A. POLOMBO

De nouvelles formules de Weitzenböck pour des endomorphismes harmoniques. Applications géométriques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 25, nº 4 (1992), p. 393-428
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1992_4_25_4_393_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 25, 1992, p. 393 à 428.

DE NOUVELLES FORMULES DE WEITZENBÖCK POUR DES ENDOMORPHISMES HARMONIQUES. APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

PAR A. POLOMBO

Introduction

Ce travail a pour objet l'extension de méthodes, introduites par S. Bochner (*cf.* [Br]), pour établir que le noyau de certains opérateurs différentiels, opérant sur des sections globales de fibrés vectoriels, est trivial. De tels résultats sont habituellement appelés *des théorèmes d'annulation*.

On s'intéresse à une classe d'opérateurs différentiels dits *naturels* (*cf.* [Sr]), c'est-à-dire tels que, si E est un fibré vectoriel naturel au-dessus d'une variété riemannienne (M, g) et si F est un fibré vectoriel au-dessus d'une variété riemannienne (N, h), tout morphisme de fibrés vectoriels de E dans F induisant une isométrie de (M, g) sur (N, h) échange ces opérateurs.

Les opérateurs différentiels naturels de degré 2 dont le symbole principal est l'opposé de la métrique sont appelés des *laplaciens*. La comparaison de divers laplaciens agissant sur les sections de fibrés donne naissance à des formules que l'on regroupe sous le nom de *formules de Weitzenböck* (*cf.* [Bn2], [Ne]). Un raffinement particulier de ces formules apparaît lorsque la section annihilée est elle-même reliée à la courbure soit du fibré considéré (comme dans la théorie de Yang-Mills), soit à celle de la métrique riemannienne de la base.

La place très importante tenue par les formules de Weitzenböck parmi les techniques utilisées en géométrie riemannienne globale est cependant limitée par leurs conditions d'application. Dans la grande généralité des cas, il n'est obtenu de résultats que sous des hypothèses de *positivité* de la courbure du fibré considéré.

Notre but est de nous affranchir de cette restriction dans un certain nombre de situations. Nous établissons à cet effet de nouvelles formules de Weitzenböck pour des champs d'endomorphismes harmoniques.

La théorie classique de Bochner

Examinons d'abord le cas le plus simple, où la section considérée n'est pas une courbure. Nous explicitons le schéma que nous proposons sur le classique théorème de Bochner:

THÉORÈME DE BOCHNER. — *Sur une variété riemannienne compacte à courbure de Ricci non négative, les* 1-*formes harmoniques sont parallèles; si de plus la courbure de Ricci est positive en un point, il n'y a pas de* 1-*forme harmonique non triviale et donc* $H^1(M, \mathbf{R})=0$.

Pour obtenir ce résultat, on calcule le laplacien de Hodge-de Rham Δ pour une 1-forme ω au moyen de la formule

$$\Delta\omega = D^* D\omega + \mathrm{Ric}(\omega),$$

où D est la connexion de Levi-Civita et Ric sa courbure de Ricci vue comme endomorphisme sur les 1-formes.

Par produit scalaire avec ω, on peut faire apparaître le laplacien de sa norme

$$\Delta \| \omega \|^2 = 2 \langle D^* D\omega, \omega \rangle - 2 \| D\omega \|^2,$$

d'où

$$(\dagger) \qquad \Delta \| \omega \|^2 = 2 \langle \Delta\omega - \mathrm{Ric}(\omega), \omega \rangle - 2 \| D\omega \|^2.$$

Si ω est harmonique, et si la courbure de Ricci est non-négative, $\| \omega \|^2$ est une fonction sous-harmonique et le théorème de Bochner se déduit de la formule précédente par application du principe du maximum de E. Hopf.

Supposons que la 1-forme ω puisse s'interpréter comme un endomorphisme symétrique, ou hermitien, agissant sur les sections d'un fibré vectoriel de base M et de rang p et désignons par λ_i, $i=1, \ldots, p$, ses valeurs propres. Ce sera par exemple le cas si (M, g) est spinorielle et si ω opère sur les spineurs par multiplication de Clifford. Nous avons donc

$$\begin{aligned}\Delta \| \omega \|^2 &= \sum_{i=1}^{p} \Delta\lambda_i^2 \\ &= 2 \sum_{i=1}^{p} (\lambda_i \Delta\lambda_i - \| d\lambda_i \|^2).\end{aligned}$$

La remarque essentielle est que, dans la formule ($\dagger$), la dépendance en ω est quadratique. Cela entraîne l'apparition d'un même signe moins devant $\| D\omega \|^2$ et devant le terme en courbure de Ricci. On ne peut donc tirer des conclusions que si ces deux termes sont de même signe, c'est-à-dire si la courbure est positive.

Les fonctions plus générales des valeurs propres

Pour une fonction f plus générale de ω, on peut espérer s'affranchir de cette condition de signe. L'exemple le plus simple d'une telle fonction est obtenu en considérant la fonction

$$f_\alpha=\lambda_p^2+\alpha\sum_{i=1}^{p-1}\lambda_i^2,$$

où α est un paramètre et où on a ordonné les valeurs propres en supposant $\lambda_1 \leqq \ldots \leqq \lambda_p$. Remarquons que f_1 est la fonction considérée par S. Bochner.

Supposons que l'on sache calculer $\Delta\lambda_i$; il est alors possible de calculer le laplacien de toute fonction donnée des λ_i et en particulier celui de f. Ce laplacien s'écrit comme somme de deux termes dépendants l'un de la courbure et l'autre du gradient de f et qui dans (†) correspondent respectivement au terme en courbure de Ricci et à $\|D\omega\|^2$. Pour faire ces calculs, il sera commode de se placer dans un cadre ayant un niveau suffisant de généralité pour donner des applications intéressantes. Nous donnons d'abord un aperçu de la méthode que nous utilisons en réservant la présentation complète (et malheureusement plus compliquée dans les détails) aux sections suivantes.

Nous nous plaçons dans le cadre suivant. Sur une variété riemannienne compacte M supposons que soit donné un fibré riemannien F. Si $\mathscr{E}$ est une section du fibré des endomorphismes symétriques de F et si (λ_i) et (ω_i) sont respectivement ses valeurs propres et une base orthonormée de sections propres, on peut écrire localement

$$\mathscr{E}=\sum_i^{\dim F}\lambda_i\,\omega_i\otimes\omega_i.$$

Si $\mathscr{E}$ est harmonique, en un sens que nous préciserons ultérieurement, on peut alors calculer explicitement le laplacien des λ_i. Pour la classe de fibrés (appelés fibrés de Dirac) que nous considérerons plus loin, nous obtenons les formules suivantes, qui sont l'objet du théorème 1 de l'article.

FORMULES DE WEITZENBÖCK POUR LES VALEURS PROPRES. — *Soit* A *un fibré de Dirac sur une variété riemannienne* M. *Soit* End A *le fibré de Dirac des endomorphismes de* A, $\mathscr{E}=\sum_i\lambda_i\,\omega_i\otimes\omega_i$ *une section symétrique de* End A *annihilée par l'opérateur de Dirac de* End A *et* (e_α) *une base locale orthonormée de champs de vecteurs. Le laplacien d'une valeur propre* λ_i, *là où il existe, est donné par la formule*

$$\Delta\lambda_i=\sum_k(\lambda_k-\lambda_i)\left\{\sum_{\alpha\beta}\frac{1}{2}\left\langle R^{A}_{e_\alpha,e_\beta}(\omega_i),\omega_k\right\rangle\left\langle e_\alpha.e_\beta.\omega_i,\omega_k\right\rangle+2\left\|\left\langle\nabla\omega_i,\omega_k\right\rangle\right\|^2\right\}.$$

Dans cette formule, les vecteurs propres de E n'interviennent que par le carré de la norme de leur dérivée covariante. Cette dépendance remarquable ne semblait pas prévisible *a priori*.

Les fonctions, par exemple homogènes, des λ_i fourniront une classe d'objets dépendants de $\mathscr{E}$ dont on sait calculer le laplacien. Il en sera de même si $\mathscr{E}$ est hermitien (situation à laquelle on se ramène si $\mathscr{E}$ est un champ d'endomorphismes antisymétriques).

Nous ferons plus tard jouer à ces fonctions le rôle tenu par le carré de la norme dans le théorème de Bochner, le laplacien des valeurs propres individuelles λ_i tenant la place de celui de la 1-forme ω.

Un problème nouveau apparaît car la fonction f que nous avons considérée plus haut n'est pas en général différentiable dans M toute entière. C'est le prix à payer pour la perte de symétrie occasionnée par l'utilisation de fonctions homogènes là où, habituellement, il est utilisé des fonctions quadratiques symétriques des valeurs propres ayant donc un caractère tensoriel.

Le lieu singulier de f est formé des points de bifurcation des valeurs propres. Afin de pouvoir contrôler ce lieu, nous procédons de la manière suivante : la fonction f est choisie symétrique en les $p-1$ premières valeurs propres, et une condition de *pincement* interdira à λ_p la possibilité de bifurquer.

Le lieu singulier se réduit alors au sous-ensemble N de M constitué des points où toutes les valeurs propres sont nulles, c'est-à-dire où $\mathscr{E}=0$. Nous montrons le résultat suivant (théorème 2 de l'article).

THÉORÈME. — *Soit* E *un fibré de Dirac au-dessus d'une variété riemannienne connexe* (M, g). *Soit* $N=\{x \mid x \in M, \mathscr{E}(x)=0\}$ *l'ensemble des zéros d'une section* $\mathscr{E}$ *de E. Alors, si* $\mathscr{E}$ *est dans le noyau de l'opérateur de Dirac de* E, *et si* $\mathscr{E}$ *n'est pas identiquement nulle, la codimension de* N *est* $\geqq 2$.

La conséquence importante que nous en tirons est que N est un ensemble polaire au sens de l'Analyse Harmonique (*cf.* [He], p. 23). Toute fonction sous-harmonique (resp. sur-harmonique) dans $M-N$ s'étend en une fonction sous-harmonique (resp. sur-harmonique) dans M supposée compacte. En particulier, si f est strictement sous-harmonique (resp. sur-harmonique), alors nécessairement $M=N$ et $\mathscr{E} \equiv 0$.

Cas des sections qui sont des courbures

Une famille très importante d'exemples, où la section considérée est une courbure, est fournie par la recherche des points critiques de la *fonctionnelle de Yang-Mills* (*cf.* [Bn-L])

$$\mathscr{Y}\mathscr{M}(\nabla)=\int_M \| R^\nabla \|^2,$$

où R^∇ est la courbure d'un fibré vectoriel A, de base (M, g), muni d'une connexion ∇. Les points critiques de cette fonctionnelle sont les connexions dont la courbure est harmonique *i.e.* vérifie les deux équations $d^\nabla R^\nabla=0$ et $\delta^\nabla R^\nabla=0$. La première de ces équations est toujours satisfaite (c'est la seconde identité de Bianchi). La deuxième équation est non linéaire en ∇ et cette non-linéarité joue un rôle fondamental. Si l'on introduit le laplacien $\Delta^\nabla=d^\nabla \delta^\nabla+\delta^\nabla d^\nabla$, le noyau de Δ^∇ coïncide avec l'intersection des noyaux de δ^{∇} et de d^{∇} puisque nous avons supposé M compacte. Les points critiques de la fonctionnelle de Yang-Mills sont donc des sections harmoniques du fibré vectoriel $\wedge^2 \mathrm{M} \otimes \mathrm{End}\,\mathrm{A}$, et on peut écrire pour ces sections des formules de Weitzenböck (*cf.* [Bn2]).

Lorsque l'on choisit, pour le fibré A, le fibré tangent à M muni de la connexion de Levi-Civita, la décomposition sous l'action du groupe orthogonal du tenseur de Riemann-Christoffel donne naissance à de nouvelles sections, ayant un sens géométrique. C'est d'ailleurs à propos d'une de ces composantes, les demi-tenseurs de Weyl d'une variété riemannienne de dimension 4 orientée, que cette démarche s'est imposée à nous après l'étude d'un article de Y. T. Siu et P. Yang (*cf.* [S-Y]), où les auteurs, à la recherche d'un analogue en courbure négative du théorème de Frankel pour les variétés kählériennes, calculent le laplacien d'une fonction construite au moyen des intégrands des nombres caractéristiques de la variété. L'application de notre formule générale au demi-tenseur de Weyl d'une variété riemannienne compacte orientée de dimension 4 donne une formule de Weitzenböck dont le terme en courbure est la somme d'un terme cubique et d'un terme quadratique dans les valeurs propres. Ce raffinement nous permet d'obtenir les résultats suivants (*cf.* théorème 5 de l'article):

THÉORÈME. — *Soit* M *une variété riemannienne de dimension* 4 *compacte orientée à courbure scalaire non positive. Soit* V *l'un des demi-tenseurs de Weyl supposé fermé comme 2-forme à valeurs dans les 2-formes et* $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3$ *ses valeurs propres. Alors* V *est identiquement nul dès que*

$$-8\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\lambda_1 \leqq \lambda_3 \leqq -2\lambda_1.$$

Remarques. — (i) Il suit d'un calcul direct qu'un demi-tenseur de Weyl $W^{\pm}$ est harmonique comme 2-forme à valeurs dans les 2-formes dès qu'il est fermé comme 2-forme à valeurs dans les 2-formes (*cf.* [Bn3]). C'est une conséquence de l'identité $* \circ W^{\pm} = \pm W^{\pm}$ où $*$ est l'opérateur de Hodge agissant sur les 2-formes extérieures. Si (M, g) est une variété d'Einstein, alors d'après la seconde identité de Bianchi ses demi-tenseurs de Weyl sont fermés, donc harmoniques.

(ii) Les demi-tenseurs de Weyl étant de trace nulle, on a toujours

$$-\frac{1}{2}\lambda_1 \leqq \lambda_3 \leqq -2\lambda_1.$$

(iii) Si M est d'Einstein-Kähler, la condition de pincement du demi-tenseur de Weyl négatif s'interprète en terme de courbure sectionnelle holomorphe. En un point de M, désignons respectivement par K_{max}, K_{min}, K_{moy} le maximum, le minimum et la moyenne de la courbure sectionnelle holomorphe (cette dernière n'est autre, à un facteur près, que la courbure scalaire), en un point de M. Pour une variété d'Einstein-Kähler de dimension 4, la courbure sectionnelle holomorphe K est reliée aux valeurs propres du demi-tenseur de Weyl W^- par $K_{max} = (1/6)\, u + \lambda_3$, $K_{min} = (1/6)\, u + \lambda_1$ et on a $K_{moy} = (1/6)\, u$. Ceci montre de quelle façon le pincement sur la courbure sectionnelle holomorphe considéré entraîne l'annulation du demi-tenseur de Weyl négatif. Ceci permet d'écrire la condition de pincement $(K_{moy}-K_{min}) \leqq 0,48\ (K_{max}-K_{min})$. On remarquera que la condition $(1/3)$ $(K_{max}-K_{min}) \leqq (K_{moy}-K_{min}) \leqq (2/3)\ (K_{max}-K_{min})$ est toujours satisfaite.

COROLLAIRE. — *Soit* M *une variété d'Einstein-Kähler de dimension* 4 *compacte à courbure scalaire non positive. Si les valeurs propres* $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3$ *du demi-tenseur de Weyl négatif de* M *vérifient* $-8(1-(\sqrt{3}/2))\lambda_1 \leqq \lambda_3 \leqq -2\lambda_1$, *ou bien, de façon équivalente, si la courbure sectionnelle holomorphe vérifie* $(K_{moy}-K_{min}) \leqq (3+4/\sqrt{3})/11\ (K_{max}-K_{min})$, M *est alors à courbure sectionnelle holomorphe contante, donc un quotient de la boule de* $\mathbf{C}^2$ *munie de sa métrique d'espace symétrique.*

Dans [S-Y] un résultat analogue est obtenu en supposant

$$(K_{moy}-K_{min}) \leqq 0,38\,(K_{max}-K_{min})$$

et de plus la courbure sectionnelle négative.

La démarche précédente nous permet d'obtenir aussi le résultat d'isolation suivant pour les métriques d'Einstein-Kähler (*cf.* théorème 7 de l'article).

THÉORÈME. — *Soit* (M, g_0) *une variété d'Einstein-Kähler de dimension* 4 *à courbure scalaire u positive. Si g est une autre métrique d'Einstein sur* M, *suffisamment proche en topologie* C^2 *de* g_0, *alors g est elle-même kählérienne.*

Dans ce travail, nous partons du cas général où le fibré F est un fibré de Dirac, c'est-à-dire un fibré vectoriel riemannien dont la fibre est un module en algèbres de Clifford et qui est muni d'une connexion préservant cette structure en modules de Clifford.

Ces fibrés sont munis d'un opérateur différentiel du premier ordre naturel, *l'opérateur de Dirac*. Lorsque la base est compacte, cet opérateur et son carré ont même noyau. Le carré de l'opérateur de Dirac a pour symbole principal l'opposé de la métrique et définit donc un laplacien. Les sections harmoniques pour ce laplacien, que nous serons amenés à étudier, appartiennent donc au noyau de l'opérateur de Dirac.

Après avoir, pour cette famille de situations, établi une formule générale, nous obtenons le théorème de non-existence suivante (théorème 3 de l'article) :

THÉORÈME. — *Soit* A *un fibré de Dirac au-dessus d'une variété riemannienne compacte* (M, g). *Soit* $\mathscr{E}$ *une section symétrique ou antisymétrique de* End A *annihilée par l'opérateur de Dirac de* End A. *Il existe un pincement des valeurs propres* λ_i, $i=1, \ldots, p-1$, *autour de* $-(1/(p-1))\lambda_p$ *qui, lorsqu'il est satisfait, implique la nullité de* $\mathscr{E}$ *si la forme bilinéaire* $\mathscr{T}$ *associée à la courbure de* A *est définie positive* (*resp. négative*), *et pour lequel* $\mathscr{E}$ *est parallèle si* $\mathscr{T}$ *est non négative* (*resp. non positive*).

Un des cas particuliers où ce théorème s'applique (*cf.* théorème 9 de l'article) est celui des formes différentielles extérieures harmoniques lorsqu'on les fait opérer sur les spineurs.

THÉORÈME. — *Soit* (M, g) *une variété spinorielle compacte à opérateur de courbure défini positif ou défini négatif, et* π *une k-forme harmonique opérant dans les spineurs. Si* λ_i, $i=1, \ldots, p$, *sont les valeurs propres de* π *ordonnées par* $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots \leqq \lambda_p$, *il existe un pincement des* λ_i, $i=1, \ldots, p-1$, *autour de* $-(1/(p-1))\lambda_p$ *qui entraîne la nullité de* π.

Si l'opérateur de courbure est seulement de signe constant, il existe un pincement des valeurs propres des formes harmoniques opérant sur les spineurs qui entraîne que ces formes sont parallèles.

Je dois à Jean-Pierre Bourguignon de m'avoir suggéré les thèmes sur lesquels se fondent les développements contenus dans cet article. Durant sa gestation, Jean-Pierre Bourguignon m'a apporté, sans ménager ni son temps ni sa peine, soutien, conseils et encouragements. Je le prie de trouver dans ces quelques mots l'expression de ma gratitude.

Ce travail a bénéficié de divers commentaires et suggestions. A ce titre, je tiens à remercier particulièrement A. L. Besse, J. M. Bony, P. Gauduchon, H. B. Lawson et L. Robbiano.

0. NOTATIONS

Dans ce qui suit, M est une variété riemannienne compacte orientée de dimension n. Si ω est une p-forme et π une k-forme, $k \leqq p$, alors $\omega(\pi)$ est la $(p-k)$-forme produit intérieur de ces deux formes dont les composantes dans une base orthonormée s'écrivent

$$\omega(\pi)_{i_{k+1} \dots i_p} = \sum_{i_1 \dots i_k} \omega_{i_1 \dots i_p} \pi_{i_1 \dots i_k}.$$

Si x est un vecteur, on a donc $\omega(x) = i_x \omega$, où i_x désigne le produit intérieur adjoint du produit extérieur pour le produit scalaire défini sur les formes décomposées par le déterminant. Si ω et π sont deux p-formes, on a donc

$$\langle \omega, \pi \rangle = \frac{1}{p!} \sum_{i_1 \dots i_p} \omega_{i_1 \dots i_p} \pi_{i_1 \dots i_p}.$$

Dans la suite on fera librement usage de la métrique pour identifier 1-formes et vecteurs. Les bases de vecteurs propres des transformations symétriques qui apparaîtront seront choisies orthonormées.

On désignera par R^∇ (resp. par R) la courbure de la connexion ∇ (resp. la courbure de la connexion de Levi-Civita). Pour des vecteurs tangents X, Y, et pour une section σ, on prendra

$$R^\nabla_{X, Y} \sigma = (\nabla_Y \nabla_X - \nabla_X \nabla_Y + \nabla_{[X, Y]}) \sigma$$

Avec cette convention et si (e_1, e_2) est une base orthonormée de vecteurs tangents à la sphère S^2, on a $\langle R_{e_1, e_2} e_1, e_2 \rangle = 1$. Sauf précisions explicites, les variétés, fibrés et sections de fibrés seront supposées C^∞.

I. FORMULES DE WEITZENBÖCK POUR LES ENDOMORPHISMES DES FIBRÉS DE DIRAC

(a) Généralités

Dans les paragraphes qui suivent, on se propose de rappeler brièvement le concept de formule de Weitzenböck (*cf.* [Br], [Bn3], [L-M]). Sur une variété riemannienne (M, g), considérons un fibré vectoriel A muni d'une métrique $\langle \, , \, \rangle$ et d'une connexion métrique ∇.

DÉFINITION. — Un opérateur différentiel du second ordre agissant sur les sections de A sera appelé *un laplacien* si son symbole principal σ_P est l'opposé de la métrique g. Pour une section s de A et un covecteur ξ, on aura donc

$$\sigma_P(\xi \otimes \xi \otimes s) = -g(\xi, \xi)\, s.$$

Un laplacien, qui intervient de façon naturelle, est défini comme suit. Soit ∇^* l'adjoint formel de ∇.

DÉFINITION. — L'opérateur $\nabla^* \nabla$ est appelé *le laplacien brut* associé à la connexion ∇.

Si P est un autre laplacien sur les sections de A, on appellera *formule de Weitzenböck* pour P une identité du type

$$P = \nabla^* \nabla + K(R^{\nabla}),$$

où R^{∇} désigne la courbure de ∇ et où $K(R^{\nabla})$ dépend linéairement de R^{∇}.

On désigne par $Cl(M)$ le fibré en algèbres de Clifford réelles de (M, g) (on pourrait aussi considérer le fibré en algèbres de Clifford complexes). Considérons maintenant un fibré vectoriel A en $Cl(M)$-modules à gauche sur M. Si s est une section de A, et si φ est une section de $Cl(M)$, on note $\varphi . s$ l'action de φ sur s.

DÉFINITION. — On dit que A est un *fibré de Dirac* sur (M, g) si A est muni d'une connexion ∇ et d'une métrique euclidienne $\langle \, , \, \rangle$ dans la fibre telles que, si x est un vecteur tangent unitaire à (M, g), φ une section de $Cl(M)$ et s, t des sections de A, on a

$$\langle x.s, x.t \rangle = \langle s, t \rangle \qquad \text{et} \qquad \nabla(\varphi . s) = (\nabla \varphi) . s + \varphi . \nabla s.$$

Dans cette dernière équation, on a aussi désigné par ∇ la connexion canonique de $Cl(M)$.

Si A est un fibré de Dirac sur M et si F est un fibré riemannien sur M, $A \otimes F$ est encore un fibré en modules de Clifford à gauche, l'action de l'algèbre de Clifford étant définie pour des sections φ, s, f respectivement de $Cl(M)$, A, F, par

$$\varphi . (s \otimes f) = (\varphi . s) \otimes f.$$

En munissant $A \otimes F$ de la métrique et de la connexion produit tensoriel, on obtient un nouveau fibré de Dirac sur M. Dans ce qui suit, les indices latins prennent des valeurs comprises entre 1 et rang F et les indices grecs des valeurs comprises entre 1 et dim M. Soit (e_α) une base locale orthonormée de champs de vecteurs de M.

DÉFINITION. — L'opérateur différentiel d'ordre 1 défini sur les sections de A par

$$\mathcal{D}=\sum_\alpha e_\alpha \,.\, \nabla_{e_\alpha}$$

est appelé *l'opérateur de Dirac* associé à la connexion ∇.

Par exemple, pour le fibré de Dirac Cl(M) lui-même, on a

$$\mathcal{D}=d+\delta,$$

d et δ désignant respectivement la différentielle extérieure et la codifférentielle sur les formes extérieures.

Le concept de fibré de Dirac fournit un cadre simple et commode pour écrire des formules de Weitzenböck. On a en effet le résultat suivant (*cf.* [L-M]) :

PROPOSITION. — *Si* (E, ∇) *est un fibré de Dirac sur* M *et* $\mathcal{D}$ *l'opérateur de Dirac associé, on a*

$$\mathcal{D}^2=\nabla^* \nabla+\mathcal{R},$$

où $\mathcal{R}$ *désigne l'endomorphisme sur les sections de* A *défini par* $\mathcal{R}(s)=\sum_{\alpha\beta} e_\alpha \,.\, e_\beta \,.\, \mathrm{R}^{\nabla}_{e_\alpha, e_\beta}(s)$.

(b) Laplacien des valeurs propres

Pour un fibré de Dirac A, considérons le fibré E = End A de ses endomorphismes. La remarque effectuée ci-dessus montre que ce fibré est, de façon naturelle, un fibré de Dirac sur M. Pour une section symétrique $\mathcal{E}$ de ce fibré, calculons l'action de l'opérateur de Dirac. Si (λ_i) et (ω_i) désignent respectivement les valeurs propres et une base orthonormée de vecteurs propres de $\mathcal{E}$, on peut écrire $\mathcal{E}=\sum_i \lambda_i\, \omega_i \otimes \omega_i$ et

$$\mathcal{D}^{\mathrm{E}} \mathcal{E}=\sum_{i,\,\alpha} e_\alpha \,.\, \nabla^{\mathrm{E}}_{e_\alpha}(\lambda_i\, \omega_i \otimes \omega_i)=\sum_i \Big(d\lambda_i \,.\, \omega_i+\sum_k (\lambda_i-\lambda_k)\, a_i^k \,.\, \omega_k\Big) \otimes \omega_i,$$

où les 1-formes a_i^k sont définies par $\nabla \omega_i=\sum_k a_i^k \otimes \omega_k$.

Si $\mathcal{E}$ est dans le noyau de $\mathcal{D}^{\mathcal{E}}$, on obtient donc, pour i fixé, l'équation

(1) $$d\lambda_i \,.\, \omega_i=\sum_k (\lambda_k-\lambda_i)\, a_i^k \,.\, \omega_k.$$

LEMME. — *Soient* x, $y \in T_m M$ *et* ω *un élément unitaire d'un module de Clifford. Alors* $\langle \omega, x.y.\omega \rangle = -g(x,y)$ *et*

$$x = -\sum_{\alpha=1}^{n} \langle \omega, e_\alpha . x . \omega \rangle e_\alpha. \tag{2}$$

Utilisons le lemme précédent. La composante suivant e_α de la 1-forme $d\lambda_i$ (identifiée à un vecteur via la métrique g) a pour expression

$$\langle \omega_i, e_\alpha . d\lambda_i . \omega_i \rangle = -(d\lambda_i)_\alpha.$$

On obtient ainsi la formule

$$d\lambda_i = \sum_{k,\alpha} (\lambda_i - \lambda_k) \langle \omega_i, e_\alpha . a_i^k . \omega_k \rangle e_\alpha, \tag{3}$$

qui, reportée dans (1), permet d'écrire

$$\sum_k (\lambda_k - \lambda_i) a_i^k . \omega_k = \sum_{k,\alpha} (\lambda_i - \lambda_k) \langle \omega_i, e_\alpha . a_i^k . \omega_k \rangle e_\alpha . \omega_i.$$

Remplaçons k par j dans l'équation précédente et effectuons le produit scalaire des deux membres par $a_i^k . \omega_k$ où k est maintenant un indice fixé. Nous obtenons

$$\sum_{j,\alpha} (\lambda_i - \lambda_j) \langle \omega_i, e_\alpha . a_i^j . \omega_j \rangle \langle \omega_i, e_\alpha . a_i^k . \omega_k \rangle = \sum_j (\lambda_i - \lambda_j) \langle a_i^j . \omega_j, a_i^k . \omega_k \rangle, \tag{4}$$

expressions dont nous nous servirons plus loin.

PROPOSITION. — *En un point où elle existe, la différentielle* $d\lambda_i$ *d'une valeur propre* λ_i *d'un endomorphisme* $\mathscr{E} = \sum_k \lambda_k \omega_k \otimes \omega_k$ *opérant sur les sections d'un fibré de Dirac et annihilé par l'opérateur de Dirac du fibré des endomorphismes est donnée par la formule*

$$d\lambda_i = \sum_{k,\alpha\beta} (\lambda_i - \lambda_k) \langle \omega_i, e_\alpha . e_\beta . \omega_k \rangle \langle \nabla_{e_\beta} \omega_i, \omega_k \rangle e_\alpha. \tag{5}$$

■ Il suffit de remplacer dans (3) a_i^k par l'expression qui le définit et d'utiliser la bilinéarité. ■

Remarque. — La relation (5) montre que, si $\mathscr{E}$ est dans le noyau de $\mathscr{D}$, sa trace est constante.

PROPOSITION. — *Le carré de la norme du gradient d'une valeur propre a pour expression*

$$\| d\lambda_i \|^2 = \sum_k (\lambda_i - \lambda_k)^2 \| a_i^k \|^2 + 2 \sum_{j<k} (\lambda_i - \lambda_k)(\lambda_i - \lambda_j) \langle a_i^k . \omega_k, a_i^j . \omega_j \rangle.$$

■ Ce résultat est conséquence des relations (3) et (4) et de l'orthonormalité de la base utilisée. ■

Nous allons maintenant établir le théorème donnant la formule de Weitzenböck pour les valeurs propres. Comme nous le remarquions dans l'introduction, les dérivées secondes des vecteurs propres n'interviennent pas dans cette formule. Il y a donc pour ces endomorphismes harmoniques, découplage entre le laplacien des valeurs propres et les dérivées secondes des vecteurs propres.

THÉORÈME 1 (FORMULE DE WEITZENBÖCK POUR LES VALEURS PROPRES). — *Soit* A *un fibré de Dirac sur une variété riemannienne* M. *Soit* End A *le fibré de Dirac des endomorphismes de* A *et* $\mathscr{E}=\sum_i \lambda_i\,\omega_i\otimes\omega_i$ *une section symétrique de* End A *annihilée par l'opérateur de Dirac de* End A. *Le laplacien d'une valeur propre* λ_i, *là où il existe, est donné par la formule*

$$\Delta\lambda_i=\sum_k(\lambda_k-\lambda_i)\left\{\sum_{\alpha\beta}\frac{1}{2}\left\langle \mathrm{R}^{\mathrm{A}}_{e_\alpha,e_\beta}(\omega_i),\,\omega_k\right\rangle\left\langle e_\alpha.e_\beta.\omega_i,\omega_k\right\rangle+2\,\|\langle\nabla\omega_i,\omega_k\rangle\|^2\right\}.$$

■ Calculons donc le laplacien de λ_i. Nous obtenons, en dérivant (3),

$$\begin{aligned}-\Delta\lambda_i&=\sum_\alpha\nabla_{e_\alpha}(d\lambda_i)_\alpha\\&=\sum_{jk,\alpha}((\lambda_i-\lambda_j)\langle\omega_i,e_\alpha.a_i^j.\omega_j\rangle-(\lambda_k-\lambda_j)\langle\omega_k,e_\alpha.a_k^j.\omega_j\rangle)\\&\quad\times\langle\omega_i,e_\alpha.a_i^k.\omega_k\rangle+\sum_{k,\alpha}(\lambda_i-\lambda_k)\{\langle\nabla_{e_\alpha}\omega_i,e_\alpha.a_i^k.\omega_k\rangle\\&\qquad+\langle\omega_i,e_\alpha.a_i^k.\nabla_{e_\alpha}\omega_k\rangle+\langle\omega_i,e_\alpha.(\nabla_{e_\alpha}a_i^k).\omega_k\rangle\}.\end{aligned}$$

Nous avons supposé que la base locale (e_α) vérifie $\nabla_{e_\alpha}e_\beta=0$ (ce qui est toujours possible au point où nous faisons le calcul). L'équation (4) permet d'écrire

$$\sum_{jk,\alpha}(\lambda_i-\lambda_j)\langle\omega_i,e_\alpha.a_i^j.\omega_j\rangle\langle\omega_i,e_\alpha.a_i^k.\omega_k\rangle=\sum_{jk}(\lambda_i-\lambda_j)\langle a_i^j.\omega_j,a_i^k.\omega_k\rangle.$$

Évaluons successivement, au moyen de trois lemmes techniques, les termes restants.

LEMME 1. — *On a*

$$\sum_{jk,\alpha}(\lambda_k-\lambda_j)\langle\omega_k,e_\alpha.a_k^j.\omega_j\rangle\langle\omega_i,e_\alpha.a_i^k.\omega_k\rangle=\sum_{jk}(\lambda_k-\lambda_j)\langle a_k^j.\omega_j,a_k^i.\omega_i\rangle.$$

• En effet comme $a_i^i=0$ et que $\langle\omega_i,\omega_k\rangle=\delta_{ik}$, on peut écrire

$$\langle\omega_i,e_\alpha.a_i^k.\omega_k\rangle=\langle\omega_k,e_\alpha.a_k^i.\omega_i\rangle.$$

On conclut en utilisant cette relation et l'égalité qui suit (3). •

LEMME 2. — *On a l'égalité*

$$\begin{aligned}&\sum_{k,\alpha}(\lambda_i-\lambda_k)\{\langle\nabla_{e_\alpha}\omega_i,e_\alpha.a_i^k.\omega_k\rangle+\langle\omega_i,e_\alpha.a_i^k.\nabla_{e_\alpha}\omega_k\rangle\}\\&\qquad=\sum_k(\lambda_i-\lambda_k)\{2\,\|a_i^k\|^2-\sum_j(\langle a_k^j.\omega_j,a_k^i.\omega_i\rangle+\langle a_i^j.\omega_j,a_i^k.\omega_k\rangle)\}.\end{aligned}$$

• En utilisant $\nabla \omega_i = \sum_k a_i^k \otimes \omega_k$ et l'antisymétrie en (i, k) de a_i^k provenant de ce que la base (ω_j) est orthonormée, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_\alpha \langle \nabla_{e_\alpha} \omega_i, e_\alpha . a_i^k . \omega_k \rangle &= \sum_{j,\alpha} \langle a_{i,\alpha}^j \omega_j, e_\alpha . a_i^k . \omega_k \rangle \\ &= -\sum_j \langle a_i^j . \omega_j, a_i^k . \omega_k \rangle.\end{aligned}$$

L'identité

$$a_k^j . a_k^i + a_k^i . a_k^j = -2\, g(a_k^i, a_k^j)\, 1$$

donne ensuite

$$\begin{aligned}\sum_\alpha \langle \omega_i, e_\alpha . a_i^k . \nabla_{e_\alpha} \omega_k \rangle &= \sum_{j,\alpha} \langle \omega_i, e_\alpha . a_i^k . a_{k,\alpha}^j \omega_j \rangle \\ &= \sum_j \langle \omega_i, a_k^j . a_i^k . \omega_j \rangle \\ &= 2 \| a_i^k \|^2 - \sum_j \langle a_k^j . \omega_j, a_k^i . \omega_i \rangle. \quad \bullet\end{aligned}$$

LEMME 3. — *On a enfin*

$$\begin{aligned}&\sum_{\alpha, k} (\lambda_i - \lambda_k) \langle \omega_i, e_\alpha . \nabla_{e_\alpha} a_i^k . \omega_k \rangle \\ &\quad = \sum_k (\lambda_i - \lambda_k) \left\{ \sum_{\alpha\beta} \frac{1}{2} \langle R^A_{e_\alpha, e_\beta}(\omega_i), \omega_k \rangle \langle e_\alpha . e_\beta . \omega_i, \omega_k \rangle \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \sum_j \langle a_j^k . \omega_k, a_j^i . \omega_i \rangle \right\}.\end{aligned}$$

• Cette relation est obtenue en calculant

$$\begin{aligned}\sum_\alpha \langle \omega_i, e_\alpha . \nabla_{e_\alpha} a_i^k . \omega_k \rangle &= \sum_{\alpha\beta} \langle \omega_i, e_\alpha . \nabla_{e_\alpha} (\langle \nabla_{e_\beta} \omega_i, \omega_k \rangle e_\beta) . \omega_k \rangle \\ &= \sum_{\alpha\beta} \langle \omega_i, e_\alpha . (\langle \nabla_{e_\alpha} \nabla_{e_\beta} \omega_i, \omega_k \rangle + \sum_{jl} \langle a_{i,\beta}^j \omega_j, a_{k\,\alpha}^l \omega_l \rangle) e_\beta . \omega_k \rangle.\end{aligned}$$

Dans la somme précédente le second terme s'écrit $\langle \omega_i, a_k^j . a_i^j . \omega_k \rangle$ et comme ce terme est multiplié par $(\lambda_i - \lambda_k)$, sa contribution pourra encore s'écrire $\langle a_j^i . \omega_i, a_j^k . \omega_k \rangle$. Si R^A désigne la courbure du fibré de Dirac A, on a alors

$$(\nabla_{e_\alpha} \nabla_{e_\beta} - \nabla_{e_\beta} \nabla_{e_\alpha}) \omega_i = -R^A_{e_\alpha, e_\beta}(\omega_i),$$

et comme

$$\sum_{k,\alpha\beta} (\lambda_i-\lambda_k)\langle \omega_i, e_\alpha . e_\beta . \omega_k \rangle \langle \nabla_{e_\alpha}\nabla_{e_\beta}\omega_i, \omega_k \rangle$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k,\alpha\beta} (\lambda_i-\lambda_k)\langle \omega_i, e_\alpha . e_\beta . \omega_k \rangle \langle (\nabla_{e_\alpha}\nabla_{e_\beta}-\nabla_{e_\beta}\nabla_{e_\alpha})\omega_i, \omega_k \rangle,$$

on obtient le résultat annoncé. ●

On déduit des deux lemmes précédents la contribution

$$\sum_{jk}(\lambda_i-\lambda_k)(\langle a_j^k . \omega_k, a_j^i . \omega_i \rangle - \langle a_k^j . \omega_j, a_k^i . \omega_i \rangle - \langle a_i^j . \omega_j, a_i^k . \omega_k \rangle)$$

$$= \sum_{kj}((\lambda_k-\lambda_j)\langle a_k^j . \omega_j, a_k^i . \omega_i \rangle - (\lambda_i-\lambda_k)\langle a_i^j . \omega_j, a_i^k . \omega_k \rangle).$$

Cette contribution compense exactement celle qui correspond aux deux premiers termes apparaissant dans le laplacien. ■

Remarque. — Si (A, ∇^A) est un fibré de Dirac au-dessus de (M, g), et si (B, ∇^B) est un fibré riemannien de base M, alors le fibré $A \otimes B$ est encore un fibré de Dirac (*cf.* [M-L]). On peut donc, dans ce cas, décomposer la formule du théorème précédent en la somme de deux termes ne comportant que la courbure de l'un des fibrés, et chercher des résultats lorsque la courbure de B est petite en s'inspirant de [G-L].

Il sera intéressant, par exemple pour les applications aux fibrés de spineurs, d'avoir une formule analogue lorsque $\mathscr{E}$ est antisymétrique. Complexifions pour cela le fibré riemannien A. Nous obtenons ainsi un fibré hermitien $(A_{\mathbf{C}}, h)$ sur lequel $i\mathscr{E}$ opère comme endomorphisme hermitien. Nous munissons ce fibré de l'extension hermitienne de la connexion riemannienne ∇ que nous notons aussi ∇. Nous pouvons ainsi écrire localement

$$i\mathscr{E} = \sum_k \lambda_k \theta_k \otimes \pi_k,$$

où (π_k) est une base unitaire de vecteurs propres de $i\mathscr{E}$ et où (θ_k) est la base unitaire dans le conjugué $\bar{A}_{\mathbf{C}}$ de $A_{\mathbf{C}}$ associée aux (π_k). Comme $A_{\mathbf{C}}$ est un complexifié, il est canoniquement isomorphe à $\bar{A}_{\mathbf{C}}$ et on posera $\theta_k = \bar{\pi}_k$ où, si $\pi_{2k-1} = \omega_{2k-1} + i\omega_{2k}$, $\bar{\pi}_{2k-1} = \omega_{2k-1} - i\omega_{2k}$. Posons $a_k^l = \langle \nabla \omega_k, \omega_l \rangle = \langle \nabla \pi_k, \pi_l \rangle = \langle \nabla \bar{\pi}_k, \bar{\pi}_l \rangle$, alors nous obtenons

$$i\mathscr{D}^E \mathscr{E} = \sum_{k,j} e_j . \nabla_{e_j}^E (\lambda_k \bar{\pi}_k \otimes \pi_k) = \sum_k (d\lambda_k . \bar{\pi}_k + \sum_j (\lambda_k - \lambda_j) a_k^j . \bar{\pi}_j) \otimes \pi_k.$$

Si $\mathscr{E}$ est dans le noyau de $\mathscr{D}^E$, on obtient donc l'équation

$$d\lambda_k . \pi_k = \sum_j (\lambda_j - \lambda_k) a_k^j . \pi_j,$$

et avec les notations ci-dessus,

$$d\lambda_k . \omega_k = \sum_j (\lambda_j - \lambda_k) a_k^j . \omega_j.$$

Cette formule est la même que celle obtenue dans le cas des endomorphismes symétriques, à condition de prendre les λ_k associés aux π_k. Nous obtenons donc aussi la même formule pour le laplacien des λ_k.

(c) Le théorème de pincement

On voudrait utiliser le théorème précédent pour établir un résultat d'annulation sur $\mathscr{E}$. La pratique classique consiste à montrer que la norme globale de $\mathscr{E}$ est nulle en établissant que $\|\mathscr{E}\|^2$ est une fonction surharmonique et en utilisant le principe du maximum. La connaissance du laplacien des valeurs propres de $\mathscr{E}$ permet de travailler avec des fonctions plus générales des valeurs propres. Pour des raisons de simplicité et de régularité, considérons la fonction f_α définie sur M par

$$f_\alpha = \lambda_p^2 + \alpha \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i^2,$$

où $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots \leqq \lambda_p$ désignent les valeurs propres rangées dans l'ordre croissant et α est un paramètre. La formule

$$\Delta\lambda^2 = 2\lambda\,\Delta\lambda - 2\,\|d\lambda\|^2,$$

permet de calculer Δf_α dès que l'on connaît $\|d\lambda_i\|^2$.

Remarque. — Pour tout i, k, l, puisque $\|\omega_l\| = 1$, on a $\|a_i^k . \omega_l\|^2 = \|a_i^k\|^2$.

Le laplacien de f_α a donc pour expression

$$\begin{aligned}
\Delta f_\alpha = \lambda_p \sum_{i=1}^{p-1} (\lambda_i - \lambda_p) \sum_{\alpha\beta} \langle R^A_{e_\alpha, e_\beta}(\omega_p), \omega_i \rangle \langle e_\alpha . e_\beta . \omega_p, \omega_i \rangle \\
+ \alpha \sum_{i=1}^{p-1} \sum_k \lambda_i (\lambda_k - \lambda_i) \sum_{\alpha\beta} \langle R^A_{e_\alpha, e_\beta}(\omega_i), \omega_k \rangle \langle e_\alpha . e_\beta . \omega_i, \omega_k \rangle \\
+ 4 \Big\{ \sum_k \lambda_p (\lambda_k - \lambda_p) \|a_p^k\|^2 + \alpha \sum_{i,\,k=1}^{p-1} \lambda_i (\lambda_k - \lambda_i) \|a_i^k\|^2 \\
+ \alpha \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i (\lambda_p - \lambda_i) \|a_i^p\|^2 \Big\} - 2\alpha \sum_{i=1}^{p-1} \|d\lambda_i\|^2 - 2\,\|d\lambda_p\|^2.
\end{aligned}$$

Il comporte deux types de termes. D'une part des termes dépendant de la courbure du fibré, et d'autre part une forme quadratique Q_α des a_i^k (ou plus exactement des $a_i^k . \omega_k$). Le jeu consistera alors à trouver des conditions forçant les deux familles à avoir un signe constant et identique. Les termes en courbure dépendront du fibré de Dirac considéré. Pour la forme quadratique, on peut par contre tenter de trouver une structure simple indépendante du fibré. On peut remarquer que la valeur $\alpha = 1$ du paramètre α correspond au cas classique de Bochner, *i.e.* que $Q_1 = -2\,\|\nabla \mathscr{E}\|^2$.

On obtient pour Q_α l'expression suivante :

$$
\begin{aligned}
Q_\alpha = 4 \Big\{ & \sum_k \lambda_p (\lambda_k - \lambda_p) \| a_p^k \|^2 \\
& + \alpha \sum_{i,k=1}^{p-1} \lambda_i (\lambda_k - \lambda_i) \| a_i^k \|^2 + \alpha \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i (\lambda_p - \lambda_i) \| a_i^p \|^2 \Big\} \\
& - 2 \sum_k (\lambda_p - \lambda_k)^2 \| a_p^k \|^2 - 4 \sum_{j<k} (\lambda_p - \lambda_k)(\lambda_p - \lambda_j) \langle a_p^k . \omega_k, a_p^j . \omega_j \rangle \\
& - 2\alpha \sum_{i=1}^{p-1} \sum_k (\lambda_i - \lambda_k)^2 \| a_i^k \|^2 \\
& - 4\alpha \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j<k} (\lambda_i - \lambda_k)(\lambda_i - \lambda_j) \langle a_i^k . \omega_k, a_i^j . \omega_j \rangle \\
= & \sum_{k=1}^{p-1} 2 (\lambda_k - \lambda_p)((3+\alpha)\lambda_p - (3\alpha + 1)\lambda_k) \| a_p^k \|^2 \\
& - 8\alpha \sum_{1 \leqq k < i \leqq p-1} (\lambda_k - \lambda_i)^2 \| a_i^k \|^2 \\
& - 4\alpha \sum_{i=1}^{p-1} \sum_{j<k} (\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_k) \langle a_i^k . \omega_k, a_i^j . \omega_j \rangle \\
& - 4 \sum_{j<k} (\lambda_p - \lambda_j)(\lambda_p - \lambda_k) \langle a_p^j . \omega_j, a_p^k . \omega_k \rangle .
\end{aligned}
$$

Pour étudier le terme en courbure, posons

$$
\mathscr{T}_{ik} = \sum_{\alpha\beta} \langle R^A_{e_\alpha, e_\beta}(\omega_i), \omega_k \rangle \langle e_\alpha . e_\beta . \omega_i, \omega_k \rangle .
$$

Des propriétés de symétries des tenseurs de courbure, on déduit que $\mathscr{T}_{ik}$ est symétrique.

Définissons alors une forme bilinéaire symétrique $\mathscr{T}$ dans la fibre du carré symétrique $S^2 A$ en posant

$$
\begin{aligned}
\mathscr{T}(\omega_i \bigcirc \omega_k, \omega_j \bigcirc \omega_l) = \sum_{\alpha\beta} (& \langle R^A_{e_\alpha, e_\beta}(\omega_i), \omega_k \rangle \langle e_\alpha . e_\beta . \omega_j, \omega_l \rangle \\
& + \langle R^A_{e_\alpha, e_\beta}(\omega_j), \omega_l \rangle \langle e_\alpha . e_\beta . \omega_i, \omega_k \rangle),
\end{aligned}
$$

puis en étendant par bilinéarité. Les $\mathscr{T}_{ik}$ sont donc les valeurs prises par $\mathscr{T}$ sur la base $(\omega_i \bigcirc \omega_k)$.

Supposons $\mathscr{E}$ à trace nulle (la trace de $\mathscr{E}$ étant constante et l'identité parallèle, cette condition est juste une normalisation commode) et évaluons les différents termes qui apparaissent dans le laplacien de f lorsque $\lambda_i = -(1/(p-1))\,\lambda_p = \lambda$, $i = 1, \ldots, p-1$. La forme quadratique Q_α devient

$$Q_\alpha = -2p\lambda^2 \left\{ \sum_{k=1}^{p-1} (\alpha(p+2)+3p-2) \| a_p^k \|^2 + \sum_{1 \leqq j < k \leqq p-1} 2p \langle a_p^j . \omega_j, a_p^k . \omega_k \rangle \right\},$$

Remarquons que les formes quadratiques que nous rencontrons dépendent de $p-1$ vecteurs et posons $a = (\alpha(p+2)+3p-2)/p$. Une telle forme quadratique est définie positive si $a > 1$ et définie négative si $a < 2-p$ (rappelons que la matrice associée est d'ordre $p-1$).

Dès que $p \geqq 2$, Q_α est définie positive si $\alpha < 1-p$, Q_α est définie négative si $\alpha > -2 + (6/(2+p))$.

On obtient ensuite comme contribution du terme en courbure

$$\lambda_p \sum_{i=1}^{p-1} (\lambda_i - \lambda_p) \mathscr{T}_{pi} + \alpha \sum_{i=1}^{p-1} \sum_k \lambda_i (\lambda_k - \lambda_i) \mathscr{T}_{ik},$$

et pour $\lambda_i = -(1/(p-1)) \lambda_p$, cette expression devient

$$-p\lambda^2 \sum_{k=1}^{p-1} \mathscr{T}_{pk} ((p-1)+\alpha).$$

Supposons les $\mathscr{T}_{pk}$ positifs, ce qui sera le cas lorsque l'opérateur de courbure de M est positif pour les fibrés que nous rencontrerons, alors le laplacien de f_α est négatif pour $\lambda_i = -(1/(p-1)) \lambda_p$, $i = 1, \ldots, p-1$, dès que $\alpha > 1-p$ et $\alpha > -2 + (6/(p+2))$ et de tels α existent si $p \geqq 2$.

Par contre, si les $\mathscr{T}_{pk}$ sont négatifs, les conditions $\alpha > 1-p$ et $\alpha < 1-p$, qui entraîneraient la positivité de Q_α et du terme en courbure, sont incompatibles.

Nous procédons alors de la façon suivante:

Fixons un $\varepsilon > 0$, et prenons $\alpha = 1-p+\varepsilon$. Nous nous intéressons à la forme quadratique $f_\alpha = \lambda_1^2 + \alpha \sum_{k=2}^{p} \lambda_k^2$ dans un voisinage uniformément conique du vecteur $(-(p-1), 1, \ldots, 1)$. En ce point, nous avons $f_\alpha = \lambda_1^2 (1 + (1/(p-1))\alpha) = 1/(p-1) \varepsilon \lambda_1^2$. La fonction f_α est donc strictement positive dès que $\lambda_1 \neq 0$.

La fonction dont nous allons établir la surharmonicité est une puissance de f_α. Pour $\tau \in \mathbf{R}$, nous avons l'identité

$$\Delta f_\alpha^\tau = \tau f_\alpha^{\tau-2} (f_\alpha \Delta f_\alpha + (1-\tau) \| df_\alpha \|^2)$$

que nous allons considérer pour $\tau > 0$ suffisamment petit. On se propose d'utiliser le terme en gradient $\| df_\alpha \|^2$ pour contrôler le signe de la quantité $f_\alpha Q_\alpha$ qui apparaît dans $f_\alpha \Delta f_\alpha$. Dans ce but, on va établir que le terme $\hat{Q}$ regroupant à un facteur numérique près les formes quadratiques dans le laplacien de Δf_α^τ, soit $\hat{Q} = f_\alpha Q_\alpha + (1-\tau) \| df_\alpha \|^2$ est défini positif lorsque $\tau = 0$, propriété qui persistera pour τ positif assez petit. Pour faire cela, on va considérer $\hat{Q}$ comme une forme quadratique en les vecteurs a_1^k.

Calculons tout d'abord la norme du gradient de f_α. On a $df_\alpha = 2/(p-1))\,\varepsilon\lambda_1\,d\lambda_1$. D'où, si $\lambda = -(1/(p-1))\,\lambda_1$ et en tenant compte de $\lambda_1 - \lambda = -p\,\lambda$,

$$\|df_\alpha\|^2 = 4\,\varepsilon^2\,\lambda^2\left(\sum_{k=2}^{p}(\lambda_1-\lambda_k)^2\,\|a_1^k\|^2 + 2\sum_{j<k}(\lambda_1-\lambda_j)(\lambda_1-\lambda_k)\langle a_1^k.\omega_k, a_1^j.\omega_j\rangle\right)$$

$$= 4\,\varepsilon^2\,\lambda^4\,p^2\left(\sum_{k=2}^{p}\|a_1^k\|^2 + 2\sum_{j<k}\langle a_1^k.\omega_k, a_1^j.\omega_j\rangle\right).$$

L'expression de $\hat{Q}$ est donc

$$\hat{Q} = 2\,p\,\varepsilon\lambda^4\left(\sum_{k=2}^{p}(p(p-1)(p-2)-\varepsilon(p+2)(p-1)+2\,p\,\varepsilon)\,\|a_1^k\|^2 + 2\,p\,(2\,\varepsilon-(p-1))\sum_{j<k}\langle a_1^k.\omega_k, a_1^j.\omega_j\rangle\right).$$

Si nous posons $a = (p(p-1)(p-2)-\varepsilon(p+2)(p-1)+2\,p\,\varepsilon)/p\,(2\,\varepsilon-p+1)$, la condition pour que $\hat{Q}$ soit définie positive est $a < 2-p$. En effet on suppose $p \geqq 2$ et ε assez petit pour que, dans la forme quadratique, le coefficient des termes rectangles soit négatif. Or a a été obtenu en factorisant dans $\hat{Q}$ le coefficient b du terme rectangle supposé négatif; il faut donc que $\hat{Q}/b$ soit négative, ce qui d'après la remarque précédente est obtenu pour $a < 2-p$.

Cette condition est satisfaite si

$$p(p-1)(p-2)-\varepsilon(p+2)(p-1)+2\,p\,\varepsilon > (2-p)\,p\,(2\,\varepsilon-p+1),$$

c'est-à-dire si $p > 2$.

Il existe donc un intervalle ouvert $]1-p,\ 1-p+\varepsilon_0[$ tel que si α est dans cet intervalle, Δf_α^τ est positive ou nulle là où elle est définie si la courbure est négative. Par l'argument habituel, nous pouvons en déduire que f est constant et nulle si la courbure est définie.

Les conditions de signe, portant sur le laplacien de f_α ou de $\hat{f}_\alpha$, que nous venons d'obtenir persistent, par continuité, lorsque tous les λ_i, $i=1, \ldots, p-1$, sont suffisamment voisins de $-(1/(p-1))\,\lambda_p$ ou bien si tous les λ_i, $i=2, \ldots, p$, sont suffisamment voisins de $-(1/(p-1))\,\lambda_1$ et la fonction f_α est nulle. [Pour toute forme quadratique S la propriété «il existe $C>0$ tel que pour tout t $S(t,t) > C\|t\|^2$» est préservée par perturbation C^0.] Si les $\mathcal{T}_{ik}$ sont seulement non négatifs ou non positifs, f_α est constante.

DÉFINITION. — On dira que les valeurs propres λ_i, $i=1, \ldots, p-1$, de $\mathscr{E}$ sont ε-*pincées* autour de $-(1/(p-1))\lambda_p$ si, pour $i=1, \ldots, p-1$,

$$\left|\lambda_i+\frac{\lambda_p}{p-1}\right| \leqq \varepsilon\lambda_p,$$

et on définira de même un pincement autour de λ_1.

Remarque. — Cette définition est suggérée par le spectre du tenseur de courbure du projectif complexe (ou de son dual) en dimension 4, opérant sur les 2-formes positives. D'autres définitions qui grouperaient les valeurs propres de façons différentes, sont bien sûr possibles.

On a ainsi obtenu le résultat suivant :

PROPOSITION. — *Soit* A *un fibré de Dirac sur une variété riemannienne* M. *Soit* $\mathscr{E}$ *une section symétrique* (*resp. antisymétrique*) *de* End A *appartenant au noyau de l'opérateur de Dirac de* End A. *Désignons par* $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots \leqq \lambda_p$ *les valeurs propres ordonnées de* $\mathscr{E}$ (*resp. de* $i\mathscr{E}$ *vu comme endomorphisme hermitien*). *Si la forme bilinéaire symétrique* $\mathscr{T}$ *est partout non négative* (*resp. non positive*) *dans* M, *il existe un pincement des valeurs propres* λ_i, $i=1, \ldots, p-1$, *de* $\mathscr{E}$ *autour* $-(1/(p-1))\lambda_p$ [*resp. de* λ_i, $i=2, \ldots, p$, *autour de* $-(1/(p-1))\lambda_1$] *pour lequel le laplacien de la fonction*

$$f_\alpha=\lambda_p^2+\alpha\sum_{k=1}^{p-1}\lambda_k^2\left(resp.\ \hat{f}_\alpha=\lambda_1^2+\alpha\sum_{k=2}^{p}\lambda_k^2\right),$$

là où il est défini, est non négatif et positif si $\mathscr{T}$ *est définie.*

Jusqu'à maintenant, nous nous sommes placés en des points réguliers de f_α. Nous allons maintenant examiner les autres points en commençant par ceux où l'ordre des bifurcations est maximale, c'est-à-dire aux zéros de $\mathscr{E}$ puisque la trace de $\mathscr{E}$ est nulle.

THÉORÈME 2. — *Soit* E *un fibré de Dirac au-dessus d'une variété riemannienne compacte connexe* (M, g). *Soit* $\mathrm{N}=\{\alpha \mid \alpha\in\mathrm{M},\ \mathscr{E}(x)=0\}$ *l'ensemble des zéros d'une section* $\mathscr{E}$ *de* E. *Alors, si* $\mathscr{E}$ *est annihilée par l'opérateur de Dirac de* E, *et si* $\mathscr{E}$ *n'est pas identiquement nulle,* N *est un ensemble polaire.*

■ Puisque M est compacte, remarquons tout d'abord que les noyaux de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}^2$ coïncident (ce serait encore le cas pour M complète à condition de se restreindre aux sections L^2 de E).

Soit N′ le sous-ensemble des points de N où $\nabla\mathscr{E}=0$. Les travaux de L. Robbiano (*cf.* [Ro1] et [Ro-Sr]) étendus aux systèmes d'opérateurs elliptiques d'ordre 2 dans [Ro2] montrent que le compact N′ est de dimension de Hausdorff $n-2$, donc polaire.

Le complémentaire de N′ dans N est un ouvert de N dont on va montrer qu'il est contenu dans une variété de dimension $\leqq n-2$. En effet, soit $x\in\mathrm{N}-\mathrm{N}'$. Il existe une composante $\mathscr{E}_i$ de $\mathscr{E}$, par rapport à une base, dont le gradient est non nul en x. L'ensemble $\mathscr{E}_i^{-1}(0)$ est au voisinage de x une sous-variété de dimension $n-1$. Considérons une base locale (e_α) de champs de vecteurs de M telle que e_1 soit colinéaire au gradient de $\mathscr{E}_\alpha$ et pour $\alpha>1$, les (e_α) soient tangents à ce morceau d'hypersurface. Alors, au point x, les conditions $\sum_\alpha e_\alpha . \nabla_{e_\alpha} \mathscr{E}=0$ et $\nabla_{e_\alpha}\mathscr{E}=0$, $\alpha>1$ entraînent $\nabla_{e_1}\mathscr{E}=0$. Comme $(\nabla_{e_\alpha}\mathscr{E})_i=\nabla_{e_\alpha}(\mathscr{E}_i)$ sur N, on a $\nabla_{e_\alpha}(\mathscr{E}_i)=0$ pour tout α d'où la contradiction. Nous en déduisons qu'en un point de $N-N'$ la codimension est $\geqq 2$. Ceci permet de conclure (*cf.* [He]), que $N-N'$ est lui aussi polaire.

Remarque. — Lorsque E et M sont analytiques, le théorème précédent peut être établi directement en montrant que les dérivées covariantes d'ordre quelconque de $\mathscr{E}$ s'annulent sur N.

Quitte à renforcer le pincement autour de $-(1/(p-1))\lambda_p$ on peut supposer qu'aucune bifurcation du type $\lambda_p=\lambda_i$, $i=1, \ldots, p-1$, ne se produit. Le lieu des bifurcations coïncide alors avec celui des zéros de $\mathscr{E}$. On a vu que l'ensemble N des zéros de $\mathscr{E}$ est de codimension $\geqq 2$. La fonction bornée f_α qui, sous les hypothèses de pincement, est strictement sous-harmonique dans le complémentaire de N s'étend en une fonction strictement sous-harmonique dans M. Comme M est compacte, ceci est impossible. On en déduit que $\mathscr{E}$ est identiquement nulle.

THÉORÈME 3. — *Soit* A *un fibré de Dirac au-dessus d'une variété riemannienne compacte* (M, g). *Soit* $\mathscr{E}$ *une section symétrique ou antisymétrique de* End A *annihilée par l'opérateur de Dirac de* End A. *Il existe un pincement des valeurs propres* λ_i, $i=1, \ldots, p-1$, *autour de* $-(1/(p-1))\lambda_p$ *qui, lorsqu'il est satisfait, implique la nullité de* $\mathscr{E}$ *si la forme bilinéaire* $\mathscr{T}$ *associée à la courbure de* A *est définie positive* (*resp. négative*), *et pour lequel* $\mathscr{E}$ *est parallèle si* $\mathscr{T}$ *est non négative* (*resp. non positive*).

II. APPLICATION AU FIBRÉ DE CLIFFORD

(a) Généralités

Les formules obtenues au paragraphe précédent s'appliquent au fibré de Clifford construit sur le fibré tangent de M. Remarquons que ce fibré de Clifford est, comme SO_n-module, isomorphe à l'algèbre extérieure. Des endomorphismes sur ce fibré sont par exemple obtenus en considérant l'action par multiplication de Clifford de formes homogènes. Il faut aussi remarquer que l'opérateur de Dirac qui intervient est celui du fibré des endomorphismes du fibré de Clifford et que, pour les formes que nous venons de considérer, l'harmonicité dont il s'agit n'est pas l'harmonicité usuelle. Ainsi on peut montrer (*cf.* [Bn3]) qu'une $4k$-forme fermée comme $2k$-forme à valeurs dans les $2k$-formes est automatiquement parallèle. Par contre, pour le tenseur de courbure de M, ses composantes irréductibles sous l'action du groupe orthogonal et son tenseur de Ricci, les conditions que nous sommes amenés à imposer sont bien les habituelles conditions de fermeture ou de cofermeture.

Regardons successivement ce que deviennent les formules donnant la différentielle et le laplacien des valeurs propres lorsque l'endomorphisme du fibré de Clifford opère dans les 2-formes, puis dans les 1-formes. Les endomorphismes que nous considérons ont donc toutes leurs valeurs propres nulles exception faite de celles qui sont associées à des 2-formes dans le premier cas et à des 1-formes dans le second. Rappelons que les indices latins prennent des valeurs comprises entre 1 et le rang p du fibré dans lequel $\mathcal{E}$ opère et que les indices grecs varient entre 1 et dim M.

Dans le cas des 2-formes la formule

$$d\lambda_i = \sum_{k,\,\alpha} (\lambda_i - \lambda_k) \langle \omega_i, e_\alpha . a_i^k . \omega_k \rangle e_\alpha,$$

devient

$$d\lambda_i = \sum_k (\lambda_i - \lambda_k) (\omega_i (\omega_k (a_i^k)) - \omega_k (\omega_i (a_i^k))).$$

En effet l'identité $x . \omega = x \wedge \omega - i_x \omega$ donne

$$\langle \omega_i, e_\alpha . e_\beta . \omega_k \rangle = - \langle \omega_i, i_{e_\alpha} (e_\beta \wedge \omega_k) \rangle - \langle \omega_i, e_\alpha \wedge \omega_k (e_\beta) \rangle,$$

et l'écriture en composantes fournit le résultat. Reprenons l'expression du laplacien des valeurs propres.

$$\Delta\lambda_i = \sum_k (\lambda_k - \lambda_i) \left\{ \sum_{\alpha\beta} \frac{1}{2} \langle \mathrm{R}^{\mathbf{A}}_{e_\alpha, e_\beta} (\omega_i), \omega_k \rangle \langle e_\alpha . e_\beta . \omega_i, \omega_k \rangle + 2 \| a_i^k \|^2 \right\}.$$

En tenant compte de l'expression du tenseur de courbure du fibré de Clifford (*cf.* [L-M]), on a

$$\Delta\lambda_i = \sum_k (\lambda_k - \lambda_i) \left\{ \sum_{\alpha < \beta} \sum_{\mu < \nu} \frac{1}{2} \langle \mathrm{R}_{e_\alpha, e_\beta} (e_\mu), e_\nu \rangle \langle ad_{e_\mu . e_\nu} \omega_i, \omega_k \rangle \langle e_\alpha . e_\beta . \omega_i, \omega_k \rangle + 2 \| a_i^k \|^2 \right\},$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\Delta\lambda_i = \sum_k (\lambda_k - \lambda_i) \left\{ \sum_{\alpha < \beta} \sum_{\mu < \nu} \frac{1}{4} \langle \mathrm{R}_{e_\alpha, e_\beta} (e_\mu), e_\nu \rangle \langle ad_{e_\mu . e_\nu} \omega_i, \omega_k \rangle \langle ad_{e_\alpha . e_\beta} \omega_i, \omega_k \rangle + 2 \| a_i^k \|^2 \right\}.$$

Dans cette formule, puisque les $e_\mu . e_\nu$ constituent une base orthonormée de 2-formes, on peut les remplacer par n'importe quelle base orthonormée de 2-formes. Le choix d'une base orthonormée de vecteurs propres η_l, $l = 1, \ldots, (1/2)\, n(n-1)$, associée aux valeurs propres ρ_l de l'opérateur de courbure R de M permet d'écrire

$$\Delta\lambda_i = \sum_k (\lambda_k - \lambda_i) \left\{ \sum_j \frac{1}{4} \rho_j (\langle ad_{\eta_l} \omega_i, \omega_k \rangle)^2 + 2 \| a_i^k \|^2 \right\}.$$

Remarquons que

$$\langle e_\mu . e_\nu . \omega_i, \omega_k \rangle = \langle -i_{e_\mu}(e_\nu \wedge \omega_i) - e_\mu \wedge (i_{e_\nu}\omega_i), \omega_k \rangle$$
$$= -\delta_{\mu\nu}\delta_{ik} + \langle e_\nu \wedge (\omega_i(e_\mu)) - e_\mu \wedge (\omega_i(e_\nu)), \omega_k \rangle$$
$$= \langle \omega_i(e_\mu), \omega_k(e_\nu) \rangle - \langle \omega_i(e_\nu), \omega_k(e_\mu) \rangle.$$

Puisque les ω_i sont des 2-formes, on peut les voir comme des endomorphismes du fibré tangent et on obtient, si $i \neq k$,

$$\langle e_\mu . e_\nu . \omega_i, \omega_k \rangle = (\omega_k \circ \omega_i - \omega_i \circ \omega_k)_{\mu\nu},$$

où $\circ$ désigne la composition des endomorphismes. On a de même pour l'action à droite, en tenant compte pour une p-forme π de la formule $\pi . e_i = (-1)^p (e_i \wedge \pi + i_{e_i}\pi)$,

$$\langle \omega_i . e_\mu . e_\nu, \omega_k \rangle = -\delta_{\mu\nu}\delta_{ik} - \langle \omega_i(e_\mu), \omega_k(e_\nu) \rangle + \langle \omega_i(e_\nu), \omega_k(e_\mu) \rangle,$$

d'où

$$\langle ad_{e_\mu, e_\nu}\omega_i, \omega_k \rangle = 2(\omega_k \circ \omega_i - \omega_i \circ \omega_k)_{\mu\nu},$$

et

$$\Delta\lambda_i = \sum_k (\lambda_k - \lambda_i) \{ \sum_{\alpha<\beta} \sum_{\mu<\nu} \langle R_{e_\alpha, e_\beta}(e_\mu), e_\nu \rangle (\omega_i \circ \omega_k - \omega_k \circ \omega_i)_{\mu\nu} (\omega_i \circ \omega_k - \omega_k \circ \omega_i)_{\alpha\beta} + 2 \| a_i^k \|^2 \}.$$

(b) Les demi-tenseurs de Weyl en dimension 4

1) Le laplacien des valeurs propres. — En dimension 4, et pour une variété orientée, la décomposition des 2-formes sous l'action de l'opérateur de Hodge s'écrit

$$\Lambda^2 M = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-.$$

Le tenseur de Weyl opère dans ces sous-espaces, et sa restriction à l'un de ces sous-espaces est appelée *demi-tenseur de Weyl*. Soit $\mathscr{E}$ un demi-tenseur de Weyl. On peut écrire comme précédemment

$$\mathscr{E} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \omega_i \otimes \omega_i.$$

Comme Λ^+ (ou Λ^-) s'identifie à l'algèbre de Lie de Sp(1), les vecteurs propres satisfont aux équations

$$\omega_i \circ \omega_i = -\frac{1}{2}\mathrm{Id}, \qquad i=1,2,3,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\omega_i = \omega_j \circ \omega_k = -\omega_k \circ \omega_j, \qquad (i,j,k)=(1,2,3),$$

où (1, 2, 3) désigne une permutation circulaire de $\{1,2,3\}$.

Par suite, pour la différentielle d'une valeur propre, on obtient

$$d\lambda_i = \sqrt{2}\sum_{j,k}(\lambda_i-\lambda_j)\,\omega_k(a_i^j), \qquad (i,j,k)=(1,2,3).$$

Il sera commode, et nous le ferons dans les calculs relatifs aux dimensions 3 et 4, de choisir une base de vecteurs ω_i' de norme $\sqrt{2}$. On a alors

$$\omega_i' \circ \omega_i' = -\mathrm{Id}, \qquad i=1,2,3,$$

$$\omega_i' = \omega_j' \circ \omega_k' = -\omega_k \circ \omega_j', \qquad (i,j,k)=(1,2,3),$$

où $(1,2,3)$ désigne une permutation circulaire de $\{1,2,3\}$.

Par suite, pour la différentielle d'une valeur propre, on obtient

$$d\lambda_i = \sum_{j,k}(\lambda_i-\lambda_j)\,\omega_k'(a_i^j), \qquad (i,j,k)=(1,2,3).$$

La formule écrite pour le laplacien des valeurs propres d'un endomorphisme sur les 2-formes donne

$$\Delta\lambda_i = \sum_k(\lambda_k-\lambda_i)\{\sum_{\alpha<\beta}\sum_{\mu<\nu}\langle R_{e_\alpha,e_\beta}(e_\mu),e_\nu\rangle(\omega_i\circ\omega_k-\omega_k\circ\omega_i)_{\mu\nu}(\omega_i\circ\omega_k-\omega_k\circ\omega_i)_{\alpha\beta}+2\|a_i^k\|^2\}.$$

Par suite

$$\Delta\lambda_i = \sum_k(\lambda_k-\lambda_i)\{4\langle R(\omega_i\circ\omega_k),\omega_i\circ\omega_k\rangle+2\|a_i^k\|^2\}.$$

Dans cette dernière formule, R est vu comme endomorphisme sur les 2-formes extérieures.

Si $R=Z+U+W^++W^-$ est la décomposition du tenseur de courbure en composantes irréductibles, on a pour une 2-forme positive ω

$$R(\omega)=\frac{1}{12}u\,\omega+W^+(\omega)+Z(\omega),$$

d'où

$$\langle R(\omega_k), \omega_k \rangle = \frac{1}{12} u + \lambda_k,$$

où u est la courbure scalaire.

On obtient ainsi la formule (*cf.* [De])

$$\Delta\lambda_i = 2\lambda_i^2 + 4\lambda_k\lambda_j - \frac{1}{2} u\lambda_i + 2(\lambda_j - \lambda_i) \| a_i^j \|^2 + 2(\lambda_k - \lambda_i) \| a_i^k \|^2.$$

Puisque $\| \mathscr{E} \|^2 = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i^2$, on obtient

$$\Delta \| \mathscr{E} \|^2 = 2 \sum_{i=1}^{3} (\lambda_i \Delta\lambda_i - \| \nabla \lambda_i \|^2),$$

et

$$\Delta \| \mathscr{E} \|^2 = 36 \operatorname{Det} \mathscr{E} - u \| \mathscr{E} \|^2 - 2 \| \nabla \mathscr{E} \|^2.$$

Remarquons de plus que la fonction $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mapsto \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ contrainte par

$$\sum_i \lambda_i^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_i \lambda_i = 0$$

atteint son maximum en $1/\sqrt{6}(-1, -1, 2)$. On a donc toujours $\operatorname{Det} \mathscr{E} \leqq 1/\sqrt{54} \| \mathscr{E} \|^3$.

PROPOSITION. — *Soit* M *une variété riemannienne compacte orientée de dimension* 4 *à courbure scalaire non négative. Si l'un des demi-tenseurs de Weyl est harmonique et vérifie* $-(1/2)\lambda_1 \leqq \lambda_3 \leqq -\lambda_1$, *ou bien* $\| \mathscr{E} \| < (1/\sqrt{24}) u$ *alors ce demi-tenseur de Weyl est identiquement nul.*

Remarques. — Ceci montre que, pour les métriques Ricci-plates sur les surfaces **K**3, les valeurs propres du demi-tenseur de Weyl sont assez dispersées. Pour $\mathbf{CP}^2$ et $\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^2$, on a toujours $\lambda_3 = -2\lambda_1$. Au contraire, pour le dual de $\mathbf{CP}^2$, on a $\lambda_3 = -(1/2)\lambda_1$.

En fait, si $\mathscr{E}$ est un demi-tenseur de Weyl parallèle et $\not\equiv 0$, les équations

$$\Delta\lambda_1 = 2\lambda_1^2 + 4\lambda_2\lambda_3 - \frac{1}{2} u\lambda_1 = 0$$

$$\Delta\lambda_2 = 2\lambda_2^2 + 4\lambda_1\lambda_3 - \frac{1}{2} u\lambda_2 = 0$$

$$\Delta\lambda_3 = 2\lambda_3^2 + 4\lambda_1\lambda_2 - \frac{1}{2} u\lambda_3 = 0,$$

impliquent ou bien $\lambda_3 = -2\lambda_1 = (1/6) u$ et la courbure scalaire u est alors positive, ou bien $\lambda_3 = -(1/2)\lambda_1 = -(1/12) u$ et la courbure scalaire est négative.

2) Une extension riemannienne d'un théorème de Micallef-Moore. — Avant d'appliquer la méthode proposée dans l'introduction, examinons une conséquence du théorème de Micallef-Moore (*cf.* [Mf-Mo]) en utilisant la méthode de Bochner qui privilégie la courbure positive.

Si g est la métrique riemannienne, désignons par g_c (resp. h) l'extension complexe (resp. l'extension hermitienne) de g au complexifié $T_x M \otimes \mathbf{C}$ de l'espace tangent $T_x M$ en x à M. On a donc, pour $z_1, z_2 \in T_x M \otimes \mathbf{C}$, $h(z_1, z_2) = g_c(z_1, \bar{z}_2)$.

Définition. — Un 2-plan P de $T_x M \otimes \mathbf{C}$ est dit *totalement isotrope* si, pour tout z dans P, $g_c(z, z) = 0$.

Proposition. — *Le* 2-*plan* P *de* $T_x M \otimes \mathbf{C}$ *est totalement isotrope si et seulement s'il existe une base orthonormée* (e_1, e_2, e_3, e_4) *de* $T_x M$ *telle que* $e_1 + ie_2$ *et* $e_3 + ie_4$ *soient dans* P.

Désignons par $\mathfrak{R}$ la restriction aux 2-plans totalement isotropes du complexifié du tenseur de courbure de M. Si ω_1 et ω_2 sont les vecteurs propres du demi-tenseur de Weyl positif W^+ associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2 ordonnées par $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3$, alors on peut écrire pour une base orthonormée (e_α) de l'espace tangent

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_3 - e_2 \wedge e_4),$$

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3).$$

Par suite, si $\mathfrak{R}$ est non négatif, on a

$$\frac{1}{6}u - \lambda_3 \leqq 0.$$

Ceci montre que, si $\mathfrak{R} \geqq 0$, alors

$$36 \operatorname{Det} W^+ - u \| W^+ \|^2 \leqq 0,$$

et soit W^+ est identiquement nul, soit il est parallèle.

D'après Micallef-Moore (*cf.* [Mf-Mo]), une variété riemannienne M simplement connexe à opérateur de courbure complexe positif sur les plans totalement isotropes est homéomorphe à la sphère, donc sa signature est nulle. Mais, pour une orientation donnée, la signature de M s'écrit

$$\tau(M) = \frac{1}{4\pi^2} \int_M (\| W^+ \|^2 - \| W^- \|^2) v_g.$$

Nous avons donc prouvé le résultat suivant :

Théorème 4. — *Soit* M *une variété riemannienne compacte orientée simplement connexe de dimension* 4 *à opérateur de courbure complexe positif sur les* 2-*plans totalement isotropes.*

Si l'un des demi-tenseurs de Weyl de M *est harmonique, alors* M *est globalement conforme à la sphère standard.*

Un théorème de N. Kuiper (*cf.* [Ku]) affirme en effet qu'une variété riemannienne simplement connexe et conformément plate est globalement conforme à la sphère standard. Ce résultat et le calcul effectué ci-dessus permettent de conclure.

Considérons maintenant le cas d'une variété d'Einstein M. Chacun des demi-tenseurs de Weyl est alors harmonique comme 2-forme à valeurs dans les 2-formes. Si M est, de plus, à opérateur de courbure complexe positif sur les plans totalement isotropes, les deux inéquations

$$36\,\mathrm{Det}\,W^+ - u\,\|W^+\|^2 \leqq 0,$$
$$36\,\mathrm{Det}\,W^- - u\,\|W^-\|^2 \leqq 0$$

sont vérifiées et on a le

COROLLAIRE. — *Une variété d'Einstein compacte orientée de dimension* 4 *à opérateur de courbure complexe positif sur les plans totalement isotropes est à courbure constante.*

3) RÉSULTATS EN COURBURE NÉGATIVE. — Comme nous le disions dans l'introduction, la connaissance du laplacien des valeurs propres permet de travailler avec des fonctions plus générales que la norme. Par exemple, si $\Phi = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \lambda_i^2$ pour $\alpha_i \in \mathbf{R}$, on a

$$\Delta\Phi = 4 \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \lambda_i^3 + 8(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\lambda_1\lambda_2\lambda_3 - u\Phi$$
$$- 4 \sum_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)(\alpha_i\lambda_i - \alpha_j\lambda_j)\,\|a_i^j\|^2 - 2\sum_{i=1}^{3} \alpha_i\,\|d\lambda_i\|^2.$$

On peut distinguer trois termes dans l'expression du laplacien de Φ. Le premier, que nous noterons Ψ, s'écrit

$$\Psi = 4 \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \lambda_i^3 + 8(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Le second est $u\Phi$. Ces deux premiers termes ne dépendent que des valeurs propres de $\mathscr{E}$ et de la courbure scalaire.

LEMME. — *Si* $\alpha_1 = \alpha_2 = -(8/7)$ *et si* $\alpha_3 = 1$, *alors* Ψ *et* Φ *sont positives dès que* $-8(1-(\sqrt{3}/2))\lambda_1 \leqq \lambda_3 \leqq -2\lambda_1$.

■ Pour établir ce lemme, il est commode d'utiliser l'homogénéité et de poser $\lambda_1 = -1$. La valeur propre λ_3 est alors confinée dans l'intervalle $[1/2, 2]$ et on doit contrôler que les expressions $\lambda_3^2 + 16\lambda_3 - 16$ et $\lambda_3(5\lambda_3^2 - 14\lambda_3 + 14)$ sont non négatives dans cet intervalle. La seconde expression est positive dès que $\lambda_3 > 0$ et la première est non négative dans l'intervalle $[8(1-(\sqrt{3}/2)), 8(1+(\sqrt{3}/2))]$. ■

Le choix effectué pour les paramètres α_1, α_2 et α_3 se justifie de la façon suivante: la condition $\alpha_1=\alpha_2$ assure que Φ est une fonction symétrique, donc différentiable, de λ_1 et λ_2.

Le regroupement des deux premières valeurs propres plutôt que celui des deux dernières est dicté par le signe de la courbure scalaire. Lorsque la courbure scalaire est négative, le modèle de variété kählérienne à courbure sectionnelle holomorphe constante est le dual $(\mathbf{CP}^m)^*$ du projectif complexe $\mathbf{CP}^m$ et, en dimension 4, les valeurs propres du demi-tenseur de Weyl positif de $(\mathbf{CP}^2)^*$ vérifient $\lambda_1=(1/6)\,u=-2\lambda_2=-2\lambda_3$.

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, pincer la courbure sectionnelle holomorphe (il vaudrait probablement mieux parler du contrôle de la dispersion de la courbure sectionnelle holomorphe) revient à contrôler la dispersion des valeurs propres du demi-tenseur de Weyl négatif, en les empêchant de trop s'écarter de celles du modèle. Le choix $\alpha_3=1$ découle alors de l'homogénéité de la fonction Φ.

Le terme restant est une forme quadratique, notée Q_α pour les choix effectués ci-dessous, qui dépend en plus des dérivées des vecteurs propres et de celles des valeurs propres. Ce dernier terme est plus difficile à contrôler. Pour effectuer la suite des calculs (et éviter une débauche d'indices), posons

$$\begin{array}{llllll}\lambda_1=\lambda, & \lambda_2=\nu, & \lambda_3=\mu, & \omega_1=\omega, & \omega_2=\theta, & \omega_3=\eta,\\ a_1^2=-b, & a_3^1=-c, & a_2^3=-a, & \alpha_1=\alpha, & \alpha_2=\alpha, & \alpha_3=1.\end{array}$$

Avec la convention $\lambda=-1$ et en utilisant $\lambda+\mu+\nu=0$, la fonction Φ_α s'écrit

$$\Phi_\alpha=\alpha(\mu^2-2\mu+2)+\mu^2,$$

et on cherche pour quelles valeurs du paramètre α la fonction Φ_α est positive. La fonction $\Pi(\mu)=-\mu^2/(\mu^2-2\mu+2)$ décroît entre $-1/5$ et -2 lorsque μ parcourt l'intervalle $[1/2, 2]$. Ceci montre que, si l'on pince μ entre μ_0 et 2, α doit satisfaire $\alpha\geqq\Pi(\mu_0)$ pour que Φ soit non négative.

Compte tenu de l'expression de la différentielle d'une valeur propre, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}Q_\alpha=&-4\alpha(\lambda-\nu)^2\|b\|^2+((3\alpha+1)\lambda-(3+\alpha)\mu)(\mu-\lambda)\|c\|^2\\ &+((3\alpha+1)\nu-(3+\alpha)\mu)(\mu-\nu)\|a\|^2-2\alpha(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)\langle\theta(c),\eta(b)\rangle\\ &-2(\mu-\lambda)(\mu-\nu)\langle\theta(c),\omega(a)\rangle-2\alpha\nu-\lambda)(\nu-\mu)\langle\eta(b),\omega(a)\rangle.\end{aligned}$$

Posons $c_1=(\mu-\lambda)c$, $b_1=\alpha(\lambda-\nu)b$, $a_1=(\nu-\mu)a$. La matrice de la forme quadratique Q_α s'écrit

$$\begin{pmatrix} t_1 & 1 & 1\\ 1 & t_2 & 1\\ 1 & 1 & t_3\end{pmatrix}$$

où $t_1=-1/\alpha$, $t_2=((3\alpha+1)\lambda-(3+\alpha)\mu)/(\mu-\lambda)$ et $t_3=((3\alpha+1)\nu-(3+\alpha)\mu)/(\mu-\nu)$. Supposons, par commodité, $\mu=2$ et $\lambda=-1$. Alors les valeurs négatives de α assurant la non-négativité de Q_α sont majorées par -2. On doit donc avoir $\Pi(\mu_0) \leqq -2$, ce qui n'est possible que si $\mu \geqq 2$. Pour obtenir des résultats, il faut donc raffiner la méthode. Nous nous proposons de montrer que, si τ est un nombre réel positif assez petit, Φ^τ est une fonction surharmonique dans le complémentaire de l'ensemble N des zéros de $\mathscr{E}$. On utilise pour cela la formule suivante

$$\Delta(\Phi^\tau) = \tau \Phi^{\tau-2}(\Phi\Delta\Phi + (1-\tau)\|\nabla\Phi\|^2).$$

Le terme dont nous voulons contrôler le signe s'écrit $\hat{Q}_\alpha = \Phi Q_\alpha + (1-\tau)\|\nabla\Phi\|^2$. Désignons respectivement par p, q, r les quantités $p = (\nu-\mu)(\mu-\alpha\nu)$, $q = -\alpha(\nu-\lambda)^2$, $r = (\mu-\lambda)(\alpha\lambda-\mu)$.

Pour le gradient de Φ nous obtenons l'expression $\nabla\Phi = -2(p\,\omega(a) + q\,\eta(b) + r\,\theta(c))$. La forme quadratique $\hat{Q}_\alpha$ a donc pour expression

$$\begin{aligned}\hat{Q}_\alpha = {} & (4p\Phi + 4(1-\tau)p^2 - 2(1+\alpha)(\mu-\nu)^2\Phi)\|a\|^2 \\ & + (4q\Phi + 4(1-\tau)q^2 - 4\alpha(\lambda-\nu)^2\Phi)\|b\|^2 \\ & + (4r\Phi + 4(1-\tau)r^2 - 2(1+\alpha)(\lambda-\mu)^2\Phi)\|c\|^2 \\ & + (8(1-\tau)pq - 4\alpha(\nu-\lambda)(\nu-\mu)\Phi)\langle \omega(a), \eta(b)\rangle \\ & + (8(1-\tau)pr - 4(\mu-\lambda)(\mu-\nu)\Phi)\langle \omega(a), \theta(c)\rangle \\ & + (8(1-\tau)qr - 4\alpha(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)\Phi)\langle \theta(c), \eta(b)\rangle\end{aligned}$$

L'étude numérique de $\hat{Q}_\alpha$ montre qu'elle est non négative lorsque μ parcourt l'intervalle $[-8(1-(\sqrt{3}/2))\lambda, -2\lambda]$.

Aux points x de M pour lesquels $\lambda(x) = \nu(x) \neq 0$, la fonction Φ est différentiable puisqu'elle dépend symétriquement de λ et de ν. Comme le pincement sur les valeurs propres exclut les points tels que $\mu = \nu$, et que la codimension de l'espace des points où $\lambda = \mu = \nu = 0$ est supérieure ou égale à deux, la fonction Φ est nécessairement nulle par le principe du maximum et le principe de prolongement des fonctions surharmoniques aux ensembles polaires (*cf.* [He]).

THÉORÈME D'ANNULATION 5. — *Soit* M *une variété riemannienne compacte orientée de dimension* 4 *à courbure scalaire non positive. Soit* V *l'un des demi-tenseurs de Weyl dont les valeurs propres sont* $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3$. *Si le champ* V *est fermé et si* $-8(1-(\sqrt{3}/2))\lambda_1 \leqq \lambda_3 \leqq -2\lambda_1$, *alors il est identiquement nul.*

Comme nous le disions dans l'introduction, ce travail trouve sa motivation dans la recherche d'un analogue du théorème de Frankel (*cf.* [S-Ya] et [Mi]) qui affirme qu'une variété kählérienne compacte à courbure bisectionnelle positive est à courbure sectionnelle holomorphe constante. Dans [M-S], G. D. Mostow et Y. T. Siu construisent un exemple de surface kählérienne à courbure sectionnelle négative qui n'est pas à courbure sectionnelle holomorphe constante. On est ainsi amené (*cf.* [S-Y]) à considérer une classe plus restrictive de métriques kählériennes, celle des métriques de Kähler-Einstein. Dans ce cadre, Y. T. Siu et P. Yang (*cf.* [S-Y]) obtiennent le résultat suivant :

THÉORÈME 6. — *Soit* M *une surface kählérienne compacte d'Einstein à courbure sectionnelle négative. Si les valeurs propres* $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3$ *du demi-tenseur de Weyl* W^- *de* M *vérifient* $-1{,}61\,\lambda_1 \leqq \lambda_3 \leqq -2\,\lambda_1$, *alors* M *est à courbure sectionnelle holomorphe constante.*

Comme le tenseur de courbure d'une variété d'Einstein, vu comme 2-forme à valeurs dans les 2-formes, est harmonique, notre théorème d'annulation 5 permet d'énoncer :

COROLLAIRE 1. — *Soit* M *une surface d'Einstein-Kähler compacte à courbure scalaire non positive. Si les valeurs propres* $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3$ *de son demi-tenseur de Weyl négatif vérifient* $-8(1-(\sqrt{3}/2))\,\lambda_1 \leqq \lambda_3 \leqq -2\,\lambda_1$, *alors* M *est à courbure sectionnelle holomorphe constante donc revêtue par la boucle de* $\mathbf{C}^2$.

Remarques. — Dans ce corollaire, la condition de pincement sur les valeurs propres peut s'interpréter comme une condition de pincement sur la courbure sectionnelle holomorphe. Désignons respectivement par K_{max}, K_{min}, K_{moy} le maximum, le minimum, la moyenne de la courbure sectionnelle holomorphe (qui n'est autre à un facteur près que la courbure scalaire) en un point de M. Alors la condition de pincement s'écrit

$$(K_{moy}-K_{min}) \leqq \frac{1}{11}\left(3+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)(K_{max}-K_{min}),$$

(la constante ci-dessus est voisine de 0,48).

On remarquera que la condition

$$\frac{1}{3}(K_{max}-K_{min}) \leqq (K_{moy}-K_{min}) \leqq \frac{2}{3}(K_{max}-K_{min})$$

est toujours satisfaite.

On peut donner du théorème 5 un autre corollaire dans le cas de métriques à courbure de Ricci nulle.

COROLLAIRE 2. — *Pour toute métrique de Calabi-Yau* (i.e. *à courbure de Ricci nulle*) *sur une surface* K3, *il existe au moins un point où la courbure sectionnelle holomorphe vérifie*

$$-\frac{1}{2}K_{min} \leqq K_{max} < -8\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)K_{min}.$$

(c) Un résultat d'isolation des métriques de Kähler-Einstein en dimension 4

Soit (M, g_0) une variété de Kähler-Einstein compacte de dimension 4. Nous nous proposons de montrer que si g est une métrique d'Einstein sur M suffisamment proche de g_0 dans la topologie C^2, alors g est kählérienne, dès que certaines conditions de courbure sont satisfaites.

THÉORÈME 7. — *Toute métrique d'Einstein sur une variété de dimension* 4 *à courbure scalaire positive, suffisamment proche en topologie* C^2 *d'une métrique de Kähler-Einstein, est elle-même kählérienne.*

■ Le demi-tenseur de Weyl positif W_0^+ de g_0 est tel que ses valeurs propres sont constantes et vérifient $-2\lambda_{01}=-2\lambda_{02}=\lambda_{03}=(1/6)u$ si la courbure scalaire est positive et $-2\lambda_{03}=-2\lambda_{02}=\lambda_{01}$ si la courbure scalaire est négative.

Le théorème de pincement, établi pour les fibrés de Dirac, fournit donc le résultat si l'opérateur de courbure de M est soit non négatif, soit non positif.

Désignons par λ_i les valeurs propres du demi-tenseur de Weyl positif W^+ de g. L'hypothèse effectuée sur g nous suggère d'écrire $\lambda_i=\lambda_{0i}+\varepsilon_i$. Pour traiter le cas où la courbure scalaire est positive, considérons de nouveau la fonction $\Phi_\alpha=\alpha(\lambda_1^2+\lambda_2^2)+\lambda_3^2$. Comme ci-dessus, nous écrivons son laplacien

$$\Delta\Phi_\alpha=\Psi-u\Phi_\alpha+Q_\alpha,$$

où si nous notons $\lambda_1=\lambda$, $\lambda_2=\nu$, $\lambda_3=\mu$,

$$\Psi-u\Phi_\alpha=4(\alpha\lambda^3+\alpha\nu^3+\mu^3)+8(2\alpha+1)\lambda\mu\nu-u(\alpha(\lambda^2+\nu^2)+\mu^2).$$

La partie cubique en les valeurs propres de l'expression précédente s'écrit

$$\begin{aligned}\Psi&=4(1-\alpha)(-2\lambda_0+\varepsilon_3)^3-(28\alpha+8)(\lambda_0+\varepsilon_1)(-2\lambda_0+\varepsilon_3)(\varepsilon_1+\varepsilon_3-\lambda_0)\\&=(-2\lambda_0+\varepsilon_3)(4(1-\alpha)(4\lambda_0^2-4\lambda_0\varepsilon_3+\varepsilon_3^2)\\&\quad-(28\alpha+8)(-\lambda_0^2+\lambda_0\varepsilon_3+\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_3)))\\&=(-2\lambda_0+\varepsilon_3)(4(3\alpha+6)\lambda_0^2-4(3\alpha+6)\lambda_0\varepsilon_3-4(7\alpha+2)\varepsilon_1\varepsilon_3)\\&\quad-(-2\lambda_0+\varepsilon_3)(4(1-\alpha)\varepsilon_3^2-4(7\alpha+2)\varepsilon_1^2)\\&=(-2\lambda_0+\varepsilon_3)((3\alpha+6)(2\lambda_0-\varepsilon_3)^2-(7\alpha+2)(2\varepsilon_1+\varepsilon_3)^2).\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha&=\alpha(\lambda^2+\nu^2)+\mu^2=2\alpha\lambda^2+2\alpha\lambda\mu+(\alpha+1)\mu^2\\&=2\alpha(\lambda_0+\varepsilon_1)^2+2\alpha(\lambda_0+\varepsilon_1)(-2\lambda_0+\varepsilon_3)+(\alpha+1)(-2\lambda_0+\varepsilon_3)^2\\&=\frac{1}{2}((\alpha+2)(\varepsilon_3-2\lambda_0)^2+\alpha(\varepsilon_3+2\varepsilon_1)^2).\end{aligned}$$

On remarque que, pour g_0, on a $u=-12\lambda_0$. Lorsque $\varepsilon_1=\varepsilon_3=0$, on a bien pour la partie algébrique $-24(\alpha+2)\lambda_0^3+24(\alpha+2)\lambda_0^3=0$.

Si on choisit $\alpha=-2$, la partie algébrique s'écrit

$$12(\varepsilon_3+2\varepsilon_1)^2(-2\lambda_0+\varepsilon_3)+u(\varepsilon_3+2\varepsilon_1)^2.$$

Cette quantité est non négative si ε_3 est assez petit (car on a $u>0$).

Si l'on considère maintenant le cas où la courbure scalaire est négative, il faut choisir la fonction $\hat\Phi_\alpha=\lambda^2+\alpha(\nu^2+\mu^2)$. La partie algébrique du laplacien de $\hat\Phi_\alpha$ se déduit des calculs ci-dessus en échangeant le rôle de λ et μ et, pour $\alpha=-2$, on obtient l'expression $12(\varepsilon_1+2\varepsilon_3)^2(-2\mu_0+\varepsilon_1+(u/12))$ qui est non positive puisque u est négatif et μ_0 positif.

Étudions maintenant la forme quadratique Q_{-2}. Nous obtenons, en tout point de M où $W^+\neq 0$,

$$\begin{aligned}Q_{-2}=2\{&8(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2\|b\|^2+(-3\lambda_0-5\varepsilon_1-\varepsilon_3)(-3\lambda_0+\varepsilon_3-\varepsilon_1)\|c\|^2\\&+(-3\lambda_0-5\varepsilon_2-\varepsilon_3)(-3\lambda_0+\varepsilon_3-\varepsilon_2)\|a\|^2\\&+4(3\lambda_0+\varepsilon_1-\varepsilon_3)(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\langle\theta(c),\eta(b)\rangle\\&+4(3\lambda_0+\varepsilon_2-\varepsilon_3)(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\langle\eta(b),\omega(a)\rangle\\&-2(-3\lambda_0+\varepsilon_3-\varepsilon_1)(-3\lambda_0+\varepsilon_3-\varepsilon_2)\langle\theta(c),\omega(a)\rangle\}.\end{aligned}$$

On peut ainsi isoler dans Q_{-2} une partie principale qui s'écrit

$$18\lambda_0^2\|\theta(c)-\omega(a)\|^2.$$

Si $\theta(c)=\omega(a)$, nous obtenons en tenant compte de $\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=0$,

$$Q_{-2}=2(2\varepsilon_1+\varepsilon_3)^2(8\|b\|^2+4\langle\eta(b),\theta(c)\rangle+3\|c\|^2).$$

La forme quadratique Q_{-2} est donc non négative.

Remarquons que si $\hat{Q}_{-2}$ est la forme quadratique qui apparaît dans le laplacien de $\hat{\Phi}_{-2}$, alors on a

$$\begin{aligned}\hat{Q}_{-2}=2\{&8(\varepsilon_3-\varepsilon_2)^2\|a\|^2+(3\mu_0+5\varepsilon_3+\varepsilon_1)(3\mu_0+\varepsilon_3-\varepsilon_1)\|c\|^2\\&+(3\mu_0+5\varepsilon_2+\varepsilon_1)(3\mu_0+\varepsilon_2-\varepsilon_1)\|b\|^2\\&-2(3\mu_0+\varepsilon_3-\varepsilon_1)(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\langle\theta(c),\eta(b)\rangle\\&+4(3\mu_0+\varepsilon_2-\varepsilon_1)(\varepsilon_2-\varepsilon_3)\langle\eta(b),\omega(a)\rangle\\&+4(3\mu_0+\varepsilon_3-\varepsilon_1)(\varepsilon_3-\varepsilon_2)\langle\theta(c),\omega(a)\rangle\},\end{aligned}$$

expression dans laquelle on peut isoler une partie principale égale à $18\mu_0^2\|\theta(c)-\eta(b)\|^2$ et qui se réduit à

$$\hat{Q}_{-2}=2(2\varepsilon_3+\varepsilon_1)^2(8\|a\|^2+4\langle\eta(b),\omega(a)\rangle+3\|c\|^2),$$

si $\theta(c)=\eta(b)$.

La forme quadratique $\hat{Q}_{-2}$ est donc elle aussi non négative.

On en déduit que Φ_{-2}, qui est égale à $-(\varepsilon_3+2\varepsilon_1)^2$, est surharmonique, donc constante. Il en découle que $\Psi-u\Phi=0$, c'est-à-dire

$$(\varepsilon_3+2\varepsilon_1)^2[12(\varepsilon_3-2\lambda_0)+u]=0.$$

Donc soit ε_3 est constant et égal à $(-1/12)\,u+2\lambda_0$ puisque la métrique déformée est d'Einstein, soit $\varepsilon_3=-2\varepsilon_1$ et dans les deux cas, chacun des ε est constant. Il en est donc de même de λ, μ *et* ν. La 2-forme η associée à la valeur propre μ est donc parallèle et comme η est obtenue par perturbation d'une 2-forme de rang maximal, elle conserve cette propriété et fournit la forme de Kähler cherchée. ■

Par contre rien n'a été obtenu lorsque la courbure scalaire est négative. Le théorème général de pincement, appliqué au demi-tenseur de Weyl positif en dimension 4 montre cependant que la métrique déformée reste kählérienne si l'opérateur de courbure est non positif.

Par des méthodes complètement différentes, N. Koiso obtient un résultat analogue en toutes dimensions à condition de supposer en plus que la variété complexe n'a pas de champs de vecteurs holomorphes et que la métrique n'admet pas de déformations géométriques.

Remarque. — Avec la condition $\lambda_0 = -2\mu_0$ satisfaite par une métrique d'Einstein-Kähler à courbure scalaire négative, la fonction $\hat{\Phi}_{-2}$ a pour expression

$$\hat{\Phi}_{-2} = +(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_3)^2.$$

Si τ est un nombre positif, on a

$$\Delta((-\Phi)^\tau) = \tau(-\Phi)^{\tau-2}(\Phi\Delta\Phi + (1-\tau)\|\nabla\Phi\|^2).$$

La situation est donc la suivante: la fonction $\hat{\Phi}_{-2}$ est négative donc son produit avec la partie algébrique de son laplacien est positive. De même $\hat{\Phi}_{-2}\hat{Q}_{-2}$ est non positive et on peut tenter de contrôler cette non-positivité par le terme en gradient de $\hat{\Phi}_{-2}$.

Calculons la norme du gradient de $\hat{\Phi}_{-2}$.

$$\begin{aligned}\nabla\Phi_{-2} &= -4(\mu\, d\mu + \nu\, d\nu) + 2\lambda\, d\lambda \\ &= -2(2\mu + \lambda)(2\, d\mu + d\lambda). \\ &= -2(2\varepsilon_3 + \varepsilon_1)(2\, d\mu + d\lambda)\end{aligned}$$

D'où en utilisant l'expression du gradient des valeurs propres

$$\begin{aligned} d\lambda &= (\lambda - \mu)\,\theta(c) + (\lambda - \nu)\,\eta(b) \\ d\mu &= (\mu - \lambda)\,\theta(c) + (\mu - \nu)\,\omega(a),\end{aligned}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}\|\nabla\hat{\Phi}_{-2}\|^2 &= 4(2\varepsilon_3 + \varepsilon_1)^2\,\|2(\mu - \nu)\,\omega(a) + (\mu - \lambda)\,\theta(c) + (\lambda - \nu)\,\eta(b)\|^2 \\ &= 4(2\varepsilon_3 + \varepsilon_1)^2\,\|2(2\varepsilon_3 + \varepsilon_1)\,\omega(a) + (3\mu_0 + \varepsilon_3 - \varepsilon_1)\,\theta(c) + (-3\mu_0 + 2\varepsilon_1 + \varepsilon_3)\,\eta(b)\|^2,\end{aligned}$$

Puisque $\hat{\Phi}_{-2} = -(2\varepsilon_3 + \varepsilon_1)^2$, le facteur de $-\hat{\Phi}_{-2}$ dans l'expression ci-dessus contient une partie principale qui s'écrit $36\mu_0^2\,\|\theta(c) - \eta(b)\|^2$ et vaut donc deux fois la partie principale de $\hat{Q}_{-2}$. Cette majoration persiste, si τ est assez petit, lorsque $\|\nabla\Phi\|^2$ est remplacé par $(1-\tau)\|\nabla\Phi\|^2$. Examinons ce que devient

$$\hat{\Phi}_{-2}\hat{Q}_{-2} + (1-\tau)\|\nabla\hat{\Phi}_{-2}\|^2,$$

lorsque $\eta(b)=\theta(c)$. On obtient la forme quadratique

$$2(2\varepsilon_3+\varepsilon_1)^4(-8\tau\|a\|^2+4(1-2\tau)\langle\eta(b),\omega(a)\rangle-(1+2\tau)\|b\|^2).$$

Sauf relation particulière entre $\omega(a)$ et $\eta(b)$, on ne peut pas conclure.

(d) Le fibré des 1-formes et la courbure de Ricci

Dans le cas des 1-formes, la différentielle d'une valeur propre s'écrit

$$\begin{aligned} d\lambda_i &= \sum_{k,\alpha}(\lambda_i-\lambda_k)\langle\omega_i, e_\alpha . a_i^k . \omega_k\rangle e_\alpha \\ &= \sum_k(\lambda_k-\lambda_i)(\omega_k(a_i^k)\omega_i-\omega_i(a_i^k)\omega_k). \end{aligned}$$

On a ici comme convention pour une 2-forme π et un vecteur x

$$\pi(x)_l=\sum_k \pi_{kl}x_k.$$

Avec cette convention,

$$(x\wedge y)(z)=\langle x,z\rangle y-\langle y,z\rangle x.$$

Pour simplifier les expressions, on écrira aussi $\omega(x)$ pour le produit scalaire $\langle\omega,x\rangle$.

Reprenons l'expression du laplacien d'une valeur propre.

$$\Delta\lambda_i=\sum_k(\lambda_k-\lambda_i)\left\{\sum_{\alpha<\beta}\sum_{\mu<\nu}\frac{1}{4}\langle R_{e_\alpha, e_\beta}(e_\mu(,e_\nu\rangle\langle ad_{e_\mu . e_\nu}\omega_i,\omega_k\rangle\langle ad_{e_\alpha . e_\beta}\omega_i,\omega_k\rangle+2\|a_i^k\|^2\right\}.$$

Comme

$$\begin{aligned} \langle ad_{e_\mu . e_\nu} e_i, e_k\rangle &= \langle e_\mu . e_\nu . e_i - e_i . e_\mu . e_\nu, e_k\rangle \\ &= 2(\delta_{i\mu}\delta_{\nu k}-\delta_{i\nu}\delta_{\mu k}), \end{aligned}$$

l'expression obtenue est alors

$$\Delta\lambda_i=\sum_{i,j}(\lambda_j-\lambda_i)\langle R_{\omega_i,\omega_j}\omega_i,\omega_j\rangle+2\|a_i^j\|^2).$$

Puisque $\Delta\lambda_i^2=2\lambda_i\Delta\lambda_i-2\|d\lambda_i\|^2$, l'opposé du laplacien de la norme de $\mathscr{E}$ a pour expression

$$-\Delta\|\mathscr{E}\|^2=\sum_{i,j}(\lambda_i-\lambda_j)^2\langle R_{\omega_i,\omega_j}\omega_i,\omega_j\rangle+2\|\nabla\mathscr{E}\|^2.$$

Cette dernière formule, qui est classique (*cf.* [Bn2], [B--E]), montre que sur une variété riemannienne compacte, il n'y a pas de 1-forme à valeurs dans les 1-formes non triviale qui soit harmonique dès que la courbure sectionnelle est positive.

Comme première application, considérons le cas où $\mathscr{E}$ est la partie à trace nulle z du tenseur de Ricci r d'une variété riemannienne de dimension 3.

Le tenseur de courbure s'écrit alors

$$R = g \oslash z + \frac{1}{12} u g \oslash g,$$

où u est la courbure scalaire, g la métrique et $\oslash$ le produit dans l'algèbre de courbure et nous avons

$$\langle R_{\omega_i, \omega_j} \omega_i, \omega_j \rangle = 2(\lambda_i + \lambda_j) + \frac{1}{6} u.$$

Par suite

$$\Delta\lambda_i = 2\lambda_i^2 + 4\lambda_j \lambda_k - \frac{1}{2} u \lambda_i + 2(\lambda_j - \lambda_i) \| a_i^j \|^2 + 2(\lambda_k - \lambda_i) \| a_i^k \|^2.$$

On obtient ainsi le résultat suivant

THÉORÈME 8. — *Soit* M *une variété riemannienne compacte de dimension* 3 *à courbure scalaire non positive. Si la partie à trace nulle z de son tenseur de Ricci est harmonique, et si les valeurs propres* $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3$ *de z vérifient* $-8(1-(\sqrt{3}/2))\lambda_1 \leqq \lambda_3 \leqq -2\lambda_1$, *alors* M *est à courbure constante.*

III. APPLICATION AUX FIBRÉS DE SPINEURS

Comme nous le disions dans l'introduction, les formules donnant $d = \sum_\mu e_\mu \wedge \nabla_{e_\mu}$ et $\delta = \sum_\mu i_{e_\mu} \nabla_{e_\mu}$ qui, pour une base locale orthonormée de champs de vecteurs, donnent respectivement la différentielle extérieure et la codifférentielle des formes à valeurs scalaires, montrent qu'une forme différentielle extérieure est harmonique si et seulement si elle est dans le noyau de l'opérateur de Dirac $\mathscr{D} = d + \delta$ du fibré de Clifford de M.

Si π est une k-forme, π opère dans les spineurs de M, supposée spinorielle, comme opérateur symétrique si $k=2$ ou 3 modulo 4 et comme opérateur antisymétrique si $k=0$ ou 1 modulo 4.

Pour un endomorphisme symétrique, en utilisant l'expression de la courbure du fibré des spineurs

$$R^{\Sigma}_{e_\alpha, e_\beta} \sigma = \frac{1}{2} \sum_{i<j} \langle R_{e_\alpha, e_\beta}(e_i), e_j \rangle e_i . e_j . \sigma,$$

on obtient

$$\Delta\lambda_i = \sum_k (\lambda_k - \lambda_i) \left\{ \sum_{\alpha<\beta} \sum_{\mu<\nu} \frac{1}{2} \langle R_{e_\alpha, e_\beta}(e_\mu), e_\nu \rangle \langle e_\mu . e_\nu . \omega_i, \omega_k \rangle \langle e_\alpha . e_\beta . \omega_i, \omega_k \rangle + 2 \| a_i^k \|^2 \right\}.$$

Dans cette formule, puisque les $e_\mu . e_\nu$ constituent une base orthonormée de 2-formes, on peut les remplacer par n'importe quelle base orthonormée de 2-formes. Le choix d'une base orthonormée de vecteurs propres η_l, $l=1, \ldots, (1/2)n(n-1)$, associée aux valeurs propres ρ_l du tenseur de courbure R de M permet d'écrire

$$\Delta\lambda_i = \sum_k (\lambda_k - \lambda_i) \left\{ \sum_j \frac{1}{2} \rho_l (\langle \eta_l . \omega_i, \omega_k \rangle)^2 + 2 \| a_i^k \|^2 \right\},$$

ce qui, avec les notations du théorème 2, s'écrit encore

$$\Delta\lambda_i = \sum_k (\lambda_k - \lambda_i) \{ \mathscr{T}_{ik} + 2 \| a_i^k \|^2 \}.$$

Par suite, si la variété M est à opérateur de courbure de signe constant, on obtient le résultat suivant.

THÉORÈME 9. — *Soit* (M, g) *une variété spinorielle compacte à opérateur de courbure défini positif ou défini négatif, et* π *une k-forme harmonique opérant dans les spineurs. Si* λ_i, $i=1, \ldots, p$, *sont les valeurs propres de* π *ordonnées par* $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots \leqq \lambda_p$, *il existe un pincement des* λ_i, $i=1, \ldots, p-1$, *autour de* $-(1/(p-1))\lambda_p$ *qui entraîne la nullité de* π.

Si l'opérateur est seulement de signe constant, il existe un pincement des valeurs propres des formes harmoniques opérant sur les spineurs qui entraîne que ces formes sont parallèles.

Remarque. — Ce théorème ne sera intéressant que si, pour les k-formes différentielles opérant dans les spineurs, le regroupement des valeurs propres décrit peut se produire.

Lorsque la dimension de M est paire on peut donner la description suivante des spineurs. Soit (M, g) une variété spinorielle compacte de dimension $n=2m$. On désigne respectivement par $Cl(M)$ et $\mathbf{Cl}(M)$ le fibré en algèbres de Clifford de M et son complexifié, et par $Cl(n)$ et $\mathbf{Cl}(n)$ les fibres-types correspondantes. On peut réaliser la fibre Σ de l'espace des spineurs complexes de M de la façon suivante : si (V, g) est le modèle d'espace tangent en x à M, on pose $V \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = W \oplus \bar{W}$. Les sous-espaces W et $\bar{W}$ sont totalement isotropes pour l'extension bilinéaire complexe de g et l'espace vectoriel complexe sous-jacent à l'algèbre extérieure ΛW de W s'identifie à Σ. L'identification entre $\mathrm{End}(\Sigma)$ et $\mathbf{Cl}(n)$ est obtenue en choisissant pour φ dans ΛW et w dans W,

$$\begin{cases} w . \varphi = w \wedge \varphi, \\ \bar{w} . \varphi = -i_w \varphi, \end{cases}$$

où i_w est le produit intérieur adjoint dans ΛW du produit extérieur pour la métrique hermitienne naturelle. La correspondance entre formes décomposées et éléments de l'algèbre de Clifford est donnée par

$$f_1 \wedge \ldots \wedge f_p = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \varepsilon(\sigma) f_{\sigma(1)} . \ldots . f_{\sigma(p)},$$

où S_p est le groupe symétrique d'ordre p. Soit (e_k), $k=1, \ldots, n$, une base orthonormée de V. On pose $v_j = (1/\sqrt{2})(e_j + i e_{j+1})$, $j=1, 3, 5, \ldots, 2m-1$. Si π est une 2-forme réelle, on désigne par $\omega_{i\bar{i}}$ les composantes de sa complexifiée dans une base (v_i) orthonormée de W où elle s'écrit $\omega=\sum_i \omega_{i\bar{i}} e_i \wedge e_{\bar{i}}$. L'action de ω sur un spineur décomposé $v_{j_1} \wedge v_{j_2} \ldots \wedge v_{j_p}$ se lit en regardant celle de $v_i \wedge \bar{v}_i$. Nous avons

$$v_i \wedge \bar{v}_i . v_{j_1} \wedge v_{j_2} \wedge \ldots \wedge v_{j_p} = \frac{1}{2}(v_i . \bar{v}_i - \bar{v}_i . v_i) . v_{i_1} \wedge v_{i_2} \wedge \ldots \wedge v_{i_p}$$

Si pour un indice i_k on a $i_k=i$, alors on obtient

$$v_i \wedge \bar{v}_i . v_{j_1} \wedge v_{j_2} \wedge \ldots \wedge v_{j_p} = \frac{1}{2}(-1)^k v_{j_1} \wedge v_{j_2} \wedge \ldots \wedge v_{j_p}.$$

Sinon, on obtient $v_i \wedge \bar{v}_i . v_{j_1} \wedge v_{j_2} \wedge \ldots \wedge v_{j_p} = (1/2) v_{j_1} \wedge v_{j_2} \wedge \ldots \wedge v_{j_p}$. Les valeurs propres de ω opérant sur les spineurs ont donc pour expression

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i \omega_{i\bar{i}},$$

où $\varepsilon_i = \pm 1$.

Examinons le cas de la dimension 6. L'espace des spineurs est de dimension 8. Puisque les formes opérant dans les spineurs sont des endomorphismes à trace nulle, elles ont génériquement 4 valeurs propres distinctes, que l'on peut écrire pour trois réels a, b, c, $\lambda_1=a+b+c$, $\lambda_2=a-b-c$, $\lambda_3=-a-b+c$, $\lambda_4=-a+b-c$. Supposons ces valeurs propres écrites dans l'ordre croissant. Pour que le théorème de pincement ait un contenu dans le cas des spineurs, il faut vérifier que la condition de pincement n'est pas vide. Cette condition s'écrit $|\lambda_i+(1/3)\lambda_1|<\varepsilon$ pour $i=1, 2, 3$, soit si $\eta=(3/2)\varepsilon$,

$$\begin{gathered} -\eta<2a-b-c<\eta, \\ -\eta<-a-b+2c<\eta, \\ -\eta<-a+2b-c<\eta. \end{gathered}$$

Pour des nombres a_0, b_0, c_0 assez petits, le système d'inéquations précédent est satisfait. De plus si le triplet (a_0, b_0, c_0) est solution, alors tous les triplets $(a_0+\xi,\ b_0+\xi,\ c_0+\xi)$ sont encore solutions, ce qui nous garantit que la valeur de λ_1 n'est pas contrainte par le système d'inégalités. La condition de pincement peut donc être satisfaite sans imposer à la section d'être nulle pour des raisons algébriques.

BIBLIOGRAPHIE

[B-E] M. Berger et D. G. Ebin, *Some Decompositions of the Space of Symmetric Tensors on a Riemannian Manifold* (*J. Differential Geom.*, vol. 3, 1969, p. 379-395).

[Bn1] J. P. Bourguignon, *Opérateurs différentiels et théorèmes d'annulation*, in *Les équations de Yang-Mills* (*Séminaire E.N.S.*, 1977-1978, *Astérisque*, vol. 71-72, 1980, p. 135-148).

[Bn2] J. P. Bourguignon, *Formules de Weitzenböck en dimension* 4, in *Séminaire A. Besse sur la géométrie riemannienne en dimension* 4, C.E.D.I.C.-Fernand Nathan, Paris, 1981.

[Bn3] J. P. Bourguignon, *Les variétés de dimension* 4 *à signature non nulle dont la courbure est harmonique sont d'Einstein* (*Invent. Math.*, vol. 63, 1981, p. 263-286).

[Bn-L] J. P. BOURGUIGNON et H. B. LAWSON, *Stability and Isolation Phenomena for Yang-Mills Fields* (*Commun. Math. Phys.*, vol. 279, 1981, p. 189-230).

[Br] S. BOCHNER, *Vectors Fields and Ricci Curvature* (*Bull. Am. Math. Soc.*, vol. 52, 1946, p.776-797).

[De] A. DERDZINSKI, *Self Dual Kähler Manifolds and Einstein Manifolds of Dimension Four* (*Compositio Math.*, vol. 49, 1983, p. 405-433).

[G-L] M. GROMOV et H. B. LAWSON, *Positive Scalar Curvature and the Dirac Operator on Complete Riemannian Manifolds* (*Publ. Math. Inst. Hautes Et. Sci.*, vol. 58, 1983, p. 295-408).

[He] M. HERVÉ, *Analytic and Plurisubharmonic Functions* (*Lect. Notes*, n° 198, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971).

[Ko] N. KOISO, *Einstein Metrics and Complex Structures* (*Invent. Math.*, vol. 73, 1983, p. 71-106).

[Ku] N. H. KUIPER, *On Conformally Flat Spaces in the Large* (*Ann. Math.*, vol. 50, 1949, p. 916-924).

[L-M] H. B. LAWSON et M. L. MICHELSOHN, *Spin geometry* (à paraître).

[Mf-Mo] M. MICALLEF et J. D. MOORE, *Minimal 2-Spheres and Topology of Manifolds with Positive Curvature and Totally Isotropic 2-Planes* (*Ann. Math.*, vol. 127, 1988, p. 199-227).

[Mi] S. MORI, *Projective Manifolds with Ample Tangent Bundles* (*Ann. Math.*, vol. 110, 1973, p. 593-606).

[Mw-S] G. MOSTOW et Y. T. SIU, *A Compact Kähler Surface of Negative Curvature Not Covered by the Ball* (*Ann. Math.*, vol. 112, 1980, p. 321-360).

[Na] R. NARASIMHAN, *Analysis on Real and Complex Manifolds*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1968.

[Ne] E. NELSON, *Tensor Analysis*, Mathematical Notes, Princeton Univ. Press, Princeton, 1967.

[Ro1] L. ROBBIANO, *Sur les zéros d'inégalités différentielles elliptiques* (*Communications in Partial Differential Equations*, vol. 12, 1987, p. 903-919).

[Ro2] L. ROBBIANO, *Dimension des zéros d'une solution faible d'un opérateur elliptique* (*Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, t. 67, 1988, p. 339-357).

[Ro-Sr] L. ROBBIANO et J. SALAZAR, *Dimension de Hausdorff et capacité des points singuliers d'une solution d'un opérateur elliptique* (*Publications I.R.M.A.*, Lille, 12, n° 5, 1988, p. 214).

[S-Y] Y. T. SIU et P. YANG, *Compact Kähler-Einstein Surfaces of Non-Positive Bisectional Curvature* (*Inventiones Math.*, vol. 64, 1981, p. 471-487).

[S-Ya] Y. T. SIU et S. T. YAU, *Compact Kähler Manifolds of Positive Bisectional Curvature* (*Inventiones Math.*, vol. 59, 1980, p. 189-204).

[Sr] P. STREDDER, *Natural Differential Operators on Riemannian Manifolds and Representations of the Orthogonal and Special Orthogonal Groups* (*J. Differential Geom.*, vol. 10, 1975, p. 647-660).

(Manuscrit reçu le 10 avril 1990;
révisé le 25 juin 1991).

A. POLOMBO,
Centre de Mathématiques,
École Polytechnique,
U.R.A. D.0169,
et
Faculté des Sciences,
Parc Grandmont,
37200 Tours,
France.