

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

A. ZEGHIB

Laminations et hypersurfaces géodésiques des variétés hyperboliques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 24, n° 2 (1991), p. 171-188

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1991_4_24_2_171_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LAMINATIONS ET HYPERSURFACES GÉODÉSIQUES DES VARIÉTÉS HYPERBOLIQUES

PAR A. ZEGHIB

RÉSUMÉ. — On étudie les laminations et hypersurfaces géodésiques plongées dans les variétés hyperboliques en dimension supérieure à 2. On démontre entre autres que dans le cas compact toute telle hypersurface est également compacte.

1. Introduction

1.1. Les géodésiques fermées et leur généralisation, les laminations géodésiques sur les surfaces hyperboliques ont été des outils fondamentaux dans l'œuvre de Thurston sur la géométrie hyperbolique [2].

On se pose ici la question suivante : que se passe-t-il en dimension supérieure à deux ?

Notre résultat principal, est supposant partout $n \geq 2$:

THÉORÈME A. — *Soit S^n une hypersurface géodésique plongée dans une variété hyperbolique V^{n+1} alors il existe $x \in S$ et C_n une constante qui ne dépend que de n tels que pour tout $r \geq 0$:*

$$\text{Vol}_n(B_S(x, r)) \leq C_n \text{Vol}_{n+1}(B_V(x, r))$$

où B_S et B_V sont des boules dans S et V respectivement.

A l'aide de ceci et d'autres propositions géométriques, on démontre :

THÉORÈME B. — *Si la croissance de la variété hyperbolique V^{n+1} est strictement dominée par celle de H^n , c'est-à-dire :*

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{Vol}_{n+1}(B(x, r))}{e^{(n-1)r}} = 0,$$

alors toute hypersurface géodésique plongée dans V est une partie fermée de V . En particulier, toute lamination géodésique est triviale au sens qu'elle est réunion localement finie de feuilles.

On peut aussi considérer les variétés à courbure négative variable.

THÉORÈME C. — *Dans une variété compacte à courbure négative, toute hypersurface géodésique plongée est compacte et il n'y a qu'un nombre fini de tels objets.*

1.2. IDÉE DE LA PREUVE DU THÉORÈME PRINCIPAL. — On regarde comment une hypersurface géodésique plongée se « rapproche » d'elle-même (ce qui peut être appréhendé par une notion de rayon d'injectivité normal).

L'hypersurface quand elle est semi-propre (ce qu'on suppose dans un premier temps) se laisse bien partager en deux parties, mince et épaisse déterminées à l'aide d'une constante universelle qui rappelle d'ailleurs la constante du Lemme de Margulis (§ 3).

On remarque que toute composante de la partie mince donne automatiquement lieu à une « composante » épaisse qui « la borde ». Ces deux composantes ont leurs volumes « proportionnels » (ce qui n'est pas vrai en dimension 2).

Finalement, la partie épaisse a un volume proportionnel à celui d'un de ses voisinages tubulaires.

1.3. ORGANISATION DU TEXTE. — Le paragraphe 2 contient des préliminaires et quelques conventions qu'on respecte tout au long du texte. Dans le paragraphe 3, on introduit la « structure » géométrique (dans l'espace hyperbolique) à étudier. Ce qui permet de comprendre la structure des parties minces et épaisses évoquées ci-dessus.

Au paragraphe 4, utilisant seulement la croissance exponentielle du volume, on démontre le théorème C. On continue l'étude du volume avec plus de détail au paragraphe 5.

Au paragraphe 6 on démontre une proposition de « propreté » d'hypersurfaces géodésiques, qu'on utilise au paragraphe 7 pour démontrer les théorèmes A et B.

Le paragraphe 8 contient des remarques qui s'imposent naturellement après ces résultats et des améliorations de certains d'entre eux, dont les détails paraîtront en une autre occasion.

1.4. REMERCIEMENTS. — Ce travail, précisément au théorème C, répond à une question de M. Gromov. Je lui exprime mes vifs remerciements. Je remercie E. Ghys pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

Je remercie chaleureusement R. Langevin pour ces diverses aides sans lesquelles ce papier ne serait jamais achevé.

Je remercie le rapporteur pour ses corrections intéressantes et suggestions appréciables.

Mes remerciements vont à R. Khaldi, M. Rehailia, L. Nisse et A. Taleb pour leurs aides ainsi qu'à l'unité de recherche d'Oran en la personne de R. Bebbouchi pour son aide financière.

2. Préliminaires

2.1. On utilise ici le nom d'hypersurface plongée dans la variété V^{n+1} pour indiquer l'image d'une immersion injective (c'est-à-dire sans self-intersection) $S^n \rightarrow V^{n+1}$ (S^n étant une variété de dimension n).

Partout, la dimension de l'hypersurface est au moins égale à 2.

2.2. Une lamination sur une variété ressemble à un feuilletage mais qui n'est défini que sur un fermé de la variété (§ 3, chap. 8). On ne parle ici que de lamination de codimension un.

Une petite courbe transverse à une lamination la coupe en un compact. On peut parler de point isolé pour ce compact, chose qui s'étend sans ambiguïté aux feuilles de lamination. On parle aussi de feuille semi-isolée dans le cas orientable.

Une feuille sera dite propre si elle ne s'accumule pas sur elle-même [2]. On peut parler dans le cas orientable de semi-propre.

2.3. Une lamination est dite géodésique si toutes ses feuilles sont totalement géodésiques. Une hypersurface géodésique plongée engendre par passage à l'adhérence une lamination géodésique (en fait, cette lamination est transversalement lipschitzienne, [2, chap. 8]).

On peut trouver dans [2] et [1, chap. 5, 6 et 8], tous les résultats et faits élémentaires de géométrie hyperbolique utilisés dans ce texte.

THÉOREME. — *Une lamination géodésique d'une variété à courbure négative ne peut être un feuilletage (c'est-à-dire à support égal à toute la variété) que si le groupe fondamental de la variété est élémentaire.*

Rappelons qu'élémentaire signifie que le groupe fixe un ensemble formé d'un ou deux points de la sphère à l'infini. Un tel groupe est facile à concevoir. Sa structure peut être complètement élucidée [2], chap. 5, 8.

L'idée de la preuve est que sur le revêtement universel, les feuilles « s'accumulent » exactement sur un ou deux points (de la sphère à l'infini). Ceci est facile à voir notamment dans le cas hyperbolique à l'aide du modèle projectif.

3. Fonction distance pour une famille d'hyperplans

3.1. On se donne une famille dénombrable (S_i) , $i \in \mathbb{N}$, d'hyperplans (géodésiques) de l'espace hyperbolique H^{n+1} . Cette famille vérifie les conditions suivantes :

- (i) $S_i \cap S_j = \emptyset$ si $i \neq j$.
- (ii) L'hyperplan S_0 est privilégié : tous les hyperplans S_i sont au-dessus de S_0 (au sens de la figure 1).
- (iii) On dira que $S_i \leq S_j$ (S_i en dessous de S_j) si S_i sépare S_0 de S_j .

On suppose que S_0 est isolé et que toute limite d'une suite décroissante de S_i est un élément de la famille; autrement dit $\forall S_i \neq S_0$ il existe S_j minimal distinct de S_0 tel que $S_j \leq S_i$.

3.2. **DISTANCE.** — Soit $k : S_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} k(x) &= d(x; \bigcup_{i \geq 1} S_i) \\ &= \inf_{i \geq 1} d(x; S_i) \end{aligned}$$

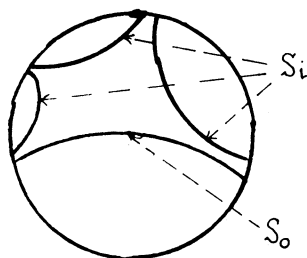


Fig. 1

Les conditions sur la famille (S_i) , $i \in \mathbb{N}$, assurant que cette distance est atteinte et est positive.

3.3. PROPOSITION. — Il existe $k_0 > 0$ telle que pour tout $x \in S_0$ avec $k(x) \leq k_0$ il existe $i \in \mathbb{N}$ unique qu'on note $i(x)$ tel que $k(x) = d(x, S_i)$.

Preuve. — Faisons la démonstration en dimension 2, le cas général est parfaitement analogue.

Considérons le modèle de Poincaré du disque unité où : S_0 est un segment de l'axe des réels joignant $(-1, 0)$ à $(1, 0)$; x est le point $(0, 0)$.

Considérons les géodésiques (cercles orthogonaux au bord du disque) A_1 et A_2 joignant respectivement $(-1, 0)$ à $(0, 1)$ et $(1, 0)$ à $(0, 1)$ et soit $a = d(x, A_1) = d(0, A_1)$. Par symétrie

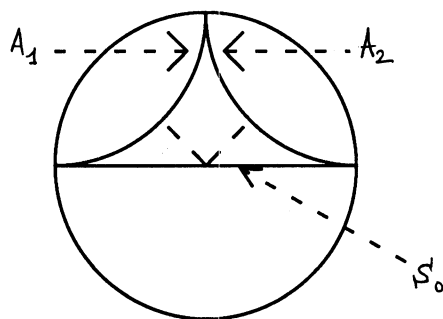


Fig. 2

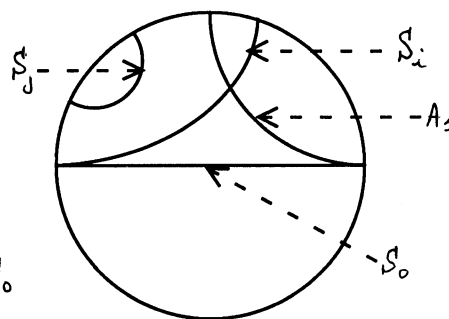


Fig. 3

$a = d(0, A_2)$ (voir fig. 2).

Si $d(0, S_i) < a$ et S_j est un élément de la famille, alors on a :

— Soit A_1 ou A_2 qui sépare S_0 de S_j donc $d(0, S_j) > a$.

On prend pour k_0 une constante $k_0 < a$ (voir fig. 3).

3.4. Notons par $f_i : S_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $f_i(x) = d(x, S_i)$.

A l'aide d'une transformation isométrique on se ramène à deux cas dans le modèle de H^{n+1} qui est la boule unité B^{n+1} de $\mathbb{R}^{n+1}$ muni des coordonnées $(x_1, x_2, \dots, y)$:

$$S_0 = \{(x_1, x_2, \dots, y) \in B^{n+1}; y = 0\}$$

S_i est une hypersphère orthogonale à B^{n+1} qui est soit :

- (i) symétrique par rapport à l'axe des y (fig. 4).
- (ii) tangente à S_0 à l'infini ($\partial H^{n+1} = \partial B^{n+1}$) (fig. 5).

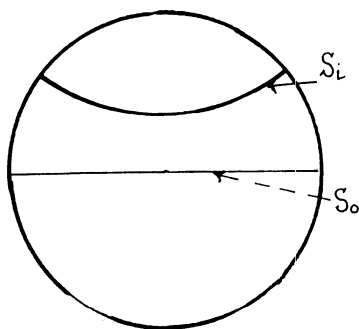


Fig. 4

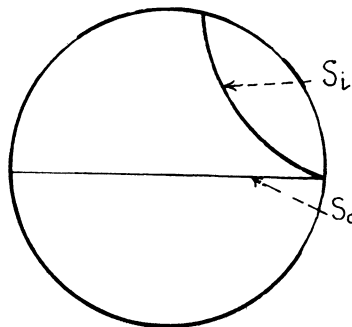


Fig. 5

Le premier cas correspond à la condition $\inf_{x \in S_0} f_i(x) > 0$, le second à $\inf f_i = 0$.

Dans le premier cas $\inf f_i$ est atteint en un point qu'on note $x_i \in S_0$ (0 dans notre modèle). Dans le second cas on note aussi par x_i le point de tangence à l'infini de S_0 et S_i .

On note respectivement $E_i(r)$ et $E(r)$ les ensembles :

$$\{x \in S_0 \text{ tel que } f_i(x) \leq r\}, \quad \{x_0 \in S_0 / k(x) \leq r\}.$$

PROPOSITION. — $\forall r \leq k_0$, $E(r) = \bigcup_{i \geq 1} E_i(r)$ où la réunion est disjointe.

3.5. GÉOMÉTRIE DE $E_i(r)$. — Sur les modèles indiqués plus haut on constate :

PROPOSITION. — Dans le cas où $\inf(f_i)$ est atteint, $E_i(r)$ est une boule (dans S_0) de centre x_i et rayon dépendant de $f_i(x_i)$ et r . Dans l'autre cas, $E_i(r)$ est une horoboule centrée en x_i ($x_i \in \partial B^{n+1}$).

3.6. « UNIFORMITÉ » DES f_i .

PROPOSITION. — $\text{Log}(f_i)$ est C -lipchitzienne, C étant une constante universelle (qu'on ne cherche pas à déterminer); en particulier :

$$f_i(x) \leq f_i(x_i) e^{C d(x, x_i)}. \quad (f_i(x_i) = \min f_i).$$

COROLLAIRE 1. — Si $E_i(r)$ est une boule, et $R(r)$ son rayon alors :

$$R(r) \geq (1/C) \text{Log}(r/f_i(x_i))$$

COROLLAIRE 2. — Si $E_i(r)$ est une horoboule alors son rayon $\rightarrow \infty$ quand $f_i(x_i) = \min f_i \rightarrow 0$ (r étant fixé) et ce uniformément en f_i .

Remarque. — Le dernier corollaire est évidemment une forme faible du précédent.

Avant de la prouver, voyons comment cette proposition permet de démontrer le premier corollaire. Soit $R(r)$ le rayon de $E_i(r)$ alors on a :

$$f_i(x) \leq f_i(x_i) e^{C^d(x, x_i)}$$

donc

$$r \leq f_i(x_i) e^{CR(r)} \Rightarrow R(r) \geq (1/C) \log(r/f_i(x_i))$$

Preuve de la proposition. — Je la dois sous cette forme au rapporteur.

La dérivée f'_i de f_i est maximale lorsque S_i est tangente à l'infini à S_0 . Dans ce cas une formule trigonométrique donne $f'_i = \text{th}(f_i)$ donc $(\log f'_i) \leq 1$. (La constante C est en fait 1.)

3.7. PROPOSITION. — Il existe $k_1 < k_0$ tel que $O_1(E_i(k_1)) \subset E_i(k_0) (\forall_i)$ où $O_1(E_i(k_1))$ est le 1-voisinage tubulaire de $E_i(k_1)$ dans S_0 , k_1 constante universelle (k_0 est la constante du paragraphe 3.3).

Preuve. — $O_1(E_i(r-t)) \subset E_i(r)$, on utilise la proposition précédente.

Remarque. — On peut changer 1 par n'importe quel constante α pour obtenir une constante k_α vérifiant la proposition.

3.8. SYMÉTRIES. — Supposons qu'un groupe discret Γ d'isométries de H^{n+1} agit librement sur S_0 . Supposons que Γ conserve la fonction distance :

$$k : S_0 \rightarrow \mathbb{R}; \quad k(g(x)) = k(x), \quad x \in S_0, \quad g \in \Gamma.$$

Soit $p : S_0 \rightarrow S_0/\Gamma$ la projection canonique. On définit $k' : S_0/\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ par $k = k'_0 p$, $x'_i = p(x_i)$, $B(x'_0, r) = p(B(x_0, r))$, $E'_i(r) = p(E_i(r))$.

PROPOSITION. — (i) Lorsque $E_i(k_0)$ est une boule (c'est-à-dire $x_i \in S_0$ et non à l'infini) alors $p : E_i(k_0) \rightarrow S_0/\Gamma$ est injective.

(ii) Si $E_i(k_0)$ est une horoboule alors :

$$\forall g \in \Gamma \quad g(E_i(k_0) \cap E(k_0)) \neq \emptyset \Rightarrow g(E_i(k_0)) = E_i(k_0)$$

Dans ce cas g est un élément parabolique fixant x_i .

Preuve. — Γ conserve toute la géométrie donc $g(E_i(k_0)) = E'_j(k_0)$ et $g(x_i) = x_j$. Si $i=j$ et $x_i \in S_0$ on aura $g = \text{identité}$.

4. Cas des variétés compactes

4.1. RAYON D'INJECTIVITÉ NORMAL. — Soit S une hypersurface géodésique plongée (c'est-à-dire sans self-intersection) dans une variété hyperbolique V .

On suppose S orientée et semi-propre; par exemple du côté positif (défini par l'orientation).

Soit $x \in S$ on définit $r_n(x)$ par $r_n(x) = \inf \{ \text{longueur}(C), C \text{ chemin issu de } x, \text{ à extrémité dans } S, \text{ orienté positivement en } x, C \text{ n'est homotope relativement à ses extrémités à aucun chemin de } S \}$.

4.2. L'hypersurface S engendre une lamination géodésique orientée L de V . Soit L' le relèvement de L dans l'espace hyperbolique H^{n+1} et S_0 une composante du relèvement de S qui est positivement isolée (propre) dans L . Pour se retrouver dans la situation de la famille $(S_i), i \in \mathbb{N}$ du paragraphe 3 on ne va retenir de L' que :

- (i) les feuilles qui sont au-dessus de S_0 (au sens de l'orientation)
- (ii) et qui sont minimales au sens de l'ordre du paragraphe 3 c'est-à-dire qu'elles ne sont séparées de S_0 par aucune autre feuille de L . Notons par $\Gamma = \{ g \in \pi_1(V) \text{ tel que } g(S_0) = S_0 \}$.

Il est clair qu'on retrouve alors la situation du paragraphe 3.8.

PROPOSITION. — On a $r_n(x) = k'(x), \forall x \in S$.

La preuve est directe.

Par la suite on utilisera la notation k au lieu de r_n .

4.3. SEMI-VOISINAGES. — Soit $x \in S$ et $y \in V$. Notons par $d^+(x, y)$ la plus petite longueur des géodésiques entre x et y , normales à S et positivement orientées en x . Si une telle géodésique n'existe pas alors $d^+(x, y) = \infty$.

Soit A une partie de S et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction on note par

$$O_f^+(A) = \{ y \in V / \text{il existe } x \in A, d^+(y, x) < f(x) \}$$

PROPOSITION. — Le semi-voisinage $O_{k/2}^+(S)$ est libre au sens où deux géodésiques orientées orthogonales à S , issues de deux points distincts x et x' et de longueurs $k(x)/2$ et $k(x')/2$ ne s'intersectent pas.

Preuve. — Commençons d'abord par donner une autre définition possible de rayon d'injectivité normal. Soit $x \in S$ et $g(t), t \geq 0$ la géodésique positive orthogonale à S en $x = g(0)$.

On définit $r'_n(x) = \inf \{ t \text{ tel que } g \text{ ne réalise pas la distance } d^+(g(t), S) \}$ autrement dit

$$r'_n(x) \geq t \text{ ssi } \forall y \in S, d^+(g(t), y) \geq t$$

Maintenant il est clair que $O_{r'_n/2}(S)$ est libre. Pour démontrer la proposition il suffit de remarquer que $r_n \leq 2r'_n$.

COROLLAIRE. — Soit $f : A \subset S \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction telle que $f \leq k/2$ alors

$$\text{Vol}_{n+1}(O_f^+(A)) \geq \int_A f$$

Preuve. — D'après la proposition il suffit de considérer S dans H^{n+1} , où il suffit de voir; à cause de l'hyperbolicité de la géométrie, comment les géodésiques normales à S divergent (et accroissent donc le volume).

4.4. MINORATION DU RAYON D'INJECTIVITÉ NORMAL, CAS OÙ V EST COMPACTE.

LEMME. — $E_i(r)$ ne peut pas être une horoboule.

Preuve. — Supposons le contraire alors $p : E_i(k_0) \rightarrow S$ est injective car $\pi_1(V)$ ne contient pas d'élément parabolique (§ 3.8). Considérons

$$A = E'_f(k_0) - E'_i(k_1) = p[E_i(k_0) \setminus E_f(k_1)]$$

alors évidemment $\text{Vol}_n(A) = \infty$. D'autre part, dans A on a $k'(x) \geq k_1$. Donc d'après le corollaire précédent, $\text{Vol}_{n+1}[O_k^+(A)] = \infty$.

A fortiori $\text{Vol}(V) = \infty$ mais V est compacte.

PROPOSITION 1. — Il existe une constante $C = C(V)$ telle que $k(x) \geq C$, $\forall x \in S$.

Preuve. — On doit préciser la démonstration précédente, puisque $E_i(r)$ est une boule alors elle s'injecte dans S . Le rayon de $E_i(r)$ devient grand lorsque $\inf(f_i) = f_i(x_i)$ devient petit (§ 3.6). Dans ce cas $\text{Vol}_n(A)$ et $\text{Vol}_{n+1}[O_{k/2}(A)]$ deviennent grands. Mais ce dernier ne peut pas dépasser $\text{Vol}_{n+1}(V)$; c'est que $\inf f_i$, donc k , restent minorés.

Plus précisément on a :

PROPOSITION 2. — Il existe c' constante et a_n constante ne dépendant que de n telles que

$$k \geq a_n \text{Vol}(V)^{-c'/n-1} = C(V)$$

Preuve. — D'après le corollaire 1 du paragraphe 3.6

$$R(r) \geq \frac{1}{c'} \text{Log} \frac{r}{f_i(x_i)}$$

Donc $\text{Vol}(V) \geq \text{Vol}(A) \geq c'' e^{(n-1)+R(r)} \dots$

PROPOSITION 3. — S est compacte : car $\text{Vol}(V) \geq c' \cdot \text{Vol}(S)$ (c est la constante de la proposition précédente).

4.5. DIAMÈTRES. — On suppose toujours que V est compacte. On a alors montré que S est également compacte donc propre (des deux côtés). Il est alors possible de définir un rayon d'injectivité normal tenant compte des deux côtés de S . Ce n'est rien autre que le plus petit de « semi »-rayons précédents. Il vaut aussi :

$$r_n(x) = \sup \{ r' / B_V(x, r) \cap S \text{ soit connexe, } \forall r < r' \}$$

(le premier r tel que $B_V(x, r) \cap S$ cesse d'être connexe). Ici B_V désigne la boule dans V .

LEMME. — $\forall x \in V$, $B_V(x, C/2) \cap S$ est connexe (S passe au plus une fois par toute boule de V de rayon $C/2$).

Preuve. — Il suffit d'appliquer la proposition 2 du paragraphe 4.4.

Notons $N_C(V)$ le nombre minimal de boules de rayon $C/2$ qui recouvrent V . On a alors :

PROPOSITION. — $\text{diam}(S) \leq C \cdot N_C(V)$ où $\text{diam}(S)$ est le diamètre de S .

4.6. NOMBRE D'HYPERSURFACES GÉODÉSIQUES. — V étant toujours compacte. Soit $x \in V$. Notons par $G_l(x, V)$ l'ensemble des lacets géodésiques en x (ils sont fermés et partout lisses sauf éventuellement en x) de longueur inférieure à l .

Notons par $G_l(v)$ l'ensemble des géodésiques fermées de V (c'est-à-dire les orbites périodiques du flot géodésique) de longueur inférieure à l .

Prenons ici $l = 2 \text{CN}(C)$ donc $l \geq \text{diam } S$.

Soit S et S' deux hypersurfaces géodésiques plongées et $x \in S \cap S'$. Considérons $G_l(x, S) \subset G_l(x, V)$ et $G_l(x, S') \subset G_l(x, V)$.

LEMME :

$$S = S' \Leftrightarrow G_l(x, S) = G_l(x, S')$$

Preuve. — Car $G_l(x, S)$ engendre $\pi_1(S, x)$ puisque $l \geq 2 \text{diam}(S)$ [1, chap. 3]. Donc $G_l(x, S) = G_l(x, S') \Leftrightarrow \pi_1(S, x) = \pi_1(S', x)$. Le reste de la preuve est direct.

COROLLAIRE. — Le nombre d'hypersurfaces géodésiques plongées passant par x est plus petit que $2^{\text{card}(G_l(x, v))}$.

— Les nombres $\text{card}(G_l(x, V))$ sont « pratiquement égaux ». Notons par $h_l(v) = \max_{x \in V} \text{card}(G_l(x, v))$

PROPOSITION. — V convient au plus $h_l(v) \cdot 2^{h_l(v)}$ hypersurfaces géodésiques plongées ($l = 2cN_C(v)$).

Preuve. — On sait que toute classe d'homotopie libre de V (ou de S) est réalisée par une seule géodésique fermée minimisante. Puisque $G_l(x, S)$ engendre $\pi_1(S, x)$ ($x \in S$) alors les géodésiques fermées correspondantes sont dans $G_l(V)$. Donc S contient au moins un élément (une géodésique fermée) de $G_l(V)$. Choisissons un point de chaque élément de $G_l(V)$ alors toute hypersurface géodésique plongée passe par l'un de ces points dont le nombre, $\text{card}(G_l(V))$, est inférieur à $h_l(V)$.

Remarque. — On peut continuer à expliciter l'inégalité. On remplace $C = C(V)$ par sa valeur dans le paragraphe 4.4. On obtient alors une quantité qui est fonction élémentaire de $\text{Vol}(V)$ et $h_l(V)$ ou même de $\text{Vol}(V)$ et du rayon d'injectivité de V .

4.7. PREUVE DU THÉORÈME C. — Lorsque la variété compacte V est hyperbolique, les sous-paragraphe précédents démontrent avec plus de précision le théorème. Il faut voir maintenant les modifications à apporter quand la courbure est variable. A vrai dire même les estimations restent vraies mais dépendent cette fois de la courbure.

D'abord le paragraphe 3 (essentiellement ses constantes) reste vrai sauf que la forme des $E_i(r)$ n'est plus explicite. L'uniformité (§3.6) est vraie. Dans le corollaire 1 du

paragraphe 3.6 au lieu de dire que son rayon est grand on dira que $E_i(r)$ contient une boule de grand rayon. La proposition 1 du paragraphe 4.4 se prolonge directement et donc aussi la troisième proposition. Même chose pour les paragraphes 4.5 et 4.6.

5. Comparaison des volumes

Soit x un point de S_0 qui n'appartient pas à $E(k_0)$ autrement dit $k(x) \geq k_0$ (ce point existe d'après ce qui précède).

Notre objectif dans ce paragraphe est de comparer $B(x, r) \cap E(k_1)$ et $B(x, r) - E(k_1)$ du point de vue du volume.

— Notons $A_i(k_0)$ « l'anneau » $E_i(k_0) - E_i(k_1)$.

D'après le paragraphe 3.7 et la croissance exponentielle, les volumes de $E_i(k_1)$ et $A_i(k_0)$ sont « proportionnels ». Par suite lorsque pour un i donné, si r est grand, $B(x, r)$ contient $A_i(k_0)$ alors la contribution de $A_i(k_0)$ dans $B(x, r) - E(k_1)$ est au moins aussi grande que celle de $E_i(k_1)$ dans $B(x, r) \cap E(k_1)$. Maintenant il faut raisonner pour tous les $E_i(k_0)$, il s'agit donc d'étudier $B(x, r) \cap A_i(k_0)$ et $B(x, r) \cap E_i(k_1)$.

5.1. NOTATIONS. — Soit x et x' deux points de S_0 . Considérons les deux boules de S_0 ; $B(x, r)$ et $B(x', r')$. Supposons que $x \in B(x', r' + 1)$.

Notons :

$$C = B(x, r) \cap [B(x', r' + 1) - B(x', r')]$$

et

$$D = B(x, r) \cap B(x', r')$$

— On va également considérer le cas où $B'(x', r')$ est une horoboule centrée en un point x' à l'infini. Dans ce cas $B'(x', r' + 1)$ sera remplacé par le 1-voisinage tubulaire de l'horoboule.

— Supposons que $B(x, r)$ ne contient pas (entièrement) $B(x', r')$. (Le cas contraire est trivial dans notre discussion.)

Le bord de A se décompose en

$$\partial C = \partial_- C \cup \partial_+ C \cup \partial_0 C$$

où

$$\partial_- C \subset \partial B(x', r')$$

$$\partial_+ C \subset \partial B(x', r' + 1)$$

et

$$\partial_0 C \subset \partial B(x, r)$$

De même $\partial D = \partial_- D \cup \partial_0 D$ où $\partial_- D \subset B(x', r')$ et $\partial_0 D \subset B(x, r)$.

On a $\partial_-(D) = \partial_-(C)$.

La composante $\partial_- D$ a relativement à $\partial B(x', r')$ un bord qu'on notera par E . Il coïncide avec celui de $\partial_0 D$ dans $B(x, r)$. On a :

$$E = \partial B(x, r) \cap \partial B(x', r') \text{ (fig. 6)}$$

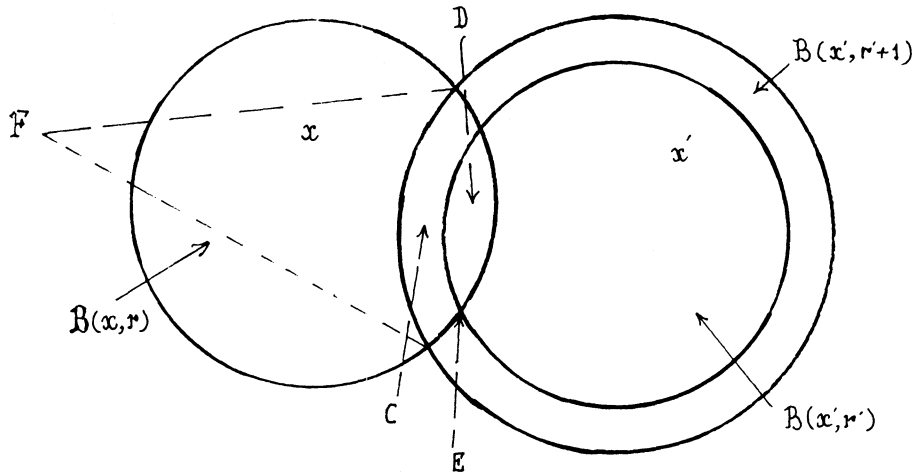


Fig. 6.

5.2. On sait que les bords des boules (respectivement horoboules S) de S_0 sont des sphères riemanniennes, c'est-à-dire à courbure constante positive (resp. des espaces euclidiens).

— Dans ces mêmes espaces, $\partial_- D$, $\partial_0 D$, $\partial_- C$ et $\partial_+ C$ sont des boules. De même E est une hypersphère de $\partial B(x', r')$ et $\partial B(x, r)$.

En général une hypersphère divise la sphère (qu'elle supporte) en deux boules dont l'une est convexe (les deux boules sont convexes exactement lorsque l'hypersphère est un équateur).

— Maintenant étant donné une $(n-2)$ sphère E , elle peut être inscrite comme hypersphère dans toutes les $(n-1)$ sphères d'une courbure plus petite qu'une fonction de la courbure de E .

LEMME. — *Tous les volumes des parties convexes que E détermine dans les $(n-1)$ sphères sont « proportionnels » au sens que tout rapport entre ces volumes est majoré par une constante ne dépendant que de la dimension.*

Remarque. — C'est dans ce sens précis qu'on utilisera le mot « proportionnel » le long du texte.

Preuve. — En effet le maximum est réalisé quand E est un équateur et le minimum quand E est inscrite dans un espace euclidien.

5.3. CAS DES HOROBOULES.

LEMME 1. — Dans le cas où on a une horoboule, $\partial_- D$ et $\partial_0 D$ sont convexes dans les sphères qui les contiennent.

Preuve. — Rappelons que x n'est pas dans l'horoboule. Prenons le modèle de la boule unité de Poincaré pour H^{n+1} où x est à l'origine. La métrique de $B(x, r)$ est multiple de sa métrique euclidienne. Mais la convexité de $\partial_0 D$ au sens euclidien est claire (fig. 7).

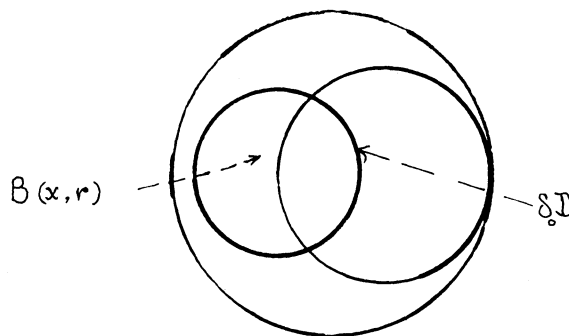


Fig. 7.

— On sait que l'espace hyperbolique est divergent à l'infini [1, chap. 6].

LEMME 2. — A une constante (multiplicative) près (fonction de n), on a

$$\text{Vol}_n(D) \leq \text{Vol}(\partial_- D)$$

Preuve. — A une constante près on a :

$$\text{Vol}_n(D) \leq \text{Vol}_{n-1}(\partial D) = \text{Vol}(\partial_0 D) + \text{Vol}(\partial_- D)$$

D'après le lemme précédent, à une constante près,

$$\text{Vol}(\partial_0 D) + \text{Vol}(\partial_- D) = \text{Vol}(\partial_- D)$$

LEMME 3. — A une constante près on a : $\text{Vol}_n(C) \geq \text{Vol}(\partial_- C)$.

Preuve. — Ici on remarque que C est presque un 1-semi voisinage de $\partial_- C$ et a donc un volume proportionnel. (Ici toute la géométrie est bornée. On est loin des centres de courbure de $\partial_- C$.) Plus précisément, considérons le flot focal au point à l'infini de l'horoboule. Ce flot applique soit $\partial_- C$ dans $\partial_+ C$, soit l'inverse. Dans les deux cas, C contient « un semi voisinage de « rayon » égal à 1 de $\partial_- C$ ou $\partial_+ C$. On conclut en remarquant que $\partial_0 C \cup \partial_0 D$ étant convexe alors $\text{Vol}(\partial_- C) = \text{Vol}(\partial_+ C)$.

5.4. PROPOSITION. — A une constante près on a $\text{Vol}_n(D) \leq \text{Vol}(C)$.

Preuve. — Dans le cas d'une horoboule, on applique directement les deux lemmes précédents. Lorsque $B(x', r')$ est une (vraie) boule et tant que l'analogue du lemme 1 précédent est vrai, le même raisonnement marche. Le lemme 1 ne serait violé que lorsque

$B(x, r)$ contient une grande partie de $B(x', r')$ auquel cas C et D auront leurs volumes proportionnels à celui de $B(x', r')$ même.

5.5. PROJECTION DANS V. — Reprenons les notations des paragraphes 3.8, 4.1 et 4.2.

PROPOSITION. — *A une constante près on a :*

$$\text{Vol}_n(B(x', r) \cap E'(k_1)) \leq \text{Vol}_n(B(x', r)) - E'(k_1)$$

Preuve. — Puisque $E(k_0)$ est réunion disjointe des $E_i(k_0)$ (§3.4) il suffit de démontrer l'inégalité en remplaçant $E(k_1)$ par $E_i(k_1)$. Lorsque $p : E_i(k_0) \rightarrow E'_i(k_0)$ est injective, notre inégalité n'est rien autre que celle du paragraphe 5.4. C'est en particulier vrai lorsque $E_i(k_1)$ est une boule (§3.8). Il ne reste à traiter que le cas où $E_i(k_0)$ est une horoboule conservée par des éléments paraboliques non triviaux.

Remarquons que ce cas ne se présente jamais lorsque V (et par conséquent S) a un rayon d'injectivité (global).

Supposons donc que $B = E_i(k_0)$ ne s'injecte pas et soit Γ_0 le groupe des éléments de Γ , fixant B. C'est aussi le sous-groupe de Γ fixant x_i . Le quotient B/Γ_0 s'injecte alors dans S; c'est-à-dire qu'il n'a pas d'autres éléments qui agissent sur B. Dans le cas où B/Γ est compacte ou de façon équivalente $\partial B/\Gamma_0$ a un volume fini, B/Γ_0 est un cusp de S. On a donc deux cas extrêmes, lorsque Γ_0 est trivial et lorsque B/Γ_0 est un cusp. Le cas général est un « mélange » des deux.

Ainsi on va se contenter d'étudier le cas du cusp, le cas trivial étant déjà considéré.

Supposons, sans nuire à la généralité, que $n=2$. Considérons le modèle du demi-espace de H^2 où l'infini est le point à l'infini de B. Notons H l'horosphère bord de B et H' l'horosphère parallèle à B située à une distance 1 de H. Soit $x \in H^2$, x n'appartient pas à B. Soit D' et D'' deux droites verticales. Supposons que $B(x, r) \cap H' \neq \emptyset$.

Appelons : A, la région déterminée par H, H', D et D'.

$$C = B(x, r) \cap A.$$

$$D = B - A.$$

$$E = A - C \quad (\text{fig. 8}).$$

LEMME 1. — *Vol(A), Vol(E) et Vol(B) sont proportionnels.*

Preuve. — Standard (H et H' sont à une distance égale à 1).

LEMME 2. — *Vol(C) et Vol(D) sont proportionnels.*

Preuve. — Puisque $B(x, r)$ intersecte H' le cas extrême c'est-à-dire de volume minimal pour D est celui où $B(x, r)$ est tangent à H'. Mais alors on a $\text{Vol}(C) \geq \text{Vol}(E)$ donc $\text{Vol}(C) \geq 1/2 \text{Vol}(A)$. On applique alors le lemme 1.

Maintenant pour démontrer la proposition dans le cas des cusps, on applique le lemme 2 à tous les cas d'intersection de $B(x, r)$ avec un domaine fondamental de Γ_0 dans B qui « ressemble » à la région déterminée par D, D' et H.

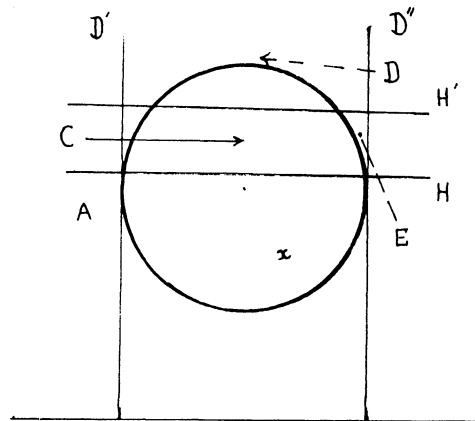


Fig. 8.

6. Structure des laminations

V est toujours une variété hyperbolique.

6.1. PROPOSITION. — Soit S une hypersurface plongée dans V qui n'est pas simplement connexe alors :

- (i) S est propre (des deux côtés).
- (ii) Aucune autre hypersurface plongée ne peut s'accumuler sur elle sauf si $\pi_1(S)$ est élémentaire; une telle hypersurface est alors asymptote à S en un des points à l'infini fixé par $\pi_1(S)$.

Preuve. — Pour ne pas compliquer les notations on va supposer que V est de dimension 3. Dans le modèle du demi-espace, $H^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$ = corps des complexes) soit $S' \subset H^3$ le relèvement de S et S_0 une composante de S' qu'on suppose un plan vertical contenant l'axe de y ($\subset \mathbb{C}$). Soit une isométrie conservant S_0 . On peut supposer qu'elle est soit hyperbolique du type $g(Z) = \beta Z$, $\beta \in \mathbb{R}$ soit parabolique; $g(Z) = Z + \alpha$ où α est imaginaire pur. Considérons le point $M_0 = (i, 1) \in S_0$ (fig. 9).

1. Cas parabolique. — Soit S_1 une autre composante de S' . Supposons que S_1 n'est pas un plan vertical (parallèle à S_0) donc S_0 est une demi-sphère orthogonale à C . Elle intersecte C en un cercle qui doit avoir un rayon borné puisque ses translatés par g sont disjoints (S étant sans self-intersection). Par conséquent S_1 est à une hauteur bornée et reste à distance définie positive de M_0 .

Donc si l'on suppose que S n'est pas propre la seule façon dont une composante S_1 s'approche éventuellement de S_0 est lorsque S_1 est un plan vertical parallèle à S_0 . Par suite l'infini, qui est le point de tangence à l'infini de S_0 et S_1 est un point privilégié dans le bord à l'infini de S_0 . Par conséquent le groupe fondamental de S_0 , $\pi_1(S_0)$, est élémentaire parabolique. On a $\pi_1(S_0) = \pi_1(S_1)$ donc l'infini joue le même rôle pour S_1 . Donc si $g' \in \pi_1(V)$ est telle que $g'(S_0) = S_1$ (S_1 et S_0 sont deux composantes de S') alors

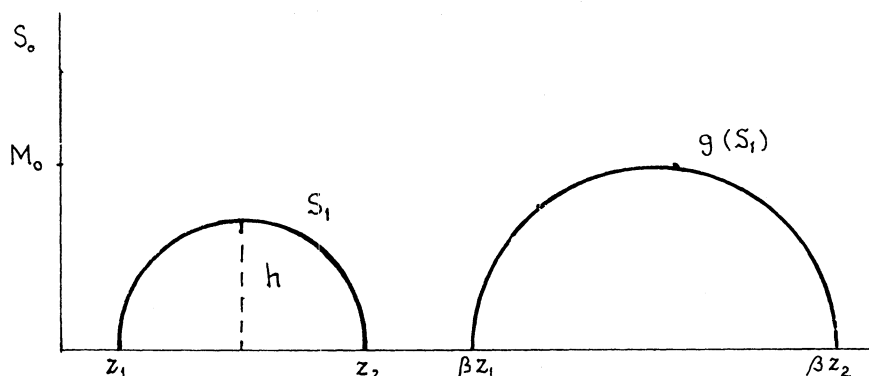


Fig. 9 (cas hyperbolique)

$$\left(h = \frac{z_2 - z_1}{2} < \frac{\beta z_1 - z_1}{2} = z_1 \frac{(\beta - 1)}{2} \right).$$

$g'(\infty) = \infty$. Le sous-groupe de $\pi_1(V)$ conservant l'infini est un sous-groupe de similitude contenant une translation non triviale. Un tel groupe ne peut accumuler des hyperplans.

2. *Cas hyperbolique.* — De la même façon on montre que si S_1 s'approche (indéfiniment) de S_0 alors S_1 est asymptote à S_0 en 0 ou l'infini (sinon les itérés par g se chevauchent).

Donc 0 et ∞ jouent un rôle particulier; donc $\pi_1(S)$ les fixe. Il est donc élémentaire.

Supposons que S n'est pas propre. Soit par exemple S_1 et S_2 deux plans verticaux congruents à S_0 [modulo $\pi_1(V)$] qui se rapprochent de S_0 tel que S_1 soit entre S_0 et S_2 . Les itérés par g ($g(Z) = \beta Z$) de S_1 (ou $S_2 \dots$) s'accumulent sur S_0 . Soit $g' \in \pi_1(V)$ telle que $g'(S_0) = S_1$.

Les images par g' des plans verticaux s'accumulant sur S_0 sont soit des demi-sphères ou plans verticaux. Elles ne peuvent pas être des demi-sphères parce qu'en s'accumulant sur S_1 elles intersectent S_0 ou S_2 : chose impossible. Donc elles sont des plans verticaux. Donc l'infini est privilégié pour S_1 également. C'est donc un point fixe du groupe d'isotropie de S_1 . Soit g_1 un élément non trivial de ce groupe. Évidemment g et g_1 fixent l'infini mais n'engendrent pas un groupe presque cyclique : Contradiction [2, chap. 5].

Remarque. — On a en fait montré dans ce cas qu'aucune composante S_1 de S n'est asymptote à S_0 puisque on prendra alors $S_2 = g(S_1)$ [ou $g^{-1}(S_1)$] et tout marche.

— La deuxième partie de la proposition se démontre de la même façon.

7. Preuve du théorème principal

7.1. LORSQUE S EST SEMI-PROPRE ORIENTÉE.

On reprend les paragraphes 4.1, 4.2 et 4.3. Dans le corollaire du paragraphe 4.3 prenons

$$f(x) = \min \left[\frac{k(x)}{2}, \frac{k_0}{2} \right]$$

Notons $B(x', r) \setminus E'(k_1)$ par A et $B(x', r) \cap E'(k_1)$ par B . On a donc :

$$\text{Vol}_{n+1}[\theta_f^+[B(x', r)]] \geq \int_{B(x', r)} f = \int_A f + \int_B f = \frac{k_1}{2} \text{Vol } A + \int_B f$$

Or d'après le paragraphe 5, il existe a_n telle que $\text{Vol } B \leq a_n \text{Vol } A$; donc

$$\text{Vol}_n[B(x', r)] = \text{Vol } A + \text{Vol } B \leq [1 + a_n] \text{Vol } A$$

Donc

$$\text{Vol}_{n+1}[O_f^+(B(x', r))] \geq k_1/2 \cdot (1/(1 + a_n)) \text{Vol}_n(B(x', r))$$

Notons les boules de V par $B_V(x', r) \dots$ On a

$$O_f^+(B(x, r)) \subset B_V(x, r + k/2)$$

Donc

$$\text{Vol}_{n+1}(B_V(x', r + k_1/2)) \geq (k_1/2 (1 + a_n)) \text{Vol}(B(x', r))$$

Maintenant on sait que le rapport de volumes de deux boules concentriques est borné par le rapport correspondant dans l'espace hyperbolique H^{n+1} [2, chap. 5]. Par suite pour un r_0 fixé, on peut changer $2(1 + a_n)/k_1$ par une autre constante C_n telle que cette fois

$$\text{Vol}_n(B(x', r)) \leq C_n \text{Vol}_{n+1}(B_V(x', r)) \quad \text{si } r \geq r_0$$

(la constante dépend de r_0).

Choisissons r_0 petit relativement à la constante de Margulis [2, chap. 5]. Une étude simple peut être alors menée pour prolonger l'inégalité pour tout r (quitte à changer éventuellement C_n).

7.2. CAS PROPRE NON ORIENTABLE. — On construit alors localement r_{n+} et r_{n-} et on considère $r_n = \min(r_{n-}, r_{n+})$. Après un arrangement de la constante C_n l'inégalité précédente reste vraie. Le théorème A est donc démontré quand S est semi-propre.

7.3. LEMME. — Soit S une hypersurface géodésique plongée dans V et L la lamination qu'elle engendre. Supposons que S n'est pas semi-propre; alors L contient au moins une feuille semi-propre simplement connexe.

Preuve. — Soit T une transversale (fermée) à L . $L \cap T$ est sans point isolé puisque L est engendrée par S qui n'est pas semi-propre. Il existe donc une feuille S' semi-isolée (dans L). Si S' est simplement connexe la preuve est achevée. Sinon d'après 6.1, S' est à π_1 élémentaire. De plus d'après 6.1 (Preuve), les feuilles de L voisines de S' forment une (sous)-lamination L dont les feuilles sont asymptotes en un des points fixes à l'infini de $\pi_1(S')$. L' est sans feuille isolée. Soit S'' une feuille semi-isolée de L' , $S'' \neq S'$. Puisqu'elle n'est pas isolée, $\pi_1(S'')$ est élémentaire et fixe le point d'asymptotie à l'infini de L' . Donc $\pi_1(S')$ et $\pi_1(S'')$ fixent le même point à l'infini. $\pi_1(S')$ ne peut pas être parabolique sans quoi, $\pi_1(S') = \pi_1(S)$ (puisque S s'accumule sur S') et donc S est propre contrairement à notre hypothèse. Donc $\pi_1(S')$ et pour la même raison $\pi_1(S'')$ sont hyperboliques donc $\pi_1(S') = \pi_1(S'')$ (les sous-groupes élémentaires hyperboliques sont presque cycliques) ce qui entraîne que $S' = S''$. Contradiction.

7.4. PREUVE DU THÉORÈME A. FIN. — Il nous reste à traiter le cas où S n'est pas semi-propre. D'après le lemme il existe une autre hypersurface plongée simplement connexe et semi-propre. Donc il existe $x' \in S$ tel que :

$$\text{Vol}_n(B'_S(x', r)) \leq C_n \text{Vol}_{n+1}(B_V(x', r)).$$

— Or S' est isométrique à H^n donc :

$$\forall x \in S, \quad \text{Vol}_n(B_S(x, r)) \leq C_n \text{Vol}_n(B'_S(x', r)).$$

— Puisque S s'accumule sur S' , on peut trouver x assez proche de x' .

— Donc quitte à changer un peu C_n comme dans le paragraphe 7.1.

On obtient : $\text{Vol}_n(B_S(x, r)) \leq C_n \text{Vol}_{n+1}(B_V(x, r))$.

7.5. PREUVE DU THÉORÈME B. — D'après l'hypothèse du théorème, V est à croissance dominée par H^n . D'après le théorème A, la même chose est vraie pour toute hypersurface plongée dans V .

— Une telle hypersurface n'est pas à π_1 élémentaire ou trivial. Elle est donc propre d'après la proposition 6.1. Mieux elle ne peut pas non plus s'accumuler sur une autre hypersurface puisque cette dernière elle aussi a son π_1 non élémentaire.

8. Remarques finales

8.1. Pour une variété hyperbolique compacte, d'après le théorème C, le nombre d'hypersurfaces géodésiques plongées est fini. Il est intéressant de préciser ce résultat. Il paraît d'ailleurs que ce nombre est « souvent » nul. On peut également se demander quand une variété hyperbolique S^n peut se plonger géodésiquement dans une variété compacte V^{n+1} . On peut facilement voir que ceci est généralement impossible en dimension $n=2$ et ce pour des raisons de cardinalité (des structures hyperboliques en dimension 2 et 3).

8.2. Dans une variété hyperbolique compacte V^{n+1} , la recherche d'hypersurfaces compactes immergées semble plus naturelle que celle d'hypersurfaces plongées. Elles sont

exactement les feuilles compactes d'un feuilletage géodésique « tautologique » sur le fibré en grassmanniennes d'hyperplans tangent à V .

– Sont-elles en nombre fini ?

– Peut-on les désingulariser (les rendre plongées) en passant à des revêtements finis ?

8.3. Une hypersurface est presque géodésique si sa courbure extrinsèque (la norme d'opérateur de la seconde forme fondamentale) est inférieure à une valeur critique qui est ici (dans le cas hyperbolique) 1. En dimension 2, les courbes géodésiques et presque géodésiques sont « topologiquement équivalentes ». Il n'en est pas de même en dimension supérieure ce qui ne peut que confirmer l'intérêt de les comprendre. Une étude dans ce sens, qui est une suite naturelle de ce présent travail paraîtra ultérieurement.

Note ajoutée sur épreuves : à propos de 8.2, le lecteur pourra consulter le preprint récent de N. A. Sham, à paraître dans les proceedings de "Workshop on group theory from a geometrical view point", ICTP, Trieste, 1990.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. GROMOV, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*. Notes de cours rédigées par J. LAFONTAINE et P. PANSU, C.E.D.I.C., Fernand Nathan, Paris, 1981.
 [2] W. THURSTON, *Geometry and Topology of 3-Manifolds*, Princeton, 1978.

(Manuscrit reçu le 13 décembre 1989,
révisé le 13 mars 1990).

A. ZEGHIB,
Institut de Mathématiques,
Université d'Annaba,
Annaba,
Algérie.

Adresse actuelle :
École normale supérieure de Lyon,
46, Allée d'Italie,
69364 Lyon Cedex 07, France.