à la symplectisation de $(\mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}, \xi)$ considérée au lemme 1.4.

2. Exemples de structures de contact tendues non isomorphes

A. Structures vrillées et structures tendues

DÉFINITION 2.1 (Ya. Eliashberg, [El1,El2]). – Soit ξ une structure de contact sur une variété V de dimension 3. On dit que ξ est *vrillée (over-twisted)* s'il existe un disque de dimension 2 plongé dans V dont le feuilletage caractéristique présente une orbite fermée. On dit que ξ est *tendue (tight)* si elle n'est pas vrillée.

Le théorème de D. Bennequin [Be] affirme que la structure de contact usuelle sur $\mathbf{R}^3$, d'équation

$$dz - p\,dq = 0, \qquad (p, q, z) \in \mathbf{R}^3,$$

est tendue. Or, cette structure est isomorphe au revêtement universel de $(\mathbf{T}^3, \zeta_1)$, d'équation

$$\cos\theta\,dx_1 + \sin\theta\,dx_2 = 0,$$

par exemple via le changement de variables

$$q = \theta, \quad p = -\sin\theta\,x_1 + \cos\theta\,x_2, \quad z = \cos\theta\,x_1 + \sin\theta\,x_2\,.$$

Enfin, il est clair que tout revêtement d'une structure vrillée donne encore une structure vrillée, de sorte que le théorème de D. Bennequin montre que la structure usuelle ζ_1 sur $\mathbf{T}^3$ est tendue.

B. Exemples sur $\mathbf{T}^2 \times [0,1]$

Sur $\mathbf{T}^2 \times [0,1]$, une 1-forme du type

$$u_1(t)\,dx_1 + u_2(t)\,dx_2, \quad t \in [0,1], \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{T}^2,$$

définit une structure de contact si et seulement si la courbe

$$t \mapsto \gamma(t) = \big(u_1(t), u_2(t)\big) \in \mathbf{R}^2$$

évite l'origine et n'est nulle part tangente aux rayons issus de l'origine. Parmi les structures ainsi définies, on considère celles pour lesquelles la courbe γ tourne autour de l'origine dans le sens des aiguilles d'une montre et a comme extrémités les points $\gamma(0) = (\varepsilon, 1)$ et $\gamma(1) = (1, 1)$, où ε est un nombre positif donné inférieur à 1. A isomorphisme près, la structure obtenue ne dépend que de la classe d'homotopie de γ parmi les courbes admissibles (à extrémités fixes), autrement dit du nombre n de tours que fait γ autour de l'origine. Pour chaque valeur de $n \geq 0$, on désigne par ξ_n l'une quelconque des structures correspondantes.

THÉORÈME 2.2 :

a) Les structures ξ_n, $n \geq 0$, sont toutes tendues et sont homotopes, relativement au bord, dans l'espace des champs de plans.

b) Pour $n \geq 1$, ξ_n n'est pas isomorphe à ξ_0.

Démonstration :

a) Une homotopie entre ξ_n et ξ_0 est donnée par les champs de plans d'équations :

$$s\alpha_n + (1-s)\alpha_0 + s(1-s)\rho(t)\,dt = 0, \quad s \in [0,1],$$

où α_n et α_0 désignent des équations respectivement de ξ_n et ξ_0, et où $\rho : [0,1] \to \mathbf{R}$ est une fonction nulle tout près des extrémités mais pas ailleurs. De plus, toutes les structures ξ_n sont tendues car leur revêtement universel se plonge dans celui de $(\mathbf{T}^3, \zeta_1)$.

b) D'une part, en recollant à $(\mathbf{T}^2 \times [0,1], \xi_0)$, le long de $\mathbf{T}^2 \times \{0\}$, un tore plein de rayon $\sqrt{\varepsilon}$ muni de la structure de contact d'équation

$$r^2\,dx_1 + dx_2 = 0, \quad r \in [0, \sqrt{\varepsilon}],$$

on obtient une structure de contact sur un tore plein. Cette structure est tendue d'après le théorème de D. Bennequin car elle se plonge dans $\mathbf{R}^3$ muni de sa structure usuelle. D'autre part, soit Γ un cercle sur $\mathbf{T}^2$ défini par une équation linéaire $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$. Si $n \geq 1$, le feuilletage caractéristique tracé par ξ_n sur l'anneau $\Gamma \times [0,1]$ présente, le long de $\Gamma \times \{t\}$, un cercle de singularités chaque fois que α_n (dont les coefficients ne dépendent que de t) est proportionnelle à la forme $a_1\,dx_1 + a_2\,dx_2$. En tordant légèrement cet anneau dans la direction verticale, on le rend transversal à ξ_n le long de ces cercles qui deviennent alors des orbites fermées du feuilletage caractéristique. On voit ainsi que, de quelque manière qu'on prolonge ξ_n en une structure de contact sur un tore plein, on obtient une structure vrillée. ■

C. Exemples sur $\mathbf{T}^3$

La structure de contact usuelle ζ_1 sur $\mathbf{T}^3$ est définie par l'équation :

$$\cos\theta\,dx_1 + \sin\theta\,dx_2 = 0, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2, \quad \theta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par ζ_n la structure définie sur $\mathbf{T}^3$ par l'équation :

$$\cos(n\theta)\,dx_1 + \sin(n\theta)\,dx_2 = 0\,.$$

Autrement dit, ζ_n est le rappel de ζ_1 par le revêtement $(x_1, x_2, \theta) \mapsto (x_1, x_2, n\theta)$.

THÉORÈME 2.3 :

a) Les structures ζ_n sont toutes tendues et sont homotopes dans l'espace des champs de plans.

b) Pour $n \geq 2$, la symplectisation de ζ_n n'est pas isomorphe à celle de ζ_1, donc ζ_n n'est pas isomorphe à ζ_1.

Démonstration :

a) Une homotopie entre ζ_n et ζ_1 est donnée par les champs de plans d'équations :

$$s\alpha_n + (1-s)\alpha_1 + s(1-s)\,d\theta = 0, \quad s \in [0,1],$$

où $\alpha_i = \cos(i\theta)\,dx_1 + \sin(i\theta)\,dx_2$. De plus, toutes les structures ζ_n sont tendues d'après le théorème de D. Bennequin.

b) Pour tout $n \geq 1$, la symplectisation de ζ_n est définie, sur $\mathbf{T}^3 \times]0, \infty[$, par la différentielle de la 1-forme :

$$\lambda_n = r\big(\cos(n\theta)\,dx_1 + \sin(n\theta)\,dx_2\big), \quad r \in]0, \infty[.$$

Ainsi, les tores

$$F_\theta = \{(x_1, x_2, \theta, 1)\} \subset \mathbf{T}^3 \times]0, \infty[, \quad \theta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z},$$

sont lagrangiens pour toutes les structures symplectiques $d\lambda_n$. De plus, comme ils sont isotopes, on peut comparer les formes fermées induites sur ces différents tores par λ_n quand n est fixé. On voit alors que, θ étant donné, λ_n induit sur les tores $F_{\theta + 2k\pi/n}$, pour $0 \leq k \leq n-1$, des formes cohomologues (qui sont même égales dans les coordonnées (x_1, x_2)).

Soit maintenant φ un difféomorphisme de $\mathbf{T}^3 \times]0, \infty[$ qui envoie $d\lambda_n$ sur $d\lambda_1$. Les images par φ des tores F_θ sont des tores lagrangiens incompressibles F'_θ. De plus, comme $\varphi_\star \lambda_n - \lambda_1$ est une forme fermée, λ_1 induit encore sur les différents tores $F'_{\theta + 2k\pi/n}$, pour θ fixé et pour $0 \leq k \leq n-1$, des formes cohomologues. Maintenant, on rappelle que $(\mathbf{T}^3 \times]0, \infty[, \lambda_1)$ n'est autre que le complémentaire de la section nulle dans le cotangent de $\mathbf{T}^2$ muni de sa forme de Liouville naturelle λ. D'après le théorème 1.3, les tores F'_θ sont homotopes à $\mathbf{T}^2 \times \{*\}$ dans le complémentaire de la section nulle et sont donc a fortiori homotopes à la section nulle dans le cotangent tout entier. On peut par conséquent trouver des 1-formes fermées β_θ sur $\mathbf{T}^2$, pour $\theta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$, ayant les propriétés suivantes :

- $\beta_\theta = \beta_{\theta + 2k\pi/n}$ pour tout θ et pour $0 \leq k \leq n-1$;
- si F''_θ désigne le translaté de F'_θ par β_θ dans $T^*\mathbf{T}^2$, les tores F''_θ, $\theta \in [0, 2\pi]$, forment une isotopie de tores lagrangiens exacts.

Or, pour $n \geq 2$, F_0 et $F_{2\pi/n}$ sont disjoints, de sorte que, si φ existait, F'_0 et $F'_{2\pi/n}$ seraient disjoints. Comme $\beta_0 = \beta_{2\pi/n}$, F''_0 et $F''_{2\pi/n}$ seraient deux tores lagrangiens exacts, disjoints et hamiltoniennement isotopes, chose qui, d'après un théorème de M. Gromov [Gr], n'existe dans aucun cotangent de variété fermée. ■

D. Remplissage symplectique des structures ζ_n

DÉFINITION 2.4 (Ya. Eliashberg, [El1]). – Soit ξ une structure de contact transversalement orientée (donc orientée) sur une variété V de dimension 3. On dit que ξ est *symplectiquement remplissable* s'il existe une variété symplectique compacte (W, ω) de dimension 4 pour laquelle :

- V est le bord orienté de W ;
- $\omega|_\xi$ est positive.

Ya. Eliashberg [El4] et M. Gromov [Gr] ont montré que les structures de contact symplectiquement remplissables sont tendues. En fait, on ne connaît aucune structure de contact tendue qui ne soit pas symplectiquement remplissable. On va construire ici, pour chaque structure ζ_n sur $\mathbf{T}^3$ (qui est tendue d'après le théorème de D. Bennequin), un remplissage symplectique sur $\mathbf{T}^2 \times \mathbf{D}^2$. Pour ζ_1, on a un remplissage évident : on regarde $\mathbf{T}^3$ comme le tore d'équation $r = 1$ dans $\mathbf{T}^2 \times \mathbf{R}^2$ muni des coordonnées (x_1, x_2, θ, r); la structure symplectique usuelle du cotangent induit, sur le tore solide $\{r \leq 1\}$, un remplissage de ζ_1. Les remplissages symplectiques qu'on va construire maintenant sont de nature différente dans la mesure où ils ne sont pas définis par des formes symplectiques exactes.

L'idée [El5] est de remplir symplectiquement par le produit d'une forme d'aire sur $\mathbf{T}^2$ et d'une forme d'aire sur $\mathbf{D}^2$. Mais pour cela, on ne peut garder sur $\mathbf{T}^3$ la structure produit définie par les coordonnées (x_1, x_2, θ). En effet, dans ces coordonnées, la structure ζ_n a pour équation :

$$\cos(n\theta)\, dx_1 + \sin(n\theta)\, dx_2 = 0,$$

et le champ de vecteurs $\partial/\partial\theta$ n'est donc pas transversal à ζ_n. Il est cependant facile de corriger cela par un difféomorphisme de $\mathbf{T}^3$. Ainsi, si on prend comme coordonnées :

$$x'_1 = x_1 - \sin(n\theta), \quad x'_2 = x_2 + \cos(n\theta), \quad \theta' = \theta,$$

on obtient pour nouvelle équation de ζ_n :

$$\cos(n\theta')\, dx'_1 + \sin(n\theta')\, dx'_2 + n\, d\theta' = 0.$$

Il suffit alors de munir $\mathbf{T}^2 \times \mathbf{D}^2$ de la forme symplectique $dx'_1 \wedge dx'_2 + r'\, dr' \wedge d\theta'$, où (r', θ') désignent des coordonnées polaires sur $\mathbf{D}^2$.

Remarque. – Au lieu du disque $\mathbf{D}^2$, on aurait pu prendre n'importe quelle surface orientable bordée par un cercle. Les structures ζ_n admettent donc une infinité de remplissages symplectiques qui sont topologiquement différents, même à éclatement près puisqu'ils ont tous un second groupe d'homotopie nul.

BIBLIOGRAPHIE

[Be] D. BENNEQUIN, *Entrelacements et équations de Pfaff (Astérisque*, Vol. 107-108, 1983, p. 83-161).

[El1] Y. ELIASHBERG, *Classification of over-twisted contact structures on 3-manifolds (Inv. Math.*, Vol. 98, 1989, p. 623-637).

[El2] Y. ELIASHBERG, *Contact 3-manifolds, twenty years since J. Martinet's work (Ann. Inst. Fourier*, Vol. 42, 1992, p. 165-192).

[El3] Y. ELIASHBERG, *New invariants of open symplectic and contact manifolds (J. Amer. Math. Soc.*, Vol. 4, 1991, p. 513-520).

[El4] Y. ELIASHBERG, *Filling by holomorphic discs and its applications (London Math. Soc. Lect. Notes Ser.*, 151, 1991, p. 45-67).

[El5] Y. ELIASHBERG, communication orale privée sur des travaux récents de W. THURSTON (mai 1992).

[Gi] E. GIROUX, *Convexité en topologie de contact (Comment. Math. Helvetici*, Vol. 66, 1991, p. 637-677).

[Gr] M. GROMOV, *Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds (Inv. Math.*, Vol. 82, 1985, p. 307-347).

[LaSi] F. LALONDE et J.-C. SIKORAV, *Sous-variétés lagrangiennes et lagrangiennes exactes des fibrés cotangents (Comment. Math. Helvetici*, Vol. 66, 1991, p. 18-33).

[Si1] J.-C. SIKORAV, *Quelques propriétés des plongements lagrangiens (Suppl. Bull. Soc. Math. France*, Mem. No 46, Vol. 119, 1991, p. 151-167).

[Si2] J.-C. SIKORAV, *Rigidité symplectique dans le cotangent de* $\mathbf{T}^n$ *(Duke Math. J.*, Vol. 59, 1989, p. 227-231).

(Manuscrit reçu le 9 octobre 1992;
révisé le 8 février 1993.)

Emmanuel GIROUX,
Unité de Mathématiques Pures et Appliquées,
École Normale Supérieure de Lyon,
46, allée d'Italie,
69364, Lyon Cedex 07, France.