ÉRIC VASSEROT

Représentations de groupes quantiques et permutations

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 26, nº 6 (1993), p. 747-773
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1993_4_26_6_747_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 26, 1993, p. 747 à 773.

REPRÉSENTATIONS DE GROUPES QUANTIQUES ET PERMUTATIONS

PAR ÉRIC VASSEROT

ABSTRACT. – The aim of this paper is to give explicit formulas for V. Ginzburg's construction of some representations of the quantum enveloping algebra of the special linear group in the equivariant K-theory groups of an uncomplete flag manifold. V. Ginzburg's construction itself is inspired by a similar one over a finite given by A. A. Beilinson, G. Lusztig and R. Mac Pherson. We obtain explicit operators acting on some polynomials.

0. Introduction

Par $H^*(., \mathbb{C})$ on désigne l'homologie de Borel-Moore à coefficients complexes. Soit M une variété différentiable orientée connexe et $Z, Z' \subset M$ deux fermés. Il existe un cup-produit

$$H^i(M, M\setminus Z, \mathbb{C}) \times H^j(M, M\setminus Z', \mathbb{C}) \overset{\cup}{\to} H^{i+j}(M, M\setminus(Z\cap Z'), \mathbb{C}),$$

et un cap-produit

$$H^{\dim M-i}(M, M\setminus Z, \mathbb{C}) \times H_j(Z', \mathbb{C}) \overset{\cap}{\to} H_{i+j-\dim M}(Z\cap Z', \mathbb{C}).$$

Soit [M] la classe fondamentale de M. Alors le cap-produit avec [M], en posant $Z'=M$, est l'isomorphisme de Dualité de Poincaré

$$H^{\dim M-i}(M, M\setminus Z, \mathbb{C}) \overset{\sim}{\to} H_i(Z, \mathbb{C}).$$

On obtient donc un produit d'intersection

$$H_i(Z, \mathbb{C}) \times H_j(Z', \mathbb{C}) \overset{\cap}{\to} H_{i+j-\dim}(Z\cap Z', \mathbb{C}).$$

De même si G est un groupe algébrique complexe, M une variété algébrique complexe lisse G-équivalente munie d'un fibré en droites ample G-équivariant, Z et Z′ des sous-ensembles algébriques de M stables par l'action de G, et si $K^G(Z)$ est le groupe de Grothendieck des faisceaux de $\mathcal{O}_Z$-modules cohérents G-équivariants il existe un produit d'intersection

$$\mathrm{K^G}(\mathrm{Z}) \times \mathrm{K^G}(\mathrm{Z}') \overset{\cap}{\to} \mathrm{K^G}(\mathrm{Z} \cap \mathrm{Z}').$$

Soient M_i, $i=1, 2, 3$, des variétés différentiables connexes orientées. Notons

$$\mathrm{M}_1 \times \mathrm{M}_2 \times \mathrm{M}_3 \xrightarrow{p_{ij}} \mathrm{M}_i \times \mathrm{M}_j$$

les projections naturelles. Soient $\mathrm{Z} \subset \mathrm{M}_1 \times \mathrm{M}_2$ et $\mathrm{Z}' \subset \mathrm{M}_2 \times \mathrm{M}_3$ deux fermés tels que la restriction de p_{13} à $(\mathrm{Z} \times \mathrm{M}_3) \cap (\mathrm{M}_1 \times \mathrm{Z}')$ soit propre. Posons

$$\mathrm{Z} \circ \mathrm{Z}' = p_{13}((\mathrm{Z} \times \mathrm{M}_3) \cap (\mathrm{M}_1 \times \mathrm{Z}')).$$

Alors Ginzburg [G] définit une opération de convolution

$$\mathrm{H}_i(\mathrm{Z}, \mathbb{C}) \times \mathrm{H}_j(\mathrm{Z}', \mathbb{C}) \overset{\circ}{\to}_{\mathrm{H}i+j-\dim \mathrm{M}_2} (\mathrm{Z} \circ \mathrm{Z}', \mathbb{C})$$

en posant pour tous $u \in (\mathrm{Z}, \mathbb{C})$, $v \in \mathrm{H}_j(\mathrm{Z}', \mathbb{C})$

(1) $$u \circ v = p_{13*}((u \times [\mathrm{M}_3]) \cap ([\mathrm{M}_1] \times v)).$$

Si de plus Z, Z′ et les M_i sont algébriques G-équivariantes il y a un produit de convolution

$$\mathrm{K^G}(\mathrm{Z}) \times \mathrm{K^G}(\mathrm{Z}') \overset{\circ}{\to}{}_{\mathrm{K}}{}^{\mathrm{G}} (\mathrm{Z} \circ \mathrm{Z}'),$$

défini pour tous $\mathscr{F} \in \mathrm{K^G}(\mathrm{Z})$, $\mathscr{F}' \in \mathrm{K^G}(\mathrm{Z}')$ par

$$\mathscr{F} \circ \mathscr{F}' = (\mathrm{R}p_{13})_* (p_{12}^* \mathscr{F} \cap p_{23}^* \mathscr{F}').$$

Fixons deux entiers positifs d et n, $n \geqq 2$. Notons $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_d(\mathbb{C})$ et $\mathrm{K} = \mathrm{U}_d(\mathbb{C})$ son compact maximal. Soit $\mathscr{D}$ la variété des drapeaux non complets de $\mathbb{C}^d$ de la forme $\mathrm{D} = (0 = \mathrm{D}_0 \subseteqq \mathrm{D}_1 \subseteqq \ldots \subseteqq \mathrm{D}_n = \mathbb{C}^d)$ et $\mathscr{N}$ celle des endomorphismes x de $\mathbb{C}^d$ tels que $x^n = 0$. Alors le fibré vectoriel cotangent à $\mathscr{D}$ admet la description suivante

$$\mathrm{T}^* \mathscr{D} \simeq \{ (\mathrm{D}, x) \in \mathscr{D} \times \mathscr{N};\ x(\mathrm{D}_i) \subseteqq \mathrm{D}_{i-1} \}.$$

Notons π la seconde projection $\mathrm{T}^* \mathscr{D} \to \mathscr{N}$ et $\mathscr{Z} = \mathrm{T}^* \mathscr{D} \times_{\mathscr{N}} \mathrm{T}^* \mathscr{D}$ la réunion des fibrés conormaux aux G-orbites dans $\mathscr{D} \times \mathscr{D}$. Pour tout $x \in \mathscr{N}$ on désigne par $\mathscr{D}_x$ la fibre $\pi^{-1}(x)$ et par $\mathrm{L}(\mathscr{Z})$, $\mathrm{L}(\mathscr{D}_x)$ les sous-espaces respectivement de $\mathrm{H}_*(\mathscr{Z}, \mathbb{C})$ et $\mathrm{H}_*(\mathscr{D}_x \mathbb{C})$ engendrés par les classes fondamentales des composantes irréductibles de $\mathscr{Z}$ et $\mathscr{D}_x$. Prenons $\mathrm{M}_i = \mathrm{T}^* \mathscr{D}$, pour $i = 1, 2, 3$, munie de l'orientation associée à la structure symplectique naturelle sur $\mathrm{T}^* \mathscr{D}$, et $\mathrm{Z} = \mathrm{Z}' = \mathscr{Z}$. Comme $\mathscr{Z} \circ \mathscr{Z} = \mathscr{Z}$ l'opération (1) définit un produit de convolution $\circ$ sur $\mathrm{H}_*(\mathscr{Z}, \mathbb{C})$. Ce produit munit $\mathrm{L}(\mathscr{Z})$ d'une structure d'algèbre. On considère l'action de $\mathrm{G} \times \mathbb{C}^*$ sur $\mathrm{T}^* \mathscr{D}$ où le groupe $\mathbb{C}^*$ opère scalairement sur les fibres. En faisant agir $\mathrm{G} \times \mathbb{C}^*$ diagonalement sur $\mathrm{T}^* \mathscr{D} \times \mathrm{T}^* \mathscr{D}$, Ginzburg construit aussi une algèbre $(\mathrm{K}^{\mathrm{G} \times \mathbb{C}^*}(\mathscr{Z}), \circ)$. En posant $\mathrm{M}_1 = \mathrm{M}_2 = \mathrm{T}^* \mathscr{D}$, $\mathrm{M}_3 = \{ point \}$ un point, et $\mathrm{Z} = \mathscr{Z}$,

$Z' = \mathscr{D}_x \subset T^* \mathscr{D} \times \{point\}$, Ginzburg obtient une structure de $L(\mathscr{Z})$-module sur $H_*(\mathscr{D}_x, \mathbb{C})$ et en particulier sur $L(\mathscr{D}_x)$. En particulier (on pose $x=0$) l'espace $H_*(\mathscr{D}, \mathbb{C})$ est un $L(\mathscr{Z})$-module dont $L(\mathscr{D})$, le sous-espace de $H_*(\mathscr{D}, \mathbb{C})$ engendré par les classes fondamentales des composantes connexes de $\mathscr{D}$, est un $L(\mathscr{Z})$-sous-module.

Pour $a=1, \ldots, n-1$ et $I=(i_0, \ldots, i_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ on note

$$I^{a+} = (i_0, \ldots, i_a + 1, \ldots, i_n),$$
$$I^{a-} = (i_0, \ldots, i_a - 1, \ldots, i_n).$$

Posons

$$\Delta = \{ (i_0, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^{n+1};\ 0 = i_0 \leqq \ldots \leqq i_n = d \}.$$

Si $I=(i_0, \ldots, i_n) \in \Delta$, notons P_I le groupe parabolique qui est le stabilisateur dans G du drapeau

$$\{0\} \subseteqq \mathbb{C}^{i_1} \subseteqq \ldots \subseteqq \mathbb{C}^{i_{n-1}} \subseteqq \mathbb{C}^d.$$

A deux éléments différents dans Δ peut correspondre le même groupe parabolique. On désigne par $\mathfrak{g}_I$ l'algèbre de Lie de P_I et par $\mathfrak{n}_I$ le radical nilpotent de $\mathfrak{p}_I$. Les composantes connexes de $\mathscr{D}$ sont exactement paramétrées par Δ. En notant $\mathscr{D}_I = G/P_I$ pour $I \in \Delta$ on a la décomposition suivante

$$\mathscr{D} = \coprod_{I \in \Delta} \mathscr{D}_I.$$

Pour I, $J \in \Delta$ soient π_I et π_J les projections de $G/(P_I \cap P_J)$ sur $\mathscr{D}_I$ et $\mathscr{D}_J$. L'application $\pi_I \times \pi_J$ étant un plongement de $G/(P_I \cap P_J)$ dans $\mathscr{D}_I \times \mathscr{D}_J$, on identifie $G/(P_I \cap P_J)$ à la G-orbite $(\pi_I \times \pi_J)(G/(P_I \cap P_J))$. Si M est une variété différentiable et $N \subset M$ une sous-variété de M on note $T^*_N M \subseteqq T^* M$ le fibré vectoriel conormal à N dans M. Soient $\mathscr{X}^I_a$, $\mathscr{Y}^I_a$ les composantes irréductibles de $\mathscr{Z}$ suivantes

$$\mathscr{X}^I_a = T^*_{G/P_I \cap P_{I^{a+}}} (\mathscr{D}_{I^{a+}} \times \mathscr{D}_I) \qquad \text{si} \quad I^{a+} \in \Delta,$$
$$\mathscr{Y}^I_a = T^*_{G/P_I \cap P_{I^{a-}}} (\mathscr{D}_{I^{a-}} \times \mathscr{D}_I) \qquad \text{si} \quad I^{a-} \in \Delta.$$

On note $[\mathscr{X}^I_a]$, $[\mathscr{Y}^I_a]$ leurs classes fondamentales et on pose

$$[\mathscr{X}^I_a] = 0 \qquad \text{si} \quad I^{a+} \notin \Delta,$$
$$[\mathscr{Y}^I_a] = 0 \qquad \text{si} \quad I^{a-} \notin \Delta.$$

Soit $\bar{\mathbf{U}}$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Elle définie par des générateurs, $\bar{\mathbf{E}}_a$, $\bar{\mathbf{F}}_a$, $\bar{\mathbf{H}}_a$ et les relations (2), (3), (4), (5) et (6) données dans le paragraphe 1. D'après Ginzburg, l'application

$$\bar{\mathbf{E}}_a \mapsto \sum_{I \in \Delta} [\mathscr{X}^I_a],$$
$$\bar{\mathbf{F}}_a \mapsto \sum_{I \in \Delta} [\mathscr{Y}^I_a],$$

se prolonge en un morphisme d'algèbres $\bar{\mathbf{U}} \rightarrow \mathrm{L}(\mathscr{X})$. Les modules $\mathrm{L}(\mathscr{D}_x)$ sont des $\bar{\mathbf{U}}$-modules irréductibles. Le singleton

$$\{0 \subseteqq \mathrm{Ker}(x) \subseteqq \mathrm{Ker}(x^2) \subseteqq \ldots \subseteqq \mathrm{Ker}(x^n) = \mathbb{C}^d\}$$

est une composante irréductible de $\mathscr{D}_x$. La classe correspondante $\mathrm{D}_x \in \mathrm{L}(\mathscr{D}_x)$ est un vecteur de plus haut poids de $\mathrm{L}(\mathscr{D}_x)$. De même soit $\mathbf{U}$ la déformation quantique de l'algèbre enveloppante $\bar{\mathbf{U}}$. Le groupe quantique $\mathbf{U}$ est défini par des générateurs $\mathbf{E}_a$, $\mathbf{F}_a$, $\mathbf{K}_a$, $\mathbf{K}_a^{-1}$ et les relations (7), (8), (9), (10) et (11) données dans le paragraphe 2. On introduit une racine carrée de v, c'est-à-dire une indéterminée q telle que $v = q^2$. Il existe des faisceaux cohérents équivariants de $\mathcal{O}_{\mathscr{X}}$-modules $\mathscr{F}_a^{\mathrm{I}}$ et $\mathscr{G}_a^{\mathrm{I}}$ supportés respectivement par $\mathscr{X}_a^{\mathrm{I}}$ et $\mathscr{Y}_a^{\mathrm{I}}$ tels que l'application

$$\mathbf{E}_a \mapsto \sum_{\mathrm{I} \in \Delta} [\mathscr{F}_a^{\mathrm{I}}],$$

$$\mathbf{F}_a \mapsto \sum_{\mathrm{I} \in \Delta} [\mathscr{G}_a^{\mathrm{I}}],$$

se prolonge en un morphisme d'algèbres $\mathbf{U} \rightarrow \mathbb{C}(q) \otimes_{\mathbb{Z}[v, v^{-1}]} \mathrm{K}^{\mathrm{G} \times \mathbb{C}^*}(\mathscr{X})$ (*voir* le paragraphe 2 ainsi que la construction de [G] inspirée de celle, dans [BLM], de $\mathbf{U}$ comme une algèbre de convolution de fonctions constructibles sur des variétés de drapeaux sur un corps fini).

Dans cet article je construis une structure de $\bar{\mathbf{U}}$-module sur le groupe de cohomologie K-équivariante $\mathrm{H}_{\mathrm{K}}^*(\mathscr{D}, \mathbb{C})$ [respectivement une structure de $\mathbf{U}$-module sur

$$\mathbb{C}(q) \otimes_{\mathbb{Z}[v, v^{-1}]} \mathrm{K}_{\mathrm{G} \times \mathbb{C}^*}(\mathscr{D})]$$

dans le théorème 1 [respectivement dans le théorème 8] en termes d'actions de permutations sur des espaces de polynômes et je vérifie qu'elle se restreint à l'action définie par Ginzburg sur $\mathrm{H}_*(\mathscr{D}, \mathbb{C})$ (*voir* théorème 3). J'obtiens donc une démonstration des résultats annoncés par Ginzburg dans [G]. Les résultats sont plus précis dans la mesure où j'obtiens des représentations des formes entières de l'algèbre enveloppante et de sa déformation quantique, bien que, ainsi que l'a suggéré le rapporteur, il ne soit pas complètement clair que ces formes entières s'envoient surjectivement sur les groupes d'homologie et de K-théorie correspondants.

1. Action de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$

Soit B le sous-groupe de Borel de G des matrices triangulaires supérieures, H le sous-groupe de Cartan des matrices diagonales, K le sous-groupe des matrices unitaires et $\mathrm{T} = \mathrm{K} \cap \mathrm{H}$. Désignons par $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{t}$ les algèbres de Lie respctives de G, B, H, K et T. Soit $\mathrm{W} = \mathrm{S}_d$ le groupe des permutations sur un ensemble de d éléments. Si P est un sous-groupe parabolique de G contenant B on note W_P le groupe de Weyl d'un facteur de Lévi de P. Le groupe W_P s'identifie à un sous-groupe de W. Pour $\mathrm{I} = (i_0, \ldots, i_n) \in \Delta$ on note $\mathrm{W}_\mathrm{I} = \mathrm{W}_{\mathrm{P}_\mathrm{I}}$. Le sous-groupe W_I est engendré par les transpositions $(i, i+1)$ pour

$i \in \{1, \ldots, d-1\} \setminus \{i_0, \ldots, i_n\}$. Ainsi

$$W_I \simeq S_{i_1} \times S_{i_2 - i_1} \times \ldots \times S_{d - i_{n-1}}.$$

En particulier si I, $J \in \Delta$ on trouve

$$W_{P_I \cap P_J} = W_I \cap W_J.$$

Soit $\bar{U}$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire l'algèbre engendrée par $\bar{E}_a$, $\bar{F}_a$, $\bar{H}_a$ ($a = 1, \ldots, n-1$) et les relations

$$[\bar{H}_a, \bar{H}_b] = 0, \tag{2}$$

$$[\bar{H}_a, \bar{E}_b] = c_{ab} \bar{E}_b, \qquad [\bar{H}_a, \bar{F}_b] = -c_{ab} \bar{F}_b, \tag{3}$$

$$[\bar{E}_a, \bar{F}_b] = \delta_{ab} \bar{H}_a, \tag{4}$$

$$[\bar{E}_a, [\bar{E}_a, \bar{E}_b]] = 0, \qquad [\bar{F}_a, [\bar{F}_a, \bar{F}_b]] = 0, \qquad \text{si} \quad |a-b| = 1, \tag{5}$$

$$[\bar{E}_a, \bar{E}_b] = 0, \qquad [\bar{F}_a, \bar{F}_b] = 0, \qquad \text{si} \quad |a-b| > 1, \tag{6}$$

où l'on pose

$$\begin{aligned} c_{ab} &= 2 \quad \text{si} \quad a = b, \\ c_{ab} &= -1 \quad \text{si} \quad |a-b| = 1, \\ c_{ab} &= 0 \quad \text{si} \quad |a-b| > 1. \end{aligned}$$

Pour une variété différentielle M muni d'une action de K on note $H_K^*(M, \mathbb{C})$ l'anneau de cohomologie K-équivariante de M (*voir* [BGV], chap. 7). On sait que pour tout sous-groupe parabolique $P \subset G$ contenant B

$$H_K^*(G/P, \mathbb{C}) = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{W_P},$$

l'isomorphisme étant composé du morphisme de restriction

$$H_K^*(G/P, \mathbb{C}) \to H_T^*(G/P, \mathbb{C})$$

et du morphisme associant à la classe d'une forme différentielle T-équivariante α sur G/P la classe de sa restriction $\alpha_{|\{P\}}$ au singleton $\{P\}$. Fixons une famille de vecteurs linéairement indépendants e_I, avec $I \in \Delta$. Alors

$$H_K^*(\mathscr{D}, \mathbb{C}) = \bigoplus_{I \in \Delta} (\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{W_I} \otimes e_I).$$

Si W_1 et W_2 sont deux sous-groupes de W il existe une projection naturelle σ_{W_1, W_2} de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{W_1}$ dans $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{W_2}$ définie pour $Q \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{W_1}$ par

$$\sigma_{W_1, W_2}(Q) = \sum_{w \in W_2 / W_1 \cap W_2} w Q.$$

Si $I=(i_0, \ldots, i_n)\in\Delta$ notons

$$\lambda(I)=(i_1, i_2-i_1, \ldots, d-i_{n-1}).$$

Pour tout $Q\in\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{W_I}$, soit

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{e}}_a(Q\otimes e_I) &= \sigma_{W_I, W_{I^{a+}}}(Q)\otimes e_{I^{a+}} \qquad \text{si} \quad I^{a+}\in\Delta,\\
&= 0, \qquad \text{sinon},\\
\bar{\mathbf{f}}_a(Q\otimes e_I) &= \sigma_{W_I, W_{I^{a-}}}(Q)\otimes e_{I^{a-}} \qquad \text{si} \quad I^{a-}\in\Delta,\\
&= 0 \qquad \text{sinon},\\
\bar{\mathbf{h}}_a(Q\otimes e_I) &= ((i_a-i_{a-1})-(i_{a+1}-i_a))\,Q\otimes e_I.
\end{aligned}$$

THÉORÈME 1. — *L'application*

$$\bar{\mathbf{E}}_a\mapsto\bar{\mathbf{e}}_a, \qquad \bar{\mathbf{F}}_a\mapsto\bar{\mathbf{f}}_a, \qquad \bar{\mathbf{H}}_a\mapsto\bar{\mathbf{h}}_a,$$

définit une structure de $\bar{\mathbf{U}}$*-module sur* $H^*_K(\mathscr{D}, \mathbb{C})$.

Démonstration. — Les relations (2), (3) et (6) découlent immédiatement de la définition de $\bar{\mathbf{e}}_a$, $\bar{\mathbf{f}}_a$ et $\bar{\mathbf{h}}_a$. Il suffit de démontrer les autres relations dans le cas où $n=3$. Pour des entiers positifs l, k notons (l, k) la transposition correspondante. Fixons un quadruplet $I=(0, i, j, d)$, $0\leqq i\leqq j\leqq d$, et un polynôme $Q\in\mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{W_I}$. Supposons d'abord que $0<i<j$. Alors

$$\bar{\mathbf{e}}_1(Q\otimes e_I)=\sum_{l=1}^{1+i}(l, 1+i)\,Q\otimes e_{(0, i+1, j, d)},$$

$$\bar{\mathbf{f}}_1(Q\otimes e_I)=\sum_{k=i}^{j}(k, i)\,Q\otimes e_{(0, i-1, j, d)}.$$

On trouve donc

$$[\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{f}}_1](Q\otimes e_I)=\Big(\sum_{0<l\leqq i\leqq k\leqq j}(l, i)(k, i)\,Q-\sum_{0<l\leqq 1+i\leqq k\leqq j}(k, 1+i)(l, 1+i)\,Q\Big)\otimes e_I.$$

D'autre part si $l<i+1\leqq k$ l'identité suivante est vérifiée

$$(k, 1+i)(l, 1+i)(k, i+1)=(l, i)(k, i)(l, i).$$

Donc

$$\begin{aligned}
&[\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{f}}_1](Q\otimes e_I)\\
&\quad=\Big(\sum_{0<l\leqq i\leqq k\leqq j}(l, i)(k, i)\,Q-\sum_{0<l\leqq i\leqq k\leqq j}(l, i)(k, i)(l, i)(k, 1+i)\,Q\\
&\qquad\qquad+\sum_{0<l\leqq i}(l, i)\,Q-\sum_{i<k\leqq j}(k, 1+i)\,Q\Big)\otimes e_I.
\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$[\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{f}}_1](\mathrm{Q}\otimes e_\mathrm{I}) = (2i-j)\,\mathrm{Q}\otimes e_\mathrm{I},$$

parce que Q est invariant sous l'action de $\mathrm{W_I}$. Si $0=i<j$ alors $\bar{\mathbf{f}}_1(\mathrm{Q}\otimes e_\mathrm{I})=0$, donc

$$\begin{aligned}[\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{f}}_1](\mathrm{Q}\otimes e_\mathrm{I}) &= -\sum_{0<k\leqq j} (1, k)\,\mathrm{Q}\otimes e_\mathrm{I},\\ &= -j\,\mathrm{Q}\otimes e_\mathrm{I}.\end{aligned}$$

De même si $0<i=j$ alors $\bar{\mathbf{e}}_1(\mathrm{Q}\otimes e_\mathrm{I})=0$ et donc

$$[\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{f}}_1](\mathrm{Q}\otimes e_\mathrm{I}) = i\,\mathrm{Q}\otimes e_\mathrm{I},$$

et si $0=i=j$

$$[\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{f}}_1](\mathrm{Q}\otimes e_\mathrm{I}) = 0.$$

Dans tous les cas P est un vecteur de poids $\lambda(\mathrm{I})$, ce qui donne la relation (4) quand $a=b=1$. Si $a\neq b$ la relation (4) est immédiate, sauf pour le commutateur $[\bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{f}}_1]$. Dans ce cas le calcul donne

$$[\bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{f}}_1](\mathrm{Q}\otimes e_\mathrm{I}) = \left(\sum_{l=i}^{1+j}\sum_{k=i}^{j}(l, 1+j)(k, i)\,\mathrm{Q} - \sum_{k=i}^{1+j}\sum_{l=1+i}^{1+j}(k, i)(l, 1+j)\,\mathrm{Q}\right)\otimes e_{(0,\,i-1,\,j+1,\,d)}.$$

En supprimant les termes pour lesquels $k\neq l$ qui se simplifient entre eux, il reste

$$\begin{aligned}[\bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{f}}_1](\mathrm{Q}\otimes e_\mathrm{I}) &= \left(\sum_{l=i}^{j}(l, 1+j)(, i)\,\mathrm{Q} - \sum_{k=1+i}^{1+j}(k, i)(k, 1+j)\,\mathrm{Q}\right.\\ &\quad \left. + \sum_{k=i}^{j}(i, 1+j)(k, i)\,\mathrm{Q} - \sum_{l=1+i}^{1+j}(1+j, i)(l, 1+j)\,\mathrm{Q}\right)\otimes e_{(0,\,i-1,\,j+1,\,d)},\\ &= \left(\sum_{l=1+i}^{j}(l, 1+j)(l, i)\,\mathrm{Q} - \sum_{k=1+i}^{j}(k, i)(k, 1+j)\,\mathrm{Q}\right.\\ &\quad \left. + \sum_{k=1+i}^{j}(i, 1+j)(k, i)\,\mathrm{Q} - \sum_{l=1+i}^{j}(1+j, i)(l, 1+j)\,\mathrm{Q}\right)\otimes e_{(0,\,i-1,\,j+1,\,d)},\\ &= 0,\end{aligned}$$

parce que si $i<l$, $k\leqq j$

$$(l, 1+j)(l, i) = (1+j, i)(l, 1+j),$$

$$(k, i)(k, 1+j) = (i, 1+j)(k, i).$$

Il reste à vérifier la relation (5). Supposons que $i+1<j<d$ (sinon $[\bar{\mathbf{e}}_1, [\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2]](\mathrm{Q}\otimes e_{\mathrm{I}})=0$ par définition). Le calcul donne

$$[\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2](\mathrm{Q}\otimes e_{\mathrm{I}})=\left(\sum_{l=1}^{1+i}\sum_{k=1+i}^{1+j}(l,\,1+i)(k,\,1+j)\mathrm{Q}\right.$$
$$\left.-\sum_{l=1}^{1+i}\sum_{k=2+i}^{1+j}(k,\,1+j)(l,\,1+i)\mathrm{Q}\right)\otimes e_{(0,\,i+1,\,j+1,\,d)},$$
$$=\sum_{l=1}^{1+i}(l,\,1+i)(1+i,\,1+j)\mathrm{Q}\otimes e_{(0,\,i+1,\,j+1,\,d)}.$$

Donc

$$[\bar{\mathbf{e}}_1, [\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2]](\mathrm{Q}\otimes e_{\mathrm{I}})=\sum_{l=1}^{2+i}\sum_{k=1}^{1+i}(l,\,2+i)(k,\,1+i)$$
$$((1+i,\,1+j)\mathrm{Q}-(2+i,\,1+j)\mathrm{Q})\otimes e_{(0,\,i+2,\,j+1,\,d)}.$$

D'autre part Q et $([\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2]\bar{\mathbf{e}}_1)(\mathrm{Q}\otimes e_{\mathrm{I}})$ sont invariants par $(1+i,\,2+i)$ et on vérifie que la famille des

$$(l,\,2+i)(k,\,1+i)\qquad\text{pour}\quad 0<l,k\leqq 2+i, k\neq 2+i$$

est invariante par conjugaison par $(1+i,\,2+i)$. Donc,

$$[\bar{\mathbf{e}}_1, [\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2]](\mathrm{Q}\otimes e_{\mathrm{I}})=0.$$

De la même manière on démontre que $[\bar{\mathbf{e}}_2, [\bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_1]](\mathrm{Q}\otimes e_{\mathrm{I}})=0$, etc. □

Soit K un groupe de Lie compact. Si $\mathrm{E}\rightarrow\mathrm{M}$ est un fibré vectoriel réel K-équivariant orienté de rang r sur une variété différentielle M et s est une section nulle de E, notons $\mathrm{Th}(\mathrm{E})\in\mathrm{H}_{\mathrm{K}}^r(\mathrm{E}, \mathrm{E}\setminus s(\mathrm{M}), \mathbb{C})$ la classe de Thom équivariante de E et $\mathrm{Eu}(\mathrm{E})=s^*\,\mathrm{Th}(\mathrm{E})\in\mathrm{H}_{\mathrm{K}}^r(\mathrm{M}, \mathbb{C})$ la classe d'Euler équivariante de E (*voir* [BGV], chap. 7). Soit $\mathrm{I}\in\Delta$ tel que $\mathrm{I}^{a+}\in\Delta$. Notons $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$ les fibrations suivantes

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{G}/(\mathrm{P}_{\mathrm{J}}\cap\mathrm{P}_{\mathrm{I}^{a+}} & \xrightarrow{\bar{p}_1} & \mathscr{D}_{\mathrm{I}^{a+}} \\ {\scriptstyle \bar{p}_2}\downarrow & & \\ \mathscr{D}_{\mathrm{I}}. & & \end{array}$$

On note $\mathrm{T}\bar{p}_1$ le fibré vectoriel tangent aux fibres de $\bar{p}_1$ et $\mathrm{T}^*\bar{p}_1$ le fibré vectoriel dual. Posons $\mathrm{Eu}(\bar{p}_1)=\mathrm{Eu}(\mathrm{T}\bar{p}_1)\in\mathrm{H}_{\mathrm{K}}^*(\mathrm{G}/(\mathrm{P}_{\mathrm{I}}\cup\mathrm{P}_{\mathrm{I}^{a+}}), \mathbb{C})$. L'image directe en cohomologie équivariante par la projection d'une fibration complexe, par exemple $\bar{p}_1$, est donnée par l'intégration fibre à fibre des formes différentielles relativement aux orientations induites par les structures complexes (*voir* la définition de l'intégration fibre à fibre dans [BT], p. 61).

THÉORÈME 2. — *Pour tout* $\alpha \in H_K^*(\mathscr{D}_I, \mathbb{C})$,

$$\bar{\mathbf{e}}_a(\alpha) = \bar{p}_{1*}(\bar{p}_2^*(\alpha) \cup \mathrm{Eu}(\bar{p}_1)).$$

Démonstration. — Pour démontrer le théorème il suffit de démontrer le lemme suivant : Soit G un groupe de Lie semi-simple complexe, $B \subset G$ un sous-groupe de Borel et P, Q des deux sous-groupes paraboliques de G tels que

$$B \subset P \subset Q.$$

Soit encore K un sous-groupe compact maximal de G tel que $T = K \cap H$ soit un tore maximal de K et $K_p = K \cap P$, $K_Q = K \cap Q$. On désigne par p, p' et p'' les projections du diagramme

$$\begin{array}{ccc} G/B & & \\ {\scriptstyle p''}\downarrow & \searrow{\scriptstyle p} & \\ G/P & \xrightarrow{p'} & G/Q. \end{array}$$

LEMME 1. — *Pour tout* $\alpha \in H_K^*(G/P, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{W_P}$ *on a*

$$p'_*(\alpha \cup \mathrm{Eu}(p')) = \sigma_{W_P, W_Q}(\alpha) \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{W_Q}.$$

Démonstration. — L'égalité

$$\mathrm{Eu}(p) = \mathrm{Eu}(p'') \cup p''^* \mathrm{Eu}(p')$$

donne

$$p_*(p''^* \alpha \cup \mathrm{Eu}(p)) = p'_*(\alpha \cup \mathrm{Eu}(p') \cup p''_* \mathrm{Eu}(p'').$$

Il suffit pour démontrer le lemme d'établir la formule suivante

$$\forall \beta \in H_K^*(G/B, \mathbb{C}), \qquad p_*(\beta \cup \mathrm{Eu}(p)) = \sum_{w \in W_Q} w\beta$$

(elle implique en particulier que $p''_* \mathrm{Eu}(p'') = |W_P|$). Sachant que $G/B \simeq K/T$ et $G/Q \simeq K/K_Q$ le morphisme p est la projection

$$K/T \xrightarrow{p} K/K_Q.$$

L'image par l'isomorphisme $H_K^*(K/K_Q, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{W_Q}$ décrit précédemment de $p_*(\beta \cup \mathrm{Eu}(p))$ est

$$\int_{K_Q/T} (\beta \cup \mathrm{Eu}(p))^T,$$

où $(\beta \cup \mathrm{Eu}(p))^T$ est la restriction de $\beta \cup \mathrm{Eu}(p)$ en une classe T-équivariante sur K/T. Cette intégrale se calcule grâce au théorème de Localisation en cohomologie équivariante (*voir* [BGV], théorème 7.13]) et on obtient

$$p_*(\beta \cup \mathrm{Eu}(p)) = \sum_{w \in W_Q} w\beta. \quad \square$$

Soit $\mathscr{I}$ l'idéal de $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ engendré par les polynômes invariants par W sans terme constant. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} H_K^*(G/P_I, \mathbb{C}) & \tilde{\rightarrow} & \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{W_I} \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^*(G/P_I, \mathbb{C}) & \tilde{\rightarrow} & (\mathbb{C}[\mathfrak{h}]/\mathscr{I})^{W_I}, \end{array}$$

l'isomorphisme du bas étant dû à Borel si $P_I = B$ (*voir* aussi [BGG], § 5.1). C'est-à-dire que

$$\begin{aligned} H^*(\mathscr{D}, \mathbb{C}) &= \bigoplus_{I \in \Delta} ((\mathbb{C}[\mathfrak{h}]/\mathscr{I})^{W_I} \otimes e_I). \\ &= H_K^*(\mathscr{D}, \mathbb{C})/\mathscr{I}. \end{aligned}$$

L'idéal $\mathscr{I}$ étant invariant par l'action de $\bar{U}$, l'espace vectoriel $H^*(\mathscr{D}, \mathbb{C})$ est muni de la structure de $\bar{U}$-module quotient de celle de $H_K^*(\mathscr{D}, \mathbb{C})$.

THÉORÈME 3. — *L'action de* $\bar{U}$ *sur* $H^*(\mathscr{D}, \mathbb{C})$ *décrite dans le théorème* 1 *coïncide, par l'isomorphisme de Dualité de Poincaré, avec l'action de* $\bar{U}$ *sur* $H_*(\mathscr{D}, \mathbb{C})$ *donnée par Ginzburg.*

Démonstration. — Soient N_1 et N_2 deux variétés différentiables connexes orientées et $M \subseteq N_2 \times N_1$ une sous-variété fermée orientée. Soient p_1 et p_2 les projections

$$\begin{array}{ccc} T^*N_2 \times T^*N_1 & \xrightarrow{p_1} & T^*N_2 \\ {\scriptstyle p_2}\downarrow & & \\ T^*N_1, & & \end{array}$$

et $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$ celles du diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\bar{p}_1} & N_2 \\ {\scriptstyle \bar{p}_2}\downarrow & & \\ N_1. & & \end{array}$$

Supposons que $\bar{p}_1$ et $\bar{p}_2$ soient des fibrations, c'est-à-dire en particulier qu'il existe un opérateur d'image réciproque en homologie

$$H_j(N_1, \mathbb{C}) \xrightarrow{\vec{p}_2} H_{j+\dim M - \dim N_1}(M, \mathbb{C}).$$

Notons $\circ$ l'opérateur de Dualité de Poincaré, ainsi que $N_i \xrightarrow{s_i} T^* N_i$ la section nulle et $T^* N_i \xrightarrow{\pi_i} N_i$ la projection ($i=1, 2$). Soit j l'inclusion $T^*_M(N_2 \times N_1) \subset T^*(N_2 \times N_1)$. Supposons que la restriction de la projection p_1 à $(T^*_M(N_2 \times N_1)) \cap ((T^* N_2) \times N_1)$ soit propre (ce qui est le cas si par exemple N_1 est compacte). On peut appliquer à cette situation la construction du produit de convolution rappelée dans l'introduction. Posons $M_1 = T^* N_2$, $M_2 = T^* N_1$, $M_3 = \{point\}$, $Z = T^*_M(N_2 \times N_1)$ et $Z' = s_1(N_1)$. Les variétés M_1 et M_2 sont munies de l'orientation associée à la structure symplectique canonique. Comme $\bar{p}_1$ est une submersion on trouve que

$$p_1(Z \cap (M_1 \times Z')) \subseteq s_2(N_2).$$

La convolution par $[T^*_M(N_2 \times N_1)]$ [*voir* la formule (1)] est donc un opérateur $H_*(N_1, \mathbb{C}) \to H_*(N_2, \mathbb{C})$.

LEMME 2. — *Pour tout* $\mathscr{Y} \in H_*(N_1, \mathbb{C})$

$$[T^*_M(N_2 \times N_1)] \circ \mathscr{Y} = \bar{p}_{1*}(\mathrm{Eu}(T^* \bar{p}_1) \cap \bar{p}_2^*(\mathscr{Y})) \in H_*(N_2, \mathbb{C}),$$

c'est-à-dire que

$$[T^*_M(N_2 \times N_1)] \circ \mathscr{Y})^o = \bar{p}_{1*}(\mathrm{Eu}(T^* \bar{p}_1) \cap \bar{p}_2^*(\mathscr{Y}^o))) \in H_*(N_2, \mathbb{C}),$$

Démonstration. — Soit $\mathscr{Y} \in H_*(N_1, \mathbb{C})$.

$$\begin{aligned}[T^*_M(N_2 \times N_1)] \circ \mathscr{Y} &= p_{1*}(([T^* N_2] \times s_{1*}(\mathscr{Y})) \cap [T^*_M(N_2 \times N_1)]), \\ &= p_{1*}(p_2^*(\pi_1^*(\mathscr{Y}^o) \cup \mathrm{Th}(T^* N_1)) \cap [T^*_M(N_2 \times N_1)]), \\ &= p_{1*}((\pi_1 p_2)^*(\mathscr{Y}^o) \cap (p_2^* \mathrm{Th}(T^* N_1) \cap [T^*_M(N_2 \times N_1)])).\end{aligned}$$

D'autre part,

$$p_2^* \mathrm{Th}(T^* N_1) \cap [T^*_M(N_2 \times N_1)] = j^* p_2^* \mathrm{Th}(T^* N_1) \cap [T^*_M(N_2 \times N_1)].$$

De la suite exacte de fibrés vectoriels sur M suivante

$$0 \to T^*_M(N_2 \times N_1) \to \bar{p}_2^*(T^* N_1) \to T^* \bar{p}_1 \to 0$$

on déduit donc que

$$\begin{aligned}p_2^* \mathrm{Th}(T^* N_1) \cap [T^*_M(N_2 \times N_1)] &= \mathrm{Eu}(T^* \bar{p}_1) \cap (\mathrm{Th}(T^*_M(N_2 \times N_1)) \cap [T^*_M(N_2 \times N_1)]), \\ &= \mathrm{Eu}(T^* \bar{p}_1) \cap [M].\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}[T^*(N_2 \times N_1)] \circ \mathscr{Y} &= \bar{p}_{1*}((p_2^*(\mathscr{Y}^o) \cup \mathrm{Eu}(T^* \bar{p}_1)) \cap [M]), \\ &= (\bar{p}_{1*}(\bar{p}_2^*(\mathscr{Y}^o) \cup \mathrm{Eu}(T^* \bar{p}_1)))^o. \quad \square\end{aligned}$$

Soit $I \in \Delta$ tel que $I^{a+} \in \Delta$ et $\mathscr{Y} \in H_*(\mathscr{D}_I, \mathbb{C})$. Par définition de la structure de $\bar{U}$-module sur $H_*(\mathscr{D}, \mathbb{C})$ donnée par Ginzburg,

$$\bar{E}_a . \mathscr{Y} = [\mathscr{X}_a^I] \circ \mathscr{Y} \in H_*(\mathscr{D}_{I^{a+}}, \mathbb{C}).$$

En appliquant le lemme 2 avec $N_1 = \mathscr{D}_I$, $N_2 = \mathscr{D}_{I^{a+}}$ et $M = G/(P_I \cap P_{I^{a+}})$ on trouve

$$\begin{aligned}(\bar{E}_a . \mathscr{Y})^o &= ([\mathscr{X}_a^I] \circ \mathscr{Y})^o. \\ &= \bar{p}_{1*}(\bar{p}_2^*(\mathscr{Y}^o) \cup \mathrm{Eu}(T^* \bar{p}_1)),\end{aligned}$$

(prendre garde au fait que l'orientation associée à la structure complexe utilisée dans le théorème 2 est différente de l'orientation associée à la structure symplectique prise pour la définition de l'opérateur de convolution). De même si $I^{a+} \notin \Delta$ on a $[\mathscr{X}_a^I] = 0$ et donc

$$\bar{E}_a . \mathscr{Y} = 0.$$

Ceci achève la démonstration du théorème. □

L'espace vectoriel $\mathfrak{h}$ est naturellement isomorphe à $\mathbb{C}^d$. On note $x_1, \ldots, x_d$ les coordonnées complexes correspondantes sur $\mathfrak{h}$ et $\partial_1, \ldots, \partial_d$ les dérivées partielles par rapport à ces variables. Soit S le polynôme de Vandermonde qui est donné par

$$S(x) = \frac{1}{(d-1)!} \prod_{1 \leq l < k \leq d} (x_l - x_k).$$

Soit $I = (i_0, \ldots, i_n)$. Soit $S_I \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^{W_I}$ défini ainsi

$$S_I(x) = \left(\prod_{a=1}^{n} \prod_{i_{a-1} < l < k \leq i_a} (\partial_l - \partial_k) \right) S(x).$$

Le polynôme S_I est harmonique et est un représentant de la classe fondamentale de $\mathscr{D}_I$ dans $H^*(\mathscr{D}_I, \mathbb{C})$ à une constante non nulle près.

THÉORÈME 4. — *Supposons que* $\lambda(I)$ *soit un poids dominant, alors* $S_I \otimes e_I$ *est un vecteur primitif de poids* $\lambda(I)$.

Démonstration. — Le polynôme S_I a pour degré $\dim_{\mathbb{C}}(\mathscr{D}_I)$, donc $\sigma_{W_I, W_{I^{a+}}}(S_I)$ aussi. Le calcul donne

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathscr{D}_I) = \frac{1}{2}\left(d^2 - \sum_{b=1}^{n} (i_b - i_{b-1})^2 \right).$$

Donc

$$\begin{aligned}\dim_{\mathbb{C}}(\mathscr{D}_I) - \dim_{\mathbb{C}}(\mathscr{D}_{I^{a+}}) &= \frac{1}{2}((i_a - i_{a-1} + 1)^2 + (i_{a+1} - i_a - 1)^2 \\ &\qquad - (i_a - i_{a-1})^2 - (i_{a+1} - i_a)^2), \\ &= -i_{a+1} + 2 i_a - i_{a-1} + 1.\end{aligned}$$

D'autre part, $\lambda(\mathrm{I})$ étant dominant,

$$i_a - i_{a-1} \geqq i_{a+1} - i_a.$$

D'où

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathscr{D}_{\mathrm{I}^{a+}}) < \dim_{\mathbb{C}}(\mathscr{D}_{\mathrm{I}}).$$

Donc la classe de $\bar{\mathbf{e}}_a(\mathrm{S}_\mathrm{I} \otimes e_\mathrm{I})$ dans $\mathrm{H}^*(\mathscr{D}_{\mathrm{I}^{a+}}, \mathbb{C}) \otimes e_{\mathrm{I}^{a+}}$ est nulle. Le polynôme $\sigma_{\mathrm{W}_\mathrm{I}, \mathrm{W}_{\mathrm{I}^{a+}}}(\mathrm{S}_\mathrm{I})$ étant harmonique, il est donc nul. □

Les éléments $\mathrm{S}_\mathrm{I} \otimes e_\mathrm{I}$ engendrent des $\bar{\mathrm{U}}$-sous-modules irréductibles de dimension finie de $\mathrm{H}^*(\mathscr{D}, \mathbb{C})$. D'autre part d'après Ginzburg $\mathrm{L}(\mathscr{D}_x) \subset \mathrm{H}_*(\mathscr{D}_x, \mathbb{C})$, $x \in \mathscr{N}$, est un module irréductible dont un vecteur de plus haut poids D_x est la classe fondamentale de la composante irréductible

$$\{0 \subseteqq \mathrm{Ker}(x) \subseteqq \ldots \subseteqq \mathrm{Ker}(x^n) = \mathbb{C}^d\}$$

de $\mathscr{D}_x$, et a pour poids $\lambda(\mathrm{I}_x)$ où

$$\mathrm{I}_x = (0, \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ker}(x), \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ker}(x^2), \ldots, \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ker}(x^{n-1}), d).$$

THÉORÈME 5. — *Le module* $\mathrm{L}(\mathscr{D}_x)$ *est canoniquement isomorphe au* $\bar{\mathrm{U}}$-*sous-module de* $\mathrm{H}^*(\mathscr{D}, \mathbb{C})$ *engendré par* $S_{\mathrm{I}_x} \otimes e_{\mathrm{I}_x}$.

Démonstration. — L'injection $\mathscr{D}_x \overset{i}{\hookrightarrow} \mathscr{D}$ induit une injection en homologie (en effet on sait que $\mathrm{H}_*((\mathrm{G/B})_x, \mathbb{C}) \overset{i_*}{\hookrightarrow} \mathrm{H}_*(\mathrm{G/B}, \mathbb{C})$ est une injection. Dans le cas où l'on considère un groupe parabolique plutôt que le groupe de Borel B l'application en homologie est encore injective d'après [BM], §). D'autre part l'action définie par Ginzburg stabilise $i_*(\mathrm{H}_*(\mathscr{D}_x, \mathbb{C}))$ et le Dual de Poincaré dans $\mathrm{H}^*(\mathscr{D}, \mathbb{C})$ de $i_*(\mathrm{D}_x)$ est un multiple de la classe du polynôme S_I. Le théorème 5 découle donc du théorème 3. □

On peut démontrer directement que $i_*(\mathrm{H}_*(\mathscr{D}_*, \mathbb{C}))$ est stable par l'action de $\bar{\mathrm{U}}$ définie dans le théorème 1:

Soit M une variété différentiable et $\mathrm{E} \xrightarrow{\pi} \mathrm{M}$ un fibré vectoriel réel orienté de rang r sur M. On désigne par s la section nulle de E et par f une section de E.

LEMME 3. — *Le cap-produit par* $\mathrm{Eu}(\mathrm{E})$ *est un opérateur* $\mathrm{H}_*(\mathrm{M}, \mathbb{C}) \to \mathrm{H}_{*-r}(f^{-1}(0), \mathbb{C})$.

Démonstration. — Pour tout $\alpha \in \mathrm{H}^*(\mathrm{M}, \mathbb{C})$ on sait que

$$\mathrm{Th}(\mathrm{E}) \cup \pi^* \alpha \in \mathrm{H}^{*+r}(\mathrm{E}, \mathrm{E} \setminus s(\mathrm{M}), \mathbb{C}).$$

Donc

$$f^* \mathrm{Th}(\mathrm{E}) \cup \alpha = f^*(\mathrm{Th}(\mathrm{E}) \cup \pi^* \alpha) \in \mathrm{H}^{*+r}(\mathrm{M}, \mathrm{M} \setminus f^{-1}(0), \mathbb{C}).$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{C}^*$ le cap-produit par $(tf)^* \mathrm{Th}(\mathrm{E})$ est un opérateur $\mathrm{H}_*(\mathrm{M}, \mathbb{C}) \to \mathrm{H}_{*-r}(f^{-1}(0), \mathbb{C})$. On conclut en faisant tendre t vers 0. □

Soit $I \in \Delta$ tel que $I^{a+} \in \Delta$, $\mathcal{D}_{I,x} = \mathcal{D}_I \cap \mathcal{D}_x$, et $\mathcal{Y} \in i_* H_*(\mathcal{D}_{I,x}, \mathbb{C})$. En reprenant les notations du théorème 2 il s'agit de vérifier que

$$\bar{p}_{1*}(\mathrm{Eu}(\bar{p}_1) \cap \bar{p}_2^*(\mathcal{Y})) \in i_* H_*(\mathcal{D}_{I^{a+},x}, \mathbb{C}).$$

Comme

$$T(G/(P_I \cap P_{I^{a+}})) = G \times_{P_I \cap P_{I^{a+}}} (\mathfrak{g}/(\mathfrak{p}_I \cap \mathfrak{p}_{I^{a+}})),$$
$$T\mathcal{D}_{I^{a+}} = G \times_{P_{I^{a+}}} (\mathfrak{g}/\mathfrak{p}_{I^{a+}}),$$

on trouve que

$$T\bar{p}_1 = G \times_{P_I \cap P_{I^{a+}}} (\mathfrak{p}_{I^{a+}}/(\mathfrak{p}_I \cap \mathfrak{p}_{I^{a+}})).$$

D'autre part la forme de Killing détermine un morphisme

$$\mathfrak{p}_{I^{a+}} \to \mathfrak{n}_I^*$$

qui induit un isomorphisme

$$\mathfrak{p}_{I^{a+}}/(\mathfrak{p}_I \cap \mathfrak{p}_{I^{a+1}}) \simeq (\mathfrak{n}_I/(\mathfrak{n}_I \cap \mathfrak{n}_{I^{a+}}))^*.$$

Comme

$$\mathcal{D}_{I,x} = \{ g P_I / g^{-1} x \in \mathfrak{n}_I \},$$

on définit une section holomorphe de $T^*\bar{p}_1 |_{\bar{p}_2^{-1}(\mathcal{D}_{I,x})}$ en associant à la classe de $g \in G$ dans $\bar{p}_2^{-1}(\mathcal{D}_{I,x})$ la classe de

$$(g, g^{-1} x \bmod \mathfrak{n}_I \cap \mathfrak{n}_{I^{a+}}).$$

On prolonge cette section en une section C^∞ de $T^*\bar{p}_1$ notée f. L'inclusion suivante est vérifiée

$$\bar{p}_1(\bar{p}_2^{-1}(\mathcal{D}_{I,x}) \cap \{ f = 0 \}) \subseteqq \mathcal{D}_{I^{a+},x}.$$

On conclut en appliquant le lemme 3. $\square$

Soit $\bar{U}_{\mathbb{Z}}$ la forme entière de $\bar{U}$ construite par Kostant. Le $\mathbb{Z}$-module $H^*(\mathcal{D}, \mathbb{Z})$ étant sans torsion

$$H^*(\mathcal{D}, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C} \simeq H^*(\mathcal{D}, \mathbb{C}),$$

et cet isomorphisme commute à l'action du groupe de Weyl. Notons

$$\mathcal{I}_{\mathbb{Z}} = \mathcal{I} \cap \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_d].$$

Le $\mathbb{Z}$-module

$$\bigoplus_{I \in \Delta} ((\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_d]/\mathcal{I}_{\mathbb{Z}})^{W_I} \otimes e_I)$$

est lui sans torsion et coïncide après extension des scalaires de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{C}$ avec $H^*(\mathscr{D}, \mathbb{C})$. Il est donc isomorphe à $H^*(\mathscr{D}, \mathbb{Z})$, l'isomorphisme commutant à l'action du groupe de Weyl.

PROPOSITION 6. — *Le $\mathbb{Z}$-module* $H^*(\mathscr{D}, \mathbb{Z})$ *est stable par l'action de* $\bar{\mathrm{U}}_{\mathbb{Z}}$.

Démonstration. — Fixons $I \in \Delta$ et $a \in \{1, \ldots, n-1\}$. Soit $Q \in H^*(\mathscr{D}_I, \mathbb{Z})$ et $N \in \mathbb{N}$.

Supposons que le $(n+1)$-uplet $J=(i_0, \ldots, i_a+N, \ldots, i_n) \in \Delta$ (sinon $\bar{\mathbf{e}}_a^N(Q \otimes e_I)=0$ est bien divisible par $N!$). Alors,

$$\bar{\mathbf{e}}_a^N(Q \otimes e_I)=\left(\sum_{l_1=1+i_{a-1}}^{1+i_a} \ldots \sum_{l_N=1+i_{a-1}}^{N+i_a} (l_N, N+i_a) \ldots (l_1, 1+i_a) Q\right) \otimes e_J.$$

Donc, comme Q est invariant par W_I,

$$\bar{\mathbf{e}}_a^N(Q \otimes e_I)=N!\, \sigma_{W_I, W_J}(Q) \otimes e_J.$$

d'où on déduit que

$$\frac{\bar{\mathbf{e}}_a^N(Q \otimes e_I)}{N!} \in H^*(\mathscr{D}_J, \mathbb{Z}) \otimes e_J. \quad \square$$

2. Action du groupe quantique de $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$

Soit G un groupe algébrique complexe et M une variété algébrique complexe lisse G-équivariante. On désigne par $\mathcal{O}_M$ le faisceau des germes de fonctions algébriques sur M. Soit Z, Z′ des sous-ensembles algébriques de M stables par l'action de G. Notons $K^G(Z)$ le groupe de Grothendieck des faisceaux de $\mathcal{O}_Z$-modules cohérents G-équivariants et $K_G^Z(M)$ le groupe de Grothendieck des complexes de faisceaux de $\mathcal{O}_M$-modules localement libres G-équivariants qui sont bornés et exacts sur $M \setminus Z$. On pose $K_G(M)=K_G^M(M)$. Le produit tensoriel des complexes de faisceaux de $\mathcal{O}_M$-modules localement libres définit un cup-produit

$$K_G^Z(M) \times K_G^{Z'}(M) \xrightarrow{\cup} K_G^{Z \cap Z'}(M).$$

De même il y a un cap-produit

$$K_G^Z(M) \times K^G(Z') \xrightarrow{\cap} K^G(Z \cap Z'),$$

obtenu en posant

$$[\mathscr{E}^{\cdot}] \cap [\mathscr{F}]=\sum_{j \geq 0}(-1)^j [H_j(\mathscr{E}^{\cdot} \otimes_{\mathcal{O}_{Z'}} \mathscr{F})].$$

Si M admet un fibré en droites algébrique ample G-équivariant, le cap-produit avec $[\mathcal{O}_{\mathrm{M}}]$ est un isomorphisme

$$\mathrm{K}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{Z}}(\mathrm{M}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{K}^{\mathrm{G}}(\mathrm{Z}).$$

Dans la suite de cet article cette hypothèse sera toujours vérifiée. On obtient donc un produit d'intersection

$$\mathrm{K}^{\mathrm{G}}(\mathrm{Z}) \times \mathrm{K}^{\mathrm{G}}(\mathrm{Z}') \xrightarrow{\cap} \mathrm{K}^{\mathrm{G}}(\mathrm{Z} \cap \mathrm{Z}').$$

Soit $\mathrm{E} \xrightarrow{\pi} \mathrm{M}$ un fibré algébrique G-équivariant de rang complexe r. On appelle classe de Koszul-Thom de E la classe $\Lambda(\mathrm{E}^*) \in \mathrm{K}_{\mathrm{G}}^{s(\mathrm{M})}(\mathrm{E})$ du complexe

$$0 \to \Lambda^r \pi^* \mathrm{E}^* \to \Lambda^{r-1} \pi^* \mathrm{E}^* \to \ldots \to \Lambda^0 \pi^* \mathrm{E}^* \to \mathbf{0}$$

qui est exact en-dehors de $s(\mathrm{M})$. Notons

$$\Lambda_{-1}(\mathrm{E}^*) = s^* \Lambda(\mathrm{E}^*) \in \mathrm{K}_{\mathrm{G}}(\mathrm{M}).$$

Faisons agir $\mathbb{C}^*$ trivialement sur M et notons v la classe du fibré en droites trivial sur M muni de l'action scalaire de $\mathbb{C}^*$ fibre à fibre dans $\mathrm{K}_{\mathrm{G} \times \mathbb{C}^*}(\mathrm{M}) = \mathbb{Z}[v, v^{-1}] \otimes \mathrm{K}_{\mathrm{G}}(\mathrm{M})$. Alors $v\mathrm{E} = v \otimes \mathrm{E}$ désigne le fibré vectoriel E muni de l'action scalaire de $\mathbb{C}^*$ fibre à fibre. Notons

$$\Lambda_{-v}(\mathrm{E}) = \Lambda_{-1}(v\,\mathrm{E}) \in \mathrm{K}_{\mathrm{G} \times \mathbb{C}^*}(\mathrm{M}).$$

L'identité suivante est vérifiée

$$\Lambda_{-v}(\mathrm{E}) = \sum_{j=0}^{r} (-v)^j \Lambda^j(\mathrm{E}).$$

Soit q une indéterminée et $v = q^2$. Notons $\mathscr{A}_q = \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$, $\mathscr{A}_v = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$, et $\mathrm{R}(\mathrm{H})$ l'anneau des représentations de H. Soit M une variété topologique munie d'une action de G. On définit le groupe de Grothendieck topologique équivariant $\mathrm{K}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{top}}(\mathrm{M})$ par

$$\mathrm{K}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{top}}(\mathrm{M}) = \mathrm{K}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{top}}(\mathrm{M}),$$

où $\mathrm{K}_{\mathrm{K}}^{\mathrm{top}}(\mathrm{M})$ est le groupe de K-cohomologie topologique K-équivariante défini par Segal dans [Se]. Si $\mathrm{P} \subset \mathrm{G}$ est un sous-groupe parabolique de G contenant B

$$\mathrm{K}_{\mathrm{G}}^{\mathrm{top}}(\mathrm{G}/\mathrm{P}) = \mathrm{R}(\mathrm{H})^{\mathrm{W_P}},$$

l'isomorphisme étant obtenu par composition des morphismes de restriction

$$\mathrm{K}_{\mathrm{K}}(\mathrm{G}/\mathrm{P}) \to \mathrm{K}_{\mathrm{T}}(\mathrm{G}/\mathrm{P}) \to \mathrm{K}_{\mathrm{T}}(\{\mathrm{P}\}) = \mathrm{R}(\mathrm{H}).$$

En particulier on désigne par X_i la classe du fibré en droites K-équivariant sur G/B dont la fibre au-dessus de $D \in G/B$ est D_i/D_{i-1}. Alors

$$R(H) = \mathbb{Z}[X_1, X_1^{-1}, \ldots, X_d, X_d^{-1}].$$

Le groupe $G \times \mathbb{C}^*$ agit à gauche sur $\mathscr{D}$, le sous-groupe $\mathbb{C}^*$ opérant trivialement. On trouve donc

$$K^{\text{top}}_{G \times \mathbb{C}^*}(\mathscr{D}) = \mathscr{A}_v \otimes \bigoplus_{I \in \Delta} (R(H)^{W_I} \otimes e_I).$$

D'une part, la variété $\mathscr{D}$ étant munie d'une décomposition en cellules affines, on sait que

$$K^{\text{top}}_{G \times \mathbb{C}^*}(\mathscr{D}) = K_{G \times \mathbb{C}^*}(\mathscr{D}),$$

d'autre part, la variété lisse $\mathscr{D}$ admettant un fibré en droites algébrique ample G-équivariant,

$$K_{G \times \mathbb{C}^*}(\mathscr{D}) = K^{G \times \mathbb{C}^*}(\mathscr{D}).$$

Donc

$$K^{G \times \mathbb{C}^*}(\mathscr{D}) = \mathscr{A}_v \otimes \bigotimes_{I \in \Delta} (R(H)^{W_I} \otimes e_I).$$

Pour tous $1 \leqq l$, $l \leqq d$ notons

$$\omega(l, k) = \frac{q^{-1} X_l - q X_k}{X_l - X_k},$$

et si $Q \in \mathscr{A}_q \otimes R(H)^{W_I}$ posons

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_a(Q \otimes e_I) &= \sigma_{W_I, W_{I^{a+}}}\Big(\prod_{i_{a-1} < s \leqq i_a} \omega(1 + i_a, s)\, Q\Big) \otimes e_{I^{a+}} \qquad \text{si} \quad I^{a+} \in \Delta,\\
&= 0 \qquad \text{sinon},\\
\mathbf{f}_a(Q \otimes e_I) &= \sigma_{W_I, W_{I^{a-}}}\Big(\prod_{i_a < t \leqq i_{a+1}} \omega(t, i_a)\, Q\Big) \otimes e_{I^{a-}} \qquad \text{si} \quad I^{a-} \in \Delta,\\
&= 0, \qquad \text{sinon},\\
\mathbf{k}_a(Q \otimes e_I) &= q^{(i_a - i_{a-1}) - (i_{a+1} + i_a)}\, Q \otimes e_I.
\end{aligned}$$

PROPOSITION 7. — *Les opérateurs* $\mathbf{e}_a$, $\mathbf{f}_a$ *et* $\mathbf{k}_a$ *agissent sur* $\mathscr{A}_q \otimes_{\mathscr{A}_v} K_{G \times \mathbb{C}^*}(\mathscr{D})$.

Démonstration. — Vérifions $\mathbf{e}_a(Q \otimes e_I)$ appartient à $\mathscr{A}_q \otimes R(H)^{W_{I^{a+}}} \otimes e_{I^{a+}}$. C'est immédiat parce que $\mathbf{e}_a(Q \otimes e_I)$ est de la forme

$$\mathbf{e}_a(Q \otimes e_I) = \frac{1}{|W_I \cap W_{I^{a+}}|\, \pi_{I^{a+}}} \sum_{w \in W_{I^{a+}}} (-1)^{l(w)}\, w(RQ) \otimes e_{I^{a+}},$$

étant donné que

$$l(w) \text{ est la longueur de } w,$$
$$R \in \mathcal{A}_q[X_1, X_2, \ldots, X_d],$$
$$\pi_I = \prod_{a=1}^{n} \prod_{i_{a-1}<l<k\leqq i_a} (X_l - X_k).$$

Donc $|W_I \cap W_{I^{a+}}| \mathbf{e}_a(Q\otimes e_I) \in \mathcal{A}_q[X_1, X_1^{-1}, \ldots, X_d, X_d^{-1}]$ et $\mathbf{e}_a(Q\otimes e_I)$ est divisible par $|W_I \cap W_{I^{a+}}|$ parce que Q est W_I-invariant.

Soit $\mathbf{U}$ la $\mathbb{C}(q)$-algèbre définie par les générateurs $\mathbf{E}_a$, $\mathbf{F}_a$, $\mathbf{K}_a$, $\mathbf{K}_a^{-1}$ ($a=1, \ldots, n-1$) et les relations (*voir* [D] et [J])

(7) $$\mathbf{K}_a \mathbf{K}_b = \mathbf{K}_b \mathbf{K}_a, \qquad \mathbf{K}_a \mathbf{K}_a^{-1} = \mathbf{K}_a^{-1} \mathbf{K}_a = 1,$$

(8) $$\mathbf{K}_a \mathbf{E}_b = q^{c_{ab}} \mathbf{E}_b \mathbf{K}_a, \qquad \mathbf{K}_a \mathbf{F}_b = q^{-c_{ab}} \mathbf{F}_b \mathbf{K}_a,$$

(9) $$\mathbf{E}_a \mathbf{F}_b - \mathbf{F}_b \mathbf{E}_a = \delta_{ab} \frac{\mathbf{K}_a - \mathbf{K}_a^{-1}}{q-q^{-1}},$$

(10) $$\begin{aligned} &\mathbf{E}_a^2 \mathbf{E}_b - (q+q^{-1}) \mathbf{E}_a \mathbf{E}_b \mathbf{E}_a + \mathbf{E}_b \mathbf{E}_a^2 = 0 \\ &\mathbf{F}_a^2 \mathbf{F}_b - (q+q^{-1}) \mathbf{F}_a \mathbf{F}_b \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_b \mathbf{F}_a^2 = 0, \qquad \text{si } |a-b|=1, \end{aligned}$$

(11) $$\mathbf{E}_a \mathbf{E}_b = \mathbf{E}_b \mathbf{E}_a, \qquad \mathbf{F}_a \mathbf{F}_b = \mathbf{F}_b \mathbf{F}_a, \qquad \text{si } |a-b|>1.$$

(Les entiers c_{ab} sont définis dans le paragraphe 1.)

THÉORÈME 8. — *L'application*

$$\mathbf{E}_a \mapsto \mathbf{e}_a, \qquad \mathbf{F}_a \mapsto \mathbf{f}_a, \qquad \mathbf{K}_a \mapsto \mathbf{k}_a,$$

définit une structure de $\mathbf{U}$*-module sur* $\mathbb{C}(q) \otimes_{\mathcal{A}_v} K_{G\times\mathbb{C}}(\mathbb{C}_*(\mathcal{D}))$.

Démonstration. — On procède comme pour la démonstration du théorème 1. Les relations (7), (8) et (11) sont immédiates. Il suffit de démontrer les relations (9) et (10) dans le cas où $n=3$. Fixons un quadruplet $I=(0, i, j, d)$, $0\leqq i\leqq j\leqq d$, et une fraction rationnelle $Q \in R(H\times\mathbb{C}^*)^{W_I}$. Supposons d'abord que $0<i<j$. Alors

$$\mathbf{e}_1(Q\otimes \mathbf{e}_I) = \sum_{l=1}^{1+i} (l, 1+i) \left(\prod_{s=1}^{i} w(i+1, s) Q \right) \otimes e_{(0, i+1, j, d)}.$$

$$\mathbf{f}_1(Q\otimes e_I) = \sum_{k=i}^{j} (k, i) \left(\prod_{t=i+1}^{j} \omega(t, i) Q \right) \otimes e_{(0, i-1, j, d)}.$$

Le calcul donne

$$\begin{aligned} [\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_1](Q\otimes e_I) = &\sum_{0<l\leqq i\leqq k\leqq j} (l, i)(k, i) (\prod_{0<s<i} \omega k, s) \prod_{i<t\leqq j} \omega(t, i) Q) \otimes e_I \\ &- \sum_{0<l\leqq 1+i\leqq k\leqq j} (k, 1+i)(l, 1+i) (\prod_{1+i<t\leqq j} \omega(t, l) \prod_{0<s\leqq i} \omega(1+i, s) Q) \otimes e_I. \end{aligned}$$

D'autre part, si $0<l\leqq i\leqq k\leqq j$

$$
\begin{aligned}
&(l, i)(k, 1+i) \prod_{1+i<t\leqq j} \omega(t, l) \prod_{0<s\leqq i} \omega(1+i, s)\\
&\quad =(l, i) \prod_{i<t\leqq j,\, t\neq k} \omega(t, l) \prod_{0<s\leqq i} \omega(k, s),\\
&\quad \prod_{i<t\leqq j,\, t\neq k} \omega(t, i) \prod_{0<s\leqq i} \omega(k, s),\\
&\quad = \prod_{i<t\leqq j} \omega(t, i) \prod_{0<s<i} \omega(k, s).
\end{aligned}
$$

Donc, étant donné que si $l\leqq i<k$

$$(k, 1+i)(l, 1+i)(k, 1+i)=(l, i)(k, i)(l, i),$$

on trouve

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_1](\mathrm{Q}\otimes e_{\mathrm{I}})=\Bigg(&\sum_{l=1}^{i} (i, l)\Big(\prod_{0<s<i} \omega(i, s) \prod_{i<t\leqq j} \omega(t, i)\Big)\\
&-\sum_{k=1+i}^{j} (1+i, k)\Big(\prod_{1+i<t\leqq j} \omega(t, 1+i) \prod_{0<s\leqq i} \omega(1+i, s)\Big)\Bigg)\mathrm{Q}\otimes e_{\mathrm{I}}.
\end{aligned}
$$

Posons

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}(\mathrm{X})&= \prod_{0<r\leqq j} (\mathrm{X}-\mathrm{X}_r),\\
\mathrm{B}(\mathrm{X})&= \prod_{0<s\leqq i} (q^{-1}\mathrm{X}-q\mathrm{X}_s) \prod_{i<t\leqq j} (q\mathrm{X}-q^{-1}\mathrm{X}_t).
\end{aligned}
$$

On veut calculer

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_1](\mathrm{Q}\otimes e_{\mathrm{I}})=\frac{1}{q^{-1}-q}\sum_{r=1}^{j}\frac{\mathrm{X}_r^{-1}\mathrm{B}(\mathrm{X}_r)}{\mathrm{A}'(\mathrm{X}_r)}\mathrm{Q}\otimes e_{\mathrm{I}}.$$

Par le théorème des Résidus on se ramène au calcul de résidus en 0 et en ∞. On trouve

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_1](\mathrm{Q}\otimes e_{\mathrm{I}})=\frac{q^{2i-j}-q^{j-2i}}{q-q^{-1}}\mathrm{Q}\otimes e_{\mathrm{I}}.$$

Si $i\neq 0$ ou $i=j$ on conclut de manière analogue et on en déduit la relation (9) pour $a=b=1$. Quand $a\neq b$ la relation (9) est évidente sauf pour le commutateur $[\mathbf{e}_1, \mathbf{f}_1]$ auquel cas, en posant

$$\mathrm{Q}_1=\prod_{s=i}^{j}\omega(1+j, s)\prod_{t=1+i}^{j}\omega(t, i)\mathrm{Q},$$

on trouve

$$[\mathbf{e}_2, \mathbf{f}_1](\mathrm{Q}\otimes e_{\mathrm{I}})=\left(\sum_{l=i}^{1+j}\sum_{k=i}^{j}(l, 1+j)(k, i)\,\mathrm{Q}_1-\sum_{k=i}^{1+j}\sum_{l=1+i}^{1+j}(k, i)(l, 1+j)\,\mathrm{Q}_1\right)\otimes e_{(0, i-1, j+1, d)}.$$

En décomposant les sommes de la même manière que dans le théorème 1 on conclut que

$$[\mathbf{e}_2, \mathbf{f}_1](\mathrm{Q}\otimes e_{\mathrm{I}})=0.$$

Il reste à vérifier la relation (10). Si $1\leqq l\leqq k\leqq d$ notons

$$\Omega(k, l)=\prod_{s=l}^{k=1}\omega(k, s).$$

Supposons que $i+1<j<d$ et notons $\mathrm{J}=(0, i+2, j+1, d)$, on trouve

$$\mathbf{e}_1^2\,\mathbf{e}_2(\mathrm{Q}\otimes e_{\mathrm{I}})=\sum_{h=1}^{i+2}\sum_{k=1}^{i+1}(h, i+2)(k, i+1)$$
$$\times\left(\Omega(i+2, 1)\,\Omega(i+1, 1)\sum_{l=1+i}^{1+j}(l, j+1)\,[\Omega(j+1, i+1)\,\mathrm{Q}]\right)\otimes e_{\mathrm{J}},$$

$$\mathbf{e}_1^2\,\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_1(\mathrm{Q}\otimes e_{\mathrm{I}})=\sum_{h=1}^{i+2}\sum_{k=1}^{i+1}(h, i+2)(k, i+1)$$
$$\times\left(\Omega(i+2, 1)\,\Omega(i+1, 1)\sum_{l=2+i}^{1+j}(l, j+1)\,[\Omega(j+1, i+2)\,\mathrm{Q}]\right)\otimes e_{\mathrm{J}},$$

$$\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_1^2(\mathrm{Q}\otimes e_{\mathrm{I}})=\sum_{h=1}^{i+2}\sum_{k=1}^{i+1}(h, i+2)(k, i+1)$$
$$\times\left(\Omega(i+2, 1)\,\Omega(i+1, 1)\sum_{l=3+i}^{1+j}(l, j+1)\,[\Omega(j+1, i+3)\,\mathrm{Q}]\right)\otimes e_{\mathrm{J}}.$$

Posons

$$\mathrm{C}=-\mathbf{e}_1^2\,\mathbf{e}_2(\mathrm{Q}\otimes e_{\mathrm{I}})+(q+q^{-1})\,\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_1(\mathrm{Q}\otimes e_{\mathrm{I}})-\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_1^2(\mathrm{Q}\otimes e_{\mathrm{I}}).$$

Alors

$$\mathrm{C}=\sum_{h=1}^{i+2}\sum_{k=1}^{i+1}(h, i+2)(k, i+1)\,[\Omega(i+2, 1)\,\Omega(i+1, 1)\,\mathrm{Q}_2]\otimes e_{\mathrm{J}},$$

avec

$$\begin{aligned}
Q_2 &= (q+q^{-1}) \sum_{l=i+2}^{j+1} (l, j+1) [\Omega(j+1, i+2) Q] \\
&\quad - \sum_{l=i+1}^{j+1} (l, j+1) [\Omega(j+1, i+1) Q], \\
&\quad - \sum_{l=i+1}^{j+1} (l, j+1) [\Omega(j+1, i+1) Q], \\
&= \sum_{l=i+3}^{j+1} (l, j+1) \Omega(j+1, i+3) \\
&\quad \times [\omega(i+1, j+1) \omega(j+1, i+2) Q - Q] \\
&\quad + (i+2, j+1) \Omega(j+1, i+2) \omega(i+1, j+1) Q \\
&\quad - (i+1, j+1) \Omega(j+1, i+1) Q,
\end{aligned}$$

parce que

$$q+q^{-1} - \omega(j+1, i+1) = \omega(i+1, j+1).$$

L'invariance par conjugaison par $(i+1, i+2)$ indiquée dans la démonstration du théorème entraîne que

$$2C = \sum_{h=1}^{i+2} \sum_{k=1}^{i+1} (h, i+2)(k, i+1) \left(Q_3 \prod_{s=1}^{i} \omega(i+2, s)(i+1, s) \right) \otimes e_J,$$

avec

$$Q_3 = \omega(i+2, i+1) Q_2 + (i+1, i+2) \omega(i+2, i+1) Q_2.$$

Le calcul donne

$$\begin{aligned}
&\omega(i+2, i+1) \omega(i+1, j+1) \omega(j+1, i+2) - \omega(i+2, i+1) \\
&\qquad + \omega(i+1, i+2) \omega(i+2, j+1) \omega(j+1, i+1) - \omega(i+1, i+2) = 0.
\end{aligned}$$

En posant

$$Q_4 = (i+2, j+1) \Omega(j+1, i+2) \omega(i+1, j+1) Q - (i+1, j+1) \Omega(j+1, i+1) Q,$$

on a donc

$$Q_3 = \omega(i+2, i+1) Q_4 + (i+1, i+2) \omega(i+2, i+1) Q_4.$$

Comme

$$\begin{aligned}
\omega(i+2, i+1) Q_4 &= \omega(i+2, i+1) \omega(i+1, i+2) \\
&\quad \times [(i+2, j+1) \Omega(j+1, i+3) \omega(j+1, i+2) Q \\
&\qquad - (i+1, j+1) \Omega(j+1, i+3) \omega(j+1, i+1) Q],
\end{aligned}$$

on trouve

$$Q_3=0.$$

Les autres égalités dans la relation (9) se déduisent par la même méthode. □

Reprenons les notations du théorème 2.

THÉORÈME 9. — *Pour tout* $\mathscr{F}\in K_{G\times\mathbb{C}^*}(G/P_I)$,

$$\mathbf{e}_a(\mathscr{F})=q^{i_{a-1}-i_a}(R\bar{p}_1)_*(\bar{p}_2^*(\mathscr{F})\cup\Lambda_{-v}(T^*\bar{p}_1)).$$

Démonstration. — Avec les notations du lemme 1, l'opérateur σ_{W_P,W_Q} défini dans le premier paragraphe s'étend naturellement en un morphisme du corps des fractions de $K_G(G/P)$ dans celui de $K_G(G/Q)$. Démontrons le lemme suivant :

LEMME 4. — *Pour tout* $\mathscr{F}\in K_G(G/P)$

$$(Rp')_*(\mathscr{F})=\sigma_{W_P,W_Q}\left(\frac{\mathscr{F}}{\Lambda_{-1}(T^*p')}\right).$$

Démonstration. — On procède comme dans la démonstration du lemme 1. Il suffit de calculer $(Rp)_*(\mathscr{F})$ avec $\mathscr{F}\in K_G(G/B)$. L'image par l'isomorphisme

$$K_G(G/Q)\xrightarrow{\sim}R(H)^{W_Q}$$

de $(Rp)_*(\mathscr{F})$ est par définition

$$(Rp^T)_*(\mathscr{F}^T)$$

où p^T est la restriction de p suivante

$$K_Q/T\xrightarrow{p^T}\{K_Q\},$$

et $\mathscr{F}^T$ est la restriction de $\mathscr{F}$ en une classe T-équivariante sur K/T. Ce caractère se calcule grâce au théorème de Borel-Weil-Bott [B] et la formule du caractère de Weyl. □

Pour en revenir à la démonstration du théorème 9, d'après le lemme 4 il suffit de vérifier que

$$\mathbf{e}_a(\mathscr{F})=q^{i_{a-1}-i_a}\sigma_{M_I,W_I^{a+}}\left(\frac{\mathscr{F}\cup\Lambda_{-q^2}(T^*\bar{p}_1)}{\Lambda_{-1}(T^*\bar{p}_1)}\right).$$

Calculons donc $\Lambda_{-q^2}(T^*\bar{p}_1)\in K_{G\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{D})$. L'isomorphisme $K_G(G/B)\xrightarrow{\sim}R(H)$ associant à la classe du fibré en droites de fibre D_i/D_{i-1} au-dessus de $D\in G/B$ le monôme X_i, l'image de la classe de $T^*\mathscr{D}_I$ est

$$\sum_{\substack{1\leq j<i\leq d\\(i,j)\notin W_I}}\frac{X_j}{X_i}.$$

Donc

$$\mathrm{T}^*\bar{p}_1=\sum_{i_{a-1}<s\leqq i_a}\frac{\mathrm{X}_s}{\mathrm{X}_{1+i_a}},$$

et

$$q^{i_{a-1}-i_a}\frac{\Lambda_{-q^2}(\mathrm{T}^*\bar{p}_1)}{\Lambda_{-1}(\mathrm{T}^*\bar{p}_1)}=\prod_{i_{a-1}<s\leqq i_a}\frac{q\mathrm{X}_s-q^{-1}\mathrm{X}_{1+i_a}}{\mathrm{X}_s-\mathrm{X}_{1+i_a}}.\quad\square$$

Rappelons la structure de **U**-module construite par Ginzburg sur $\mathbb{C}(q)\otimes_{\mathscr{A}_v}\mathrm{K}_{\mathrm{G}\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{D})$. Le groupe $\mathbb{C}^*$ agit sur $\mathrm{T}^*\mathscr{D}$ scalairement sur les fibres. Si $\mathrm{I}^{a+}\in\Delta$ notons $\mathscr{F}^{\mathrm{I}}_a$ le faisceau de $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^{\mathrm{I}}_a}$-modules $\mathrm{G}\times\mathbb{C}^*$-équivariant des germes de sections holomorphes du fibré vectoriel image réciproque de $\mathrm{Det}(-q\mathrm{T}^*\bar{p}_1)$ (notation du théorème 2) par la projection $\mathscr{X}^{\mathrm{I}}_a\to\mathrm{G}/(\mathrm{P}_{\mathrm{I}}\cap\mathrm{P}_{\mathrm{I}^{a+}})$ (le déterminant d'un fibré vectoriel est par définition sa puissance extérieure maximale). De même si $\mathrm{I}^{a-}\in\Delta$ on note $\mathscr{G}^{\mathrm{I}}_a$ le faisceau des germes de sections holomorphes du fibré vectoriel image réciproque de $\mathrm{Det}(-q\mathrm{T}^*p_1)$ (notations du lemme 2 avec $\mathrm{N}_2=\mathscr{D}_{\mathrm{I}^{a-}}$ et $\mathrm{M}=\mathrm{G}/(\mathrm{P}_{\mathrm{I}}\cap\mathrm{P}_{\mathrm{I}^{a-}})$ par la projection $\mathscr{Y}^{\mathrm{I}}_a\to\mathrm{G}/(\mathrm{P}_{\mathrm{I}}\cap\mathrm{P}_{\mathrm{I}^{a-}})$. Soient $[\mathscr{F}^{\mathrm{I}}_a]$ et $[\mathscr{G}^{\mathrm{I}}_a]$ les classes correspondantes dans $\mathrm{K}^{\mathrm{G}\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{X}^{\mathrm{I}}_a)$ et $\mathrm{K}^{\mathrm{G}\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{Y}^{\mathrm{I}}_a)$ et posons

$$[\mathscr{F}^{\mathrm{I}}_a]=0\qquad\text{si}\quad \mathrm{I}^{a+}\notin\Delta,$$
$$[\mathscr{G}^{\mathrm{I}}_a]=0\qquad\text{si}\quad \mathrm{I}^{a-}\notin\Delta.$$

On définit pour tout $\mathscr{F}\in\mathrm{K}^{\mathrm{G}\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{D}_{\mathrm{I}})$

$$\mathbf{E}_a.\mathscr{F}=[\mathscr{F}^{\mathrm{I}}_a]\circ\mathscr{F},$$
$$\mathbf{F}_a.\mathscr{F}=[\mathscr{G}^{\mathrm{I}}_a]\circ\mathscr{F},$$

[le produit $\circ$ est donnée dans l'introduction par un analogue de la formule (1)]. Cette action de **U** se transporte ensuite à $\mathrm{K}_{\mathrm{G}\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{D})$ par l'isomorphisme de dualité

$$\mathrm{K}_{\mathrm{G}\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{D})\xrightarrow{\sim}\mathrm{K}^{\mathrm{G}\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{D})$$

donné par le cap-produit par $[\mathscr{O}_{\mathscr{D}}]$.

THÉORÈME 10. — *Les structures de* **U**-*modules sur* $\mathbb{C}(q)\otimes_{\mathscr{A}_v}\mathrm{K}_{\mathrm{G}\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{D})$ *décrites par Ginzburg et par le théorème* 8 *coïncident.*

Démonstration. — Reprenons les notations du lemme 2. Supposons que N_1, N_2 et M sont des variétés algébriques G-équivariantes. On fait agir $\mathbb{C}^*$ scalairement sur les fibres de $\mathrm{T}^*\ \mathrm{N}_1$ et $\mathrm{T}^*\mathrm{N}_2$. La convolution par $[\mathscr{O}_{\mathrm{T}^*_{\mathrm{M}}(\mathrm{N}_2\times\mathrm{N}_1)}]$ définit un opérateur $K^{\mathrm{G}\times\mathbb{C}^*}(\mathrm{N}_1)\to\mathrm{K}^{\mathrm{G}\times\mathbb{C}^*}(\mathrm{N}_2)$, puis par dualité un opérateur $\mathrm{K}_{\mathrm{G}\times\mathbb{C}^*}(\mathrm{N}_1)\to\mathrm{K}_{\mathrm{G}\times\mathbb{C}^*}(\mathrm{N}_2)$.

LEMME 5. — *Pour tout* $\mathscr{F}\in\mathrm{K}_{\mathrm{G}\times\mathbb{C}^*}(\mathrm{N}_1)$

$$[\mathscr{O}_{\mathrm{T}^*_{\mathrm{M}}(\mathrm{N}_2\times\mathrm{N}_1)}]\circ\mathscr{F}=(\mathrm{R}\bar{p}_1)_*(\bar{p}_2(\mathscr{F})\cup\Lambda_{-v^{-1}}(\mathrm{T}\bar{p}_1))\in\mathrm{K}_{\mathrm{G}\times\mathbb{C}^*}(\mathrm{N}_2).$$

Démonstration. — Par définition, si $\mathscr{F} \in \mathrm{K}^{\mathrm{G}\times\mathbb{C}^*}(\mathrm{N}_1)$

$$[\mathcal{O}_{\mathrm{T}^*_{\mathrm{M}}(\mathrm{N}_2\times\mathrm{N}_1)}]\circ\mathscr{F} = (\mathrm{R}\,p_1)_*([\mathcal{O}_{\mathrm{T}^*_{\mathrm{M}}(\mathrm{N}_2\times\mathrm{N}_1)}]\cap p_2^* s_{1*}(\mathscr{F})).$$

D'autre part

$$s_{1*}(\mathscr{F}) = \Lambda(\mathrm{TN}_1)\cap \pi_1^*(\mathscr{F})\in \mathrm{K}^{\mathrm{G}\times\mathbb{C}^*}(\mathrm{T}^*\mathrm{N}_1),$$

et

$$p_2^*\Lambda(\mathrm{TN}_1)\cap[\mathcal{O}_{\mathrm{T}^*_{\mathrm{M}}(\mathrm{N}_2\times\mathrm{N}_1)}] = \Lambda_{-v^{-1}}(\mathrm{T}\bar{p}_1)\cap[\mathcal{O}_{\mathrm{M}}],$$

(*voir* la démonstration du lemme 2). Donc

$$[\mathcal{O}_{\mathrm{T}^*_{\mathrm{M}}(\mathrm{N}_2\times\mathrm{N}_1)}]\circ\mathscr{F} = (\mathrm{R}\,\bar{p}_1)_*(p_2^*(\mathscr{F})\cap(\Lambda_{-v^{-1}}(\mathrm{T}\bar{p}_1)\cap[\mathcal{O}_{\mathrm{M}}])).$$

Par dualité on en déduit le lemme 5. □

On peut maintenant démontrer le théorème 10. Soit $\mathrm{I}\in\Delta$ tel que $\mathrm{I}^{a+}\in\Delta$ et $\mathscr{F}\in\mathrm{K}_{\mathrm{G}\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{D}_{\mathrm{I}})$. En appliquant le lemme 5 au cas ou $\mathrm{N}_1=\mathscr{D}_{\mathrm{I}}$, $\mathrm{N}_2=\mathscr{D}_{\mathrm{I}^{a+}}$ et $\mathrm{M}=\mathrm{G}/(\mathrm{P}_{\mathrm{I}}\cap\mathrm{P}_{\mathrm{I}^{a+}})$ on trouve

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_a.\mathscr{F} &= [\mathscr{F}^{\mathrm{I}}_a]\circ\mathscr{F},\\ &= (\mathrm{R}\,\bar{p}_1)_*(\bar{p}_2^*(\mathscr{F})\cup\Lambda_{-v^{-1}}(\mathrm{T}\bar{p}_1)\cup\mathrm{Det}(-q\,\mathrm{T}^*\bar{p}_1)).\end{aligned}$$

D'après le théorème 9, le théorème 10 découle donc de la formule suivante

$$q^{i_{a-1}-i_a}\Lambda_{-v}(\mathrm{T}^*\bar{p}_1) = \Lambda_{-v^{-1}}(\mathrm{T}\bar{p}_1)\cup\mathrm{Det}(-q\,\mathrm{T}^*\bar{p}_1).$$

Pour vérifier celle-ci il suffit de remarquer que

$$q^{i_{a-1}-i_a}\Lambda_{-v}(\mathrm{T}^*\bar{p}_1) = \prod_{i_{a-1}<s\leqq i_a} q^{-1}\left(1-v\frac{\mathrm{X}_s}{\mathrm{X}_{1+i_a}}\right),$$

et que

$$\Lambda_{-v^{-1}}(\mathrm{T}\bar{p}_1)\cap\mathrm{Det}(-q\,\mathrm{T}^*\bar{p}_1) = \prod_{i_{a-1}<s\leqq i_a} -q\frac{\mathrm{X}_s}{\mathrm{X}_{1+i_a}}\left(1-v^{-1}\frac{\mathrm{X}_{1+i_a}}{\mathrm{X}_s}\right). \quad \square$$

Pour $\mathrm{N}\in\mathbb{Z}$ soit

$$[\mathrm{N}] = \frac{q^{\mathrm{N}}-q^{-\mathrm{N}}}{q-q^{-1}}$$

et, si $\mathrm{N}\geqq 0$,

$$[\mathrm{N}]! = [\mathrm{N}][\mathrm{N}-1]\ldots[1].$$

Suivant Lusztig [L] soit $\mathbf{U}_{\mathscr{A}_q}$ la $\mathscr{A}_q$-sous-algèbre de $\mathbf{U}$ engendrée par les éléments

$$\mathbf{E}_a^{(\mathrm{N})}=\frac{\mathbf{E}_a^{\mathrm{N}}}{[\mathrm{N}]!},\qquad \mathbf{F}_a^{(\mathrm{N})}=\frac{\mathbf{F}_a^{\mathrm{N}}}{[\mathrm{N}]!},\qquad \mathbf{K}_a, \mathbf{K}_a^{-1}\qquad (0<a<n,\ \mathrm{N}\geqq 0).$$

PROPOSITION 11. — *Le $\mathscr{A}_q$-module $\mathscr{A}_q\otimes_{\mathscr{A}_v}\mathrm{K}_{\mathrm{G}\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{D})$ est stable par l'action de $\mathbf{U}_{\mathscr{A}_q}$.*

Démonstration. — Fixons $\mathrm{I}\in\Delta$ et $a\in\{1,\ldots,n-1\}$. Soit $\mathrm{Q}\in\mathscr{A}_q\otimes\mathrm{R}(\mathrm{H})^{\mathrm{W}_\mathrm{I}}$ et $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$. Supposons que le $(n+1)$-uplet J obtenu par N incrémentations de la a^e composante est encore un élément de Δ (sinon $\mathbf{e}_a^{\mathrm{N}}(\mathrm{Q}\otimes e_\mathrm{I})=0$ est divisible par $[\mathrm{N}]!$). En posant

$$\mathrm{R}_1=\prod_{s_1=1+i_{a-1}}^{i_a}\cdots\prod_{s_\mathrm{N}=1+i_{a-1}}^{i_a}\omega(1+i_a, s_1)\ldots\omega(\mathrm{N}+i_a, s_\mathrm{N}),$$

$$\mathrm{R}_2=\prod_{s_2=1+i_a}^{1+i_a}\cdots\prod_{s_\mathrm{N}=1+i_a}^{\mathrm{N}-1+i_a}\omega(2+i_a, s_2)\ldots\omega(\mathrm{N}+i_a, s_\mathrm{N}),$$

on trouve

$$\mathbf{e}_a^{\mathrm{N}}(\mathrm{Q}\otimes e_\mathrm{I})=\sum_{l_1=1+i_{a-1}}^{1+i_a}\cdots\sum_{l_\mathrm{N}=1+i_{a-1}}^{\mathrm{N}+i_a}(l_\mathrm{N}, \mathrm{N}+i_a)\ldots(l_1, 1+i_a)(\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2\mathrm{Q})\otimes e_{(i_0,\ldots,i_a+\mathrm{N},\ldots,i_n)}.$$

Comme R_1 et Q sont invariants par l'ensemble S des permutations de $\{1+i_a,\ldots,\mathrm{N}+i_a\}$ il suffit de vérifier que

$$\sum_{w\in\mathrm{S}}w\,\mathrm{R}_2=[\mathrm{N}]!.$$

On raisonne par récurrence sur N et afin de simplifier les notations on pose $i_a=0$. Soient

$$\mathrm{A}(\mathrm{X})=\prod_{i=1}^{\mathrm{N}}(\mathrm{X}-\mathrm{X}_i),$$

$$\mathrm{B}(\mathrm{X})=\prod_{i=1}^{\mathrm{N}}(q^{-1}\mathrm{X}-q\mathrm{X}_i).$$

La proposition découle de la formule suivante obtenue avec le théorème des Résidus

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}(i, \mathrm{N})(\omega(\mathrm{N}, \mathrm{N}-1)\ldots\omega(\mathrm{N}, 1))&=\frac{1}{q^{-1}-q}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\frac{\mathrm{B}(\mathrm{X}_i)\mathrm{X}_i^{-1}}{\mathrm{A}'(\mathrm{X}_i)},\\&=[\mathrm{N}].\quad\square\end{aligned}$$

Remarque 1. — Si l'on fait $q=1$ dans le paragraphe 2 on trouve que les constructions géométriques données par les théorèmes 2 et 9 sont identiques. En effet quand $\mathrm{I}^{a+}\in\Delta$

on a le diagramme (non commutatif) suivant (notations du théorème 2)

$$\begin{array}{ccc} K(G/(P_I \cap P_{I^{a+}}))\otimes\mathbb{C} & \xrightarrow{(R\bar{p}_1)_*} & K(\mathscr{D}_{I^{a+}})\otimes\mathbb{C} \\ {\scriptstyle Ch}\downarrow & & {\scriptstyle Ch}\downarrow \\ H^*(G/(P_I \cap P_{I^{a+}}), \mathbb{C}) & \xrightarrow{\bar{p}_{1*}} & H^*(\mathscr{D}_{I^{a+}}, \mathbb{C}), \end{array}$$

les flèches verticales étant les isomorphismes correspondants au caractère de Chern. Si $\mathscr{F}\in K(\mathscr{D}_I)$ le théorème de Riemann-Roch dit que

$$Ch((R\bar{p}_1)_*(\bar{p}_2^*(\mathscr{F})\cup\Lambda_{-1}(T^*\bar{p}_1)))=\bar{p}_{1*}(Ch(\bar{p}_2^*\mathscr{F})\cup Ch(\Lambda_{-1}(T^*\bar{p}_1))\cup Td(T\bar{p}_1)),$$

où Td est la classe de Todd. Or par définition

$$Td(T\bar{p}_1)=\frac{Eu(\bar{p}_1)}{Ch(\Lambda_{-1}(T^*\bar{p}_1))},$$

et donc

$$Ch((R\bar{p}_1)_*(\bar{p}_2^*(\mathscr{F})\cup\Lambda_{-1}(T^*\bar{p}_1)))=\bar{p}_{1*}(Ch(\bar{p}_2^*\mathscr{F})\cup Eu(\bar{p}_1)).$$

Remarque 2. — Suivant [L] si M est un $\mathbf{U}_{\mathscr{A}_q}$ − module **et** $\lambda\in\mathbb{Z}^n$ un poids on définit le sous-espace de poids M_λ de M par

$$M_\lambda=\{v\in M;\ \mathbf{K}_a v=q^{\lambda_a-\lambda_{a+1}}v \text{ pour } a=1,\dots n-1\}.$$

Un vecteur non nul de M est dit primitif s'il appartient à un sous-espace de poids de M et est annulé par les $\mathbf{E}_a$. Un $\mathbf{U}_{\mathscr{A}_q}$-module de plus haut poids est un $\mathbf{U}_{\mathscr{A}_q}$-module engendré par un vecteur primitif. Il est plus difficile de caluler explicitement des vecteurs primitifs pour $\mathbf{U}_{\mathscr{A}_q}$ dans $\mathbf{A}_q\otimes_{\mathscr{A}_v}K_{G\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{D})$ que pour $\bar{\mathbf{U}}_{\mathbb{Z}}$ dans $H^*(\mathscr{D}, \mathbb{Z})$. On peut modifier la construction précédente à cette fin. Pour cela on vérifie de la même manière que dans la démonstration de la proposition 7 que les opérateurs $\mathbf{e}_a$, $\mathbf{f}_a$, $\mathbf{k}_a$ agissent sur $\mathscr{A}_q\otimes H^*(\mathscr{D}, \mathbb{Z})$. Avec l'argument déjà utilisé dans la démonstration du théorème 4 on démontre que la classe de $S_I\otimes e_I\otimes 1$ est un vecteur primitif de poids $\lambda(I)$ et donc engendre le $\mathbf{U}_{\mathscr{A}_q}$-module irréductible de plus haut poids $\lambda(I)$.

BIBLIOGRAPHIE

[B] M. Bott, *Homogeneous vector bundles* (*Ann. of Math.*), vol. 66, 1957, p. 203-248.

[BLM] A. Beilinson, G. Lusztig et R. Mac Pherson, A Geometric Setting for Quantum Groups (*Duke Math. J.*, bf 61, 1990, p. 655-677).

[BM] W. Borho, R. MacPherson, *Partial Resolution of Nilpotent Varieties* (*Astérisque*, vol. 101-102, 1983, p. 23-74).

[BT] R. Bott et L. W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer-Verlag, 1982.

[BGG] I. N. Bernstein, I. M. Gelf'and et S. I. Gelf'and, *Schubert Cells and the Cohomologie of the Spaces* G/P (*Usp. Mat. Nauk.*, vol. 28, 1973, p. 3-29).

[BGV] N. Berline, E. Getzler et M. Vergne, *Heat Kernels and Dirac Operators*, Springer-Verlag, 1992.

[D] V. G. DRINFELD, *Hopf algebras and the Quantum Yang-Baxter Equation* (*Soviet. Math. Dokl.*, vol. 32, 1985, p. 254-258.

[G] V. GINZBURG, *Lagrangian Constructions of the Envelopping Algebra of* $U(sl_n)$ (*C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 312, série I, 1991, p. 907-912.

[J] M. JIMBO, *A q-difference analogue of* $U(\mathfrak{g})$ *and the Yang-Baxter Equation* (*Lett. Math. Phys.*, vol. 10, 1985, p. 63-69.

[L] G. LUSZTIG, *Quantum Deformations of Certain Simple Modules Over Enveloping Algebras* (*Adv. in Math.*, vol. 70, 1988, p. 237-249.

[Se] G. SEGAL, *Equivariant K-theory* (*Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, vol. 34, 1968, p. 129-151.

(Manuscrit reçu le 2 mars 1992,
révisé le 11 décembre 1992.)

E. VASSEROT,
École Normale Supérieure,
CNRS-URA 762,
45, rue d'Ulm,
75005 Paris,
France.