Annales scientifiques de l'É.N.S.

Jean-Yves Charbonnel

Orbites fermées et orbites tempérées

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 23, nº 1 (1990), p. 123-149
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1990_4_23_1_123_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 23, 1990, p. 123 à 149.

ORBITES FERMÉES ET ORBITES TEMPÉRÉES

PAR JEAN-YVES CHARBONNEL

Introduction

Soit G un groupe localement compact. On définit pour G la notion de représentation à trace. Si π est une représentation unitaire irréductible et à trace de G, alors le point du dual unitaire $\hat{G}$ de G qui correspond à π est fermé pour la topologie de Mackey sur $\hat{G}$. D'après Harish-Chandra, toute représentation unitaire irréductible d'un groupe de Lie semi-simple est à trace. Si G est un groupe de Lie nilpotent connexe, la méthode des orbites de Kirillov montre que l'espace des orbites de la représentation coadjointe de G paramétrise $\hat{G}$. En outre, elle montre que toute représentation unitaire irréductible de G est à trace. Si G est simplement connexe et si π est dans $\hat{G}$, le caractère de π est la transformée de Fourier de la mesure invariante, normalisée convenablement, sur l'orbite de la représentation coadjointe associée à π. Ces deux derniers résultats résultent du théorème suivant :

Toute mesure invariante sur toute orbite de la représentation coadjointe de G *est tempérée au sens de* 1.1. *On dira plus simplement que toute orbite de la représentation coadjointe de* G *est tempérée.*

P. Bernat a démontré que la paramétrisation de Kirillov se généralisait au cas des groupes exponentiels. En outre, L. Pukanszky a prouvé que cette paramétrisation était continue pour la topologie quotient sur l'espace des orbites de la représentation coadjointe. Dans le cas des groupes de Lie nilpotents connexes, simplement connexes, I. Brown a montré que cette paramétrisation était bicontinue. L. Pukanszky a généralisé au cas des groupes de Lie résolubles connexes la méthode des orbites de Kirillov. Dans le cas des groupes de Lie résolubles, les orbites de la représentation coadjointe ne sont pas toutes tempérées. N. V. Pedersen et M. S. Khalgui ont démontré que toute représentation factorielle normale d'un groupe de Lie résoluble connexe est à trace si elle est associée à une orbite tempérée de la représentation coadjointe. L. Pukanszky a démontré que toute orbite fermée de la représentation coadjointe d'une algèbre de Lie résoluble ad-algébrique est tempérée. En fait, il s'est avéré que ce dernier résultat est conséquence du théorème suivant, dû à V. A. Guinzburg:

Soit X *une sous-variété algébrique lisse, définie sur* $\mathbb{R}$ *de* $\mathbb{C}^n$. *On suppose que* $\mathbf{X}(\mathbb{R})$ *est Zariski-dense dans* X *et fermé dans* $\mathbb{R}^n$ (0.7). *Alors toute mesure* μ *sur* $\mathbf{X}(\mathbb{R})$ *qui est définie par une forme différentielle régulière sur* X, *est tempérée au sens de* 1.1.

La question résolue par L. Pukanszky dans le cas d'une algèbre de Lie résoluble ad-algébrique restait ouverte dans le cas général. Le principal résultat de ce mémoire est le suivant:

Soit $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie réelle. Alors toute orbite de la représentation coadjointe de* $\mathfrak{g}$ *est tempérée.*

M. Duflo a donné une paramétrisation de certaines représentations factorielles normales de G dans le cas où G et un groupe de Lie assez général. En particulier, à certaines orbites de la représentation coadjointe il associe une famille de représentations factorielles normales. M. S. Khalgui a démontré que ces représentations sont à trace lorsque l'orbite associée est tempérée. D'après le résultat principal, ces représentations sont à trace lorsque l'orbite associée est fermée. En particulier, dans le cas d'un groupe de Lie exponentiel, l'image d'une orbite fermée par l'application de Kirillov est un point fermé du dual unitaire.

On en vient à la démonstration du résultat principal. En désignant par $\tilde{G}$ la composante neutre du groupe des points réels du groupe adjoint-algébrique de $\mathfrak{g}$, on remarque que toute orbite de $\tilde{G}$ dans $\mathfrak{g}^*$ porte une mesure $\tilde{G}$-invariante. Le théorème principal est alors conséquence d'un théorème beaucoup plus général (théorème 1.5). Pour donner une idée de la démonstration du théorème principal, on l'esquisse dans un cas particulier. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble qui est le produit semi-direct de $\mathbb{R}$ et d'une algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{n}$. Soit X un élément de $\mathfrak{g}$ qui n'est pas dans $\mathfrak{n}$. Dans ce qui suit, on désigne par G le groupe adjoint de $\mathfrak{g}$, par $\mathbf{G}$ le groupe adjoint algébrique de $\mathfrak{g}$ et par $\tilde{G}$ la composante neutre de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$. On suppose que les conditions suivantes sont réalisées:

(1) $\operatorname{ad} X$ est une dérivation non semi-simple et non nilpotente. En outre, les valeurs propres de $\operatorname{ad} X$ sont entières;

(2) il existe une forme linéaire f sur $\mathfrak{g}$ pour laquelle $G.f$ est fermée et $\tilde{G}.f$ n'est pas fermée. En outre, on suppose que les stabilisateurs de f dans $\mathfrak{g}$ et dans l'algèbre de Lie de $\tilde{G}$ sont respectivement contenues dans $\mathfrak{n}$ et dans $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$;

(3) l'orbite de f sous l'action du groupe adjoint de $\mathfrak{n}$ n'est pas bornée.

On note C le caractère de $\mathbf{G}$ dont la différentielle prend la valeur 1 en la composante semi-simple de ad X. Soit A le morphisme de $\mathbf{G}$ dans $\mathbf{G}_a$ dont la différentielle est nulle sur $\operatorname{ad}\mathfrak{n}$ et prend la valeur 1 en la composante nilpotente de $\operatorname{Ad} X$. Puisque les valeurs propres de ad X sont entières, C et A sont triviaux sur $\mathbf{G}(f)$. Le morphisme $C \times A$ définit par passage au quotient un morphisme ρ de $\mathbf{G}.f$ dans $\mathbf{G}_m \times \mathbf{G}_a$. Les images de $\tilde{G}.f$ et de $G.f$ par ρ sont respectivement $\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$ et $\{(y, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}; y = e^x\}$.

Il existe sur $\mathbf{G}.f$ une forme différentielle, de degré maximum, $\mathbf{G}$-invariante. Soit ω une telle forme. On note aussi ω la mesure sur $\tilde{G}.f$ définie par la restriction de ω à $\tilde{G}.f$. On fixe sur $\mathfrak{g}^*$ une norme euclidienne $\|.\|$ et on désigne par F la fonction régulière sur $\mathbf{G}.f$ pour laquelle on a: $F(x) = 1 + \|x\|^2$ pour tout x dans $\tilde{G}.f$. On considère le morphisme $\rho \times F$. On désigne par ν la forme différentielle $dy/y \wedge dx \wedge dt$ sur $\mathbf{G}_m \times \mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_a$. On note aussi ν la mesure sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par la restriction de ν à $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Au-dessus d'un ouvert de Zariski Ω de $\mathbf{G}_m \times \mathbf{G}_a \times \mathbf{G}_a$ le morphisme $\rho \times F$ est lisse. Par suite, il existe une forme différentielle relative β sur $(\rho \times F)^{-1}(\Omega)$ définie par l'égalité: $\omega = \beta \wedge \nu$. Soit Ω_0 l'intersection de Ω et de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On note $(\rho \times F)_0$ la restriction de $\rho \times F$ à l'intersection de $\tilde{G}.f$ et de $(\rho\times F)^{-1}(\Omega_0)$. Pour toute fonction borélienne positive φ sur $\tilde{G}.f$, on a:

$$\int_{\tilde{G}.f}\varphi(x)\,d\omega(x)=\int_{\Omega_0}\int_{(\rho\times F)_0^{-1}(z)}\varphi(x)\,d\beta_z(x)\,d\nu(z).$$

Pour tout réel positif R, on désigne par $E(R)$ l'ensemble des (y,x) de $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ satisfaisant la condition: $|\log y-x|\leqq R$. Pour tout z dans $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$, on note $\mu(z)$ la borne inférieure de la fonction F sur l'ensemble des points x de $\tilde{G}.f$ dont l'image par ρ est égale à z. Puisque l'orbite de f sous l'action du groupe adjoint de $\mathfrak{n}$ n'est pas bornée, l'image de $\tilde{G}.f$ par $\rho\times F$ est l'ensemble des points (y,x,t) de $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ pour lesquels t n'est pas inférieur à $\mu(y,x)$. Pour tout réel positif R, on note $\tilde{E}(R)$ l'ensemble des points (y,x,t) de cette image pour lesquels (y,x) appartient à $E(R)$. Par hypothèse, l'orbite $G.f$ est fermée dans $\mathfrak{g}^*$; donc l'application: $(y,x)\mapsto(\log y-x,\mu(y,x))$ de $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, est propre. Par suite, d'après [3], proposition 5, pour tout réel positif R, il existe des réels positifs A et a, pour lesquels on a:

$$\mu(y,x)\geqq A(1+x^2)^a,$$

pour tout (y,x) dans $E(R)$. Pour tout point (y,x,t) de Ω_0, tel que t soit non inférieur à $\mu(y,x)$, $(\rho\times F)_0^{-1}(y,x,t)$ est une variété compacte, C^∞, sans bord. Soit $I(y,x,t)$ la valeur de l'intégrale de la restriction de β à $(\rho\times F)_0^{-1}(y,x,t)$. On veut prouver que pour tout réel positif R, il existe un entier positif assez grand k, pour lequel l'intégrale $\int_{\tilde{E}(R)} t^{-k}\,(y,\,x,\,t)\,d\nu\,(y,\,x,\,t)$ est convergente. Le théorème principal résultera alors du théorème de Fubini et de l'égalité :

$$\int_{\tilde{E}(R)}t^{-k}I(y,x,t)\,d\nu(y,x,t)=\int_{(\rho\times F)_0^{-1}(\tilde{E}(R))}F(x)^{-k}\,d\omega(x).$$

En utilisant un théorème de P. Deligne, on montre qu'il existe un ouvert de Zariski Ω_1 de Ω pour lequel, la fonction I est la détermination sur l'intersection de Ω_1 et de Ω_0, d'une fonction analytique multiforme sur Ω_1 dont la croissance à l'infini est modérée ([4], proposition 3.6). Pour décrire cette dernière condition, on utilise le plongement usuel de la variété $\mathbf{G}_m\times\mathbf{G}_a\times\mathbf{G}_a$ dans $(\mathbb{P}^1)\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$. Puisque $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})\times\mathbb{P}^1(\mathbb{R})\times\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est compact, il suffit de prouver que pour k entier positif assez grand, la fonction: $(y,x,t)\mapsto t^{-k}I(y,x,t)$ est intégrable au voisinage de tout point à l'infini de Ω_1, adhérent à $E(R)$. Soit x_∞ un tel point. En utilisant le théorème de désingularisation de Hironaka, on prouve qu'au voisinage de x_∞, on a une inégalité:

$$I(y,x,t)\leqq B\,y^\alpha|x|^\beta t^\gamma(\log y)^m,$$

où B, α, β, γ sont des nombres réels et où m est un entier non négatif. La mesure ω étant $\tilde{G}$-invariante, on peut choisir α non inférieur à -1. Par suite, utilisant les inégalités $t\geqq\mu(y,x)\geqq A(1+x^2)^a$ et $|\log y-x|\leqq R$, on voit que pour k entier positif assez grand, la fonction $(y,x,t)\mapsto t^{-k}I(y,x,t)$ est $d\nu$-intégrable sur $\tilde{E}(R)$ au voisinage de x_∞.

Ce travail se divise en quatre parties:

0. Table des notations.
1. Énoncés des principaux résultats et lemmes préliminaires.
2. Sur la structure des groupes de Lie.
3. L'intégration le long des fibres.
4. Démonstration des principaux résultats.

Je remercie Z. Mebkhout pour des conversations intéressantes à propos de (4).

0. Table des notations

Dans ce texte, on utilisera très souvent les notations ci-dessous sans y faire référence.

0.1. Si G est un groupe, on désignera le plus souvent par e son élément neutre. Si G est un groupe topologique, on notera G_0 sa composante neutre. Si a *et* b sont des nombres réels, dire que a est non inférieur (resp. inférieur, non supérieur, supérieur) à b signifie que a est inférieur ou égal (resp. strictement inférieur, supérieur ou égal, strictement supérieur) à b. Si G est un groupe de Lie, on notera parfois L(G) son algèbre de Lie.

0.2. Si V est un espace vectoriel sur un corps quelconque, on note V* son dual. Si V est un espace vectoriel réel, on note $V \otimes \mathbb{C}$ son compléxifié et si v appartient à V*, on note aussi v l'élément de $(V \otimes \mathbb{C})^*$ qui prolonge v. En outre, si on s'est donné sur V une structure d'algèbre de Lie, celle-ci se prolonge à $V \otimes \mathbb{C}$ et en fait une algèbre de Lie complexe.

0.3. Soit V un espace vectoriel sur un corps k. Soit X un endomorphisme de V. Soient W et W′ deux sous-espaces vectoriels de V. On suppose que W et W′ sont invariants par X et que W contient W′. On note $A(X; W)$ la restriction de X à W et $A(X; W/W')$ l'endomorphisme de W/W′ que définit $A(X; W)$ par passage au quotient.

0.4. Soit $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie sur un corps k de caractéristique zéro. Soient $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathfrak{a}$. Soit X dans $\mathfrak{a}$. On suppose que $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ sont invariants par l'endomorphisme ad X de $\mathfrak{a}$ et que $\mathfrak{b}$ contient $\mathfrak{c}$. On écrit $\mathrm{ad}(X; \mathfrak{b})$ et $\mathrm{ad}(X; \mathfrak{b}/\mathfrak{c})$ au lieu de $A(\mathrm{ad}\, X; \mathfrak{b})$ et $A(\mathrm{ad}\, X; \mathfrak{b}/\mathfrak{c})$. Dans ce qui suit, on suppose: $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient A un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ et g un élément de A. On suppose $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ invariants par l'automorphisme Ad g de $\mathfrak{a}$. On écrit $\mathrm{Ad}(g; \mathfrak{b})$ et $\mathrm{Ad}(g; \mathfrak{b}/\mathfrak{c})$ au lieu de $A(\mathrm{Ad}\, g; \mathfrak{b})$ et $A(\mathrm{Ad}\, g; \mathfrak{b}/\mathfrak{c})$.

0.5. Soit G un groupe opérant à gauche sur un ensemble X. Pour tout x dans X, on note $G(x)$ le stabilisateur de x dans G et $G.x$ l'orbite de x sous l'action de G. Si G est un groupe de Lie, on note $\mathfrak{g}(x)$ l'algèbre de Lie de $G(x)$.

0.6. Soit X une variété algébrique définie sur un corps k de caractéristique zéro. Si K est une extension de k, on note X(K) l'ensemble des K-points de X. S'il existe sur X une structure de groupe algébrique, compatible avec la structure de variété algébrique, alors, d'après [8], corollaire, p. 44, X(K) est dense dans X, pour la topologie de Zariski, lorsque X est irréductible.

0.7. Soit X une variété algébrique définie sur un corps k. On note $\mathcal{O}_X$ son faisceau structural. On suppose que k est un sous-corps de $\mathbb{C}$. Conformément aux notations usuelles [10], on désigne par X^{an} l'espace analytique sous-jacent à la variété algébrique complexe, déduite de X par extension des scalaires. On note O_X^{an} le faisceau structural de l'espace analytique X^{an}. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau algébrique sur X, $\mathcal{F}^{an}$ désigne le faisceau analytique sur X^{an} déduit de $\mathcal{F}$. L'espace topologique sous-jacent à X^{an} est noté X_{cl}. L'ensemble des points de X_{cl} est $X(\mathbb{C})$ et sa topologie est la topologie de Hausdorff. Chaque fois que l'on utilisera la topologie de Zariski sur $X(\mathbb{C})$ on l'indiquera: par exemple, on dira d'une partie qu'elle est Zariski-dense.

0.8. Soient C et C′ deux catégories abéliennes. On suppose que C a suffisamment d'objets injectifs. Soit T un foncteur covariant additif de C dans C′. Si p est un entier, on note $R^p T$ le p-ième foncteur dérivé de T. Si $K^{\bullet}$ est un complexe d'objets de C, on note $\mathbf{R}^p T(K^{\bullet})$ le p-ième groupe d'hypercohomologie de T par rapport à $K^{\bullet}$ ([5], 11.4, p. 32).

0.9. Soit X un espace topologique. Soit $\mathbf{U}$ un recouvrement ouvert de X. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau de groupes abéliens sur X, on désigne par $C^*(\mathbf{U}, \mathcal{F})$ le complexe de cohomologie de Čech du faisceau $\mathcal{F}$ sur X, associé au recouvrement $\mathbf{U}$. Si $\mathcal{F}^*$ est un complexe de faisceaux de groupes abéliens sur X et si i est un entier, on note $\mathbf{H}^i(\mathbf{U}, \mathcal{F}^*)$ le i-ième groupe de cohomologie du complexe simple associé au complexe double $C^*(\mathbf{U}, \mathcal{F}^*)$.

0.10. On note $\mathbb{A}$ la droite affine $\mathrm{Sp}\,\mathbb{R}[X]$. On désigne par $\mathbf{G}_m$ et $\mathbf{G}_a$ les groupes algébriques, définis sur $\mathbb{R}$, multiplicatif et additif, de dimension 1. La variété algébrique sous-jacente à $\mathbf{G}_a$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{A}$. La variété algébrique sous-jacente à $\mathbf{G}_m$ est isomorphe à un ouvert de Zariski de $\mathbb{A}$. Pour n entier positif, on note $\mathbb{P}^n$ l'espace projectif défini sur $\mathbb{R}$ et de dimension n. Dans ce mémoire, on utilisera le plongement usuel de $\mathbb{A}^n$ dans $\mathbb{P}^n$.

0.11. Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique défini sur un corps k de caractéristique zéro. On désigne par $\mathbf{G}_u$ le radical unipotent de $\mathbf{G}$. Si $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie des k-points de $\mathbf{G}$, on note $\mathfrak{g}_u$ l'algèbre de Lie des k-points de $\mathbf{G}_u$.

0.12. Pour tout $(z, \alpha, m) = (z_1, \ldots, z_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, m_1, \ldots, m_n)$ dans $(\mathbb{C}^*)^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{N}^n$, on désigne par $|z|^\alpha (\log |z|)^m$ le produit:

$$(|z_1|^{\alpha_1} \ldots |z_n|^{\alpha_n})(\log |z_1|)^{m_1} \ldots (\log |z_n|)^{m_n}.$$

1. Énoncés des principaux résultats et lemmes préliminaires

1.1. Soit V un espace vectoriel réel, de dimension finie. Soit μ une mesure positive sur une partie borélienne de V. On dira que la mesure μ est *tempérée* s'il existe une norme $\|.\|$ sur V et un entier positif k pour lesquels l'intégrale: $\int (1 + \|x\|^2)^{-k} d\mu(x)$, est finie.

1.2. LEMME. — *Soit* G *un groupe localement compact. Soit* H *un sous-groupe fermé de* G, *contenant* [G, G]. *Soit* K *un sous-groupe fermé de* G. *S'il existe sur* G/R *une mesure relativement invariante de multiplicateur* γ, *alors il existe sur* $H/(H \cap K)$ *une mesure relativement invariante dont le multiplicateur est la restriction de* γ *à* H.

On note Δ_K et Δ_G les fonctions modules des groupes K et G. Dans les hypothèses du lemme, on a : $\gamma(g) = \Delta_K(g)\Delta_G(g)^{-1}$, pour tout g dans K. Puisque H contient [G, G], la restriction de Δ_G à H est la fonction module du groupe H et la restriction de Δ_K à $H \cap K$ est la fonction module du groupe $H \cap K$; donc la restriction de γ à H est le multiplicateur d'une mesure relativement invariante sur $H/(H \cap K)$.

1.3. Soit X une variété algébrique, définie sur $\mathbb{R}$. Soit $\mathbf{G}$ un groupe algébrique irréductible et défini sur $\mathbb{R}$. On suppose que $\mathbf{G}$ agit régulièrement dans X, au sens de la géométrie algébrique et que cette action est définie sur $\mathbb{R}$. Soit x_0 un point réel de X.

LEMME. — *On suppose que l'orbite* $\mathbf{G}.x_0$ *est dense dans* X *pour la topologie de Zariski. Il existe une variété algébrique, définie sur* $\mathbb{R}$, Y *et* π *un morphisme de* Y *dans* X *qui vérifient les conditions suivantes* :

(1) *le groupe* $\mathbf{G}$ *agit régulièrement dans* Y, *au sens de la géométrie algébrique et cette action est définie sur* $\mathbb{R}$;

(2) *le morphisme* π *est défini sur* $\mathbb{R}$, *fini et* $\mathbf{G}$-*équivariant*;

(3) *pour tout point* y *de* $\pi^{-1}(\{x_0\})$, *l'orbite* $\mathbf{G}.y$ *est dense dans* Y *pour la topologie de Zariski, contient* $\pi^{-1}(\{x_0\})$ *et* $\mathbf{G}(y)$ *est égal à* $\mathbf{G}(x_0)_0$;

(4) *la fibre* $\pi^{-1}(\{x_0\})$ *contient des points réels.*

Soit Γ le groupe algébrique $\mathbf{G}(x_0)/\mathbf{G}(x_0)_0$. Puisque le sous-groupe $\mathbf{G}(x_0)_0$ est invariant dans $\mathbf{G}(x_0)$, l'action à droite de $\mathbf{G}(x_0)$ dans $\mathbf{G}$ définit par passage au quotient une action régulière de Γ dans $\mathbf{G}/\mathbf{G}(x_0)_0$. Soit K′ le corps des fonctions rationnelles sur $\mathbf{G}/\mathbf{G}(x_0)_0$. Puisque $\mathbf{G}$ est irréductible et que $\mathbf{G}.x_0$ est dense dans X pour la topologie de Zariski, X est irréductible et son corps de fonctions rationnelles est égal à celui de $\mathbf{G}.x_0$. Il est canoniquement isomorphe au sous-corps K des éléments de K′ invariants par Γ.

Soit $(U_1, \ldots, U_n)$ un recouvrement de X par des ouverts affines, définis sur $\mathbb{R}$. Pour $i, j = 1, \ldots, n$, on note A_{ij} l'algèbre des fonctions régulières sur $U_i \cap U_j$, $\tilde{A}_{ij}$ la clôture intégrale de A_{ij} dans K′ et p_{ij} le morphisme de $\mathrm{Sp}(\tilde{A}_{ij})$ dans $\mathrm{Sp}(\tilde{A}_{ii})$ dont le comorphisme est l'injection canonique de $\tilde{A}_{ii}$ dans $\tilde{A}_{ij}$. Le morphisme p_{ij} est un isomorphisme de $\mathrm{Sp}(\tilde{A}_{ij})$ sur un ouvert de Zariski de $\mathrm{Sp}(\tilde{A}_{ii})$ car $\tilde{A}_{ij}$ est l'intersection des clôtures intégrales des localisés de A_{ii} en tout point non nul de l'idéal de définition du complémentaire de $U_i \cap U_j$ dans U_i. Il est clair que les morphismes p_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, satisfont les conditions de [6], exercice 2.12. On note Y le recollement des $\mathrm{Sp}(\tilde{A}_{ii})$, $i = 1, \ldots, n$, le long des morphismes p_{ij}. La variété algébrique Y est irréductible et définie sur $\mathbb{R}$. Les injections canoniques de A_{ii} dans $\tilde{A}_{ii}$, $i = 1, \ldots, n$, définissent par recollement un morphisme π de Y dans X. Ce morphisme est défini sur $\mathbb{R}$. Pour $i = 1, \ldots, n$, $\pi^{-1}(U_i)$ est un ouvert affine et le comorphisme de la restriction de π à $\pi^{-1}(U_i)$ est l'injection canonique de A_{ii} dans $\tilde{A}_{ii}$; or Γ est fini; donc π est un morphisme fini. Les actions de Γ dans les $\tilde{A}_{ii}$ définissent par recollement une action régulière de Γ dans Y. Pour $i = 1, \ldots, n$, $\pi^{-1}(U_i)$ est invariant par Γ. Soit $\tilde{X}$ le normalisé de X. Dans le cas où Γ est trivial, la construction précédente donne $\tilde{X}$; donc il existe un morphisme canonique de Y dans $\tilde{X}$. On le note $\tilde{\pi}$. Pour tout x dans $\tilde{X}$, le groupe Γ opère transitivement sur la fibre $\tilde{\pi}^{-1}(\{x\})$.

D'après [11], le groupe $\mathbf{G}$ agit régulièrement dans $\tilde{X}$ et le morphisme canonique de $\tilde{X}$ dans X est $\mathbf{G}$-équivariant. Soit U un ouvert affine, non vide de $\mathbf{G}.x_0$. L'ouvert $\pi^{-1}(U)$ est affine et l'algèbre des fonctions régulières sur $\pi^{-1}(U)$ est la clôture intégrale dans K′ de l'algèbre des fonctions régulières sur U. Puisque le morphisme canonique de $\mathbf{G}/\mathbf{G}(x_0)_0$ dans $\mathbf{G}/\mathbf{G}(x_0)$ est fini, il existe un isomorphisme Φ de $\pi^{-1}(U)$ sur l'image réciproque de U dans $\mathbf{G}/\mathbf{G}(x_0)_0$. Soit $V=\{(g,x,y)\in\mathbf{G}\times\pi^{-1}(U)\times\pi^{-1}(U);\ g.\Phi(x)=\Phi(y)\}$. L'adhérence $\bar{V}$ de V dans $\mathbf{G}\times Y\times Y$ est irréductible car Y et $\mathbf{G}$ le sont. L'image de $\bar{V}$ par $\mathrm{id}_{\mathbf{G}}\times\tilde{\pi}\times\tilde{\pi}$ est le graphe du morphisme de $\mathbf{G}\times\tilde{X}$ dans $\tilde{X}$ qui définit l'action de $\mathbf{G}$ dans $\tilde{X}$. Puisque $\pi^{-1}(U)$ est invariant par Γ et que les actions de $\mathbf{G}$ et de Γ dans $\mathbf{G}/\mathbf{G}(x_0)_0$ commutent, $\bar{V}$ est invariant par $\mathrm{id}_{\mathbf{G}}\times\gamma\times\gamma$, pour tout γ dans Γ; or $\mathbf{G}\times\tilde{X}$ est l'image de $\bar{V}$ par le produit de la projection canonique de $\mathbf{G}\times Y\times Y$ sur $\mathbf{G}\times Y$ et du morphisme $\mathrm{id}_{\mathbf{G}}\times\tilde{\pi}$; donc d'après ce qui précède, l'image de $\bar{V}$ par la projection canonique de $\mathbf{G}\times Y\times Y$ sur $\mathbf{G}\times Y$ est $\mathbf{G}\times Y$. La variété $\mathbf{G}\times Y$ étant normale et le morphisme $\tilde{\pi}$ étant fini, il résulte du théorème principal de Zariski que $\bar{V}$ est le graphe d'un morphisme de $\mathbf{G}\times Y$ dans Y. Ce morphisme définit une action régulière de $\mathbf{G}$ dans Y car $\bar{V}$ contient V. En outre, pour cette action, π est $\mathbf{G}$-équivariant. D'après ce qui précède, $\bar{V}$ est une composante irréductible de l'image réciproque par $\mathrm{id}_{\mathbf{G}}\times\pi\times\pi$ du graphe du morphisme de $\mathbf{G}\times X$ dans X qui définit l'action de $\mathbf{G}$ dans X; or cette action est définie sur $\mathbb{R}$; donc l'action de $\mathbf{G}$ dans Y est définie sur $\mathbb{R}$.

Puisque π est fini et $\mathbf{G}$-équivariant, pour tout y dans $\pi^{-1}(\{x_0\})$, $\mathbf{G}.y$ est ouvert dans Y et $\mathbf{G}(y)$ est contenu dans $\mathbf{G}(x_0)$; donc $\mathbf{G}.y$ contient $\pi^{-1}(\{x_0\})$ et $\mathbf{G}(y)$ est égal à $\mathbf{G}(x_0)$. Soit B l'anneau local en $\mathbf{G}(x_0)_0$ de la variété $\mathbf{G}/\mathbf{G}(x_0)_0$. Puisque $\mathbf{G}/\mathbf{G}(x_0)_0$ est lisse, B est un sous-anneau local de K′, intégralement clos. L'orbite $\mathbf{G}.x_0$ étant ouverte dans X, l'anneau local A en x_0 de X contient l'un des A_{ii}; or A est contenu dans B; donc B contient l'un des A_{ii}. L'anneau B étant l'anneau local d'un point réel de $\mathbf{G}/\mathbf{G}(x_0)_0$, l'idéal maximal de B définit un point réel de Y dont l'image par π est x_0.

1.4. Corollaire (les notations sont celles de 1.3). — *Soit* G *un sous-groupe de* $\mathbf{G}(\mathbb{R})$, *fermé, connexe pour la topologie de Hausdorff et dense dans* $\mathbf{G}$ *pour la topologie de Zariski. On suppose que l'orbite* $G.x_0$ *est fermée dans* $X(\mathbb{R})$ *pour la topologie de Hausdorff. Alors pour tout point réel* y_0 *de* $\pi^{-1}(\{x_0\})$, *l'orbite* $G.y_0$ *est fermée dans* $Y(\mathbb{R})$ *pour la topologie de Hausdorff.*

Puisque π est $\mathbf{G}$-équivariant, $\pi^{-1}(G.x_0)$ est réunion finie de G-orbites qui rencontrent $\pi^{-1}(\{x_0\})$. Dans ce qui suit, on utilise la topologie de Hausdorff. Soit y_0 un point réel de $\pi^{-1}(\{x_0\})$. Puisque $G.x_0$ est fermé dans $X(\mathbb{R})$, le sous-groupe $G\mathbf{G}(\mathbb{R})_0(x_0)$ est fermé dans $\mathbf{G}(\mathbb{R})_0$; or $G\mathbf{G}(\mathbb{R})_0(y_0)$ est ouvert dans $G\mathbf{G}(\mathbb{R})_0(x_0)$; donc l'orbite $G.y_0$ est fermée dans $\mathbf{G}(\mathbb{R})_0.y_0$. L'adhérence de $\mathbf{G}(\mathbb{R})_0.y_0$ dans $Y(\mathbb{R})$ est la réunion de $\mathbf{G}(\mathbb{R})_0.y_0$ et de $\mathbf{G}(\mathbb{R})_0$-orbites de dimension strictement inférieure; or l'orbite sous $\mathbf{G}(\mathbb{R})_0$ de tout point réel de $\pi^{-1}(G.x_0)$ est de dimension égale à celle de $\mathbf{G}(\mathbb{R})_0.y_0$ car $\mathbf{G}.y_0$ est égal à $\pi^{-1}(\mathbf{G}.x_0)$; donc l'intersection de $\pi^{-1}(G.x_0)$ et de $\mathbf{G}(\mathbb{R})_0.y_0$ est fermée dans $Y(\mathbb{R})$. Par suite, $G.y_0$ est fermé dans $Y(\mathbb{R})$.

1.5. Soient X, $\mathbf{G}$ et x_0 comme en 1.3. On suppose *qu'il existe un caractère* rationnel γ de $\mathbf{G}$ et une mesure relativement invariante, non nulle, de multiplicateur $|\gamma|$ sur l'orbite $\mathbf{G}(\mathbb{R})_0 . x_0$.

THÉORÈME. — *On suppose* X *affine. Soit* G *un sous-groupe de* $\mathbf{G}(\mathbb{R})$, *fermé, connexe pour la topologie de Hausdorff et dense dans* $\mathbf{G}$ *pour la topologie de Zariski. On suppose que l'orbite* $\mathrm{G}.x_0$ *est fermée dans* $\mathrm{X}(\mathbb{R})$ *pour la topologie de Hausdorff. Soit* F *une fonction régulière sur* X *dont la restriction à* $\mathrm{X}(\mathbb{R})$ *est propre pour la topologie de Hausdorff sur* $\mathrm{X}(\mathbb{R})$ *et prend des valeurs réelles non inférieures à* 1. *Il existe des mesures relativement invariantes sur* $\mathrm{G}.x_0$ *dont le multiplicateur est la restriction de* $|\gamma|$ *à* G. *Si* G *contient* $\mathbf{G}_u(\mathbb{R})_0$ (0.6, 0.11), *alors pour* k *entier positif assez grand, la fonction :* $x \mapsto \mathrm{F}(x)^{-k}$, *est intégrable relativement à de telles mesures. En outre, lorsque* G *ne contient pas* $\mathbf{G}_u(\mathbb{R})_0$ *et lorsque* γ *est trivial, alors pour* k *entier positif assez grand, la fonction :* $x \mapsto \mathrm{F}(x)^{-k}$ (0.12), *est intégrable relativement à toute mesure invariante sur* $\mathrm{G}.x_0$.

Puisque G est connexe et dense dans $\mathbf{G}$ pour la topologie de Zariski, il contient $[\mathbf{G}(\mathbb{R})_0, \mathbf{G}(\mathbb{R})_0]$. La première partie du théorème résulte alors de 1.2. Il suffit de démontrer le théorème dans le cas où $\mathbf{G}.x_0$ est dense dans X pour la topologie de Zariski. Soient Y et π comme en 1.4. Soit y_0 un point réel de Y dont l'image par π est x_0. Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$. Soit γ' le caractère rationnel de $\mathbf{G}$ tel que $\gamma'(g)$ soit égal à $|\gamma(g)|$ pour tout g dans $\mathbf{G}(\mathbb{R})_0$. On note aussi γ' la différentielle de γ' en e (0.1). Par hypothèse, pour tout ξ dans $\mathfrak{g}(x_0)$, $\gamma'(\xi)$ est égal à la trace de $\mathrm{ad}(\xi; \mathfrak{g}/\mathfrak{g}(x_0))$ (0.4). Puisque $\mathbf{G}(y_0)$ est égal à $\mathbf{G}(x_0)_0$, d'après [9], corollaire p.44, $\mathbf{G}(\mathbb{R})(x_0)_0$ est dense dans $\mathbf{G}(y_0)$ pour la topologie de Zariski; donc sur $\mathbf{G}.y_0$ existe une forme différentielle, de degré maximum, relativement invariante et de multiplicateur γ'. Puisque le morphisme π est fini, la restriction de $\mathrm{F}\circ\pi$ à $\mathrm{Y}(\mathbb{R})$ est propre pour la topologie de Hausdorff sur $\mathrm{Y}(\mathbb{R})$; or d'après le lemme 1.4, l'orbite $\mathrm{G}.y_0$ est fermée dans $\mathrm{Y}(\mathbb{R})$; donc pour démontrer la deuxième partie du théorème, on peut supposer : *il existe sur* $\mathbf{G}.x_0$ *une forme différentielle, de degré maximum, non nulle et relativement invariante ou invariante lorsque* G *contient* $\mathbf{G}_u(\mathbb{R})_0$. Sous cette hypothèse, la deuxième partie du théorème sera démontrée en 4.5.

1.6. COROLLAIRE. — *Soit* V *un espace vectoriel réel de dimension finie. Soit* $\|.\|$ *une norme sur* V. *Soit* G *un sous-groupe fermé connexe de* $\mathrm{GL}(\mathrm{V})$. *Soit* $\tilde{\mathrm{G}}$ *la composante neutre de l'adhérence de Zariski de* G *dans* $\mathrm{GL}(\mathrm{V})$. *Soit* v *dans* V. *On suppose qu'il existe une mesure invariante non nulle sur* $\tilde{\mathrm{G}}.v$ *et que* $\mathrm{G}.v$ *est fermé dans* V. *Alors il existe sur* $\mathrm{G}.v$ *des mesures invariantes et toute mesure invariante sur* $\mathrm{G}.v$ *est tempérée.*

1.7. LEMME. — *Soit* G *un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$. *On note* $\tilde{\mathrm{G}}$ *l'adhérence de* $\mathrm{Ad}(\mathrm{G})$ *dans* $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ *pour la topologie de Zariski. Soit* f *dans* $\mathfrak{g}^*$. *Alors il existe une mesure invariante sur l'orbite* $\tilde{\mathrm{G}}.f$.

Soit $\tilde{\mathfrak{g}}$ l'algèbre de Lie de $\tilde{\mathrm{G}}$. Si g est dans $\tilde{\mathrm{G}}(f)$, l'automorphisme $\mathrm{A}(g; \mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f))$ laisse invariante la forme bilinéaire : $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \to \langle f, [\mathrm{X}, \mathrm{Y}] \rangle$ sur $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$; donc $\det \mathrm{A}(g; \mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f))$ est égal à 1, pour tout g dans $\tilde{\mathrm{G}}(f)$. Puisque $(\mathrm{Ad}\, g - 1)(\tilde{\mathfrak{g}})$ est contenu dans $\mathrm{ad}\, \mathfrak{g}$, pour tout g dans $\tilde{\mathrm{G}}$, $\det[\mathrm{Ad}(g; \tilde{\mathfrak{g}}/\tilde{\mathfrak{g}}(f))]$ est égal à 1 pour tout g dans $\tilde{\mathrm{G}}(f)$; donc il existe une mesure $\tilde{\mathrm{G}}$-invariante sur $\tilde{\mathrm{G}}.f$.

1.8. THÉORÈME. — *Soit* G *un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$. *Soit* f *dans* $\mathfrak{g}^*$. *Si l'orbite* $G.f$ *est fermée dans* $\mathfrak{g}^*$, alors toute mesure invariante sur $G.f$ *est tempérée.*

Le théorème résulte de 1.7 et 1.6.

2. Sur la structure des groupes de Lie

2.1. Soient X, **G** et x_0 comme en 1.3. Soit G un sous-groupe fermé de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ (0.6) dense dans **G** pour la topologie de Zariski. On note $\tilde{G}$ le sous-groupe de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ engendré par G, $\mathbf{G}(\mathbb{R})(x_0)$, $[\mathbf{G},\mathbf{G}](\mathbb{R})$ et l'ensemble des points réels de la composante anisotrope d'un tore maximal, défini sur $\mathbb{R}$, de **G**.

LEMME. — *Si l'orbite* $G.x_0$ *est fermée dans* $X(\mathbb{R})$ (0.6), *alors* $\tilde{G}$ *est fermé dans* $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ *et* $\tilde{G}.x_0$ *est fermé dans* $X(\mathbb{R})$.

Puisque $\tilde{G}$ contient $\mathbf{G}(\mathbb{R})(x_0)$, il suffit de montrer que $\tilde{G}.x_0$ est fermé dans $X(\mathbb{R})$. Soit H le sous-groupe de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ engendré par G et $[\mathbf{G},\mathbf{G}](\mathbb{R})$. Puisque G est Zariski-dense dans **G**, G est un sous-groupe d'indice fini de H; or $G.x_0$ est fermé dans $X(\mathbb{R})$; donc $H.x_0$ est fermé dans $X(\mathbb{R})$. Soit T l'ensemble des points réels de la composante anisotrope d'un tore maximal, défini sur $\mathbb{R}$, de **G**. L'orbite $\tilde{G}.x_0$ est égale à $TH.x_0$; or T est compact et $H.x_0$ est fermé dans $X(\mathbb{R})$; donc $\tilde{G}.x_0$ est fermé dans $X(\mathbb{R})$.

2.2. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie algébrique réelle. Soit $\mathfrak{h}$ un idéal algébrique de $\mathfrak{g}$, contenant $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ et la partie anisotrope d'un tore de dimension maximale de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{k}$ un idéal de $\mathfrak{g}$, distinct de $\mathfrak{g}$, contenant $\mathfrak{h}$ tel que $\mathfrak{k}\cap\mathfrak{g}_u$ (0.11) soit égal à $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}_u$ et pour lequel tout élément de $\mathfrak{g}$ est réplique d'un élément de $\mathfrak{k}$.

LEMME. — *Dans l'espace* $\mathfrak{h}^\perp$ *des formes linéaires sur* $\mathfrak{g}$, *nulles sur* $\mathfrak{h}$, *existe une base* $(c_1, \ldots, c_k, a_1, \ldots, a_l)$ $(k\geqq 1,\ l\geqq 0)$ *qui vérifie les conditions suivantes*:

(1) $c_1, \ldots, c_k$ *sont des caractères rationnels de* $\mathfrak{g}$.

(2) $a_1, \ldots, a_l$ *ne sont pas des caractères rationnels de* $\mathfrak{g}$, *mais leurs noyaux sont des idéaux algébriques de* $\mathfrak{g}$.

(3) *Les restrictions à* $\mathfrak{k}$ *de* $c_1, \ldots, c_p$ $(1\leqq p\leqq k)$ *forment une base de l'espace des formes linéaires sur* $\mathfrak{k}$, *nulles sur* $\mathfrak{h}$.

Soit $\mathfrak{l}_1$ un facteur réductif dans $\mathfrak{h}$. D'après [8], $\mathfrak{l}_1$ est contenu dans un facteur réductif $\mathfrak{l}$ de $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{t}$ un tore contenu dans le centre de $\mathfrak{l}$ tel que: $\mathfrak{l}=\mathfrak{t}\oplus\mathfrak{l}_1$. Soit $\mathfrak{m}$ un supplémentaire de $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}_u$ dans $\mathfrak{g}_u$, stable par $\mathfrak{l}$. On a: $\mathfrak{g}=\mathfrak{t}\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{k}+\mathfrak{g}_u=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{m}$ car $\mathfrak{k}\cap\mathfrak{g}_u$ est égal à $\mathfrak{h}\cap\mathfrak{g}_u$. On note $\mathfrak{t}'$ l'intersection: $(\mathfrak{k}+\mathfrak{g}_u)\cap\mathfrak{t}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est algébrique et commutative. Le tore maximal de $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ et $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})_u$ sont respectivement l'image de $\mathfrak{t}$ et de $\mathfrak{m}$ par l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$; or $\mathfrak{k}$ est distinct de $\mathfrak{g}$, contient $\mathfrak{h}$ et tout élément de $\mathfrak{m}$ est la partie nilpotente d'un élément de $\mathfrak{k}$; donc $\mathfrak{t}'$ et $\mathfrak{t}$ ne sont pas réduits à $\{0\}$. Puisque $\mathfrak{h}$ contient la partie anisotrope d'un tore de dimension maximale de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{t}$ est un tore déployé; donc dans $\mathfrak{t}^*$ existe une base formée de caractères rationnels. Soit $(c_1, \ldots, c_k)$ une telle base, ordonnée de façon que les restrictions à $\mathfrak{t}'$ de $c_1, \ldots, c_p$ $(1\leqq p\leqq k)$ forment une base de $(\mathfrak{t}')^*$. Pour $i=1, \ldots, k$, on note aussi c_i le caractère rationnel de $\mathfrak{g}$ qui prolonge c_i et qui est nul sur $\mathfrak{h}+\mathfrak{g}_u$. Soient $(X_1, \ldots, X_l)$ une base de

$\mathfrak{m}$ et $(a_1, \ldots, a_l)$ sa base duale. Pour $i=1, \ldots, l$, on note aussi a_i la forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ qui prolonge a_i et qui est nulle sur $\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{h}$. Il est alors clair que la famille $(c_1, \ldots, c_k, a_1, \ldots, a_l)$ vérifie les conditions du lemme.

2.3. On reprend les notations de 2.1. On suppose que $\mathbf{G}(\mathbb{R}).x_0$ n'est pas fermé dans $\mathrm{X}(\mathbb{R})$. Soient $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{k}$ l'algèbre de Lie de $\tilde{\mathrm{G}}$. Soit $\mathfrak{h}$ l'idéal de $\mathfrak{g}$ engendré par $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]+\mathfrak{g}(x_0)+(\mathrm{L}(\mathrm{G}) \cap \mathfrak{g}_u)$ (0.1, 0.5, 0.11) et la partie anisotrope d'un tore de dimension maximale de $\mathfrak{g}$. Comme en 2.2, $\mathfrak{h}$ est un idéal algébrique de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ contient $\mathfrak{h}$ et tout élément de $\mathfrak{g}$ est réplique d'un élément de $\mathfrak{k}$ car G est Zariski-dense dans $\mathbf{G}$. Puisque $\mathbf{G}(\mathbb{R}).x_0$ n'est pas fermé dans $\mathrm{X}(\mathbb{R})$, il résulte de 2.1 que $\mathfrak{k}$ est distinct de $\mathfrak{g}$. Soit $(c_1, \ldots, c_k, a_1, \ldots, a_l)$ une base de $\mathfrak{h}^{\perp}$ qui vérifie les conditions de 2.2 relativement à $\mathfrak{k}$. On note $\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_k$ les caractères rationnels de $\mathbf{G}$ dont les différentielles sont respectivement $c_1, \ldots, c_k$. Pour $i=1, \ldots, l$, on désigne par A_i le morphisme de $\mathbf{G}$ dans le groupe algébrique additif $\mathbf{G}_a$(0.10), dont la différentielle est a_i. Soit $\tilde{\mathrm{G}}_1$ le sous-groupe de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ engendré par $\tilde{\mathrm{G}}$ et l'ensemble des points réels de l'intersection des noyaux de $\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_k, \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_l$. Puisque $\mathfrak{k}$ contient $\mathfrak{h}$, $\tilde{\mathrm{G}}$ est un sous-groupe d'indice fini de $\tilde{\mathrm{G}}_1$. On note G_1 le sous-groupe de $\mathbf{G}(\mathbb{R})$ engendré par $\tilde{\mathrm{G}}_1$ et $\mathbf{G}(\mathbb{R})_0$.

D'après la propriété (3) de 2.2, il existe des réels α_{ij}, $p+1 \leqq i \leqq k$, $1 \leqq j \leqq p$, et β_{fj}, $1 \leqq f \leqq l$, $1 \leqq j \leqq p$, pour lesquels les formes linéaires: $c_i-\alpha_{i1} c_1-\ldots-\alpha_{ip} c_p$, $i=p+1, \ldots, k$ et $a_f-\beta_{f1} c_1-\ldots-\beta_{fp}\; c_p$, $f=1, \ldots, l$ sont nulles sur $\mathfrak{k}$. Pour $i=p+1, \ldots, k$ et $f=1, \ldots, l$, on note φ_i et ψ_f les fonctions sur $(\mathbb{R}_+^*)^k \times \mathbb{R}^l$ définies par:

$$\varphi_i(y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_l)=y_i y_1^{-\alpha_{i1}} \ldots y_p^{-\alpha_{ip}}$$

et

$$\psi_f(y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_l)=x_f-\beta_{f1} \log(y_1)-\ldots-\beta_{fp} \log(y_p).$$

On désigne par Φ l'application de $(\mathbb{R}_+^*)^k \times \mathbb{R}^l$ dans $(\mathbb{R}_+^*)^{k-p} \times \mathbb{R}^l$, définie par:

$$\begin{aligned}\Phi&(y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_l)\\ &=(\varphi_{p+1}(y_1, \ldots, x_l), \ldots, \varphi_k(y_1, \ldots, x_l), \psi_1(y_1, \ldots, x_l), \ldots, \psi_l(y_1, \ldots, x_l)).\end{aligned}$$

Lemme (les notations et les hypothèses sont celles de 2.1, 2.2 et 2.3). — *On suppose* $\mathbf{G}(x_0)$ *irréductible. On note* $\mathbf{H}$ *l'intersection des noyaux de* $\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{A}_l$. *Soit* F *une fonction régulière sur* $\mathbf{X}$ *dont la restriction à* $\mathrm{X}(\mathbb{R})$ *est propre et prend des valeurs réelles non inférieures à* 1.

(i) *Le morphisme*: $g \mapsto (\mathrm{C}_1(g), \ldots, \mathrm{C}_k(g),\ \mathrm{A}_1(g), \ldots, \mathrm{A}_l(g))$ *de* $\mathbf{G}$ *dans* $(\mathbf{G}_m)^k \times (\mathbf{G}_a)^l$ (0.10) *définit par passage au quotient un morphisme ouvert et lisse de* $\mathbf{G}.x_0$ *dans* $(\mathbf{G}_m)^k \times (\mathbf{G}_a)^l$. *On le note* ρ.

(ii) *Pour tout* z *dans* $(\mathbf{G}_m)^k \times (\mathbf{G}_a)^l$, $\rho^{-1}(\{z\})$ *est une* $\mathbf{H}$-*orbite*.

On note ρ_1 *la restriction de* ρ *à* $\mathrm{G}_1.x_0$. *Pour tout* z *dans* $(\mathbb{R}_+^*)^k \times \mathbb{R}^l$, *on pose*:

$$\mu(z)=\inf\{\mathrm{F}(x);\ \rho_1(x)=z\}.$$

(iii) *Pour tout* z *dans* $(\mathbb{R}_+^*)^k \times \mathbb{R}^l$, $\rho_1^{-1}(\{z\})$ *est une* $\mathbf{H}(\mathbb{R})$-*orbite*.

(iv) *Pour tout* z *dans* $(\mathbb{R}_+^*)^{k-p} \times \mathbb{R}^l$, $(\Phi \circ \rho_1)^{-1}(\{z\})$ *est une* $\tilde{G}_1$*-orbite.*

(v) *L'application* $\rho_1 \times F$ *de* $G_1 . x_0$ *dans* $(\mathbb{R}_+^*)^k \times \mathbb{R}^l$ *est propre.*

(vi) *La fonction :* $z \mapsto \mu(z)$ *sur* $(\mathbb{R}_+^*)^k \times \mathbb{R}^l$ *est continue.*

(vii) *Si* F *n'est pas bornée sur* $\mathbf{H}(\mathbb{R}).x_0$, *pour tout* z *dans* $(\mathbb{R}_+^*)^k \times \mathbb{R}^l$, *l'image par* F *de* $\rho_1^{-1}(\{z\})$ *est* $[\mu(z), +\infty[$.

(viii) *L'application* $\Phi \times \mu$ *de* $(\mathbb{R}_+^*)^k \times \mathbb{R}^l$ *dans* $(\mathbb{R}_+^*)^{k-p} \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}$ *est propre.*

(i) Puisque $\mathbf{G}(x_0)$ est irréductible et que $\mathfrak{h}$ contient $\mathfrak{g}(x_0)$, les fonctions régulières $C_1, \ldots, A_l$ sont constantes sur $\mathbf{G}(x_0)$; donc le morphisme : $g \mapsto (C_1(g), \ldots, A_l(g))$ de $\mathbf{G}$ dans $(\mathbf{G}_m)^k \times (\mathbf{G}_a)^l$ définit par passage au quotient un morphisme ρ de $\mathbf{G}.x_0$ dans $(\mathbf{G}_m)^k \times (\mathbf{G}_a)^l$. Le morphisme :

$$(g, y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_l) \mapsto (C_1(g)\, y_1, \ldots, C_k(g)\, y_k, x_1 + A_1(g), \ldots, x_l + A_l(g))$$

de $\mathbf{G}$ dans $\mathbf{G} \times (\mathbf{G}_m)^k \times (\mathbf{G}_a)^l$, définit une action régulière de $\mathbf{G}$ dans $(\mathbf{G}_m)^k \times (\mathbf{G}_a)^l$, pour laquelle ρ est équivariant; or pour cette action $\mathbf{G}$ opère transitivement; donc ρ est un morphisme lisse de $\mathbf{G}.x_0$ sur $(\mathbf{G}_m)^k \times (\mathbf{G}_a)^l$.

(ii) résulte de ce que $\mathbf{H}$ est le stabilisateur de tout point de $(\mathbf{G}_m)^k \times (\mathbf{G}_a)^l$.

(iii) résulte de l'égalité : $G_1 = (G_1)_0\, \mathbf{H}(\mathbb{R})$.

(iv) On note $\tilde{\varphi}_{p+1}, \ldots, \tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_l$ les fonctions sur G_1 pour lesquelles on a :

$$\Phi \circ \rho_1(g.x_0) = (\tilde{\varphi}_{p+1}(g), \ldots, \tilde{\varphi}_k(g), \tilde{\varphi}_1(g), \ldots, \tilde{\varphi}_1(g)), \quad \text{pour tout } g \text{ dans } G_1.$$

L'application $\Phi \circ \rho_1$ de $G_1 . x_0$ dans $(\mathbb{R}_+^*)^k \times \mathbb{R}^l$ est G_1-équivariante pour l'action de G_1 dans $(\mathbb{R}_+^*)^{k-p} \times \mathbb{R}^l$ définie par :

$$g.(y_{p+1}, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_l) = (\tilde{\varphi}_{p+1}(g)\, y_{p+1}, \ldots, \tilde{\varphi}_k(g)\, y_k, x_l + \tilde{\varphi}_1(g), \ldots, x_l + \tilde{\varphi}(g)).$$

Le groupe $\tilde{G}_1$ est le sous-groupe de G_1 engendré par $\mathbf{H}(\mathbb{R})$ et le sous-groupe analytique de G_1 d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$; or $\mathfrak{k}$ est l'intersection des noyaux des différentielles de $\tilde{\varphi}_{p+1}, \ldots, \tilde{\varphi}_k, \tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_l$; donc le stabilisateur de tout point de $(\mathbb{R}_+^*)^{k-p} \times \mathbb{R}^l$ pour l'action définie ci-dessus, est $\tilde{G}_1$. L'assertion résulte alors de ce que $\Phi \circ \rho_1$ est G_1-équivariante.

(v) D'après 2.1, $\tilde{G}.x_0$ est fermé dans $X(\mathbb{R})$; or $\tilde{G}$ est un sous-groupe d'indice fini de $\tilde{G}_1$ et $\mathbf{H}(\mathbb{R})$ est un sous-groupe fermé de $\tilde{G}_1$ qui contient $\tilde{G}_1(x_0)$; donc l'orbite $\mathbf{H}(\mathbb{R}).x_0$ est fermée dans $X(\mathbb{R})$. Les $\mathbf{H}(\mathbb{R})$-orbites dans $G_1 . x_0$ sont fermées dans $X(\mathbb{R})$ car G_1 les permute; or la restriction de F à $X(\mathbb{R})$ est propre; donc pour tout (z, t) dans $(\mathbb{R}_+^*)^k \times \mathbb{R}^l$, $\rho_1^{-1}(\{z\}) \cap \{x \in X(\mathbb{R});\, F(x) \leqq t\}$ est compact. L'assertion résulte alors de ce que ρ_1 est une application ouverte.

(vi) Soient z dans $(\mathbb{R}_+^*)^k \times \mathbb{R}^l$ et ε un réel positif. Puisque $\rho_1 \times F$ est propre, il existe x dans $\rho_1^{-1}(\{z\})$ pour lequel on a : $F(x) = \mu(z)$. Soit V un voisinage ouvert de x dans $G_1 . x_0$ tel que : $F(x) - \varepsilon < F(y) < F(x) + \varepsilon$, pour tout y dans V. D'après (iii), $\rho_1(\{y \in G_1 . x_0;\, F(y) \leqq F(x) - \varepsilon\})$ est fermé dans $(\mathbb{R}_+^*)^k \times \mathbb{R}^l$; or $\rho_1(V)$ est ouvert, contient z et pour tout z' dans $\rho_1(V)$, $\mu(z')$ est strictement inférieur à $\mu(z) + \varepsilon$; donc μ est continu en z.

(vii) Soit z dans $\mathfrak{h}$. Soit x dans $\rho_1^{-1}(\{z\})$ tel que $F(x)$ soit égal à $\mu(z)$. D'après (v), l'image de $\mathbf{H}(\mathbb{R})_0 . x$ par F est un intervalle borné si et seulement si $\mathbf{H}(\mathbb{R})_0 . x$ est compact; or G_1 permute les $\mathbf{H}(\mathbb{R})_0$-orbites dans $G_1 . x_0$, $\mathbf{H}(\mathbb{R}) . x_0$ est fermé dans $X(\mathbb{R})$ et réunion finie de $\mathbf{H}(\mathbb{R})_0$-orbites, et F n'est pas bornée sur $\mathbf{H}(\mathbb{R}) . x_0$; donc l'image de $\rho_0^{-1}(\{z\})$ par F est l'intervalle $[\mu(z), +\infty[$.

(viii) D'après 2.1, $\tilde{G} . x_0$ est fermé dans $X(\mathbb{R})$; or $\tilde{G}$ est un sous-groupe d'indice fini de $\tilde{G}_1$ et G_1 permute les $\tilde{G}_1$-orbites dans $G_1 . x_0$; donc les $\tilde{G}_1$-orbites dans $G_1 . x_0$ sont fermées dans $X(\mathbb{R})$. D'après (iv), pour tout (z, t) dans $(\mathbb{R}_+^*)^k \times \mathbb{R}^l$, $(\Phi \circ \rho_1)^{-1}(\{z\}) \cap \{x \in X(\mathbb{R}); F(x) \leqq t\}$ est alors compact car la restriction de F à $X(\mathbb{R})$ est propre; donc $\Phi^{-1}(\{z\}) \cap \{z' \in (\mathbb{R}_+^*)^k \times \mathbb{R}^l; \mu(z') \leqq t\}$ est compact. L'assertion résulte alors de ce que l'application Φ est ouverte.

2.4. On conserve les notations des paragraphes précédents. On suppose que la restriction de F à $\mathbf{H}(\mathbb{R}) . x_0$ n'est pas bornée. Soit $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ une base de $\mathfrak{h}$. Pour x dans X, on note $F'(x)$ la différentielle de F en x. Soit Y le fermé de Zariski de $\mathbf{G} . x_0$ défini par les égalités : $\langle F'(x), \xi_1 . x \rangle = \ldots = \langle F'(x), \xi_n . x \rangle = 0$. Il est défini sur $\mathbb{R}$.

LEMME. — (*i*) *L'image de* Y *par* $\rho \times F$ *n'est pas dense dans* $(\mathbf{G}_m)^k \times (\mathbf{G}_a)^l \times \mathbb{A}$ *pour la topologie de Zariski.*

(ii) *L'ensemble des points lisses de l'adhérence de Zariski de* $(\rho \times F)(Y)$ *qui sont dans le graphe de la fonction* μ, *est une partie ouverte non vide de l'ensemble des points réels de* $\rho \times F(Y)$.

(iii) *La restriction du morphisme* $\rho \times F$ *au complémentaire de* Y *dans* $\mathbf{G} . x_0$ *est un morphisme lisse de cet ouvert de Zariski sur un ouvert de Zariski de* $(\mathbf{G}_m)^k \times (\mathbf{G}_a)^l$.

(i) Pour tout z dans $(\mathbf{G}_m)^k \times (\mathbf{G}_a)^l$, F est constante sur chaque composante irréductible de l'intersection de Y et de $\rho^{-1}(\{z\})$; donc la partie constructible $\rho \times F(Y)$ de $(\mathbf{G}_m)^k \times (\mathbf{G}_a)^l$ ne contient pas d'ouvert de Zariski non vide.

(ii) On désigne par Z l'adhérence de Zariski de $\rho \times F(Y)$. Si z est dans $(\mathbb{R}_+^*)^k \times \mathbb{R}^l$, il existe x dans $\rho_1^{-1}(\{z\})$, pour lequel on a : $F(x) = \mu(z)$; or un tel x appartient à Y; donc $(z, \mu(z))$ appartient à $\rho \times F(Y)$. Puisque $(\mathbb{R}_+^*)^k \times \mathbb{R}^l$ est dense dans $(\mathbf{G}_m)^k \times (\mathbf{G}_a)^l$ pour la topologie de Zariski, le graphe de la fonction μ contient des points lisses de Z. Soit z un point de $(\mathbb{R}_+^*)^k \times \mathbb{R}^l$ pour lequel $(z, \mu(z))$ est un point lisse de Z. Soient U un voisinage de z dans $(\mathbb{R}_+^*)^k \times \mathbb{R}^l$ et V un voisinage de $\mu(z)$ dans $\mathbb{R}$. Si U et V sont assez petits, l'intersection de $U \times V$ et de Z est le graphe d'une application de U dans V; or d'après 2.3, (vi), $(z, \mu(z))$ appartient à $U \times V$ si U et V sont assez petits; donc l'ensemble des points lisses de Z qui sont dans le graphe de la fonction μ, est un voisinage de $(z, \mu(z))$ dans l'ensemble des points réels de $\rho \times F(Y)$.

(iii) Pour tout élément x de $\mathbf{G} . x_0$ qui n'est pas dans Y, la différentielle de $\rho \times F$ en x est de rang $k+l+1$; donc d'après [6], proposition 10.4, p. 270, la restriction de $\rho \times F$ au complémentaire de Y dans $\mathbf{G} . x_0$ est un morphisme lisse. En particulier, l'image de cet ouvert de Zariski de $\mathbf{G} . x_0$ par $\rho \times F$ est un ouvert de Zariski.

2.6. *Remarque* (les notations et les hypothèses sont celles de 2.3). — On suppose X affine. Il résulte de [3], proposition 5 que pour tout compact K de $(\mathbb{R}_+^*)^{k-p} \times \mathbb{R}^l$, il existe des réels positifs A et a pour lesquels on a : $\mu(z) \geqq A[1+x_1(z)^2+\ldots+x_1(z)^2]^a$, pour tout z dans $\Phi^{-1}(K)$.

3. L'intégration le long des fibres

3.1. On conserve les notations X, **G**, F, x_0, ρ, Y de 2.1, 2.3 et 2.4, avec les mêmes hypothèses. On désigne par $(\rho \times F)^{\sim}$ la restriction de $\rho \times F$ au complémentaire de Y dans $\mathbf{G}.x_0$. Soit S l'image de $(\rho \times F)^{\sim}$. D'après 2.4, (iii), $(\rho \times F)^{\sim}$ est un morphisme lisse. On désigne par d la différence des dimensions de $\mathbf{G}.x_0$ et de S. Soit Ω^* le complexe des faisceaux de germes de formes différentielles régulières relatives de $[\mathbf{G}.x_0 \setminus Y]$ sur S ([6], chapitre II, § 8). Si S_1 est un ouvert de Zariski de S, on note X_1 l'image réciproque de S_1 par $(\rho \times F)^{\sim}$ et par $(\rho \times F)_1^{\sim}$ la restriction de $(\rho \times F)^{\sim}$ à X_1. On désigne par Ω_1^* la restriction de Ω^* à X_1. On utilise la notion de connexion intégrable régulière sur un fibré vectoriel, définie en [4], 4.5.

THÉORÈME ([4], théorème 6.13). — *Il existe un ouvert de Zariski, non vide,* S_1 *de* S *qui est défini sur* $\mathbb{R}$ *et qui possède la propriété suivante : pour tout fibré vectoriel à connexion intégrable régulière* $\mathscr{V}$ *sur* X_1, *définissant le système local* V *sur* $(X_1)_{cl}$ (0.7), *on a les assertions suivantes :*

(i) *les faisceaux* $R^i[((\rho \times F)_1^{\sim})^{an}]_*(V)$ (0.7, 0.8) *sont des systèmes locaux sur* $(S_1)_{cl}$; *leur formation est compatible à tout changement de base;*

(ii) *les faisceaux* $\mathbf{R}^i((\rho \times F)_1^{\sim})_*(\Omega_1^* \otimes_{\mathscr{O}_{X_1}} \mathscr{V})$ *et* $\mathbf{R}^i[((\rho \times F)_1^{\sim})^{an}]_*((\Omega_1^*)^{an} \otimes_{\mathscr{O}_{X_1}^{an}} (\mathscr{V})^{an})$ *sont localement libres de type fini, de formation compatible à tout changement de base;*

(iii) *les flèches canoniques :*

$$\mathscr{O}_{S_1^{an}} \otimes_{\mathbb{C}} R^i[((\rho \times F)_1^{\sim})^{an}]_*(V) \to \mathbf{R}^i[((\rho \times F)_1^{\sim})^{an}]_*((\Omega_1^*)^{an} \otimes_{\mathscr{O}_{X_1}^{an}} (\mathscr{V})^{an})$$
$$\leftarrow (\mathbf{R}^i((\rho \times F)_1^{\sim})_*((\Omega_1^*) \otimes_{\mathscr{O}_{X_1}} \mathscr{V}))^{an},$$

sont des isomorphismes.

3.2. On utilise le plongement usuel de $\mathbb{A}^k \times \mathbb{A}^l \times \mathbb{A}$ dans $(\mathbb{P}^1)^k \times \mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^1$. D'après (0.9), la variété algébrique $(\mathbf{G}_m)^k \times (\mathbf{G}_a)^l \times \mathbb{A}$ est alors plongée dans $(\mathbb{P}^1)^k \times \mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^1$. Avec les notations de 3.1, S_1 est un ouvert de Zariski de $(\mathbb{P}^1)^k \times \mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^1$. On considère sur X_1 le faisceau structural. C'est un fibré vectoriel de rang 1. On le munit de sa connexion canonique. Cette connexion est intégrable régulière car les sections locales horizontales sur $(X_1)_{cl}$ (0.7) sont localement constantes. Soit $\mathscr{V}$ le $\mathscr{O}_{X_1}$-module : $\mathbf{R}^d((\rho \times F)_1^{\sim})_*(\Omega_1^*)$. C'est un fibré vectoriel sur S_1, d'après 3.1, (ii). On utilise sur $\mathscr{V}$ la connexion de Gauss-Manin. C'est l'unique connexion pour laquelle le système local des sections locales horizontales sur $(S_1)_{cl}$ s'identifie à $R^d[((\rho \times F)_1^{\sim})^{an}]_*(\mathbb{C}_{X_1})$, au moyen des isomorphismes de 3.1, (iii). D'après [4], théorème 7.9, la connexion de Gauss-Manin est intégrable régulière.

LEMME (les notations et les hypothèses sont celles de 3.1 et de 3.2). — *Soit* $(e_1, \ldots, e_n)$ *une base de sections multiformes horizontales du fibré* $\mathscr{V}^{an}$. *Soit* b *une section globale de*

$\mathscr{V}$. Alors les coodonnées de b dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ sont des fonctions analytiques multiformes, de détermination finie, sur S_1^{an}, à croissance modérée le long du complémentaire de S_1 dans $(\mathbb{P}^1)^k \times \mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^1$, au sens de [4], 2.10.

On note ici ∇ la connexion de Gauss-Manin sur $\mathscr{V}$. Soient $\mathscr{V}^*$ le fibré dual du fibré $\mathscr{V}$ et $\Omega^1(S_1)^*$ le fibré dual du fibré $\Omega^1(S_1)$. On munit $\mathscr{V}^*$ de la connexion duale ∇^* à ∇. De même, sur $\mathbf{Hom}(\mathscr{V}, \mathscr{O}_{S_1}^{an})$ on utilise la connexion $\tilde{\nabla}$ définie par : $(\tilde{\nabla}_\xi \varphi)(\eta) = \langle d(\varphi(\eta)), \xi \rangle - \varphi(\nabla_\xi \eta)$, pour toutes sections locales φ, ξ, η de $\mathbf{Hom}(\mathscr{V}, \mathscr{O}_{S_1}^{an})$, $\Omega^1(S_1)^*$ et $\mathscr{V}$. D'après [4], 4.6, les connexions ∇^* et $\tilde{\nabla}$ sont intégrables régulières. On considère sur $\mathscr{V}^*$ la base duale $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ à $(e_1, \ldots, e_n)$. C'est une base de sections multiformes horizontales. On note e^* le morphisme : $v \mapsto (\langle e_1^*, v \rangle, \ldots, \langle e_n^*, v \rangle)$ de $\mathscr{V}^{an}$ dans $(\mathscr{O}_{S_1}^n)^{an}$. C'est une section multiforme horizontale de $\mathbf{Hom}(\mathscr{V}, \mathscr{O}_{S_1}^n)^{an}$; donc elle est de détermination finie. Puisque la connexion $\tilde{\nabla}$ est régulière, la section multiforme e^* a une croissance modérée le long du complémentaire de S_1 dans $(\mathbb{P}^1)^k \times \mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^1$; or toute section globale de $\mathscr{V}$ a une croissance modérée le long du complémentaire de S_1 dans $(\mathbb{P}^1)^k \times \mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^1$, d'après [4], 2.4; donc $e^*(b)$ est une section multiforme de $(\mathscr{O}_{S_1}^n)^{an}$ au-dessus de S_1^{an}, de détermination finie et ayant une croissance modérée le long du complémentaire de S_1 dans $(\mathbb{P}^1)^k \times \mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^1$.

3.3. On conserve les notations de 3.1. Pour tout ouvert de Zariski U de S_1, il existe un recouvrement fini $\{U_i, i \in I\}$ de U et un recouvrement fini $\{V_j, j \in J\}$ de $((\rho \times F)_1^\sim)^{-1}(U)$ par des ouverts de Zariski, affines, qui vérifient la condition suivante : pour tout i dans I, $\{V_j; (\rho \times F)_1^\sim(V_j) \subseteq U_i\}$ est un recouvrement de $((\rho \times F)_1^\sim)^{-1}(U_i)$. En abrégé, on note $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ les recouvrements ci-dessus et on dit que $(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ est un *recouvrement adéquat* de l'ouvert U. Pour i dans I, on pose : $J(i) = \{j \in J; (\rho \times F)_1^\sim(V_j) \subseteq U_i\}$ et on note $\mathbf{V}(i)$ le recouvrement $\{V_j, j \in J(i)\}$ de $((\rho \times F)_1^\sim)^{-1}(U_i)$.

Soit $(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ un recouvrement adéquat de l'ouvert de Zariski U de S_1. D'après [5], III, 12.4.3, $\mathbf{R}^d((\rho \times F)_1^\sim)_*(\Omega_1^*)$ (0.8) est canoniquement isomorphe au faisceau engendré par le préfaisceau : $V \mapsto \mathbf{R}^d\Gamma[((\rho \times F)_1^\sim)^{-1}(V), \Omega_1^*]$. Puisqu'une intersection finie d'ouverts affines est affine, d'après [5], III, 12.4.7, pour tout i dans I, $\mathbf{R}^d\Gamma[((\rho \times F)_1^\sim)^{-1}(U_i), \Omega_1^*]$ est canoniquement isomorphe à $\mathbf{H}^d[\mathbf{V}(i), \Omega_1^*]$ (0.9), avec les notations de [5], III. Ainsi, il existe un morphisme naturel de $\Gamma[((\rho \times F)_1^\sim)^{-1}(U_i), \Omega_1^d]$ dans $\mathbf{R}^d\Gamma[((\rho \times F)_1^\sim)^{-1}(U_i), \Omega_1^*]$. La famille indexée par I des morphismes ci-dessus définit un morphisme de $\Gamma[((\rho \times F)_1^\sim)^{-1}(U), \Omega_1^d]$ dans l'espace des sections au-dessus de U du faisceau $\mathbf{R}^d((\rho \times F)_1^\sim)_*(\Omega_1^*)$. On le note : $b \mapsto \iota(b)$. C'est un morphisme de $\mathscr{O}_{S_1}(U)$-modules. Il ne dépend pas du recouvrement adéquat $(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ de U.

3.4. On conserve les notations de 3.1. Puisque le morphisme $(\rho \times F)_1^\sim$ est lisse, pour tout ouvert de S_1^{an}, il existe un recouvrement $\{U_i, i \in I\}$ de U et un recouvrement $\{V_j, j \in J\}$ de $[((\rho \times F)_1^\sim)^{an}]^{-1}(U)$ par des ouverts de Stein qui vérifient les conditions suivantes :

(*a*) pour tout j dans J, il existe i dans I tel que $((\rho \times F)_1^\sim)^{an}(V_j)$ soit contenu dans U_i;

(*b*) pour tout i dans I, $\{V_j; ((\rho \times F)_1^\sim)^{an}(V_j) \subseteq U_i\}$ est un recouvrement de $[((\rho \times F)_1^\sim)^{an}]^{-1}(U_i)$;

(*c*) pour tout j dans J, $((\rho \times F)_{1}^{\sim})^{an}(V_j)$ est un ouvert de Stein de S_1^{an} et la restriction de $((\rho \times F)_{1}^{\sim})^{an}$ à V_j est isomorphe à la projection canonique de $D^d \times ((\rho \times F)_{1}^{\sim})^{an}(V_j)$ sur $((\rho \times F)_{1}^{\sim})^{an}(V_j)$ où D^d est un polydisque ouvert de $\mathbb{C}^d$;

(d) les recouvrements $\{U_i, i \in I\}$ et $\{V_j, j \in J\}$ sont localement finis.

En abrégé, on note **U** et **V** les recouvrements ci-dessus et on dit que (**U**, **V**) est un *recouvrement adéquat* de l'ouvert U. Puisqu'une intersection finie d'ouverts de Stein est un ouvert de Stein, les arguments de 3.3 montrent que pour tout ouvert U de S_1^{an}, il existe un morphisme naturel de $\mathcal{O}_{S_1}^{an}(U)$-modules de $\Gamma[(((\rho \times F)_{1}^{\sim})^{an})^{-1}(U), ((\Omega_1^d)^{an})]$ dans l'espace des sections au-dessus de U de $\mathbf{R}^d[((\rho \times F)_{1}^{\sim})^{an}]_*((\Omega_1^*)^{an})$. Comme en 3.3, on le note : $b \mapsto \iota^{an}(b)$. Il ne dépend pas du recouvrement adéquat (**U**, **V**) de U.

LEMME (les notations et les hypothèses sont celles de 3.1, 3.2, 3.3 et 3.4) (*i*) *Soit* U *un ouvert de* S_1^{an}. *Il existe un morphisme canonique de l'espace des sections de* $\mathbf{R}^d[((\rho \times F)_{1}^{\sim})^{an}]_*((\Omega_1^*)^{an})$ *au-dessus de* U *dans le d-ième groupe de cohomologie du complexe des formes différentielles* C^∞ *relatives de* $(((\rho \times F)_{1}^{\sim})^{an})^{-1}(U)$ *sur* U. *C'est un morphisme de* $\mathcal{O}_{S_1}^{an}(U)$*-modules. En outre, si b est une section de* $(\Omega_1^d)^{an}$ *au-dessus de* $(((\rho \times F)_{1}^{\sim})^{an})^{-1}(U)$, *alors l'image de* $\iota^{an}(b)$ *par le morphisme ci-dessus est la classe de b.*

(ii) *Soit* β *une forme différentielle* C^∞, *de degré d, sur* $(((\rho \times F)_{1}^{\sim})^{an})^{-1}(U)$ *qui représente l'image de la section b de* $\mathbf{R}^d[((\rho \times F)_{1}^{\sim})^{an}]_*((\Omega_1^*)^{an})$ *au-dessus de* U, *par le morphisme défini en* (i). *Soit* ξ *un champ de vecteurs holomorphe sur* U. *Soit* η *un champ de vecteurs* C^∞ *sur* $(((\rho \times F)_{1}^{\sim})^{an})^{-1}(U)$ *dont l'image par* $((\rho \times F)_{1}^{\sim})^{an}$ *est* ξ. *Alors la dérivée de Lie de* β *dans la direction définie par* η, *représente l'image de* $\nabla_\xi b$ *par le morphisme défini en* (i).

(iii) *On suppose que l'ouvert* U *de* (i) *est un ouvert de Zariski. Soit b une section de* $\Gamma[((\rho \times F)_{1}^{\sim})^{-1}(U), \Omega_1^d]$ *au-dessus de* U. *Alors l'image de* $\iota(b)$ *par la flèche canonique de* $\mathbf{R}^d((\rho \times F)_{1}^{\sim})_*(\Omega_1^*)$ *dans* $\mathbf{R}^d[((\rho \times F)_{1}^{\sim})^{an}]_*((\Omega_1^*)^{an})$ *est l'image par* ι^{an} *de l'image de b par la flèche canonique de* $\Gamma[((\rho \times F)_{1}^{\sim})^{-1}(U), \Omega_1^d]$ *dans* $\Gamma[(((\rho \times F)_{1}^{\sim})^{an})^{-1}(U^{an}), ((\Omega_1^d)^{an})]$.

On note $\Omega_{1,\infty}^*$ le complexe $\mathcal{O}_{X_1}^\infty \otimes_{\mathcal{O}_{X_1}} \Omega_1^*$.

(*a*) Soit $\mathbf{V} = \{V_j, j \in J\}$ un recouvrement ouvert, localement fini de $[((\rho \times F)_{1}^{\sim})^{an}]^{-1}(U)$. Soit $\mathcal{F}$ un $[\mathcal{O}_{X_1}^\infty \mid (((\rho \times F)_{1}^{\sim})^{an})^{-1}(U)]$-module. Soit $\partial(\mathcal{F})$ la différentielle du complexe de cohomologie de Čech $C^*(\mathbf{V}, \mathcal{F})$. Soit $\{\varphi_j, j \in J\}$ une partition de l'unité C^∞ subordonnée au recouvrement **V**. On note K l'opérateur d'homotopie du complexe $C^*(\mathbf{V}, \mathcal{F})$, défini par :

$$(\mathrm{K}\, c)(j_0, \ldots, j_{p-1}) = \sum \varphi_j\, c(j, j_0, \ldots, j_{p-1}).$$

On a : $\partial(\mathcal{F})\mathrm{K} + \mathrm{K}\,\partial(\mathcal{F}) = 1$; donc le complexe $C^*(\mathbf{V}, \mathcal{F})$ est acyclique. Par suite, il existe un isomorphisme canonique de la cohomologie du complexe $\Gamma[(((\rho \times F)_{1}^{\sim})^{an})^{-1}(U), \Omega_{1,\infty}^*]$ sur la cohomologie du complexe simple associé au complexe double $C^*(\mathbf{V}, \Omega_{1,\infty}^*)$.

(*b*) Soit α une section de $\mathbf{R}^d[((\rho \times F)_{1}^{\sim})^{an}]_*((\Omega_1^*)^{an})$ au-dessus de l'ouvert U. Il existe un recouvrement adéquat (**U**, **V**) de U et pour tout i dans I, α_i dans $\mathbf{H}^d[V(i), ((\Omega_1^*)^{an})]$

qui vérifie les conditions suivantes :

(1) après identification de $\mathbf{H}^d[\mathrm{V}(i), ((\Omega_1^*)^{an})]$ et de l'espace des sections au-dessus de U_i de $\mathbf{R}^d[((\rho\times\mathrm{F})_1^{\sim})^{an}]_*((\Omega_1^*)^{an})$, α_i et α_j ont même restriction à $\mathrm{U}_i \cap \mathrm{U}_j$;

(2) dans le faisceau engendré par le préfaisceau :

$$\mathrm{U} \mapsto \mathbf{R}^d\Gamma[[((\rho\times\mathrm{F})_1^{\sim})^{an}]^{-1}(\mathrm{U}), ((\Omega_1^*)^{an})],$$

α est défini par les α_i.

Pour i dans I, on note β_i une section de $\Omega_{1,\infty}^d$ au-dessus de $(((\rho\times\mathrm{F})_1^{\sim})^{an})^{-1}(\mathrm{U}_i)$ qui représente l'image de α_i par l'isomorphisme inverse de celui défini en (a), pour l'ouvert U_i. Soit $\{\psi_i, i\in \mathrm{I}\}$ une partition de l'unité C^∞ subordonnée à $\mathbf{U}$. La classe de cohomologie de la forme différentielle : $\Sigma\,\psi_i \circ (((\rho\times\mathrm{F})_1^{\sim})^{an})\,\beta_i$, dans le complexe $\Gamma[(((\rho\times\mathrm{F})_1^{\sim})^{an})^{-1}(\mathrm{U}), \Omega_{1,\infty}^*]$ ne dépend que de α. On la note $\tilde{\alpha}$. L'application : $\alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ est un morphisme de $\mathcal{O}_{\mathrm{S}_1}^{an}(\mathrm{U})$-modules. La deuxième partie de l'assertion (i) est claire. L'assertion (ii) résulte de [4], 7.7.

(iii) En utilisant dans 3.3 la structure analytique et des ouverts de Stein au lieu des ouverts affines, on construit le morphisme ι^{an} pour tout ouvert U de S_1^{an}. L'assertion résulte alors de ce que pour tout ouvert de Zariski, affine, U de S_1, U^{an} est un ouvert de Stein de S_1^{an}.

3.5. On conserve les notations des paragraphes précédents. On suppose qu'il existe sur $\mathbf{G}.x_0$ une forme différentielle régulière, de degré maximum, relativement $\mathbf{G}$-invariante, définie sur $\mathbb{R}$ et non nulle. On note ω une telle forme différentielle. On utilise le système de coordonnées usuel : $(y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_1, t)$ sur $(\mathbf{G}_m)^k \times (\mathbf{G}_a)^l \times \mathbb{A}$ et on désigne par ν la forme différentielle : $(dy_1/y_1)\wedge\ldots\wedge(dy_k/y_k)\wedge dx_1\wedge\ldots\wedge dx_1\wedge dt$.

Lemme *Il existe une forme différentielle régulière relative et une seule* β, *de* $(\rho\times\mathrm{F})^{-1}(\mathrm{S})$ *sur* S, *de degré* d, *définie par :* $\beta\nu=\omega$. *En outre*, β *est définie sur* $\mathbb{R}$.

Puisque la restriction de $\rho\times\mathrm{F}$ à $(\rho\times\mathrm{F})^{-1}(\mathrm{S})$ est un morphisme lisse, la restriction de $(\rho\times\mathrm{F})^{an}$ à $(\rho\times\mathrm{F})^{-1}(\mathrm{S})^{an}$ est localement isomorphe à la projection canonique de $\mathbb{C}^d\times(\rho\times\mathrm{F})^{-1}(\mathrm{S})^{an}$ sur $(\rho\times\mathrm{F})^{-1}(\mathrm{S})^{an}$; or ω et ν sont des formes différentielles de degré maximum; donc il existe une et une seule forme différentielle β, analytique, relative de $(\rho\times\mathrm{F})^{-1}(\mathrm{S})^{an}$ sur S^{an} pour laquelle la restriction de ω à $(\rho\times\mathrm{F})^{-1}(\mathrm{S})^{an}$ est égale à $\beta\wedge[\nu\,|\,\mathrm{S}^{an}]$. D'après [6], chapitre III, proposition 10.4, le faisceau $[\Omega^d\,|\,(\rho\times\mathrm{F})^{-1}(\mathrm{S})]$ est un $\mathcal{O}_{(\rho\times\mathrm{F})^{-1}(\mathrm{S})}$-module libre; or ω et ν sont des formes différentielles régulières, définies sur $\mathbb{R}$; donc d'après l'unicité de la forme β ci-dessus, la forme β est régulière et définie sur $\mathbb{R}$.

3.6. On conserve les notations des paragraphes précédents. Pour tout (z, t) dans l'image par $\rho_1\times\mathrm{F}$ du complémentaire de $\mathrm{Y}(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{G}_1.x_0$, $(\rho_1\times\mathrm{F})^{-1}(\{(z,t)\})$ est une variété C^∞, compacte, sans bord et la restriction de β à cette variété y induit une orientation. Dans ce qui suit, on utilise ces orientations.

Proposition. — *Soit* b *une forme différentielle régulière relative de* X_1 *sur* S_1, *de degré* d *et définie sur* $\mathbb{R}$. *Sur tout ouvert connexe*, *simplement connexe de*

$S_1(\mathbb{R}) \cap (\rho_1 \times F)(G_1 . x_0)$, *la fonction* : $(z, t) \mapsto \int [b \mid (\rho_1 \times F)^{-1}(\{(z, t)\})]$ *est la détermination d'une fonction analytique multiforme sur* S_1^{an}, *de détermination finie et à croissance modérée le long du complémentaire de* S_1 *dans* $(\mathbb{P}^1)^k \times \mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^1$.

D'après 2.3 (iii) et 2.4, $S_1(\mathbb{R}) \cap (\rho_1 \times F)(G_1 . x_0)$ est ouvert dans $(\mathbb{R}_+^*)^k \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}$ car X_1 est contenu dans le complémentaire de Y dans $\mathbf{G} . x_0$. Soit U un ouvert connexe, simplement connexe de $S_1(\mathbb{R}) \cap (\rho_1 \times F)(G_1 . x_0)$. Soit $\tilde{U}$ un ouvert connexe, simplement connexe de S_1^{an} dont l'intersection avec $S_1(\mathbb{R})$ est U. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de sections multiformes horizontales de $[\mathbf{R}^d((\rho \times F)_1^{\sim})_*(\Omega_1^*)]^{an}$. Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ les coordonnées de $\iota^{an}(b)$ (3.3) dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. On désigne par les mêmes symboles des déterminations sur $\tilde{U}$ de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, e_1, \ldots, e_n$ choisies de façon que l'on ait : $[\iota^{an}(b) \mid \tilde{U}] = \sum \varphi_i e_i$. Pour $i = 1, \ldots, n$, on note $[e_i]$ l'image de e_i par le morphisme de 3.4 (i) pour l'ouvert $\tilde{U}$. D'après 3.4 (ii), pour $i = 1, \ldots, n$, la différentielle de la fonction sur U : $(z, t) \mapsto \int [[e_i] \mid (\rho_1 \times F)^{-1}(\{(z, t)\})]$ est nulle car e_i est une section horizontale; donc U étant connexe, la proposition résulte de 3.2, de 3.4 (iii) et de l'égalité :

$$\int [b \mid (\rho_1 \times F)^{-1}(\{(z, t)\})] = \sum \varphi_i((z, t)) \int [[e_i] \mid (\rho_1 \times F)^{-1}(\{(z, t)\})].$$

4. Démonstration des principaux résultats

4.1. On conserve les notations de 3.1. Soit α un morphisme défini sur $\mathbb{R}$ du groupe algébrique $(\mathbf{G}_m)^k$ dans le groupe algébrique $\mathbf{G}$ tel que pour $i = 1, \ldots, k$ et $j = 1, \ldots, l$, $C_i(\alpha(s_1, \ldots, s_k))$ et $A_j(\alpha(s_1, \ldots, s_k))$ soient respectivement égaux à s_i et à 0. On désigne par π le morphisme de $(\mathbf{G} . x_0) \times (\mathbf{G}_m)^k$ dans $(\mathbf{G}_m)^k \times (\mathbf{G}_a)^l \times \mathbb{A} \times (\mathbf{G}_m)^k$ défini par : $\pi(x, s) = ((\rho \times F)(\alpha(s) . x), s)$. Soit Z l'image réciproque de Y (*cf.* 2.4) par le morphisme : $(x, s) \mapsto (\alpha(s) . x, s)$. On désigne par $\tilde{\pi}$ la restriction de π au complémentaire de Z dans $(\mathbf{G}_m)^k \times (\mathbf{G}_a)^l \times \mathbb{A} \times (\mathbf{G}_m)^k$. Soit T l'image de $\tilde{\pi}$. Si T_1 est un ouvert de Zariski, non vide, de T, on note $\tilde{X}_1$ l'image réciproque de T_1 par $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\pi}_1$ la restriction de $\tilde{\pi}$ à $\tilde{X}_1$. Soit $\tilde{\Omega}^*$ le complexe des faisceaux de germes de formes différentielles régulières relatives de $\tilde{X}$ sur T.

THÉORÈME ([4], théorème 6.13). — *Il existe un ouvert de Zariski, non vide, défini sur* $\mathbb{R}$, T_1 *de* T *qui possède la propriété suivante : pour tout fibré vectoriel à connexion intégrable régulière* $\mathscr{V}$ *sur* $\tilde{X}_1$, *définissant le système local* V *sur* $(\tilde{X}_1)_{cl}$, *on a les assertions suivantes :*

(i) *les faisceaux* $R^i((\tilde{\pi}_1)^{an})_*(V)$ (0.8) *sont des systèmes locaux sur* $(T_1)_{cl}$; *leur formation est compatible à tout changement de base;*

(ii) *les faisceaux* $\mathbf{R}^i(\tilde{\pi}_1)_*(\tilde{\Omega}^* \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{X}_1}} \mathscr{V})$ *et* $\mathbf{R}^i((\tilde{\pi}_1)^{an})_*((\tilde{\Omega}^*)^{an} \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{X}_1^{an}}} \mathscr{V}^{an})$ (0.7, 0.8) *sont localement libres de type fini, de formation compatible à tout changement de base;*

(iii) *les flèches canoniques :*

$$\mathcal{O}_{T_1^{an}} \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{R}^i((\tilde{\pi}_1)^{an})_*(\mathrm{V}) \to \mathbf{R}^i((\tilde{\pi}_1)^{an})_*((\tilde{\Omega}^*)^{an} \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{X}_1^{an}}} \mathcal{V}^{an}) \leftarrow [\mathbf{R}^i(\tilde{\pi}_1)_*(\tilde{\Omega}^* \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{X}_1}} \mathcal{V})]^{an},$$

sont des isomorphismes.

4.2. On reprend les notations de 4.1, 3.4 et 3.5 avec les mêmes hypothèses. On utilise le plongement usuel de $(\mathbf{G}_m)^k \times (\mathbf{G}_a)^l \times \mathbb{A} \times (\mathbf{G})^k$ dans $(\mathbb{P}^1)^k \times \mathbb{P}^{l+1} \times (\mathbb{P}^k)^k$ (*cf.* 0.10). Soit $\tilde{\mathrm{v}}$ la forme différentielle sur $(\mathbf{G}_m)^k \times (\mathbf{G}_a)^l \times \mathbb{A} \times (\mathbf{G}_m)^k$: $\nu \wedge (ds_1/s_1) \wedge \ldots \wedge (ds_n/s_n)$. Soit $\tilde{\beta}$ la forme différentielle relative de $\tilde{\mathrm{X}}$ sur T définie par : $\tilde{\beta} \wedge \tilde{\mathrm{v}} = \omega \wedge (ds_1/s_1) \wedge \ldots \wedge (ds_n/s_n)$. D'après la démonstration de 3.5, elle est régulière et définie sur $\mathbb{R}$. On note $\mathbf{r}$ la restriction de $\tilde{\pi}_1$ à $(\mathrm{G}_1 . x_0) \times (\mathbb{R}_+^*)^k \cap \tilde{\mathrm{X}}_1(\mathbb{R})$. Pour tout x dans l'image de $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}^{-1}(\{x\})$ est une variété C^∞, compacte, sans bord et la restriction de $\tilde{\beta}$ à $\mathbf{r}^{-1}(\{x\})$ y induit une orientation. Dans ce qui suit, on utilise cette orientation.

Proposition. — *Soit b une forme différentielle régulière, relative de* $\tilde{\mathrm{X}}_1$ *sur* T_1, *de degré d et définie sur* $\mathbb{R}$. *Soit* U *un ouvert connexe, simplement connexe de* $\mathrm{T}_1(\mathbb{R})$, *contenu dans l'image de* $\mathbf{r}$. *Alors la fonction sur* U : $x \mapsto \int [b \,|\, \mathbf{r}^{-1}(\{x\})]$, *est la détermination sur* U *d'une fonction analytique multiforme sur* T_1^{an}, *de détermination finie à croissance modérée le long du complémentaire de* T_1 *dans* $(\mathbb{P}^1)^k \times \mathbb{P}^{l+1} \times (\mathbb{P}^1)^k$.

La proposition résulte de 4.1 par une démonstration analogue à celle de 3.6.

4.3. On conserve les notations de 4.1 et 4.2 avec les mêmes hypothèses. On suppose que la forme différentielle ω est $\mathbf{G}$-invariante. On désigne par ω la mesure sur $\mathbf{G}(\mathbb{R}) . x_0$ définie par la forme différentielle ω sur $\mathbf{G} . x_0$.

Lemme. — *Soit* Ψ *la fonction sur*

$$(\mathbb{R}_+^*)^k \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_+^*)^k : (z, t, s) \mapsto \int [\tilde{\beta} \,|\, \mathbf{r}^{-1}(\{(z, t, s)\})].$$

Alors pour tout (z, t, s, s') *dans* $(\mathbb{R}_+^*)^k \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_+^*)^k \times (\mathbb{R}_+^*)^k$, $\Psi((z, t, ss')$ *est égal à* $\Psi(z, t, s)$.

Soit δs la mesure sur $(\mathbb{R}_+^*)^k$ définie par la forme différentielle $(ds_1/s_1) \wedge \ldots \wedge (ds_k/s_k)$. Pour tout s dans $(\mathbf{G}_m)^k$, on note $\tau(s)$ l'automorphisme de $(\mathbf{G}_m)^k \times (\mathbf{G}_a)^l \times \mathbb{A} \times (\mathbf{G}_m)^k$ défini par : $\tau(s)(z, s') = (z, ss')$ où z et s' appartiennent respectivement à $(\mathbf{G}_m)^k \times (\mathbf{G}_a)^l \times \mathbb{A}$ et à $(\mathbf{G}_m)^k$. Par définition, pour tout x dans $\mathbf{G} . x_0$ et pour tout s' dans $(\mathbf{G}_m)^k$, $\tilde{\pi}(\gamma(s) . x, s')$ est égal à $\tau(s^{-1})[\tilde{\pi}(x, ss')]$. Soient s_0 dans $(\mathbb{R}_+^*)^k$ et φ une fonction continue à support compact sur $(\mathbb{R}_+^*)^k \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_+^*)^k$. L'intégrale : $\int \varphi\ (s, t, s) \Psi(z, t, s) \, d\tilde{\mathrm{v}}(z, t, s)$ est égale à l'intégrale : $\int \varphi \circ \mathbf{r}(x, s) \, d\omega(x) \, \delta s$; or les mesures ω et δs sont invariantes; donc d'après ce qui précéde, cette intégrale est égale à : $\int \varphi(z, t, s) \Psi(z, t, s_0 s) \, d\tilde{\mathrm{v}}(z, t, s)$. Le lemme résulte alors de la continuité de la fonction Ψ.

4.4. On désigne par N la fonction sur $(\mathbb{R}_+^*)^k \times \mathbb{R}^l$ définie par :

$$N(y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_l) = 1 + |\log(y_1)| + \ldots + |\log(y_k)| + (x_1)^2 + \ldots + (x_l)^2.$$

PROPOSITION (les notations et les hypothèses sont celles de 4.2 et de 2.3). — *Si q est un entier positif assez grand, alors la fonction sur $G_1 . x_0$: $x \mapsto [N \circ \rho(x) + F(x)]^{-q}$ est ω-intégrable.*

On démontrera cette proposition en plusieurs étapes. Dans ce qui suit, on utilise les notations de 2.3, 4.1, 4.2, 4.3 et 4.4. Pour simplifier, on pose : $n = 2k + 1 + l$.

4.4.1. D'après [7], il existe une variété algébrique $\tilde{T}$ et un morphisme τ de $\tilde{T}$ dans $(\mathbb{P}^1)^k \times \mathbb{P}^{l+1} \times (\mathbb{P}^1)^k$ qui vérifient les conditions suivantes :

(1) $\tilde{T}$ et τ sont définis sur $\mathbb{R}$;

(2) $\tilde{T}$ est une variété algébrique lisse;

(3) τ est un morphisme propre;

(4) la restriction de τ à $\tau^{-1}(T_1)$ est un isomorphisme de $\tau^{-1}(T_1)$ sur T_1;

(5) le complémentaire de $\tau^{-1}(T_1)$ dans $\tilde{T}$ est une hypersurface à croisements normaux.

Soit K une partie compacte de $(\mathbb{R}_+^*)^k$, d'intérieur non vide. Soit w_0 un point de $\tilde{T}(\mathbb{R})$ adhérent à $\tau^{-1}[K \times \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_+^*)^k]$ et n'appartenant pas $\tau^{-1}(T_1)(\mathbb{R})$. D'après la condition (5) ci-dessus, il existe une carte locale $(U; z_1, \ldots, z_n)$ de $\tilde{T}^{an}$, centrée en w_0, qui vérifie les conditions suivantes :

(*a*) Il existe une carte locale de $\tilde{T}^{an}$, centrée en w_0, dont le domaine contient l'adhérence de U et dont les coordonnées prolongent $z_1, \ldots, z_n$.

(*b*) Les fonctions $z_1, \ldots, z_n$ prennent des valeurs réelles en les points réels de U et l'image de U par l'application : $w \mapsto (z_1(w), \ldots, z_n(w))$ est le polydisque : $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}^n$.

(*c*) L'hypersurface : $\{(z_1 \ldots z_n) = 0\}$ contient les points de U qui ne sont pas dans $\tau^{-1}(T_1)$.

(*d*) Chacune des fonctions $y_1 \circ \tau, \ldots, y_k \circ \tau, x_1 \circ \tau, \ldots, x_1 \circ \tau, t \circ \tau, s_1 \circ \tau, \ldots, s_k \circ \tau$ a sur U un développement de la forme $\varepsilon z_1^{m_1} \ldots z_n^{m_n}$, où $m_1, \ldots, m_n$ sont des entiers tous non positifs ou tous non négatifs et où ε est une fonction holomorphe bornée sur un voisinage de l'adhérence de U dans $\tilde{T}^{an}$. En outre, pour chacune des fonctions $s_1 \circ \tau, \ldots, s_k \circ \tau$, la fonction ε est inversible sur l'adhérence de U dans $\tilde{T}^{an}$ et pour chacune des fonctions $y_1 \circ \tau, \ldots, y_k \circ \tau$, les entiers $m_1, \ldots, m_n$ sont tous nuls.

(*e*) Si $\tau(w_0)$ appartient à $K \times [\mathbb{P}^{l+1}(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{R}^{l+1}] \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R})^k$, alors il existe un entier i dans $\{1, \ldots, l+1\}$ pour lequel la fonction ε de (*d*) associée à $x_i \circ \tau (x_{l+1} = t)$ est inversible sur l'adhérence de U dans $\tilde{T}^{an}$ et les fonctions $(x_1/x_i) \circ \tau, \ldots, (x_l/x_i) \circ \tau, (t/x_i) \circ \tau$ ont un prolongement holomorphe borné sur un voisinage de l'adhérence de U dans $\tilde{T}^{an}$.

On désigne par U* l'intersection de $\tilde{T}(\mathbb{R})$ et de l'ensemble des points de U en lesquels $(z_1 \ldots z_n)$ est non nul. D'après les conditions (4) et (*c*) ci-dessus, la restriction de τ à U* est un homéomorphisme de U* sur un ouvert de $(\mathbb{R}^*)^k \times \mathbb{R}^{l+1} \times (\mathbb{R}^*)^k$. On note aussi $\tilde{\nu}$ la mesure sur U* qui est l'image par τ^{-1} de la mesure sur $\tau(U^*)$ définie par la forme différentielle $\tilde{\nu}$.

LEMME. — *Soit* U** *l'ensemble des points de* U* *dont l'image par* τ *appartient à* $(\mathbb{R}_+^*)^k \times \mathbb{R}^{l+1} \times (\mathbb{R}_+^*)^k$. *Si* q *est un entier positif assez grand, alors la restriction à* U** *de la fonction :*

$$[1+(x_1\circ\tau)^2+\ldots+(x_1\circ\tau)^2+(t\circ\tau)+|\log(s_1\circ\tau)|+\ldots+|\log(s_k\circ\tau)|]^{-q}(\Psi\circ\tau),$$

est $\tilde{\nu}$-intégrable.

Pour tout x dans U, on note $z(x)$ le point $(z_1(x), \ldots, z_n(x))$ de $\mathbb{C}^n$. Soit J l'ensemble des entiers j de $\{1, \ldots, n\}$ qui satisfont la condition suivante : dans les développements de la condition (*d*) ci-dessus, l'entier m_j est nul pour chacune des fonctions $x_1\circ\tau, \ldots, x_l\circ\tau, t\circ\tau$. D'après la condition (*b*) ci-dessus, l'ouvert $\tilde{\mathrm{T}}(\mathbb{R})$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes et ses composantes connexes sont simplement connexes. D'après les conditions (*d*) et (*e*) ci-dessus, pour q entier positif assez grand, la restriction à U** de la fonction :

$$[1+(x_1\circ\tau)^2+\ldots+(x_l\circ\tau)^2+(t\circ\tau)+|\log(s_1\circ\tau)+\ldots+|\log(s_k\circ\tau)|]^{-q}$$

est $\tilde{\nu}$-intégrable. Il suffit donc de prouver que pour toute composante connexe C de U**, la fonction : $[1+(x_1\circ\tau)^2+\ldots+(x_l\circ\tau)^2+(t\circ\tau)]^{-q}(\Psi\circ\tau)$, est bornée sur l'intersection de C et d'un voisinage ouvert de w_0 dans U, dès que q est assez grand. Soit C une composante connexe de U**. Puisque C est simplement connexe, il résulte de 4.2 que la restriction de Ψ à C est la détermination sur C d'une fonction analytique multiforme sur U, de détermination finie et à croissance modérée le long de l'hypersurface $\{(z_1\ldots z_n)=0\}$; donc d'après [1], proposition 4.4.2, p. 256 et [4], remarques 2.20, il existe une famille $\{\varphi_{a,m}; (a, m)\in\Phi\}$ de fonctions holomorphes sur un voisinage ouvert U' de w_0 dans U, indexée par une partie finie Φ de $\mathbb{C}^n\times\mathbb{N}^n$, telle que pour tout x dans $\mathrm{U}'\cap\mathrm{C}$, $\Psi(x)$ soit égal à la somme : $\sum\varphi_{a,m}(x)|z(x)|^a(\log|z(x)|)^m$ (0.12) étendue à Φ. Il résulte de 4.4 que pour tout élément j de J et pour tout (a, m) dans Φ, $\operatorname{Re}(a_j)$ est non négatif; donc, avec les notations de la condition (*e*) ci-dessus, la fonction : $x\mapsto[x_i\circ\tau(x)]^{-q}(\Psi\circ\tau(x))$, est bornée sur l'intersection de U' et de C dès que q est assez grand. Le lemme est ainsi démontré.

4.4.2. Puisque $(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))^k\times\mathbb{P}^{l+1}(\mathbb{R})\times(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))^k$ est compact, $\tilde{\mathrm{T}}(\mathbb{R})$ est compact d'après la condition (3) de 4.4.1; donc d'après le lemme 4.4.1, en utilisant un recouvrement ouvert de l'adhérence de $\tau^{-1}[\mathrm{K}\times\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}\times(\mathbb{R}_+^*)^k]$ dans $\tilde{\mathrm{T}}^{\mathrm{an}}$, on voit que pour q entier positif assez grand, la fonction sur $\mathrm{K}\times\mathbb{R}^l\times\mathbb{R}\times(\mathbb{R}_+^*)^k$:

$$(z, t, s)\mapsto[1+x_1^2+\ldots+x_1^2+t+|\log s_1|+\ldots+|\log s_k|]^{-q}\Psi(z, t, s),$$

est $\tilde{\nu}$-intégrable.

Par suite, pour q entier positif assez grand, la fonction : $(x, s)\mapsto[\mathrm{N}\circ\rho(x)+\mathrm{F}(x)]^{-q}$, est $(\omega\wedge\delta s)$-intégrable sur l'ensemble des éléments (x, s) de $(\mathrm{G}_1.x_0)\times(\mathbb{R}_+^*)^k$ qui satisfont la condition suivante : $(s_1y_1, \ldots, s_ky_k)$ appartient à K si s et $\rho(x)$ sont respectivement égaux à $(s_1, \ldots, s_k)$ et à $(y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_l)$. La proposition 4.4 résulte alors du théorème de Fubini et de l'invariance de la mesure δs.

4.5. On démontre dans ce paragraphe la deuxième partie du théorème 1.5 dans le cas où il existe sur $\mathbf{G}.x_0$ une forme différentielle de degré maximum, non nulle et relativement invariante. On procédera en plusieurs étapes. On utilise les notations de 3.1 et de 2.4 avec les mêmes hypothèses. Comme en 4.3, on désigne par ω la mesure sur $\mathbf{G}(\mathbb{R}).x_0$ définie par la forme différentielle ω sur $\mathbf{G}.x_0$. Avec les notations de 2.3, pour tout réel a supérieur à 1, on note $\Pi(a)$ l'ensemble des points $(y_1, \ldots, y_k, x_1, \ldots, x_l)$ de $(\mathbb{R}_+^*)^k \times \mathbb{R}^l$ dont l'image par Φ appartient à $[(1/a), a]^{k-p} \times [-\log a, \log a]^l$.

4.5.1. Avec les notations de 2.3, on désigne par Z l'adhérence de Zariski dans $(\mathbb{P}^1)^k \times \mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ de l'ensemble des points (z, t, μ) de $(\mathbb{R}_+^*)^k \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pour lesquels (z, μ) appartient au graphe de la fonction μ. Soit $\tilde{S}_1$ l'image réciproque de S_1 par la projection : $(z, t, \mu) \mapsto (z, t)$ de Z sur $\mathbb{A}^k \times \mathbb{A}^l \times \mathbb{A}$. Soit Z′ la sous-variété algébrique de Z qui est la réunion du lieu singulier de Z, du complémentaire de $\tilde{S}_1$ dans Z, de l'hypersurface : $\{(z, t, \mu) \in (\mathbb{P}^1)^k \times \mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1;\ t = \mu\}$ et de l'ensemble des points de Z en lesquels la projection : $(z, t, \mu) \mapsto (z, t)$, n'est pas lisse. Les variétés algébriques Z et Z′ sont définies sur $\mathbb{R}$. D'après [7], il existe une variété algébrique $\tilde{Z}$ et un morphisme τ de $\tilde{Z}$ dans Z qui vérifient les conditions suivantes :

(1) $\tilde{Z}$ et τ sont définis sur $\mathbb{R}$.

(2) $\tilde{Z}$ est une variété algébrique lisse.

(3) τ est un morphisme propre.

(4) La restriction de τ à $\tau^{-1}(Z')$ est un isomorphisme de $\tau^{-1}(Z')$ sur Z′.

(5) Le complémentaire de $\tau^{-1}(Z')$ dans $\tilde{Z}$ est une hypersurface à croisements normaux.

Puisque $Z(\mathbb{R})$ est Zariski-dense dans Z, il résulte de la condition (4) ci-dessus que $\tilde{Z}(\mathbb{R})$ est Zariski-dense dans $\tilde{Z}$. On note respectivement $\tilde{\tau}$ et $\tilde{\mu}$ les composées de la restriction de τ au complémentaire de $\tau^{-1}(Z')$ dans $\tilde{Z}$ et des projections : $(z, t, \mu) \mapsto (z, t)$ et $(z, t, \mu) \mapsto \mu$. Soit Γ l'ensemble des points (z, t, μ) de $Z(\mathbb{R})$ pour lesquels (z, μ) appartient au graphe de la fonction μ et t n'est pas inférieur à μ. D'après 2.3 (iii) et 2.3 (vii), l'image de Γ par la projection : $(z, t, \mu) \mapsto (z, t)$, est l'image de $G_1.x_0$ par $\rho_1 \times F$.

LEMME. — *L'image par $\tilde{\tau}$ de l'intersection de $[\tilde{Z} \setminus \tau^{-1}(Z')]$ et de tout voisinage dans $\tilde{Z}(\mathbb{R})$ du complémentaire de $\tau^{-1}(\Gamma)$ dans son adhérence, est une partie de $(\mathbb{R}_+^*)^k \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}$ dont le complémentaire est relativement compact.*

Par construction $Z(\mathbb{R})$ est compact; or d'après la condition (3) ci-dessus, $\tilde{Z}(\mathbb{R})$ est compact; donc l'adhérence de $\tau^{-1}(\Gamma)$ est compacte. Par suite, le lemme résulte alors de ce que Z′ contient le complémentaire de $(\mathbb{R}_+^*)^k \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans son adhérence dans $Z(\mathbb{R})$.

4.5.2. On note S'_1 l'image de $\tilde{\tau}$ et on pose : $X'_1 = (\rho \times F)^{-1}(S'_1)$. On désigne par $\tilde{X}_1$ l'image réciproque de la diagonale de $S'_1 \times S'_1$ par le morphisme $\tilde{\tau} \times [\rho \times F \mid X'_1]$.

LEMME. — *On a les assertions suivantes :*

(i) *la partie S'_1 de $(\mathbb{P}^1)^k \times \mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^1$ est un ouvert de Zariski contenu dans S_1;*

(ii) *le morphisme $\tilde{\tau}$ est un morphisme fini de $[\tilde{Z} \setminus \tau^{-1}(Z')]$ sur S'_1;*

(iii) *la variété $\tilde{X}_1$ et la restriction à $\tilde{X}_1$ de la projection canonique de $[\tilde{Z} \setminus \tau^{-1}(Z')] \times X'_1$ sur $[\tilde{Z} \setminus \tau^{-1}(Z')]$, sont lisses;*

(iv) *la restriction de $\tilde{\tau}$ à $[\Gamma \setminus \tau^{-1}(Z')]$ est un homéomorphisme de $[\Gamma \setminus \tau^{-1}(Z')]$ sur l'ensemble des points (z, t) de l'image de $(\rho_1 \times F)$ pour lesquels t est supérieur à $\mu(z)$.*

(i) D'après la condition (4) de 4.5.1, S'_1 est l'image de $[Z \setminus Z']$ par la projection : $(z, t, \mu) \mapsto (z, t)$ de $(\mathbb{P}^1)^k \times \mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ sur $(\mathbb{P}^1)^k \times \mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^1$. La restriction à Z de cette projection est surjective et l'image de Z' par cette projection est un fermé de Zariski de $(\mathbb{P}^1)^k \times \mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^1$; or par définition, S'_1 est contenu dans S_1; donc S'_1 est un ouvert de Zariski de S_1.

(ii) D'après 2.4 (ii), l'intersection de Z et de $\mathbb{A}^k \times \mathbb{A}^l \times \mathbb{A}$ est contenue dans l'adhérence de Zariski de $\rho \times F(Y)$; donc d'après 2.4 (i) et la condition (4) de 4.5.1, la restriction de $\tilde{\tau}$ à un ouvert de Zariski non vide de $[\tilde{Z} \setminus \tau^{-1}(Z')]$ est un morphisme fini; or $[\tilde{Z} \setminus \tau^{-1}(Z')]$ est irréductible et $\tilde{\tau}$ est un morphisme lisse; donc les fibres de $\tilde{\tau}$ sont finies. Par suite, $\tilde{\tau}$ est une immersion fermée. Il résulte alors de [6], exercice 5.5, chapitre II, que $\tilde{\tau}$ est un morphisme fini.

(iii) La première partie de l'assertion résulte de ce que X'_1, $[\tilde{Z} \setminus Z']$, $\tilde{\tau}$ et $[(\rho \times F) | X'_1]$ sont lisses. La deuxième partie de l'assertion résulte de [6], chapitre III, proposition 10.1 (*b*).

(iv) L'assertion résulte de 2.3 (vii) et de ce que Z' contient l'hypersurface $\{(z, t, \mu) \in (\mathbb{P}^1)^k \times \mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1;\, t = \mu\}$.

4.5.3. On note s la dimension de Z. Soit w_0 un point de $\tilde{Z}(\mathbb{R})$ adhérent à $\tau^{-1}(\Gamma)$ dont l'image par τ n'appartient pas à $(\mathbb{R}_+^*)^k \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}$. Puisque $\tau^{-1}(Z')$ est une hypersurface à croisements normaux, définie sur $\mathbb{R}$, il existe une carte locale $(U; z_1, \ldots, z_s)$ de $\tilde{Z}^{an}$, centrée en w_0, qui vérifie les conditions suivantes :

(*a*) Il existe une carte locale de $\tilde{Z}^{an}$, centrée en w_0, dont le domaine contient l'adhérence de U et dont les coordonnées prolongent $z_1, \ldots, z_s$.

(*b*) Les fonctions $z_1, \ldots, z_s$ prennent des valeurs réelles en les points réels de U et l'image de U par l'application : $w \mapsto (z_1(w), \ldots, z_s(w))$ est le polydisque : $\{z \in \mathbb{C};\, |z| < 1\}^s$.

(*c*) L'hypersurface : $\{(z_1 \ldots z_s) = 0\}$ contient les points de U qui ne sont pas dans $\tau^{-1}(Z')$.

(*d*) Chacune des fonctions $y_1 \circ \tau, \ldots, y_k \circ \tau$, $x_1 \circ \tau, \ldots, x_l \circ \tau$, $t \circ \tau$, $\tilde{\mu} \circ \tau$ a sur U un développement de la forme $\varepsilon z_1^{m_1} \ldots z_s^{m_s}$, où $m_1, \ldots, m_s$ sont des entiers tous non positifs ou tous non négatifs et où ε est une fonction holomorphe bornée sur un voisinage de l'adhérence de U dans $\tilde{Z}^{an}$. En outre, pour chacune des fonctions $y_1 \circ \tau, \ldots, y_k \circ \tau$, $t \circ \tau$, $\tilde{\mu} \circ \tau$, la fonction ε est inversible sur l'adhérence de U dans $\tilde{Z}^{an}$ et pour chacune des fonctions $t \circ \tau$ et $\tilde{\mu} \circ \tau$, les entiers $m_1, \ldots, m_s$ sont non positifs. L'ensemble des indices i de $\{1, \ldots, s\}$ pour lesquels m_i est nul pour chacune des fonctions $y_1 \circ \tau, \ldots, y_k \circ \tau$, $x_1 \circ \tau, \ldots, x_l \circ \tau$, $t \circ \tau$, $\tilde{\mu} \circ \tau$, est égal à $\{n+1, \ldots, s\}$.

(*e*) Il existe une fonction φ dans $(x_1 \circ \tau, \ldots, x_l \circ \tau\}$ pour laquelle la fonction ε de (*d*) associée à φ est inversible sur l'adhérence de U dans $\tilde{Z}^{an}$ et les fonctions $[(x_1 \circ \tau)/\varphi], \ldots, [(x_l \circ \tau)/\varphi]$ ont un prolongement holomorphe borné sur un voisinage de l'adhérence de U dans $\tilde{Z}^{an}$.

Soit U^* l'ensemble des points x de l'adhérence de U dans $\tilde{Z}^{an}$ pour lesquels $z_1(x), \ldots, z_s(x)$ sont tous non nuls. On désigne par U_+^* l'ensemble des points réels de U^* dont l'image par τ appartient à l'adhérence de $(\mathbb{R}_+^*)^k \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $Z(\mathbb{R})$.

LEMME. — *On identifie l'adhérence de* U *dans* $\tilde{\mathrm{Z}}^{\mathrm{an}}$ *et le polydisque* $\{z \in \mathbb{C};\ |z| \leqq 1\}^s$ *au moyen de l'application :* $x \mapsto (z_1(x), \ldots, z_s(x))$.

(i) *La partie* U_+^* *de* $\tilde{\mathrm{Z}}(\mathbb{R})$ *a un nombre fini de composantes connexes.*

(ii) *Pour toute composante connexe* C *de* U_+^*, *il existe un élément* $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s)$ *de* $\{-1, +1\}^s$ *pour lequel l'image de l'application :*

$$(x_1, \ldots, x_s) \mapsto (\varepsilon_1 \exp[-x_1], \ldots, \varepsilon_s \exp[-x_s])$$

de $\mathbb{R}_+^s$ *dans* $[-1, +1]^s$, *est égal à l'adhérence de* C *dans* U_+^*.

(iii) *Soit* C *une composante connexe de* U_+^*. *Alors* $\tau(\mathrm{C})$ *est contenu dans* Γ *ou ne rencontre pas* Γ.

D'après la condition (*a*) ci-dessus, U est le polydisque ouvert $\{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}^s$. D'après les conditions (*b*) et (*d*) ci-dessus, l'ouvert U_+^* de $\mathbb{R}^s$ est réunion de composantes connexes de l'ouvert : $\{(x_1, \ldots, x_s) \in]-1, +1[^s;\ x_1 \ldots x_s \neq 0\}$; donc U_+^* n'a qu'un nombre fini de composantes connexes. L'assertion (ii) du lemme résulte de ce que les fonctions $z_1, \ldots z_s$ ne changent pas de signe sur chacune des composantes connexes de U_+^*. Soit C une composante connexe de U_+^*. On suppose que $\tau(\mathrm{C})$ rencontre Γ. D'après les conditions (*c*) et (*d*) ci-dessus, l'image de $\tau(\mathrm{C})$ par la projection : $(z, t, \mu) \mapsto (z, \mu)$, est un ouvert lisse de l'ensemble des points réels de l'adhérence de Zariski dans $(\mathbb{R}_+^*)^k \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}$ du graphe de la fonction μ; donc d'après 2.4 (ii), cette image est contenue dans le graphe de la fonction μ. Puisque Z′ contient l'hypersurface $\{(z, t, \mu) \in (\mathbb{P}^1)^k \times \mathbb{P}^l \times \mathbb{P}^1;\ t = \mu\}$, la fonction : $(z, t, \mu) \mapsto t - \mu$, ne s'annule pas sur $\tau(\mathrm{C})$; donc $\tau(\mathrm{C})$ est contenu dans Γ.

4.5.4. Soit a un réel supérieur à 1. On suppose que l'image de $\tau(w_0)$ par la projection : $(z, t, \mu) \mapsto (z, t)$, est adhérente à $\Pi(a) \times \mathbb{R}$. Soit C une composante connexe de U_+^* dont l'image par τ est contenue dans Γ et à laquelle z_0 est adhérent. Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s)$ l'élément de $\{-1, +1\}^s$ qui satisfait la condition de l'assertion (ii) du lemme 4.5.3 relativement à C.

LEMME. — *On suppose que l'entier* l *de* 2.3 *est non nul. On identifie l'adhérence de* U *dans* $\tilde{\mathrm{Z}}^{\mathrm{an}}$ *et le polydisque* $\{z \in \mathbb{C};\ |z| \leqq 1\}^s$ *au moyen de l'application :*

$$x \mapsto (z_1(x), \ldots, z_s(x)).$$

(i) *L'image de* U *par* τ *rencontre l'intersection de* Z *et de l'hypersurface* $(\mathbb{P}^1)^k \times \mathbb{P}^l \times \{\infty\} \times \mathbb{P}^1$.

On suppose qu'il existe des entiers positifs m *et* q, *non supérieurs à* n, *qui satisfont les conditions suivantes :*

(1) *L'hypersurface* $\{(z_1 \ldots z_m) = 0\}$ *coïncide avec l'intersection de* U *et de l'image réciproque par* τ *de l'intersection de* Z *et de l'hypersurface* $(\mathbb{P}^1)^k \times \mathbb{P}^l \times \{\infty\} \times \mathbb{P}^1$.

(2) *L'hypersurface* $\{(z_1 \ldots z_q) = 0\}$ *coïncide avec l'intersection de* U *et de l'image réciproque par* τ *de l'intersection de* Z *et de la réunion des hypersurfaces* $(\mathbb{P}^1)^k \times \mathbb{P}^l \times \{\infty\} \times \mathbb{P}^1$ *et* $(\mathbb{P}^1)^k \times [\mathbb{P}^l \setminus \mathbb{A}^l] \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

(ii) *Il existe des réels positifs* B *et* b *tels que pour tout point* $(z_1, \ldots, z_s)$ *de* C *dont l'image par* $\tilde{\tau}$ *appartient à* $\Pi(a) \times \mathbb{R}$, *on ait les inégalités :*

$$\log(|z_i|) \leqq \mathrm{B}[t \circ \tau(z_1, \ldots, z_s)]^b, \qquad pour \quad i=1, \ldots, n,$$

et

$$|z_i|^{-1} \leqq \mathrm{B}[t \circ \tau(z_1, \ldots, z_s)]^b, \qquad pour \quad i=1, \ldots, q.$$

(i) Si l'image de U par τ ne rencontre pas l'intersection de Z et de l'hypersurface $(\mathbb{P}^1)^k \times \mathbb{P}^l \times \{\infty\} \times \mathbb{P}^1$, alors la fonction $t \circ \tau$ est bornée sur U; or la fonction $\tilde{\mu}$ est majorée par la fonction $t \circ \tau$ sur toute composante connexe de U_+^* qui est contenue dans Γ; donc d'après 2.3 (viii), l'image de C par $\tilde{\tau}$ est une partie relativement compacte de $(\mathbb{R}_+^*)^k \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}$. Ceci est absurbe car z_0 n'appartient pas à $(\mathbb{R}_+^*)^k \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}$.

(ii) On utilise les notations de 2.3. Pour $i=1, \ldots, k-p$, a_i désigne la fonction holomorphe identiquement nulle sur $\mathbb{C}^s$. Pour $i=k-p+1, \ldots, k-p+l$, on note a_i la fonction holomorphe sur un voisinage dans $\mathbb{C}^s$ du polydisque $\{z \in \mathbb{C};\, |z| \leqq 1\}^s$ définie par : $a_i(z_1, \ldots, z_s) = \varepsilon(\varepsilon_1 z_1, \ldots, \varepsilon_s z_s)$, où ε est la fonction de la condition (*d*) de 4.5.2 associée à la fonction $x_{i-k+p} \circ \tau$. Dans $\mathbb{R}^s$, on note V le sous-espace vectoriel engendré par les m premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^s$ et C(V) le cône convexe engendré par ces vecteurs. De même, on désigne par U le sous-espace vectoriel engendré par les $(s-m)$ derniers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^s$ et par C(U) le cône convexe engendré par ces vecteurs. On note $\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_s$ les restrictions à V des coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^s$ et $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_s$ les restrictions à U des coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^s$. Soient $m_1, \ldots, m_s$ les exposants de la condition (*d*) de 4.5.3 relative à l'une des fonctions $x_1 \circ \tau, \ldots, x_l \circ \tau$ et $\nu_1, \ldots, \nu_s$ les exposants de la condition (*d*) de 4.5.3 relative à la fonction $t \circ \tau$. Par hypothèse ν_i est non nul si et seulement si i n'est pas supérieur à m. En outre, m_i est nul si i est supérieur à q et il est non nul si i n'est pas supérieur à q et s'il est supérieur à m.

Pour $i=1, \ldots, k$, on désigne par $m_{i1}, \ldots, m_{is}$ les exposants de la condition (*d*) de 4.5.3 relative à la fonction $y_i \circ \tau$. Pour $i=1, \ldots, k-p$, on note u_i et v_i les restrictions à U et à V de la forme linéaire sur $\mathbb{R}^s$:

$$\begin{aligned}(x_1, \ldots, x_s) \mapsto (\alpha_{(i+p)\,1} m_{1\,1} + \ldots + \alpha_{(i+p)\,p} m_{p\,1}) \alpha_1 + \ldots \\ + (\alpha_{(i+p)\,1} m_{1\,s} + \ldots + \alpha_{(i+p)\,p} m_{ps}) x_s - [(m_{(i+p)\,1} x_1 + \ldots + m_{(i+p)\,s} x_s].\end{aligned}$$

Pour $i=k-p+1, \ldots, k-p+l$, on note u_i et v_i les restrictions à U et à V de la forme linéaire sur $\mathbb{R}^s$:

$$\begin{aligned}(x_1, \ldots, x_s) \mapsto (\beta_{(i+p-k)\,1} m_{1\,1} + \ldots + \beta_{(i+p-k)\,p} m_{p\,1}) x_1 + \ldots \\ + (\beta_{(i+p-k)\,1} m_{1\,s} + \ldots + \beta_{(i+p-k)\,p} m_{ps}) x_s.\end{aligned}$$

Pour simplifier, on pose : $e=k-p+l$. On considère le système :

$$\mathrm{S}(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{C}(\mathrm{U}), \mathrm{C}(\mathrm{V}), a_1, \ldots, a_e, \mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n, \mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_n, u_1, \ldots, u_e, v_1, \ldots, v_e)$$

analogue au système $\mathbf{S}(\ldots)$ de (3, 3.1). Pour R et ρ réels positifs, le système $\mathbf{S}(\ldots)$ et les entiers $m_1, \ldots, m_s$, $\nu_1, \ldots, \nu_s$ ci-dessus définissent les parties $E(R)$ et $E(R, \rho)$ de $\mathbb{R}^s_+$ comme en (3, 3.2). D'après la condition (*d*) de 4.5.3, pour R réel positif assez grand, l'image de $E(R)$ par l'application :

$$(x_1, \ldots, x_s) \mapsto (\varepsilon_1 \exp[-x_1], \ldots, \varepsilon_s \exp[-x_s])$$

de $\mathbb{R}^s_+$ dans $[-1, +1]^s$, contient l'intersection des adhérences dans U^*_+ de C et de $\tilde{\tau}^{-1}[\Pi(a) \times \mathbb{R}]$. En outre, il existe un réel positif R pour lequel l'image de $E(R)$ par l'application :

$$(x_1, \ldots, x_s) \mapsto (\varepsilon_1 \exp[-x_1], \ldots, \varepsilon_s \exp[-x_s])$$

de $\mathbb{R}^s_+$ dans $[-1, +1]^s$, est contenue dans l'intersection des adhérences dans U^*_+ de C et de $\tilde{\tau}^{-1}[\Pi(a) \times \mathbb{R}]$. Par suite, d'après l'assertion (viii) du lemme 2.3, pour tous réels positifs R et ρ, $E(R, \rho)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^s_+$. D'après la remarque 2.6, pour tout réel positif R, il existe un réel positif A pour lequel on a : $(m_1 X_1 + \ldots + m_s X_s)(x) \leqq A[1 + (\nu_1 Z_1 + \ldots + \nu_s Z_s)(x)]$, pour tout x dans $E(R)$. L'assertion (ii) résulte alors de [3], proposition 3.2.

4.5.5. Lemme (les notations et les hypothèses sont celles de 4.5.5). — *On suppose que l'entier l de* 2.3 *est nul. Il existe des réels positifs* B *et* b *tels que pour tout point* $(z_1, \ldots, z_s)$ *de* C *dont l'image par* $\tilde{\tau}$ *appartient à* $\Pi(a) \times \mathbb{R}$, *on ait les inégalités :* $|z_i|^{-1} \leqq B[t \circ \tau(z_1, \ldots, z_s)]^b$, pour $i = 1, \ldots, n$.

Puisque l'entier l est nul, les fonctions $a_1, \ldots, a_e$ sont identiquement nulles; donc les ensembles $E(R)$ sont définis par un système de la forme : $|L_1(\xi, \zeta)| \leqq R, \ldots, |L_e(\xi, \zeta)| \leqq R$, où $L_1, \ldots, L_e$ sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$. Puisque les ensembles $E(R, \rho)$ sont compacts, l'assertion du lemme résulte de [3] lemme 2.2.

4.5.6. On conserve les notations de 4.4.4. On utilise la forme différentielle relative β de 3.5. Pour tout z dans $\tau^{-1}(\Gamma)$, on désigne par $I(z)$ l'intégrale de la restriction de β à $(\rho_1 \times F)^{-1}(\{\tilde{\tau}(z)\})$. D'après le lemme 4.5.2, la restriction de $\tilde{\tau}$ à $\tau^{-1}(\Gamma \diagdown Z')$ est un homéomorphisme de $\tau^{-1}(\Gamma \diagdown Z')$ sur un ouvert de $(\mathbb{R}^*_+)^k \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}$. On utilise la forme différentielle ν de 3.5. On note aussi ν la mesure sur $\tau^{-1}(\Gamma \diagdown Z')$ définie par la forme différentielle $\tilde{\tau}^*(\nu)$.

Lemme. — *Si l'entier l de* 2.3 *est nul, alors pour i entier positif assez grand et pour* U' *voisinage assez petit de* w_0 *dans* U, *la fonction :* $z \mapsto I(z)[t \circ \tilde{\tau}(z)]^{-i}$, *est* ν-*intégrable sur* $\tilde{\tau}^{-1}(\Pi(a) \times \mathbb{R}) \cap U' \cap C$. *En outre, lorsque l n'est pas nul et lorsque la forme différentielle* ω *est* $\mathbf{G}$-*invariante, la conclusion est encore vraie.*

On utilise la variété $\tilde{X}_1$ et la flèche : $\tilde{X}_1 \to [\tilde{Z} \diagdown \tilde{\tau}^{-1}(Z')]$ de 4.5.2. D'après le lemme 4.5.2 et le théorème 3.1, cette flèche satisfait les conditions (i), (ii), (iii) du théorème 3.1. Pour le voir, il suffit de considérer le changement de base : $[\tilde{Z} \diagdown \tilde{\tau}^{-1}(Z')] \to S'_1$. Puisque C est une composante connexe de U^*_+, C est un ouvert simplement connexe de $\tilde{Z}(\mathbb{R})$; donc, d'après la démonstration de la proposition 3.6 et [4], proposition 4.4 (ii), la restriction de I à C est la détermination sur C d'une fonction analytique multiforme, de détermination finie et à croissance modérée le long de $\tau^{-1}(Z')$. Par suite, d'après [1], proposition 4.4.2,

p. 256 et [4], remarques 2.20, il existe une famille $\{\varphi_{\alpha,\delta}; (\alpha, \delta) \in \Phi\}$ de fonctions holomorphes sur un voisinage ouvert U' de w_0 dans U, indexée par une partie finie Φ de $\mathbb{C}^s \times \mathbb{N}^s$ telle que pour tout z dans l'intersection de U' et de C, $\mathrm{I}(z)$ soit égal à la somme : $\sum \varphi_{\alpha,\delta}(z) |z|^\alpha (\log |z|)^\delta$ (0.12) étendue à Φ. La mesure ν est définie par la forme différentielle : $\eta [z_1^{n_1} \ldots z_s^{n_s}] (dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_s)$, où η est une fonction holomorphe sur U. En outre, pour i supérieur à n, l'entier n_i est non négatif et pour i supérieur à q, l'entier n_i est non inférieur à (-1). D'après la proposition 4.4, lorsque ω est **G**-invariante, $\mathrm{Re}(\alpha_i)$ n'est pas inférieur à (-1) si $\varphi_{\alpha,\delta}$ n'est pas nul et si i est supérieur à q; donc d'après les lemmes 4.5.4 et 4.5.5, pour i entier positif assez grand, il existe un réel positif A pour lequel $|(t \circ \tau)(z)^{-i} \mathrm{I}(z) [z_1^{n_1} \ldots z_s^{n_s}]|$ n'est pas supérieur à

$$\mathrm{A} [|z_{q+1}^{-1}| \ldots |z_n^{-1}|] [(\log |z_{q+1}|) \ldots (\log |z_n|)]^{-2},$$

pour tout z dans $\tilde{\tau}^{-1}(\Pi(a) \times \mathbb{R}) \cap \mathrm{U}' \cap \mathrm{C}$. Le lemme résulte aussitôt de cette inégalité.

4.5.7. Lemme (les notations et les hypothèses sont celles de 1.5). — *Soit* F' *une fonction régulière sur* X *qui est définie sur* $\mathbb{R}$. *Alors il existe des réels positifs* A *et* a *pour lesquels* $|\mathrm{F}'(x)|$ *n'est pas supérieur à* $\mathrm{AF}(x)^a$ *pour tout* x *dans* $\mathrm{X}(\mathbb{R})$.

Si t est un réel supérieur à 1, on désigne par $\lambda(t)$ la borne supérieure de la restriction de la fonction $(\mathrm{F}')^2$ à l'ensemble des points x de $\mathrm{X}(\mathbb{R})$ pour lesquels $\mathrm{F}(x)$ n'est pas supérieur à t. Lorsque t est assez grand, cette borne supérieure est finie car la restriction de F à $\mathrm{X}(\mathbb{R})$ est propre. En outre, l'application : $t \mapsto \lambda(t)$, est continue sur tout intervalle de $\mathbb{R}_+$ où elle est finie. Soit Σ l'ensemble des points (x, t, λ) de $\mathrm{X}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ pour lesquels λ n'est pas supérieur à $\mathrm{F}'(x)^2$ et t n'est pas inférieur à $\mathrm{F}(x)$. Puisque X est réunion d'ouverts affines, d'après le théorème de Tarski-Seidenberg, l'image de Σ par la projection : $(x, t, \lambda) \mapsto (t, \lambda)$ est une partie semi-algébrique de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. On note $\tilde{\Sigma}$ cette projection. Si t est un réel positif assez grand et si λ est un réel supérieur à $\lambda(t)$, (t, λ) n'appartient pas à $\tilde{\Sigma}$; donc il existe une fonction polynômiale P pour laquelle $\mathrm{P}(t, \lambda(t))$ est nul dès que t est assez grand. Puisque la fonction λ est continue, il existe un diviseur irréductible P' de P pour lequel le graphe de la fonction λ est une branche à l'infini de $\{(t, \lambda) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+; \mathrm{P}'(t, \lambda) = 0\}$. Par suite, en utilisant un développement de Puiseux, on voit qu'il existe des réels positifs A et a pour lesquels $\lambda(t)$ est égal à $\mathrm{A}\, t^a [1 + 0(1)]$ quand t tend vers l'infini; donc il existe des réels positifs A' et t_0 pour lesquels on a : $(\mathrm{F}'(x))^2 \leqq \mathrm{AF}(x)^a$ si x est dans $\mathrm{X}(\mathbb{R})$ et si $\mathrm{F}(x)$ n'est pas supérieur à t_0. Le lemme résulte alors de ce que l'ensemble $\{x \in \mathrm{X}(\mathbb{R}); \mathrm{F}(x) \leqq t_0\}$ est compact.

4.5.8. On achève dans ce paragraphe la démonstration du théorème 1.5. On remarque pour cela que l'entier l de 2.3 est nul si et seulement si G contient $\mathbf{G}_u(\mathbb{R})$. D'après les lemmes 4.5.3 et 4.5.6, pour tout point w_0 de $\tilde{\mathrm{Z}}(\mathbb{R})$ adhérent à $\tau^{-1}(\Gamma)$ et à $\tilde{\tau}^{-1}(\Pi(a) \times \mathbb{R})$, pour i entier positif assez grand, la fonction : $z \mapsto (t \circ \tau)(z)^{-i} \mathrm{I}(z)$ est ν-intégrable sur l'intersection de $\tau^{-1}(\Gamma) \cap \tilde{\tau}^{-1}(\Pi(a) \times \mathbb{R})$ et d'un voisinage assez petit de w_0; or l'adhérence de $\tau^{-1}(\Gamma)$ dans $\tilde{\mathrm{Z}}(\mathbb{R})$ est compact; donc d'après le lemme 4.5.1, si K est une partie compacte assez grande de $(\mathbb{R}_+^*)^k \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}$ et si i est un entier positif assez grand, la fonction $z \mapsto (t \circ \tau)(z)^{-i} \mathrm{I}(z)$ est ν-intégrable sur $[\tau^{-1}(\Gamma) \cap \tilde{\tau}^{-1}(\Pi(a) \times \mathbb{R}) \setminus \tilde{\tau}^{-1}(\mathrm{K})]$. Pour tout entier i, l'intégrale de la restriction de la fonction F^i à $\rho_1^{-1}(\Pi(a))$, relativement à la mesure ω, est égale à l'intégrale de la fonction : $z \mapsto (t \circ \tau)(z)^{-i} \mathrm{I}(z)$ sur $[\tau^{-1}(\Gamma) \cap \tilde{\tau}^{-1}(\Pi(a) \times \mathbb{R})]$, relativement à la mesure ν; donc d'après ce qui précéde, pour i entier positif assez grand, la fonction F^{-i} est ω-intégrable sur $\rho_1^{-1}(\Pi(a))$. L'assertion du théorème résulte alors du théorème de Fubini et du lemme 4.5.7. D'après 2.4, les démonstrations ci-dessus ne s'appliquent que dans le cas où la fonction F n'est pas bornée sur $\mathbf{H}(\mathbb{R}).x_0$. Dans le cas général, on se ramène à celui-là par l'artifice suivant : soit χ une représentation de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ dans un espace vectoriel réel V de dimension finie, pour laquelle il y a une orbite fermée non bornée qui porte une mesure invariante. Soient $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).x'_0$ cette orbite et F′ la restriction à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).x'_0$ d'une norme euclidienne sur V. On désigne par X′ la variété algébrique : $\mathrm{X} \times \mathrm{SL}_2.x'_0$ et on considère la fonction régulière : $(x, x') \mapsto \mathrm{F}(x)[1+\mathrm{F}'(x')]$ sur X′. La restriction de cette fonction à $\mathrm{X}'(\mathbb{R})$ est propre. Le groupe algébrique $\mathbf{G} \times \mathrm{SL}_2$ opère sur X′ et l'orbite $\mathrm{G} \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).(x_0, x'_0)$ est fermée dans $\mathrm{X}'(\mathbb{R})$. Puisque le groupe dérivé de $\mathbf{G} \times \mathrm{SL}_2$ contient $[\mathbf{G}, \mathbf{G}] \times \mathrm{SL}_2$, le théorème 1.5 résulte de ce qui précède et du théorème de Fubini.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.-E. Bjørk, *Rings of differential operators*, North-Holland Mathematical Library, vol. 21.

[2] N. Bourbaki, *Éléments de Mathématiques. Intégration chapitres* 7 *et* 8, Hermann, Paris.

[3] J.-Y. Charbonnel, *Méthode des orbites. Applications exponentielles et cônes polyédraux*, Preprint.

[4] P. Deligne, *Équations différentielles à points singuliers réguliers* (*Lect. Notes Math.*, n° 163).

[5] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique III : Étude cohomologique des faisceaux cohérents* (*Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.*, n° 11).

[6] R. Hartshorne, *Algebraic geometry* (*Graduate texts in Mathematics*, n° 52, Springer-Verlag).

[7] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero* (*Ann. Math.*, vol. 79, 1964, p. 109-326).

[8] G. D. Mostow, *Fully reducible subgroups of algebraic groups* (*Am. J. Math.*, vol. 78, 1956, p. 200-221).

[9] M. Rosenlicht, *Some rationality questions on algebraic groups* (*Ann. Pure Applicata*, vol. 6, 1957, p. 25-50).

[10] J.-P. Serre, *Géométrie algébrique et géométrie analytique* (*Ann. Inst. Fourier*, vol. 6, 1955-56, p. 1-42).

[11] C. S. Seshadri, *Some results on the quotient space by an algebraic group of automorphisms.* (*Math. Ann.*, n° 149, 1963, p. 286-301).

(Manuscrit reçu le 2 mars 1989,
révisé le 23 mai 1989).

Jean-Yves Charbonnel
C.N.R.S., U.A. n° 748,
Université Paris-VII,
couloir 45-55, 5e étage,
2, place Jussieu,
75251 Paris Cedex 05, France.