ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

YVES FÉLIX
DANIEL TANRÉ

Sur l'homologie de l'espace des lacets d'une variété compacte

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 25, nº 6 (1992), p. 617-627
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1992_4_25_6_617_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 25, 1992, p. 617 à 627.

SUR L'HOMOLOGIE DE L'ESPACE DES LACETS D'UNE VARIÉTÉ COMPACTE

PAR YVES FÉLIX ET DANIEL TANRÉ [1]

RÉSUMÉ. — Soit M une variété compacte, sans bord, de dimension n, r-connexe, $r \geqq 1$. Il existe alors un entier N tel que, pour tout corps $\mathbf{k}$ de caractéristique $p > \mathrm{N}$, si la cohomologie de M à coefficients dans k n'est pas engendrée par un seul générateur, alors l'attachement de la dernière cellule de M est $\mathbf{k}$-inerte, c'est-à-dire ne crée pas de nouvelles classes dans l'homologie de l'espace des lacets à coefficients dans $\mathbf{k}$,

Mots clés : Élément inerte, Algèbre de Pontrjagin.

Classification A.M.S. : 55 P 60, 57 N 65.

Soit $\mathbf{k}$ un corps de caractéristique quelconque. Si X est un CW-complexe, certaines applications d'attachement $\varphi : \mathrm{S}^{n-1} \to \mathrm{X}$ ont la particularité suivante :

L'attachement d'une nouvelle cellule à X au moyen de φ ne crée pas de nouvelles classes dans l'homologie de l'espace des lacets de $\mathrm{Y} = \mathrm{X} \cup_{\varphi} e^n$.

Autrement dit, l'application induite $\mathrm{H}_*(\Omega \mathrm{X}; \mathbf{k}) \to \mathrm{H}_*(\Omega \mathrm{Y}; \mathbf{k})$ est surjective. Appelons $\mathbf{k}$-inerte un tel attachement. L'étude des éléments inertes a été essentiellement menée par D. Anick [2], S. Halperin et J. M. Lemaire [6].

Parmi les attachements, un cas particulier important est celui de la cellule de dimension maximale d'une variété M compacte. simplement connexe, sans bord, de dimension n. Soit x_0 un point de M et soit $\mathrm{M}^{\bullet}$ le complémentaire de x_0 dans M, alors il existe $\varphi : \mathrm{S}^{n-1} \to \mathrm{M}^{\bullet}$ pour lequel M s'écrit $\mathrm{M} = \mathrm{M}^{\bullet} \cup_{\varphi} e^n$.

Lorsque $\mathbf{k}$ est le corps des rationnels, S. Halperin et J. M. Lemaire [6] ont montré que l'application $\mathrm{H}_*(\Omega \mathrm{M}^{\bullet}; \mathbf{Q}) \to \mathrm{H}_*(\Omega \mathrm{M}; \mathbf{Q})$ est surjective pour autant que l'algèbre $\mathrm{H}^*(\mathrm{M}; \mathbf{Q})$ soit engendrée par au moins deux générateurs. Appelons monogène une algèbre engendrée par un seul élément. Le but de cet article est l'extension de ce résultat aux corps de caractéristique p.

THÉORÈME 1. — *Soit* M *une variété compacte*, *r-connexe*, $r \geqq 1$, *sans bord*, *de dimension n*. *Si l'algèbre de cohomologie* $\mathrm{H}^*(\mathrm{M}; \mathbf{k})$ *n'est pas monogène*, *il existe un entier* N *tel que*,

[1] Recherche partiellement supportée par un contrat de recherche OTAN.

pour tout corps **k** *de caractéristique* $p > N/r$, *l'attachement de la dernière cellule de* M *est* **k**-*inerte*.

Dans le cas général, on peut poser $N = n + (r \cdot \dim H^*(M; \mathbf{k}))$.

Si M *est* $(2t)$-*connexe* (*et non* $(2t+1)$-*connexe*), *on peut choisir* $N = n$.

La démonstration d'Halperin et Lemaire dans le cas rationnel [6] est basée sur l'existence, pour les cochaînes rationnelles sur un espace topologique X, d'un modèle commutatif. Dans ce texte, nous utiliserons la notion d'algèbre de Lie à dualité (§ 1) et l'existence dans le domaine *mild* (hypothèse $p > n/r$), d'un *modèle* de l'espace sous forme d'une algèbre de Lie différentielle ([3]) dont l'algèbre enveloppante calcule l'algèbre de Pontrjagin de ΩX, à coefficients dans **k**.

Dans tout ce texte **k** *est un corps de caractéristique* $p \neq 2$.

1. Algèbres de Lie à dualité

L'expression **k**-espace vectoriel désigne toujours un **k**-espace vectoriel positivement gradué. Le degré est noté inférieurement : V_s est l'ensemble des éléments de V de degré s. Si $x \in V_s$, on note aussi $|x| = s$. Un **k**-espace vectoriel V est *s-réduit* si $V = \bigoplus_{i \geqq s} V_i$.

DÉFINITION. — Une *algèbre de Lie* est un **k**-espace vectoriel L muni d'applications **k**-bilinéaires $[\ ,\ ] : L_n \times L_m \to L_{n+m}$ vérifiant les propriétés :

(i) $[x, y] = -(-1)^{|x||y|}[y, x]$, pour tout x, y dans L;

(ii) $[x, [y, z]] = [[x, y], z] + (-1)^{|x||y|}[y, [x, z]]$, pour tout x, y, et z dans L;

(iii) $[x, [x, x]] = 0$, pour tout x dans L.

Pour adapter les résultats de ce travail à un corps de caractéristique 2, il faut modifier cette définition suivant la remarque 2.12 de [5]. Nous n'envisagerons pas cette situation ici.

Soit V un **k**-module, nous notons T(V) l'algèbre tensorielle sur V, ΛV l'algèbre extérieure sur V et $\mathbb{L}(V)$ l'algèbre de Lie graduée libre sur V. L'algèbre T(V) est munie d'une graduation par la longueur des mots et l'algèbre de Lie $\mathbb{L}(V)$ d'une graduation par la longueur des crochets; ces degrés sont notés supérieurement ($T^k(V)$; $\mathbb{L}^k(V)$).

Pour simplifier l'écriture, nous appellerons désormais *quasi-isomorphisme* tout morphisme d'objets différentiels induisant un isomorphisme en homologie.

Rappelons que l'algèbre enveloppante $(T(V), d)$, d'une algèbre de Lie différentielle $(\mathbb{L}(V), d)$, est une algèbre de Hopf différentielle. Une algèbre de Lie différentielle (en abrégé ALD), est dite minimale si la différentielle d est décomposable :

$$d(V) \subset \mathbb{L}^{\geqq 2}(V).$$

La différentielle d s'écrit alors $d = \sum_{i \geqq 1} d_i$ avec $d_i(V) \subset \mathbb{L}^{i+1}(V)$. L'algèbre $(T(V), d_1)$ est isomorphe à la cobar construction, Ω, appliquée au dual, $A^\vee$, d'une algèbre commutative graduée A :

$$V_i \cong A^v_{i+1}; \qquad (T(V), d_1) \cong \Omega(A^v, 0).$$

Nous dirons que A est *l'algèbre associée* à la ALD minimale (bien qu'elle ne soit définie qu'à isomorphisme près).

DÉFINITION. — Une algèbre à *dualité de Poincaré* est une algèbre commutative graduée, A, telle que :

(i) Il existe un entier n pour lequel $A^n \cong \mathbf{k}\, a_n$ et $A^i = 0$ si $i > n$;

(ii) La multiplicité $A^* \times A^* \to A^n \cong \mathbf{k}$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.

DÉFINITION. — Une *algèbre de Lie à dualité* est une ALD minimale dont l'algèbre associée A est à dualité de Poincaré.

Si n est impair ou congru à 2 modulo 4, A admet une base homogène a_i, $0 \leqq i \leqq m$, avec $a_0 = 1$, $|a_i| \leqq |a_{i+1}|$ et vérifiant la condition suivante : Si $|a_i| + |a_j| = n$, alors $a_i a_j = \delta^m_{i+j} a_m$, où δ est le symbole de Kronecker.

L'espace vectoriel V admet donc une base homogène $v_1, \ldots, v_m$, ordonnée de sorte que $|v_i| \leqq |v_{i+1}|$ et pour laquelle la différentielle d_1 vérifie :

$$d_1(v_m) = \sum_{i=1}^{m-1} v_i \otimes v_{m-i}. \tag{1}$$

Si n est congru à 0 modulo 4, A admet une base homogène formée d'éléments a_i, $0 \leqq i \leqq m$, et b_j, $1 \leqq j \leqq s$, avec $|b_j| = n/2$, $a_0 = 1$, $|a_i| \leqq |a_{i+1}|$ et vérifiant les conditions :

Si $|a_i| + |a_j = n$, alors $a_i a_j = \delta^m_{i+j} a_m$; $b_j b_k = 0$, $j \neq k$ et $b_j^2 = \beta_j a_m$, $\beta_j \in \mathbf{k} - \{0\}$.

L'espace vectoriel V admet dans ce cas une base homogène $v_1, \ldots, v_m$; $w_1, \ldots, w_s$, ordonnée de sorte que $|v_i| \leqq |v_{i+1}$, où $|w_j| = n/2 - 1$ et où la différentielle d_1 vérifie :

$$d_1(v_m) = \sum_{i=1}^{m-1} v_i \otimes v_{m-i} + \sum_{j=1}^{s} \beta_j w_j^2. \tag{2}$$

2. De la topologie vers l'algèbre

Notons $\amalg$ la somme dans la catégorie des algèbres associatives graduées.

DÉFINITION. — Un cycle α dans une algèbre différentielle (A, d_A) est dit *inerte* si l'injection $(A, d_A) \to (A \amalg T(w), D)$, $D(w) = \alpha$, induit une surjection en homologie.

Soit X un C.W. complexe r-connexe, de dimension n. Par la théorie d'Anick [3], il existe, pour tout corps $\mathbf{k}$ de caractéristique $p > n/r$, une $\mathbf{k}$-algèbre de Lie différentielle $(\mathbb{L}(V), d)$ et un quasi-isomorphisme d'algèbres différentielles $(T(V), d) \to C_*(\Omega X, \mathbf{k})$, où $C_*(\Omega X, \mathbf{k})$ désigne l'algèbre des chaînes cubiques. Dans ce cas, l'algèbre différentielle $(T(V), d_1)$ est isomorphe à la cobar construction sur la coalgèbre d'homologie $H_*(X; \mathbf{k})$.

Si X est une variété compacte sans bord, l'algèbre de Lie différentielle ($\mathbb{L}(V)$, d) est une algèbre de Lie à dualité. Avec ce modèle, le théorème 1 résulte du théorème algébrique suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit* (T(V), d) *l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie à dualité, d'algèbre associée* A, *où* $V = \bigoplus_{i=r}^{n-1} V_i$, $r \geqq 1$. *Notons* v_m *le générateur de* V *de degré maximal et* $W = \bigoplus_{i=r}^{n-2} V_i$. *Supposons :*

1. *l'algèbre* A *n'est pas monogène,*
2. *soit* r *est pair et* $p > n/r$,

soit la caractéristique p *de* $\mathbf{k}$ *vérifie* $p > (n/r) + \dim V$,

Alors l'élément $d(v_m)$ *est inerte dans* (T(W), d).

La démonstration du théorème 2 est donnée dans les sections suivantes. Nous terminons ce paragraphe par un *exemple* justifiant les hypothèses requises. Il s'agit de l'algèbre de Hopf différentielle (T(a_1, a_2, a_3), d), définie en caractéristique $p > 2$ à l'aide de trois générateurs, a_1 de degré 2, a_2 de degré $2p+1$ et a_3 de degré $2p+4$. La différentielle est donnée par :

$$da_3 = [a_1, a_2]$$
$$da_2 = a_1^p$$
$$da_1 = 0$$

On constate que la différentielle ne prend pas ses valeurs dans l'algèbre de Lie mais dans l'espace des primitifs. L'injection naturelle

$$(T(a_1, a_2), d) \xrightarrow{\varphi} (T(a_1, a_2, a_3), d)$$

n'induit pas une surjection en homologie par le cycle

$$\sum_{i=0}^{p-1} a_1^{p-i-1} a_3 a_1^i - a_2^2$$

donne une classe qui ne se trouve pas dans l'image de φ.

3. Un critère d'inertie

Des articles de Halperin-Lemaire ([6], Théorème 1.1) et Anick ([2], Théorème 2.6), on tire :

THÉORÈME 5 [[2], [6]]. — *Soit* (A, d_A) *une algèbre différentielle et soit* α *un cycle de* (A, d_A). *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) L'élément α *est inerte dans* (A, d_A);

(2) *La classe* [α] *est inerte dans* (H(A, d_A), 0);

(3) *Si* $\langle [\alpha] \rangle$ *désigne l'idéal de* $H(A, d_A)$ *engendré par* $[\alpha]$, *alors*

$$H(A \amalg T(w), D) \cong H(A, d_A)/\langle [\alpha] \rangle.$$

L'algèbre tensorielle, $T(v)$, sur un espace vectoriel de dimension 1 engendré par un élément v, est l'algèbre des polynômes à une variable, notée $\mathbf{k}[v]$ dans cette section.

PROPOSITION 1. — *Soit* B *une* **k**-*algèbre graduée de la forme* $A \amalg \mathbf{k}[v]$, *où* A *est isomorphe à* $\mathbf{k}[a] \otimes E$, *comme* $\mathbf{k}[a]$-*module. Alors l'élément* $[a, v]$ *est inerte.*

Ce résultat se démontre à partir d'un lemme technique :

LEMME 1. — *L'application* $\varphi : F_2 \to F_1$ *entre les* $\mathbf{k}[a]$-*modules :*

$$F_1 = (\mathbf{k}[a] \otimes E) \amalg \mathbf{k}[v]$$
$$F_2 = \mathbf{k}[a] \otimes (E \amalg T(\bigoplus_{i \geq 0} v_i)),$$

définie par $\varphi(v_0) = v$, $\varphi(v_i) = \operatorname{ad}(a)^i(v)$ *est un isomorphisme.*

Preuve de la proposition 1. — En appliquant (deux fois) le lemme 1, on obtient :

$$(\mathbf{k}[a] \otimes E) \amalg \mathbf{k}[v] \amalg \mathbf{k}[w] \cong \mathbf{k}[a] \otimes (E \amalg T(\bigoplus_{i \geq 0} v_i) \amalg T(\bigoplus_{i \geq 0} \mathrm{v}_i)),$$

où v_i correspond à $\operatorname{ad}(a)^i(w)$. Posons $D w = [a, v]$, l'isomorphisme ci-dessus entraîne :

$$H((\mathbf{k}[a] \otimes E) \amalg \mathbf{k}[v] \amalg \mathbf{k}[w], D) \cong \mathbf{k}[a] \otimes (E \amalg \mathbf{k}[v])$$

d'où le résultat à partir de la condition (3) du théorème 5. □

Preuve du lemme 1. — L'application est évidemment surjective. Il suffit donc de montrer que F_1 et F_2 ont même série de Poincaré. D'abord, si $F' = T(\bigoplus_{i \geq 0} v_i)$, on a :

$$P_{F'}^{-1} = 1 - t^{|v|}(1 + t^{|a|} + t^{2|a|} + \ldots) = 1 - \frac{t^{|v|}}{1 - t^{|a|}},$$

d'où :

$$P_{F_1}^{-1} = (1 - t^{|a|}) P_E^{-1} + (1 - t^{|v|}) - 1$$
$$P_{F_2}^{-1} = (1 - t^{|a|}) \left(P_E^{-1} + \left(1 - \frac{t^{|v|}}{1 - t^{|a|}} \right) - 1 \right)$$

et l'égalité $P_{F_1}^{-1} = P_{F_2}^{-1}$. □

4. Fibrations algébriques

DÉFINITION. — Soit $(T(V), d)$ l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie différentielle. Si V_{pair} est non nul, nous désignons par μ le plus petit degré pair dans V; autrement, nous posons $\mu=\infty$. Nous notons ensuite l le nombre de générateurs impairs en degré $<\mu$. L'*indice de parité* τ de $(T(V), d)$ est défini par $\tau := l.\mu$.

Remarquons :

$\tau \geqq 0$,

$\tau=0$ correspond au cas où τ est pair,

τ est infini si et seulement si V est concentré en degré impair.

Pour le reste de ce paragraphe, $(\mathbb{L}(V), d)$ est une algèbre de Lie à dualité d'algèbre associée A, de dimension n, $2k+1$-réduite (mais pas $2k+2$-réduite).

Nous choisissons une base $v_1, \ldots, v_m; w_1, \ldots, w_s$, comme il est indiqué au paragraphe 1; (lorsque n n'est pas congru à 0 modulo 4, il n'y a pas d'éléments w_i). Nous notons $a_1, \ldots, a_m$ les éléments de A correspondant aux v_i.

Soit y un élément de degré $2k$. Sur la somme directe $\mathbb{L}(V)\oplus \mathbf{k}\,y$, nous introduisons une différentielle $D=d+\delta$, en posant $\delta(v_1)=y$ et $\delta(v_i)=0$ si $i>1$ [remarquons $\mathbf{k}\,y=\mathbb{L}(y)$]. S'il y a lieu, nous posons également $\delta(w_j)=0$. Nous obtenons ainsi une ALD, $(\mathbb{L}(V)\oplus\mathbf{k}\,y, D)$, d'algèbre enveloppante $(T(V)\otimes T(y), D)$.

De même, sur le produit tensoriel $A\otimes\Lambda u$, nous posons $\partial u=a_1$, afin d'obtenir une algèbre différentielle $(A\otimes\Lambda u, \partial)$, avec $|u|=2k+1$.

Le but de ce paragraphe est la proposition suivante, dans laquelle nous reprenons les notations précédentes.

PROPOSITION 2. — *Si* $(\mathbb{L}(V), d)$ *est une algèbre de Lie à dualité, t-réduite* $(t=2k+1\geqq 1)$, *d'algèbre associée* A, *d'indice de parité* τ, *et définie sur un corps de caractéristique* $p>(n/t)+l$, *alors il existe une algèbre de Lie à dualité* $(\mathbb{L}(Z), D)$, *d'algèbre associée* $H(A\otimes\Lambda u, \partial)$ *et dont l'algèbre enveloppante* $(T(Z), D)$ *est quasi-isomorphe à* $(T(V)\otimes T(y), D)$. *De plus :*

(*a*) *L'indice de parité* $\tau'=l'.v'$ *de* $(T(Z), D)$ *est fini et strictement inférieur à* τ.

(2) *L'algèbre de Hopf* $H(T(V), d)$ *contient une sous-algèbre de Hopf normale* E *telle que*

$$H(T(V), d)\cong\Lambda v_1\otimes E$$

comme E-*module, et* $H(T(Z), D)\cong E$.

(3) *Si l'algèbre* A *n'est pas monogène, il en est de même pour l'algèbre* $H(A\otimes\Lambda u, \partial)$.

(4) *Il existe* n' *tel que* $Z=Z_{<n'}$ *et* $p>(n'/t)+l'$.

Cette proposition est un analogue algébrique des fibrations de fibre une sphère.

Démonstration de la proposition 2. — Précisons tout d'abord quelques notations.

Notons $(x_1, \ldots, x_q)$ une base de V, avec $|x_i|\leqq|x_{i-1}|$. Pour tout entier i compris entre 1 et q, nous notons $V_{[i]}=(x_1, \ldots, x_i)$ et $V\langle i\rangle=V_{[i]}\oplus\mathbf{k}\,y\oplus\bar{V}_{[i]}$ où $\bar{V}_{[i]}$ est une copie de $V_{[i]}$ dont le degré des éléments est augmenté suivant la règle :

$$|\bar{x}_j|=|x_j|+2k+1.$$

Par extension, posons $V\langle 0\rangle=\mathbf{k}\,y$.

L'application σ définie sur $V\langle i\rangle$ en posant $\sigma(v)=\bar{v}$ et $\sigma(\bar{v})=\sigma(y)=0$ s'étend alors de manière unique en une dérivation de carré nul dans l'algèbre de Lie $\mathbb{L}(V\langle i\rangle)$. Ceci permet de munir l'algèbre de Lie $\mathbb{L}(V\langle i\rangle)$ d'une différentielle d caractérisée par :

$$d\sigma+\sigma d=[\,,y].$$

L'application $\psi:(T(V\langle q\rangle),d)\to(T(V)\otimes T(y),d)$ définie par $\psi(v)=v$, $\psi(y)=y$ et $\psi(\bar{v})=0$, est alors un quasi-isomorphisme d'algèbre différentielle ([4]).

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0\to K'_i\to & & L_{i,2} & \to & L_{i,1} & \to 0 & \\
\downarrow^{\cong} & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0\to K_i\to & & \mathbb{L}(V\langle i\rangle) & \xrightarrow{\psi_i} & \mathbb{L}(V_{[i]})\oplus\mathbf{k}\,y & \to 0 & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \mathbf{k}\,v_1\oplus\mathbf{k}\,y & = & \mathbf{k}\,v_1\oplus\mathbf{k}\,y & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Les ALD $L_{i,1}$, $L_{i,2}$, K'_i, définies par ce diagramme, sont libres comme algèbres de Lie et t-réduites. Le morphisme $\mathscr{U}L_{i,2}\to\mathscr{U}L_{i,1}$ étant un quasi-isomorphisme, l'hypothèse sur la caractéristique de $\mathbf{k}$ implique l'acyclicité du noyau K'_i, jusqu'au degré $n+t-2$ ([3]).

Montrons, par induction sur i, qu'il existe une application linéaire

$$\partial:V\langle i\rangle\to\mathbb{L}(V_{[i]})$$

telle que :

(a) $(\mathbb{L}(V\langle i\rangle),D=d+\partial)$ est une algèbre de Lie différentielle.

(b) $\partial(V\langle i\rangle)\subset K_{i-1}$, pour $i\geqq 2$.

(c) $\psi_i:(\mathbb{L}(V\langle i\rangle),D)\to(\mathbb{L}(V_{[i]})\oplus\mathbb{L}(y),D)$ induit un quasi-isomorphisme $\mathscr{U}\psi_i$ entre les algèbres enveloppantes.

Le résultat est clairement vrai pour $i=1$, 2. Supposons le vrai pour i et montrons qu'il reste valable pour $i+1$. Ainsi dans $(\mathbb{L}(V\langle i\rangle),D)$ on a : $d\partial+\partial d+\partial\partial=0$.

Pour $v=x_i$ ou $v=\bar{x}_i$, nous obtenons donc $(d+\partial)\,\partial d(v)=\partial d^2(v)=0$. Il s'ensuit que $\partial d(v)$ est un $(d+\partial)$-cycle de K_i, donc un $(d+\partial)$-bord de K_i : $\partial d(v)-(d+\partial)(\tilde{v})$, avec $\tilde{v}\in K_i$. On pose alors $\partial(v)=\tilde{v}$. Avec ce choix, les conditions (a) et (b) sont strictement satisfaites.

Il reste à vérifier que $\mathscr{U}\psi_i$ induit bien un isomorphisme en homologie. Filtrons l'espace vectoriel gradué $V\langle i\rangle$ par les sous-espaces vectoriels $V\langle j\rangle$, $j\leqq i$. Ceci induit un morphisme de suites spectrales

$$E^0(\mathscr{U}\psi_i):\quad E^0(T(V\langle i\rangle),D)\to E^0(T(V_{[i]})\otimes T(y),D).$$

La différentielle δ^0 est nulle sur $V_{[i]}$. L'hypothèse de récurrence (*b*) montre que pour tout $\bar{v} \in \bar{V}_{[i]}$, on a $\delta^0(\bar{v}) = [v, y]$. Il s'ensuit que $E^1(\mathscr{U}\psi_i)$ est un isomorphisme et donc que $\mathscr{U}\psi_i$ est un quasi-isomorphisme.

Notons $(\mathbb{L}(Z), D)$ le modèle minimal de l'algèbre de Lie différentielle $(\mathbb{L}(V\langle q\rangle), D)$. L'algèbre de Lie $(\mathbb{L}(Z), D)$ est quasi-isomorphe à $(\mathbb{L}(V) \oplus \mathbb{L}(y), D)$ et son algèbre associée est $H(A \otimes \Lambda u, \partial)$. L'algèbre $H(A \otimes \Lambda u, \partial)$ est aussi à dualité de Poincaré. L'algèbre de Lie différentielle $(\mathbb{L}(Z), D)$ est donc une algèbre de Lie à dualité d'indice de parité τ'.

Il nous reste à vérifier les propriétés annoncées :

(1) Si l'indice de parité τ est infini, tous les éléments de V sont de degré impair. La classe associée à $a_q \otimes u$ est non nulle; elle fournit un générateur de degré pair dans Z, d'où $\tau' < \infty$.

Si τ est fini, soit v_k un élément pair de V, de plus bas degré possible, alors $\partial_1 v_k = 0$. L'élément a_k associé est un générateur de A qui n'est pas un bord dans $(A \otimes \Lambda u, \partial)$: il survit donc dans l'espace vectoriel Z. Le passage de A à $H(A \otimes \Lambda u, \partial)$ diminue de 1, au moins, le nombre de générateurs impairs précédant le premier générateur pair, d'où $\tau' < \tau$.

(2) La surjection $(T(V), d) \to (\Lambda v_1, 0)$ induit une surjection d'algèbres de Hopf : $H(T(V), d) \to \Lambda v_1$. Notons G son Hopf-noyau, on a alors un isomorphisme de G-modules $H(T(V), d) \cong \Lambda v_1 \otimes G$.

Considérons maintenant le complexe de chaînes $(T(V) \otimes T(y), D)$. On le gradue par $\deg(v) = |v|$, $\deg(y) = -1$; la filtration croissante associée fournit une suite spectrale de terme E^2 :

$$\begin{aligned} E^2 &= H(T(V), d) \otimes T(y) \\ &\cong \Lambda v_1 \otimes T(y) \otimes G \end{aligned}$$

La différentielle sur ce terme E^2 est donnée par $D v_1 = y$; on en déduit $E^\infty \cong G$.

(3) Supposons l'espace des générateurs de A de dimension supérieure ou égale à 2; il existe donc $a \in A$, générateur et $a \neq a_1$. Notons j le plus petit entier tel que $a_1^j = 0$. Les éléments $a_1^{j-1} \otimes u$ et a sont deux générateurs indépendants dans $H(A \otimes \Lambda u, \partial)$, d'où le corollaire.

(4) Il suffit de remarquer :

$$n + lt = (n + t) + (l - 1)t \geqq n' + l't. \quad \square$$

5. Démonstration du théorème 2 lorsque l'algèbre est $2l$-réduite

Notons $T(V) = T(v_1, \ldots, v_m; w_1, \ldots, w_s)$ avec $d_1 v_m = \sum_{i=1}^{m-1} v_i v_{m-i} + \sum_{j=1}^{s} \beta_j w_j^2$; cette dernière somme étant éventuellement nulle. L'espace des générateurs de A étant de dimension supérieure ou égale à 2, on a $m > 1$. La parité de v_1 implique $m > 2$.

Le premier élément v_1 étant de degré $2l$, il existe un morphisme différentiel :

$$(\mathrm{T}(v_1, \ldots, v_{m-2}; w_1, \ldots, w_s), d) \to (\mathrm{T}(v_1), 0)$$

qui induit un morphisme d'algèbres de Hopf :

$$\mathrm{H}(\mathrm{T}(v_1, \ldots, v_{m-2}; w_1, \ldots, w_s), d) \to \mathrm{T}(v_1).$$

Notons G le Hopf-hoyau de cette flèche; on a :

$$\mathrm{H}(\mathrm{T}(v_1, \ldots, v_{m-2}; w_1, \ldots, w_s), d) \cong \mathrm{T}(v_1) \otimes \mathrm{G}.$$

Introduisons une filtration croissante sur $\mathrm{T}(v_1, \ldots, v_m; w_1, \ldots, w_s)$ en mettant $v_1, \ldots, v_{m-2}; w_1, \ldots, w_s$ en degré 0 et v_{m-1}, v_m en degré 1. Nous obtenons ainsi une suite spectrale pour laquelle la différentielle au niveau 0 vaut :

$$\begin{aligned} \delta^0(v_i) &= d(v_i), \qquad i \leqq m-2 \\ \delta^0(w_i) &= d(w_i) \\ \delta^0(v_{m-1}) &= 0 \\ \delta^0(v_m) &= v_1 v_{m-1} + v_{m-1} v_1 \end{aligned}$$

La remarque précédente utilisant le Hopf-noyau et la proposition 1 permettent de déterminer le terme E^1 de cette suite spectrale :

$$\mathrm{E}^1 = \mathrm{T}(v_1) \otimes [\mathrm{G} \amalg \mathrm{T}(v_{m-1})].$$

Comme $d_1 v_{m-1} \in \mathrm{G}$, on obtient

$$\mathrm{E}^2 = \mathrm{T}(v_1) \otimes \mathrm{H}(\mathrm{G} \amalg \mathrm{T}(v_{m-1})).$$

Décomposons maintenant $\mathrm{T}(v_1, \ldots, v_{m-2}; w_1, \ldots, w_s)$ sous la forme

$$\mathrm{T}(v_1, \ldots, v_{m-2}; w_1, \ldots, w_s) \cong \mathrm{T}(v_1) \otimes \mathrm{E},$$

et $\mathrm{T}(v_1, \ldots, v_{m-1}; w_1, \ldots, w_s) \cong (\mathrm{T}(v_1) \otimes \mathrm{E}) \amalg \mathrm{T}(v_{m-1})$ sous la forme

$$\mathrm{T}(v_1, \ldots, v_{m-1}; w_1, \ldots, w_s) \cong \mathrm{T}(v_1) \otimes (\mathrm{E} \amalg \mathrm{T}(\{ v_{m-1,i}, i \geqq 1 \})).$$

Le composé de l'injection

$$\mathrm{T}(v_1) \otimes (\mathrm{E} \amalg \mathrm{T}(v_{m-1,1})) \to \mathrm{T}(v_1, \ldots, v_{m-1}; w_1, \ldots, w_s)$$

et de l'injection

$$\mathrm{T}(v_1, \ldots, v_{m-1}; w_1, \ldots, w_s) \to \mathrm{T}(v_1, \ldots, v_m; w_1, \ldots, w_s)$$

induit un isomorphisme au niveau E^2 des suites spectrales (Proposition 1), et est donc un isomorphisme.

Cette flèche se factorisant par $T(v_1, \ldots, v_{m-1}; w_1, \ldots, w_s)$, on en déduit la surjectivité de

$$H(T(v_1, \ldots, v_{m-1}; w_1, \ldots, w_s), d) \to H(T(v_1, \ldots, v_m; w_1, \ldots, w_s), d). \quad \square$$

6. Démonstration du théorème 2

Soit $(\mathbb{L}(V), d)$ une algèbre de Lie à dualité vérifiant les hypothèses du théorème 2.

Si $(T(V), d)$ est 2 k-réduite, le résultat se déduit du paragraphe 5. Dans le cas général, nous allons utiliser une récurrence sur l'indice de parité τ de $(T(V), d)$, en montrant :

– si le résultat est vai pour τ fini, il est vrai pour $\tau+1$,

– si le résultat est vrai pour tout τ fini, il est vrai pour τ infini.

Notons $V_{[i]}$ le sous-espace engendré par $v_1, \ldots, v_i; w_1, \ldots, w_s$. Par hypothèse d'induction, appliquée à la fibration algébrique, on sait que :

$$H(T(V_{[m]} \oplus \mathbf{k}\, y \oplus \bar{V}_{[m-1]}), D) \xrightarrow{\varphi_1} H(T(V_{[m]} \oplus \mathbf{k}\, y \oplus \bar{V}_{[m]}), D)$$

est surjectif.

En reprenant la construction de la fibration algébrique (proposition 2), on constante que la différentielle de v_m a une partie linéaire égale à $\bar{v}_{m-1}$. Ainsi, l'application :

$$H(T(V_{[m-1]} \oplus \mathbf{k}\, y \oplus \bar{V}_{[m-1]}), D) \xrightarrow{\varphi_2} H(T(V_{[m]} \oplus \mathbf{k}\, y \oplus \bar{V}_{[m-1]}), D)$$

est surjective.

Notons respectivement G_1 et G_2 les Hopf-noyaux des projections

$$H(T(V_{[m-1]}), d) - \Lambda(v_1) \qquad \text{et} \qquad H(T(V_{[m]}), d) \to \Lambda(v_1).$$

Ceci donne les isomorphismes suivants, de G_1 et G_2-modules respectivement :

$$H(T(V_{[m-1]}), d) \cong \Lambda(v_1) \otimes G_1$$
$$H(T(V_{[m]}), d) \cong \Lambda(v_1) \otimes G_2$$

La proposition 2 établit aussitôt les isomorphismes :

$$H(T(V_{[m-1]} \oplus \mathbf{k}\, y \oplus \bar{V}_{[m-1]}), D) \cong G_1$$
$$H(T(V_{[m]} \oplus \mathbf{k}\, y \oplus \bar{V}_{[m]}), D) \cong G_2$$

La surjectivité du composé $\varphi_2 \circ \varphi_1$ entraîne la surjectivité du morphisme $G_1 \to G_2$. Le théorème est ainsi démontré. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. F. ADAMS et P. HILTON, *On the Chain Algebra of a Loop Space* (*Comment. Math. Helv.*, vol. 30, 1958, p. 305-330).

[2] D. ANICK, *Non Commutative Algebras and their Hilbert Series* (*J. Algebra*, vol. E78, 1982, p. 120-140).

[3] D. ANICK, *Hopf Algebras up to Homotopy* (*Journal of the American Mathematical Society*, vol. 2, 1989, p. 417-453).

[4] BITJONG NDOMBOL, *Sur la catégorie de Lusternik-Schnirelmann des algèbres de cochaînes*, preprint, 1990.

[5] F. COHEN, J. MOORE et J. NEISENDORFER, *Torsion in Homotopy Groups I* (*Ann. of Math.*, vol. 109, 1979, p. 121-168).

[6] S. HALPERIN et J. M. LEMAIRE, *Suites inertes dans les algèbres de Lie graduées* (*Math. Scand.*, vol. 61, 1987, p. 39-67).

[7] S. HALPERIN et J. M. LEMAIRE, *Notions of Category in Differential Algebras* (*Lectures Notes*, n° 1318, 1988, p. 138-154).

(Manuscrit reçu le 18 avril 1991).

Yves FÉLIX
Département de Mathématiques,
Université catholique de Louvain,
1348 Louvain-la-Neuve,
Belgique.

Daniel TANRÉ,
U.F.R. de Mathématiques,
Université des Sciences et Techniques,
59655 Villeneuve-d'Ascq Cedex,
France.