

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

B. PERRON

Les cycles évanescents sont dénoués

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 22, n° 2 (1989), p. 227-253

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1989_4_22_2_227_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LES CYCLES ÉVANESCENTS SONT DÉNOUÉS

PAR B. PERRON

I. Introduction

Les cycles évanescents d'une fonction holomorphe $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ à singularité isolée en $0 \in \mathbb{C}^n$ sont des sphères plongées dans la fibre de Milnor F^{2n-2} , de dimension $n-1$. La fibre de Milnor F est naturellement plongée dans la sphère $S_{(\varepsilon)}^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$, de centre 0 et de rayon ε petit. Les cycles évanescents apparaissent donc comme des sphères de dimension $(n-1)$ plongées dans $S_{(\varepsilon)}^{2n-1}$. Pour $n \geq 3$, par un théorème de plongements de Whitney, ces sphères sont dénouées, c'est-à-dire isotopes au plongement standard de S^{n-1} dans $S_{(\varepsilon)}^{2n-1}$. Le problème se pose donc en dimension 2 de savoir si les cycles sont dénoués. Dans cette dimension le titre est abusif: on montre précisément que pour un certain choix de chemins servant à les définir, les cycles correspondants sont dénoués.

On note $B(\varepsilon)$ [resp. $D(\eta)$] la boule de \mathbb{C}^n (resp. \mathbb{C}) centrée en 0 de rayon ε (resp. η) et $S(\varepsilon) = \partial B(\varepsilon)$. Soit $f: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe à singularité isolée en 0.

DÉFINITION 1.1. — Un couple $(\varepsilon, \eta) \in (\mathbb{R}_+^*)$ est dit adapté à f en 0 si:

1. $0 \in \mathbb{C}^n$ est la seule singularité de f dans $B(\varepsilon)$.
2. $f^{-1}(0)$ est transverse à $S(\varepsilon')$ pour tout $\varepsilon' \in (0, \varepsilon]$.
3. $f^{-1}(\lambda)$ est transverse à $S(\varepsilon)$ pour tout $\lambda \in D(\eta)$.
4. En tout point z de $B(\varepsilon) - f^{-1}(0)$, les vecteurs $\text{grad}|f|$ et z sont \mathbb{C} -indépendants, ou bien $\text{grad}|f| = \lambda z$ avec $|\text{argument}(\lambda)| < \pi/4$.

D'après Milnor ([10], chap. 4, 5) de tels couples existent. La boule $B(\varepsilon)$ est dite boule de Milnor de f en 0.

(1) Dans ([10] chap. 4, 5), Milnor montre que l'application $f/|f|: S(\varepsilon) - f^{-1}(0) \rightarrow S^1$ est une fibration C^∞ , difféomorphe à la fibration du « tube » $f: f^{-1}(\partial D(\eta)) \cap B(\varepsilon) \rightarrow \partial D(\eta)$. L'équivalence de ces deux fibrations est assurée par l'existence d'un champ de vecteurs χ sur $B(\varepsilon) - f^{-1}(0)$ tangent aux hypersurfaces $\arg(f) = \text{Cte}$, transverse à $S(\varepsilon')$ pour tout $\varepsilon' \in (0, \varepsilon]$ et aux hypersurfaces: $|f| = \text{Cte}$. Le champ χ fournit un difféomorphisme entre le « tube » plein $f^{-1}(D(\eta)) \cap B(\varepsilon)$ et la boule $B(\varepsilon)$.

(2) Identification du tube et de la boule: dans la suite, on identifiera souvent le tube plein $f^{-1}(D(\eta)) \cap B(\varepsilon)$ avec la boule $B(\varepsilon)$ et son bord $\partial[f^{-1}(D(\eta)) \cap B(\varepsilon)]$ avec la sphère $S(\varepsilon)$.

DÉFINITION 1.2 (Morsification de f). — C'est une famille de fonctions holomorphes $f_t: U(0) \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ (où $U(0)$ est un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^n$) telle que :

1. $f_0 = f$ et $f(z, t) = f_t(z)$ est C^∞ par rapport à $t \in V(0) \subset \mathbb{C}$.
2. Pour tout $t \neq 0$, les singularités de f_t sont quadratiques ordinaires (c'est-à-dire holomorphiquement équivalentes à $\sum_{i=1}^n z_i^2$) et les valeurs critiques sont distinctes.

Les morsifications existent. Pour la fonction $g(z) = \sum_{i=1}^n z_i^2$, la fibre $g^{-1}(\lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{R}_+^*$) contient la sphère S^{n-1} donnée par $\sum_{k=1}^n x_k^2 = \lambda$, $y_k = 0$ ($z_k = x_k + iy_k$). Cette sphère est appelée cycle évanescent de g en 0.

(3) Soit $f_t: U \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ une Morsification de f et (ε, η) un couple adapté à $f = f_0$ en 0. Pour tout $t \neq 0$ suffisamment petit, f_t est sans point critique sur $\partial B(\varepsilon)$ et les valeurs critiques correspondant aux points critiques de f_t dans $B(\varepsilon)$ sont dans $D(\eta)$.

De plus, $f_t^{-1}(\lambda)$ est transverse à $S(\varepsilon)$ pour tout $\lambda \in D(\eta)$ et $f_t: f_t^{-1}(\partial D(\eta)) \cap B(\varepsilon) \rightarrow \partial D(\eta)$ est une fibration difféomorphe à la fibration : $f: f^{-1}(\partial D(\eta)) \cap B(\varepsilon) \rightarrow \partial D(\eta)$. Le nombre de valeurs critiques de f_t dans $D(\eta)$ est égal au nombre de Milnor $\mu(f)$ [10].

(4) Soient c_1, c_2, \dots, c_μ les valeurs critiques de f_t dans $\mathring{D}(\eta)$, D_i de petites boules disjointes centrées en c_i , γ_i des chemins plongés dans $D(\eta)$, joignant c_i à un point base $*$ de $\partial D(\eta)$, ne se rencontrant qu'en $*$. On suppose que $\gamma_i \cap D_i$ est un rayon de D_i et on pose $c'_i = \gamma_i \cap \partial D_i$ (fig. 1). Dans $f_t^{-1}(c'_i)$ est plongé un cycle évanescent σ_i (difféomorphe à une sphère S^{n-1}) d'après la propriété 2 des Morsifications. La fonction f_t étant une submersion au dessus de $\gamma_i - \mathring{D}_i$, on peut pousser le cycle σ_i à l'aide d'une trivialisation $f_t^{-1}(\gamma_i - \mathring{D}_i) \simeq f_t^{-1}(c'_i) \times (\gamma_i - \mathring{D}_i)$ sur une sphère $\widetilde{\sigma}_i$ de $f_t^{-1}(*)$. D'après (3) et l'identification « tube-boule », le plongement de $f_t^{-1}(*) \cap B(\varepsilon)$ dans $S(\varepsilon)$ est isotope au plongement de $f_0^{-1}(*) \cap B(\varepsilon)$ dans $S(\varepsilon)$. Le cycle $\widetilde{\sigma}_i \subset f_t^{-1}(*)$ correspond à un cycle $S_i \subset f_0^{-1}(*) \subset S(\varepsilon)$. On obtient ainsi une famille de sphères $S_1, \dots, S_\mu \subset f_0^{-1}(*) \subset S(\varepsilon)$ appelées cycles évanescents de f , associés à la Morsification f_t et aux chemins γ_i .

Le principal résultat de ce travail est donné par la :

PROPOSITION 1.3. — Il existe, pour toute fonction holomorphe à singularité isolée de \mathbb{C}^n , une configuration de cycles où tous les cycles sont dénoués [c'est-à-dire bordent un disque plongé dans $S(\varepsilon)$].

(5) Remarque. — Pour $n \geq 3$, le résultat est immédiat d'après un théorème de plongements de Whitney: tout plongement de S^{n-1} dans S^{2n-1} est isotope au plongement standard.

Dans toute la suite on se place donc dans le cas $n=2$ et on note (x, y) les coordonnées dans \mathbb{C}^2 .

(6) La construction fondamentale: Soit $g_t: U(0) \subset \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ une famille de fonctions holomorphes à singularité isolée en 0, C^∞ par rapport à $t \in V(0) \subset \mathbb{R}$. Soit (ε, η) un

couple adapté à g_0 en $0 \in \mathbb{C}^2$. Pour tout t assez petit g_t est régulière en tout point de $\partial B(\varepsilon)$ et n'a pas de valeur critique sur $\partial D(\eta)$. De plus, $g_t^{-1}(\lambda)$ est transverse à $\partial B(\varepsilon)$ pour tout $\lambda \in D(\eta)$ et l'application $g_t: g_t^{-1}(\partial D(\eta)) \cap B(\varepsilon) \rightarrow \partial D(\eta)$ est une fibration difféomorphe à la fibration de Milnor de g_0 . Il existe un champ de vecteurs sur $B(\varepsilon) - g_t^{-1}(D(\eta))$ vérifiant les propriétés du champ χ défini en (1) identifiant $B(\varepsilon)$ avec $g_t^{-1}(D(\eta)) \cap B(\varepsilon)$.

Soit $(\varepsilon(t), \eta(t))$ un couple adapté à g_t en 0 (t petit). Pour $\lambda_t \in \partial D(\eta(t))$, $g_t^{-1}(\lambda_t) \cap B(\varepsilon)$ [resp. $g_t^{-1}(\lambda_t) \cap B(\varepsilon(t))$] est difféomorphe à la fibre de Milnor de g_0 (resp. g_t) en 0. Ainsi, la fibre de Milnor G_t de g_t ($t \neq 0$) apparaît plongée dans la fibre de Milnor G_0 de g_0 .

De plus, soit γ un chemin plongé dans la couronne $D(\eta) - \dot{D}(\eta(t))$ d'origine $\lambda_t \in \partial D(\eta(t))$, d'extrémité $\lambda_0 \in \partial D(\eta)$, évitant les valeurs critiques de g_t . L'application g_t étant une submersion au-dessus de γ , on peut transporter la sous-variété $G_t = g_t^{-1}(\lambda_t) \cap B(\varepsilon(t))$ en une sous-variété $\widetilde{G}_t \subset g_t^{-1}(\lambda_t) \cap B(\varepsilon)$. On a ainsi deux plongements de G_t dans S^3 , le premier $G_t \xrightarrow{i_t} (\varepsilon(t))$ donné par Milnor, le second $i_\gamma: G_t \simeq \widetilde{G}_t \rightarrow g_t^{-1}(\lambda_0) \rightarrow S(\varepsilon)$.

DÉFINITION 1.4. (propriétés I et SI : I pour isotopie, SI pour sous-variétés isotopes). — Une famille de fonctions holomorphes à singularité isolée en $0 \in \mathbb{C}^2$, $g_t: U(0) \subset \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ vérifie la propriété I (resp. SI) le long d'un chemin plongé $\gamma \subset D(\eta) - \dot{D}(\eta(t))$ si les deux plongements (resp. sous-variétés) $i_\gamma, i_t: G_t \rightarrow S^3$ [resp. $G_t \subset S(\varepsilon(t))$ et $\widetilde{G}_t \subset S(\varepsilon(0))$] sont isotopes.

Au cours de la démonstration de la proposition 1.3, on aura besoin de la :

PROPOSITION 1.5. (corollaire 5.2). — Soit $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ une fonction holomorphe à singularité isolée en 0. On suppose que les coordonnées $x, y \in \mathbb{C}^2$ sont génériques au sens de [6]. Alors la famille $f_t = ty^2 + f(x, y)$ vérifie la propriété SI le long d'un certain chemin γ .

L'idée de la démonstration de la proposition 1.3, est la suivante: on montre d'abord que toute configuration de cycles de $y^2 + x^v$ est dénouée (chap. 6). On utilise un résultat fondamental de Gabrielov [3] qui dit qu'il existe une configuration de cycles évanescents de $f_t = ty^2 + f(x, y)$ (holomorphiquement équivalent à $y^2 + x^v$ pour $t \neq 0$), $S_1, \dots, S_{v-1} \subset f_t^{-1}(\lambda_t) \cap B(\varepsilon(t))$ ($\lambda_t \in \partial D(\eta(t))$) et des entiers n_1, \dots, n_{v-1} tels que la famille $\{h^{j_i}(S_i); j_i = 1, 2, \dots, n_i\} \subset f_t^{-1}(\lambda_t) \cap B(\varepsilon)$ est une configuration de cycles pour f , où h est la monodromie géométrique de f . On démontre qu'il existe un chemin plongé $\gamma \subset D(\eta) - \dot{D}(\eta(t))$ tel que les cycles $\widetilde{S}_i \subset f_t^{-1}(\lambda_t) \cap B(\varepsilon)$ (fig. 2) obtenus en poussant S_i par une trivialisation de $f_t^{-1}(\gamma)$ soient isotopes dans $S(\varepsilon)$ aux cycles $S_i \subset S(\varepsilon(t))$. Les cercles $S_i \subset S(\varepsilon(t))$ étant dénoués, les cercles $\widetilde{S}_i \subset S(\varepsilon)$ le sont aussi. De plus, $h^{j_i}(\widetilde{S}_i)$ est isotope dans $S(\varepsilon)$ à $S_i \subset S(\varepsilon)$. La proposition 1.3 en résulte.

Des conversations avec J. Montesinos ont été très utiles dans l'élaboration de ce travail.

Le plan de ce travail est le suivant :

§ 2. Une propriété géométrique des familles de fonctions holomorphes à singularité isolée en 0, à un paramètre.

- § 3. Un lemme de Gordon sur les enlacements de S^3 .
 § 4. La famille $g_t = ty^2 + x^v + y^{2m}$ vérifie la propriété I.
 § 5. La famille $g_{t,u} = ty^2 + f(x, uy) + y^{2m}$.
 § 6. Les cycles de $y^2 + x^n$ sont dénoués.
 § 7. Un résultat de Gabrielov [3] et la démonstration de la proposition 1.3.
 § 8. Appendice: démonstration du lemme 5.1.

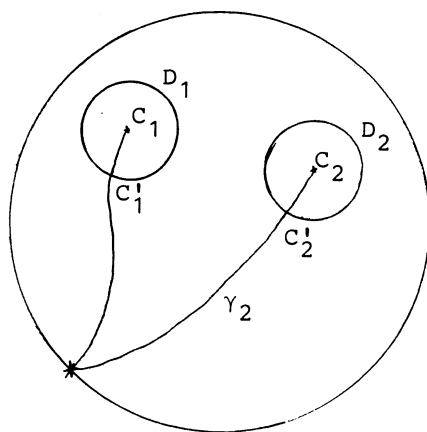


Fig. 1

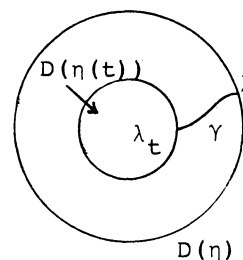


Fig. 2

Indépendamment de son intérêt géométrique, l'origine du problème remonte à une tentative (malheureuse) de l'auteur pour résoudre le problème des familles à μ constant en dimension complexe trois (résolu par Lê Dung Trang, et C. P. Ramanujan en dimension autre que trois). L'auteur avait pratiquement ramené la résolution de ce problème à celle du suivant :

« Toute famille de fonctions holomorphes en deux variables à singularité isolée en 0 vérifie la propriété I (définition 1.4) »

Malheureusement la démonstration de cette dernière assertion est fausse. Le présent article en donne une réponse partielle, dans le cas des familles du type $ty^2 + f(x, y)$.

2. Une propriété géométrique des familles à paramètres de fonctions holomorphes à singularité isolée en $0 \in \mathbb{C}^2$.

Soit $g_t: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ une telle famille; on utilise les notations et propriétés de la construction fondamentale (6) du paragraphe 1. Soit γ un chemin plongé dans $\overline{D(\eta)} - D(\eta_t)$ joignant un point $\lambda_t \in \partial D(\eta_t)$ à un point $\lambda \in \partial D(\eta)$, évitant les valeurs critiques de g_t . On pose $G_t = g_t^{-1}(\lambda_t) \cap B(\varepsilon_t)$, $G_0 = g_t^{-1}(\lambda) \cap B(\varepsilon)$; on désigne par $T_\gamma: G_0 \times \gamma \rightarrow g_t^{-1}(\lambda) \cap B(\varepsilon)$ une trivialisation de la submersion g_t au-dessus de γ . On utilisera

constamment l'identification tube-boule. L'objet du paragraphe 2 est de montrer le :

LEMME 2.1. — Soit $K \subset G_t \subset S(\varepsilon_t)$ un cercle plongé dans G_t . Alors il existe une concordance \mathcal{C} [c'est-à-dire une sous-variété de $\overline{B(\varepsilon)} - B(\varepsilon_t)$, difféomorphe à $K \times [0, 1]$, d'origine K , d'extrémité $K' \subset S(\varepsilon)$, contenue dans $g_t^{-1}(\gamma)$, transverse aux fibres $g_t^{-1}(x)$ ($x \in \gamma$), telle que $p|_{\mathcal{C}}$ n'ait que des points critiques d'indice 0 et 1, où p désigne la projection radiale $p: \overline{B(\varepsilon)} - B(\varepsilon(t)) \rightarrow [\varepsilon(t), \varepsilon]$.

Remarque. — Notons \mathcal{C}_γ le cylindre ($\simeq K \times \gamma$) plongé dans $g_t^{-1}(\gamma)$ défini par $T_\gamma(K \times \gamma)$ d'origine K , d'extrémité $\tilde{K} \subset g_t^{-1}(\lambda)$. D'après la propriété de transversalité du lemme 2.1, les plongements K' et \tilde{K} dans $S(\varepsilon)$ sont isotopes [car isotopes dans $g_t^{-1}(\lambda) \cap B(\varepsilon)$].

2. A. MODÈLES LOCAUX POUR UN COUPLE DE FONCTIONS.

DÉFINITION 2.2. — Soient $H_i = (h_i, \delta_i): U_i \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($i=1, 2$) deux germes d'applications C^∞ en $u_i \in U_i$. On dit qu'ils sont bi-équivalents s'il existe des difféomorphismes locaux :

$\psi: (U_1, u_1) \rightarrow (U_2, u_2)$, $\lambda: (\mathbb{R}^2, H_1(u_1)) \rightarrow (\mathbb{R}^2, H_2(u_2))$ avec $\lambda(x, y) = (\lambda_1(x), \lambda_2(y))$ tels que $\lambda \circ H_1 = H_2 \circ \psi$.

Soit $\sigma: [0, 1] \rightarrow \gamma$ une paramétrisation de l'arc γ avec $\sigma(0) = \lambda_t$ et $\sigma(1) = \lambda$.

LEMME 2.3. — En perturbant aussi peu qu'on veut la distance usuelle de \mathbb{C}^2 à 0, $|x|^2 + |y|^2$, en une fonction analytique réelle φ positive telle que $\varphi^{-1}(0) \cap B(\varepsilon) = \{0\}$, tout point $u \in g_t^{-1}(\gamma) \cap B(\varepsilon)$ critique pour l'application $H = (\sigma^{-1} \circ g_t, \varphi): g_t^{-1}(\gamma) \cap B(\varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^2$ est bi-équivalent à l'un des germes suivants :

1. $(x_1, x_2, z) \rightarrow (z, \varepsilon z + \varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2)$ ($\varepsilon, \varepsilon_i = \pm 1$) (pli transversal).
2. $(x_1, x_2, z) \rightarrow (z, \varepsilon z^2 + \varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2)$ (pli tangent).
3. $(x_1, x_2, z) \rightarrow (z, \varepsilon z + \varepsilon_1 z x_1 + \varepsilon_2 x_1^3 + \varepsilon_3 x_2^2)$ (fronce transverse).

Démonstration. — Elle vient du fait que les notions de pli transversal, pli tangent et fronce transverse sont définies par des conditions de transversalité. Les modèles 1, 2, 3 ci-dessus sont donnés par [2], [5], [15].

DÉFINITION 2.4. — Pour une application $H = (h, \delta): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ on note Σ l'ensemble critique de H et Σ^- l'ensemble des points où les différentielles $dh, d\delta$ sont colinéaires de sens opposé.

COROLLAIRE 2.5. — 1. Dans les parties 1 et 2 du lemme 2.3, un au plus des deux nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ est négatif.

2. En un point $u \in \Sigma^-$ (pour $H = (\sigma^{-1} \circ g_t, \varphi)$) qui est une fronce transverse (modèle 3 du lemme 2.3), on a $\varepsilon_3 > 0$.

Démonstration. — Le point 1 résulte du lemme 2.3, du théorème d'Andreotti-Frankel [1] qui dit que la fonction distance δ à un point, restreinte à une fibre $g_t^{-1}(\alpha)$ (correspondant dans les modèles 1 et 2 à $z = \text{Cte}$) n'a que des points critiques de Morse d'indice 0 et 1 et de la remarque :

Remarque. — Le théorème d'Andreotti-Frankel marche en remplaçant la fonction distance usuelle par une fonction analytique φ réelle, positive, telle que sur un ouvert U ,

$\varphi^{-1}(0) \cap U = \{0\}$. Plus généralement, toute la théorie de Milnor [10] marche en remplaçant la fonction distance à l'origine par une telle fonction φ .

Démonstration du point 2. — D'après le lemme 2.3, le couple $H = (\sigma^{-1} \circ g_t, \varphi)$ est bi-équivalent à $(-z + \varepsilon_1 z x_1 + \varepsilon_2 x_1^3 + \varepsilon_3 x_2^2, z)$ ($\varepsilon = -1$ vient du fait que $u \in \Sigma^-$; on a permuté le rôle de $\sigma^{-1} \circ g_t$ et φ car en une fronce les deux applications sont des submersions). Les points critiques de $\varphi (= z)$ restreinte à $(\sigma^{-1} \circ g_t)^{-1}(\alpha)$ (α voisin de 0) sont donnés par $x_2 = 0$ et $\varepsilon_2 x_1^2 (3\varepsilon_1 - 2x_1) = \alpha$. On a deux solutions en x_1 , a_1 , a_2 , voisines de 0 et de signe opposé. Les indices de ces points critiques sont ceux de la fonction

$$z = - \frac{\alpha + \varepsilon_3 x_2^2 + \varepsilon_2 x_1^2}{1 - \varepsilon_1 x_1}.$$

La partie quadratique de z au voisinage d'un point $(a_i, 0)$ ($i=1, 2$) est $\varepsilon_3 x_2^2 + 3a_i \varepsilon_2 (x_1 - a_i)^2$. Comme a_1 et a_2 sont de signes opposés et qu'on ne peut avoir deux coefficients négatifs par Andreotti-Frankel, ε_3 est positif.

Compte tenu de la remarque précédente, on supposera dans la suite que la fonction distance à $0 \in \mathbb{C}^2$ usuelle vérifie le lemme 2.3 et le corollaire 2.5.

2. B. MODÈLES LOCAUX DE CHAMPS DE VECTEURS SUR $g_t^{-1}(\gamma)$ QUI SONT DE PSEUDO-GRADIENT POUR δ ET $\sigma^{-1} \circ g_t$

DÉFINITION 2.6. — Un champ de vecteurs χ sur une variété C^∞ , M , est dit de pseudo-gradient pour une fonction $g: M \rightarrow \mathbb{R}$ si $\chi(g) > 0$ en dehors des points où $\chi = 0$.

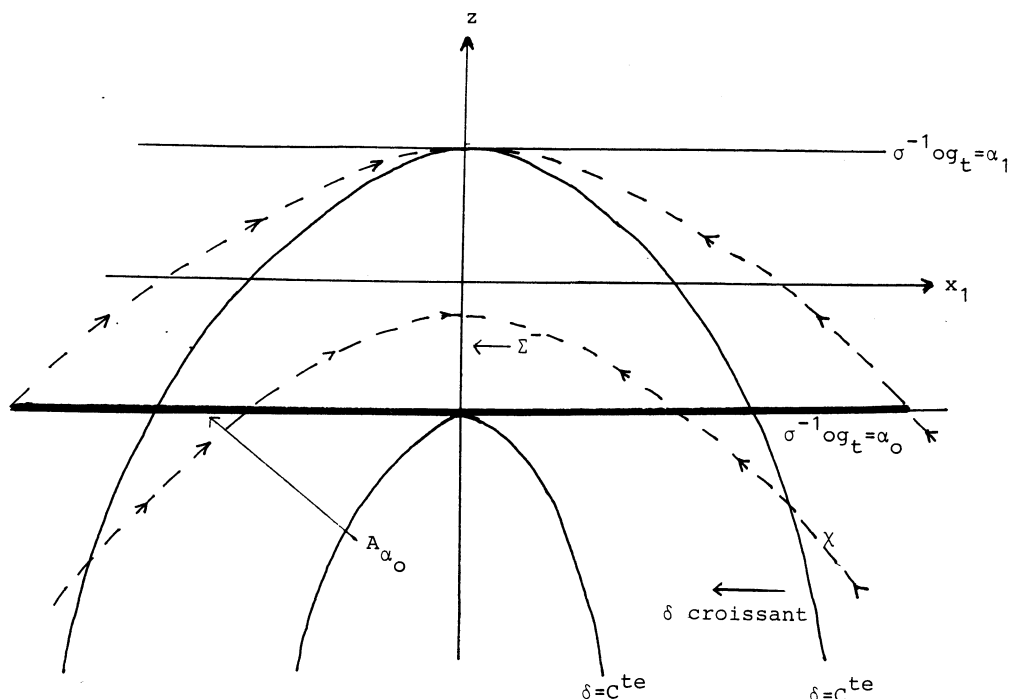


Fig. 2.1.

Dans chacune des trois situations du corollaire 2.5, on construit un champ de vecteurs sur $g_t^{-1}(\gamma)$ de pseudo-gradient faible pour $(\delta, \sigma^{-1} \circ g_t)$ et ayant de bonnes propriétés.

LEMME 2.7 (cas 1 du lemme 2.3, $\varepsilon = -1$). — $(\delta, \sigma^{-1} \circ g_t) \sim (-z + \varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2, z)$ où un au plus des ε_i est négatif).

1. Σ^- est défini par $x_1 = x_2 = 0$.

2. le champ $\chi = (\varepsilon_1 x_1, \varepsilon_2 x_2, (x_1^2 + x_2^2)/2)$ est de pseudo-gradient faible pour δ et $\sigma^{-1} \circ g_t$ et nul uniquement sur Σ^- .

3. L'ensemble A_{α_0, α_1} des points d'un niveau $\sigma^{-1} \circ g_t = \alpha_0 < 0$, origines de trajectoires de χ aboutissant sur $\Sigma^- \cap (\sigma^{-1} \circ g_t)^{-1}[\alpha_0, \alpha_1]$ ($\alpha_1 > 0$) est un segment (resp. un point) si l'un des ε_i est négatif (resp. $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$).

Démonstration. — Elle est évidente. Dans le cas $\varepsilon_1 = -1$, les trajectoires de χ dans le plan (z, x_1) sont décrites par la figure 2.1.

LEMME 2.8 (cas 2 du corollaire 2.5). — $(\delta, \sigma^{-1} \circ g_t) \sim (\varepsilon z^2 + \varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2, z)$ (où un au plus des ε_i est négatif).

(1) Le champ $\chi = (\varepsilon_1 x_1, \varepsilon_2 x_2, \varepsilon z + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + z^2})$ est de pseudo-gradient faible pour δ et $\sigma^{-1} \circ g_t$ et ne s'annule que sur Σ^- défini par $\{x_1 = x_2 = 0, \varepsilon z \leq 0\}$.

(2) L'ensemble A_{α_0, α_1} (défini au lemme 2.7, 3) est :

(a) un point de Σ^- si $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon_i = +1$;

(b) un segment contenant un point de Σ^- dans son intérieur si $\varepsilon = 1$, et l'un des ε_i est négatif;

(c) un segment disjoint de Σ^- si $\varepsilon = -1$ et l'un des ε_i est négatif.

Démonstration. — Elle résulte des figures 2.2, 2.3, 2.4 et 2.5.

Remarque. — Dans les figures 2.3 et 2.4, le champ χ possède deux trajectoires linéaires aboutissant ou partant de 0 (en dehors d'un demi-axe de 0 z).

LEMME 2.9 (cas 3 du corollaire 2.8). — $(\delta, \sigma^{-1} \circ g_t) \sim (-z + \varepsilon_1 z x_1 + \varepsilon_2 x_1^3 + x_2^2, z)$.

Le champ $\chi = (\varepsilon_1 z + 3\varepsilon_2 x_1^2, x_2, (1/2)(x_2^2 + (\varepsilon_1 z + 3\varepsilon_2 x_1^2)^2))$ est de pseudo-gradient faible pour δ et $\sigma^{-1} \circ g_t$. Il s'annule uniquement sur Σ^- défini par $\varepsilon_1 z + 3\varepsilon_2 x_1^2 = 0, x_2 = 0, -1 + \varepsilon_1 x_1 < 0$.

L'ensemble A_{α_0, α_1} est un segment disjoint de Σ^- dans le cas $\varepsilon_1 \varepsilon_2 < 0$ et un segment ayant un point de son intérieur et une de ses extrémités dans Σ^- si $\varepsilon_1 \varepsilon_2 > 0$.

Démonstration: Dans le cas $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = 1$ (resp. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$) la situation dans le plan (x_1, z) est décrite par la figure 2.6 (resp. 2.7).

(1) On reprend les notations du début du paragraphe 2.

D'après les modèles locaux du corollaire 2.5, la partie Σ_γ^- du lieu singulier de $(\delta, \sigma^{-1} \circ g_t)$ restreinte à $g_t^{-1}(\gamma)$ est composée d'arcs lisses. De plus, Σ_γ^- est disjoint de $G_t = g_t^{-1}(\lambda_t) \cap B(\varepsilon)$ (voir la définition 1.1, 4) et de $g_t^{-1}(\lambda) \cap B(\varepsilon)$ car c'est vrai pour $t=0$ et donc pour t suffisamment petit.

(2) La compacité de $\Sigma_\gamma^- \subset g_t^{-1}(\gamma)$ permet de trouver une suite $\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \alpha_2 \dots < \alpha_p = 1$ telle que chaque composante connexe de

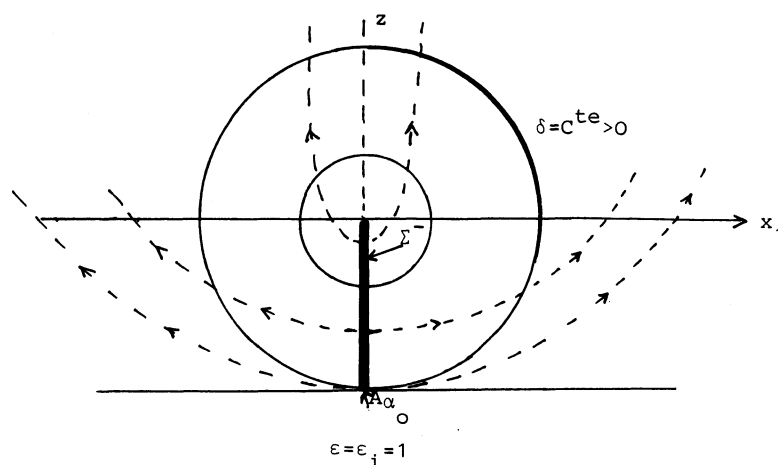


Fig. 2.2

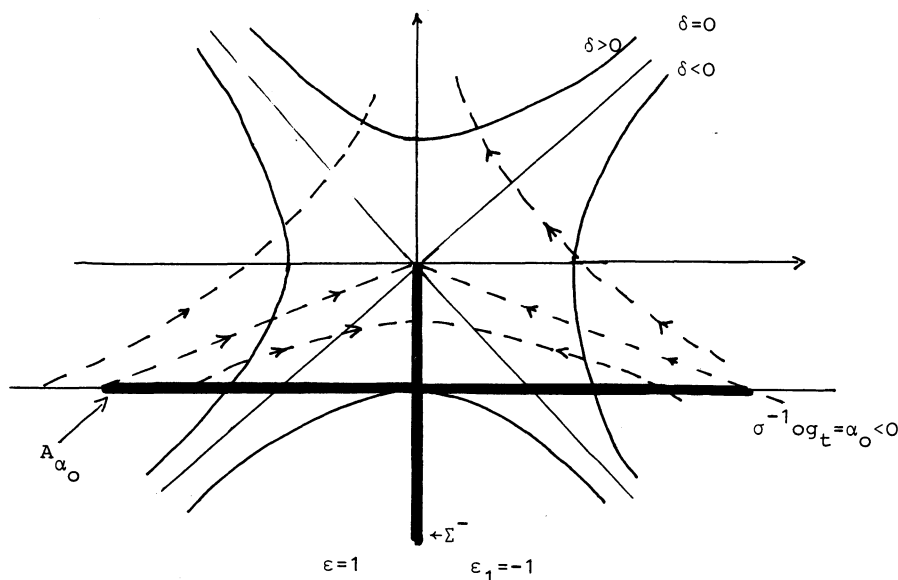


Fig. 2.3

$\Sigma_\gamma^- \cap g_t^{-1}(\sigma[\alpha_i, \alpha_{i+1}])$ (σ est une paramétrisation de γ) est recouverte par une carte de $g_t^{-1}(\gamma)$ où le couple $(\delta, \sigma^{-1} \circ g_t)$ restreint à $g_t^{-1}(\gamma)$ est bi-équivalent à l'un des modèles du corollaire 2.5.

(3) Sur chaque tranche $g_t^{-1}(\sigma[\alpha_i, \alpha_{i+1}])$ on construit un champ de vecteurs $\widetilde{\chi}_i$ de pseudo-gradient faible pour $(\delta, \sigma^{-1} \circ g_t)$ de la façon suivante: au voisinage d'un point de Σ_γ^- on prend le champ donné par les lemmes 2.7, 2.8, 2.9. En dehors de ces cartes, les champs $\text{grad}(\sigma^{-1} \circ g_t|_{g_t^{-1}(\gamma)})$ et $\text{grad}(\delta|_{g_t^{-1}(\gamma)})$ n'étant pas colinéaires opposés, on prend le champ: $\|\text{grad} \delta\| \text{grad}(\sigma^{-1} \circ g_t) + \|\text{grad} \sigma^{-1} \circ g_t\| \text{grad} \delta$. On recolle ces champs par une partition de l'unité.

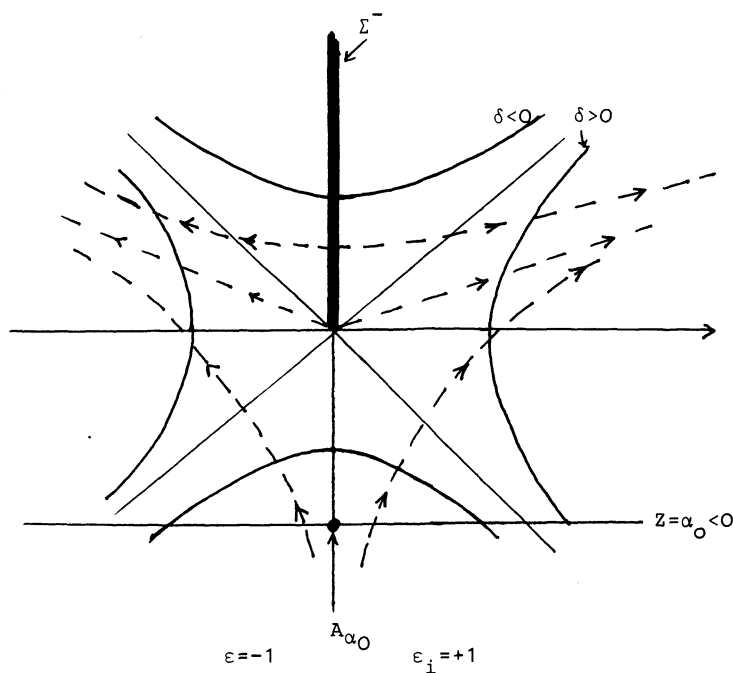


Fig. 2.4

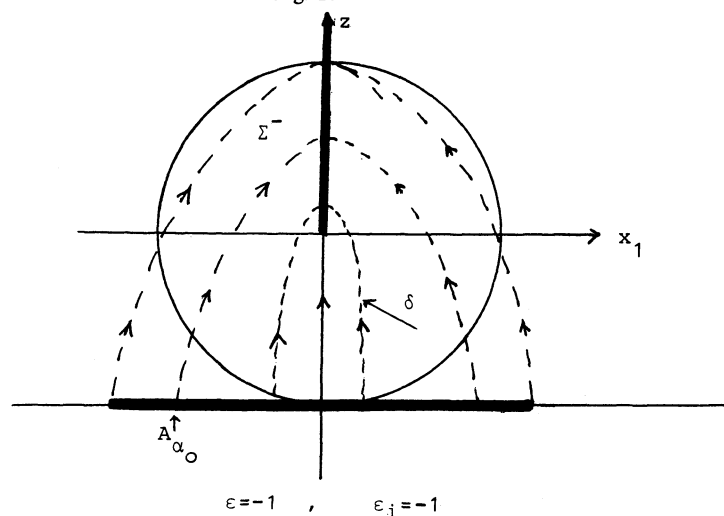


Fig. 2.5

C. CONSTRUCTION DU CYLINDRE \mathcal{C} DU LEMME 2.1. — Soit K un cercle contenu dans $G_i = g_i^{-1}(\lambda_i) \cap B(\varepsilon(t))$. D'après (1), on peut prendre pour \mathcal{C} , au voisinage de K , le cylindre engendré par les trajectoires de χ défini après la définition 1.1.

On va construire \mathcal{C} par récurrence sur $i = 0, \dots, p$: supposons construit un cylindre $\mathcal{C}_i \subset g_i^{-1}[\sigma(\alpha_0), \sigma(\alpha_i)]$ vérifiant les propriétés du lemme 2.1, d'origine K , d'extrémité $K_i \subset g_i^{-1}(\sigma(\alpha_i))$.

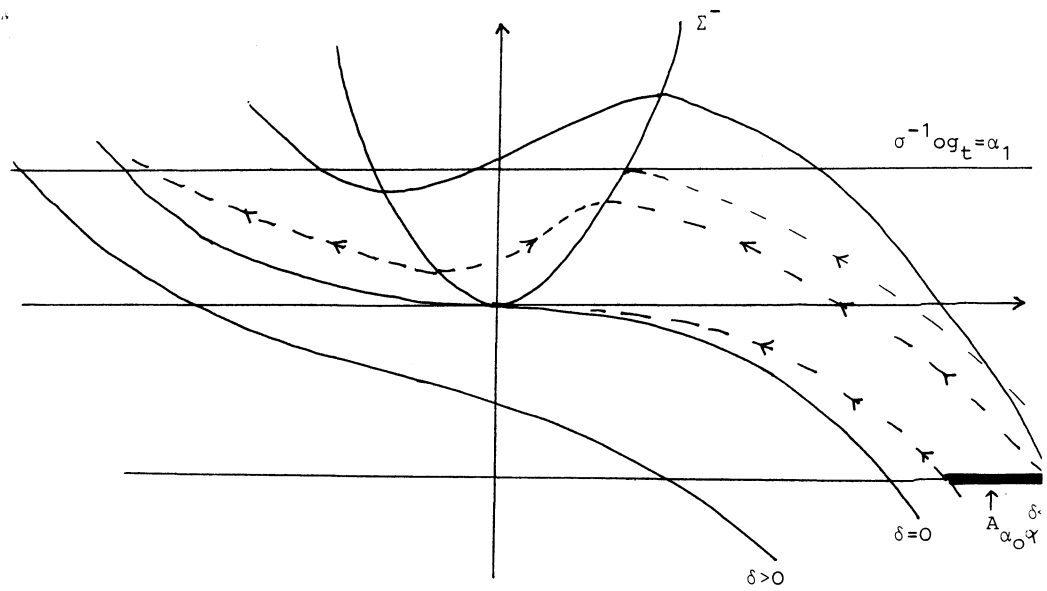


Fig. 2.6

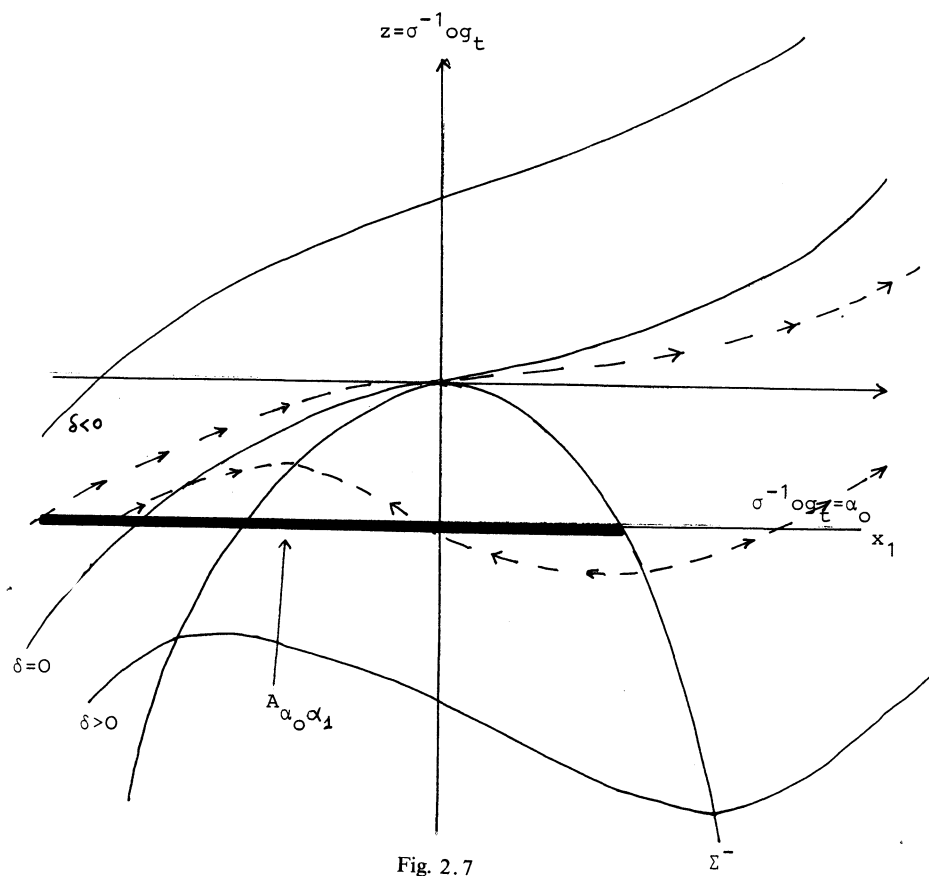


Fig. 2.7

(4) Notons $\{A_{i,q}\}$ ($q=1, 2, \dots, q(i)$) les composantes connexes du sous-ensemble des points de $g_i^{-1}(\sigma(\alpha_i))$ origine des trajectoires de χ_i et aboutissant sur $\Sigma_\gamma^- \cap g_i^{-1}[\sigma(\alpha_i), \sigma(\alpha_{i+1})]$. D'après les lemmes 2.7, 2.8, 2.9, $A_{i,q}$ sont des points ou des segments. Si $\dim A_{i,q}=0$ pour tout q , alors par transversalité [dans $g_i^{-1}(\sigma(\alpha_i))$], K_i est disjoint de $\bigcup_q A_{i,q}$. On prolonge alors le cylindre \mathcal{C}_i jusqu'à $g_i^{-1}(\sigma(\alpha_{i+1}))$ à l'aide des trajectoires de $\widetilde{\chi_i}$ partant de K_i .

(5) Plaçons-nous dans le cas où l'un des $A_{i,q}$ est de dimension 1. Les constructions qu'on va faire étant locales (en fait dans un voisinage de $A_{i,q}$), on peut supposer qu'il n'existe qu'une variété $A_{i,q}$ dans $g_i^{-1}(\sigma(\alpha_i))$ qu'on note A_i . Si $A_i \cap K_i = \emptyset$ on conclut comme précédemment.

Premier cas. — A_i correspond à une carte du type

$$(\delta, \sigma^{-1} \circ g_i) \sim (-z - x_1^2 + x_2^2, z) \quad (\text{lemme 2.7}).$$

(6) D'après le lemme 2.7, $A_i (= A_{\alpha_0, \alpha_1})$ est un segment de $g_i^{-1}(\alpha_i)$ contenant un point s_0 de Σ_γ^- dans son intérieur. Par transversalité, K_i coupe A_i en un nombre fini de points. On note $\{n_1, \dots, n_{k_0}\}$ (resp. m_1, \dots, m_{h_0}) les points de $A_i \cap K_i$ appartenant à $[a, s_0]$ (resp. $[s_0, b]$), ordonnés de a vers s_0 (resp. b vers s_0), où a et b désignent les extrémités de A_i (fig. 2.8).

On cherche à disjointer A_i de K_i par isotopie. L'idée naïve est de «faire sortir» les points d'intersection par un point du bord de A_i sans traverser $s_0 \in \Sigma^-$ selon la figure 2.8.

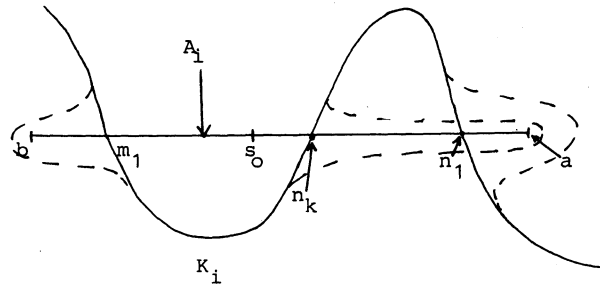


Fig. 2.8

Le but de ce qui suit est de montrer qu'on peut faire une isotopie de façon que le cylindre d'isotopie vérifie les propriétés du lemme 2.1. On va faire une construction pour chasser les points n_k , les points m_j étant traités de façon analogue.

Pour chaque point n_k on considère un plongement

$$\varphi_k: [0, 1] \times [-1, +1] \rightarrow g_i^{-1}(\sigma(\alpha_i))$$

tel que:

$$(7) \quad \left(\left[0, \frac{1}{2} \right] \times \{0\} \right) = \varphi_k^{-1}[n_k, a],$$

$$\text{Im } \varphi_k \cap A_i = [n_k, a], \quad \varphi_k(\{0\} \times [-1, +1]) \subset K_i$$

Pour

$$(8) \quad k < k', \operatorname{Im} \varphi_k \cap \operatorname{Im} \varphi_{k'} = \varphi_{k'}([\alpha_k, 1] \times [-1, 1])$$

où $\varphi_{k'}(\alpha_k) = n_k$ (fig. 2.9).

(9) δ est décroissante le long des chemins $s \rightarrow \varphi_k(s, u)$ pour tout $u \in [-1, +1]$. C'est vrai pour $u=0$ (fig. 2.1). Il suffit donc de prendre $\operatorname{Im} \varphi_k$ dans un voisinage suffisamment petit de A_i .

(10) On choisit $0 < \varepsilon_1 \dots < \varepsilon_k$, ε_k petit devant $\alpha_{i+1} - \alpha_i$ et on définit les plongements $\tilde{\varphi}_k: [0, 1] \times [-1, +1] \rightarrow g_i^{-1}(\sigma[\alpha_i, \alpha_i + \varepsilon_k])$ de la façon suivante: $\tilde{\varphi}_k(s, u)$ est le point du niveau $(\sigma^{-1} \circ g_i)^{-1}(\alpha_i + s \varepsilon_k)$ où la trajectoire de $\tilde{\chi}_i$ partant de $\varphi_k(s, u)$ coupe ce niveau (fig. 2.10).

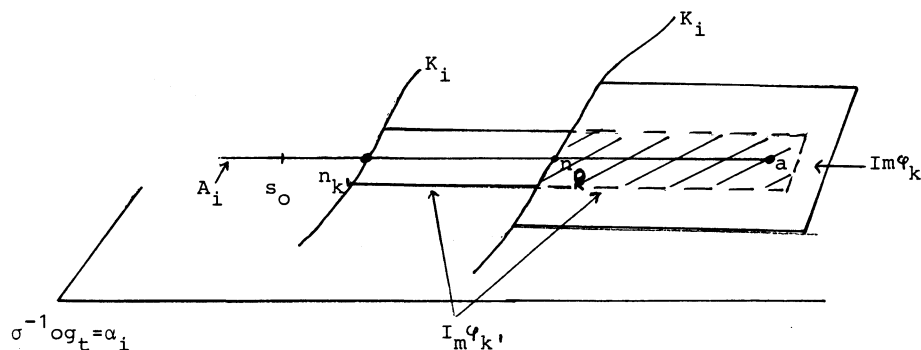


Fig. 2.9

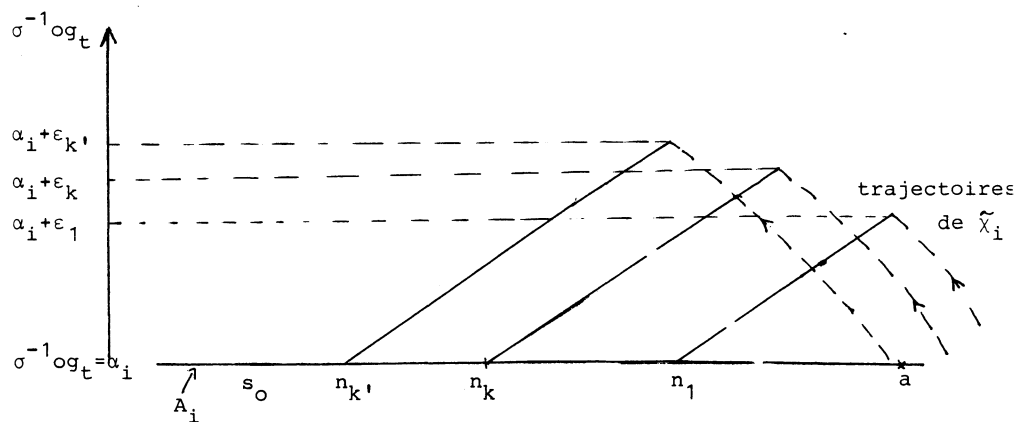


Fig. 2.10

Les plongements $\widetilde{\varphi}_k$ vérifient :

$$(11) \quad \widetilde{\varphi}_k(\{0\} \times [-1, +1]) = \varphi_k(\{0\} \times [-1, +1])$$

$$(12) \quad \frac{\partial}{\partial s} \sigma^{-1} \circ g_t(\widetilde{\varphi}_k(s, u)) > 0, \frac{\partial}{\partial s} \delta(\widetilde{\varphi}_k(s, u)) < 0.$$

(13) Les trajectoires de $\widetilde{\chi}_i$ partant de $\widetilde{\varphi}_k(\{1\} \times [-1, +1] \cup [0, 1] \times \partial[-1, +1])$ aboutissent sur le niveau $g_t^{-1}(\sigma(\alpha_{i+1}))$.

Le point (12) résulte de $\sigma^{-1} \circ g_t(\widetilde{\varphi}_k(s, u)) = \alpha_i + \varepsilon_k s$ et de (9). Par construction $\varphi_k(\{1\} \times [-1, +1] \cup [0, 1] \times \partial[-1, +1])$ est disjoint de A_i , ce qui prouve (13).

La sous variété (avec arêtes anguleuses) $\mathcal{C}_i \cup \text{Im } \widetilde{\varphi}_k$ est difféomorphe à $K \times [0, 1]$ et a pour bord supérieur $(\widetilde{K}_i - \text{Im } \widetilde{\varphi}_k) \cup \widetilde{\varphi}_k([0, 1] \times \partial[-1, +1] \cup [0, 1] \times \{1\})$. Notons \mathcal{C}_{i+1} le cylindre obtenu de $\mathcal{C}_i \cup \text{Im } \widetilde{\varphi}_k$ en le prolongeant par les trajectoires de $\widetilde{\chi}_i$ jusqu'au niveau $g_t^{-1}(\sigma(\alpha_{i+1}))$ à partir de son bord supérieur [voir (13)]. \mathcal{C}_{i+1} est un cylindre plongé avec arêtes anguleuses de dimension 1. Pour le voir, il suffit de remarquer que les trajectoires partant du bord supérieur de $\mathcal{C}_i \cup \text{Im } \widetilde{\varphi}_k$ ne rencontrent pas \mathcal{C}_i : en effet $\mathcal{C}_i \subset \{\sigma^{-1} \circ g_t \leq \alpha_i\}$, $\text{Im } \widetilde{\varphi}_k \subset \{\sigma^{-1} \circ g_t \geq \alpha_i\}$ et $\sigma^{-1} \circ g_t$ est croissante le long des trajectoires de $\widetilde{\chi}_i$. De plus, deux points du bord supérieur de $\mathcal{C}_i \cup \text{Im } \widetilde{\varphi}_k$ ne sont pas sur une même trajectoire de $\widetilde{\chi}_i$.

Le cylindre \mathcal{C}_{i+1} vérifie les propriétés du lemme 2.1. En effet, \mathcal{C}_{i+1} est transverse aux fibres $g_t^{-1}(x)$ d'après (12). De plus en lissant les arêtes anguleuses $\widetilde{\varphi}_k(\partial([0, 1] \times [-1, +1]))$, il apparaît un point critique d'indice 1 pour δ le long de l'arête $\widetilde{\varphi}_k(\{0\} \times [-1, +1])$ correspondant à n_k et un point critique d'indice 0 correspondant à l'arête $\widetilde{\varphi}_k(\{1\} \times [-1, +1])$ (fig. 2.11).

Les cas correspondant au lemme 2.8 et au cas $\varepsilon_1 \varepsilon_2 < 0$ du lemme 2.9 se traitent de façon analogue. Dans le cas $\varepsilon_1 \varepsilon_2 > 0$ du lemme 2.8 une petite complication survient du fait que A_i est un segment $[a, b]$ contenant un point s_0 de Σ^- dans son intérieur et que l'une de ses extrémités appartient à Σ^- . Avec des modifications de détails (on définit directement les plongements $\widetilde{\varphi}_k$) ce cas se traite comme précédemment.

3. Un résultat de Gordon sur les nœuds de S^3

Soit $C \subset S^3 \times I$ une concordance entre deux nœuds $K_i = C \cap S^3 \times \{i\}$, ($i=0, 1$), c'est-à-dire l'image d'un plongement $S^1 \times (I, 0, 1) \rightarrow S^3 \times (I, 0, 1)$. Par une petite isotopie, on peut supposer que la restriction de la projection $p|_C : C \subset S^3 \times I \rightarrow I$ est une fonction de Morse. Si $p|_C$ n'a pas de point critique d'indice 2, on dit que C est une concordance en rubans (ribbon concordance) de K_1 vers K_0 . On décrit $K_1 \geq K_0$ s'il existe une concordance en rubans de K_1 vers K_0 .

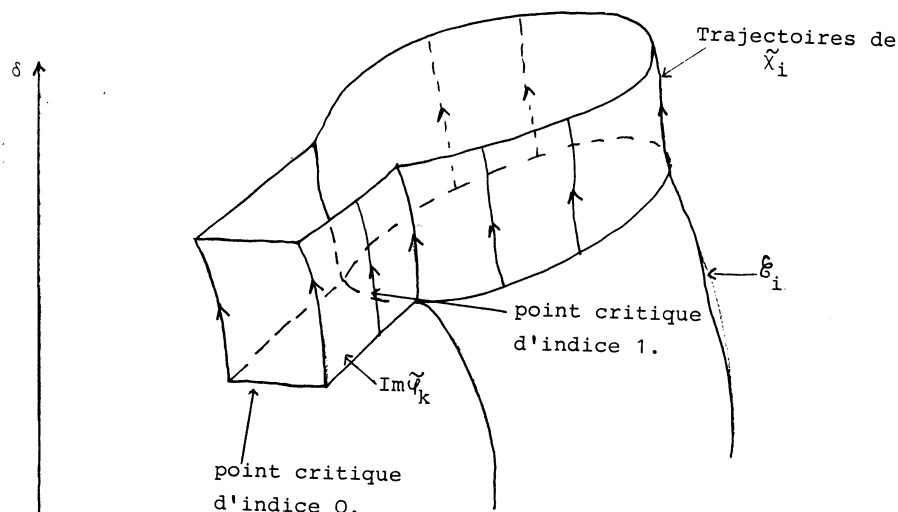


Fig. 2.11

Soit $d(K)$ le degré du polynôme d'Alexander de K ($d(K) = \dim H_1(\tilde{X}, \mathbb{Q})$ où \tilde{X} est le revêtement infini cyclique de $X = S^3 - K$).

LEMME 3.1 (lemma 3.4 de [4]). — Si $K_1 \geq K_0$, $d(K_1) = d(K_0)$ et K_1 transfiniment nilpotent, alors K_1 est isotope à K_0 .

Par exemple, si K_1 est un nœud fibré, il est transfiniment nilpotent.

La définition de concordance en rubans a un sens pour les enlacements de S^3 .

LEMME 3.2. — Soit F une surface compacte connexe à bord non vide non nécessairement connexe. Soit $\varphi: F \times (I, 0, 1) \rightarrow S^3 \times (I, 0, 1)$ un plongement et \mathcal{D} son image. On suppose que :

- (a) l'enlacement $\mathcal{L}_1 = \varphi(\partial F \times \{1\})$ est fibré, de fibre $\varphi(F \times \{1\})$.
- (b) $\mathcal{C} = \varphi(\partial F \times I)$ est une concordance en rubans de \mathcal{L}_1 vers $\mathcal{L}_0 = \varphi(\partial F \times \{0\})$.
- (c) \mathcal{L}_0 et \mathcal{L}_1 sont non sécables, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de sphère S^2 plongée dans S^3 disjointe de \mathcal{L}_i , séparant deux composantes de \mathcal{L}_i .

Alors les enlacements \mathcal{L}_0 et \mathcal{L}_1 sont isotopes.

Démonstration. — Notons $X_i = S^3 - \mathcal{L}_i$ ($i=0, 1$) et $Y = S^3 \times I - \mathcal{C}$. Soient $\tilde{X}_1 \xrightarrow{p_1} X_1$ le revêtement infini cyclique associé à la fibration de X_1 et \tilde{Y} , \tilde{X}_0 les revêtements infinis cycliques correspondants de Y et X_0 . En utilisant la construction des revêtements infinis cycliques faite dans ([11], chap. IV, §3), il est immédiat que les inclusions $H_*(\tilde{X}_i, \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(\tilde{Y}, \mathbb{Z})$ sont des isomorphismes de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -modules, t désignant le générateur du groupe du revêtement.

(1) En utilisant le fait que le groupe fondamental du complémentaire d'un enlacement non sécable est résiduellement fini (annoncé dans [13], démontré dans [7]), la démonstration du lemme 3.1 de [4] marche mot pour mot et montre que $\pi_1(X_1) \rightarrow \pi_1(Y)$ est surjectif et $\pi_1(X_0) \rightarrow \pi_1(Y)$ est injectif.

(2) L'enlacement \mathcal{L}_1 étant fibré, son groupe fondamental est transfiniment nilpotent. La démonstration du lemme 3.2 de [4] marche mot pour mot dans notre situation, ce qui prouve en utilisant un résultat de Wadlhausen [14] comme dans [4] que les enlacements \mathcal{L}_0 et \mathcal{L}_1 sont isotopes.

4. La famille $g_t = ty^2 + x^v + y^{2m}$ ($m > 1$)

LEMME 4.1. — La famille $g_t = ty^2 + x^v + y^{2m}$ vérifie la propriété SI le long du rayon réel positif ($v, m > 1$).

Démonstration. — Soit $\pi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ définie par $\pi(x, y) = (x^v, y)$. Soit encore $f_t(x, y) = ty^2 + x + y^{2m}$ et $\Sigma(\varepsilon) = \pi^{-1}(S(\varepsilon)) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; |x|^{2v} + |y|^2 = \varepsilon^2\}$.

On désigne par $\text{grad}_C f$ le conjugué du vecteur $(\partial f / \partial x, \partial f / \partial y)$ et par $\text{grad} |f|$ le gradient réel usuel. En tout point (x, y) de \mathbb{C}^2 tel que $f(x, y) \neq 0$, on a $\text{grad} |f| = f / |f| \text{grad}_C f$.

Soit $(\varepsilon(t), \eta(t))$ un couple adapté à f_t , $\lambda_t \in \mathbb{R}^+$ le point de $\partial D(\eta(t))$ et γ la partie du rayon positif réel comprise dans $\overline{D}(\eta_0) - \overline{D}(\eta_1)$ ($t > 0$).

Le champ de vecteurs χ de \mathbb{C}^2 défini par $\chi = (|x|^2, 2t\bar{y} + 2m\bar{y}^{2m-1})$ vérifie les propriétés suivantes faciles à vérifier :

1. χ est tangent à $x=0$ et au plan réel $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$.
2. χ est tangent à $f_t^{-1}(\gamma) \cap B(\varepsilon_0)$ et non nul sur $f_t^{-1}(\gamma) \cap B(\varepsilon_0)$.
3. χ est transverse à $f_t^{-1}(p) \cap B(\varepsilon_0)$ pour tout $p \in \gamma$.
4. En tout point de $f_t^{-1}(\gamma) \cap B(\varepsilon_0) \cap \mathbb{R}^2$, χ est transverse aux sphères $S(\varepsilon')$ pour tout $\varepsilon' > 0$.

La fonction f_t étant sans singularité en $0 \in \mathbb{C}^2$, la fibre $f_t^{-1}(\lambda_t) \cap B(\varepsilon(t))$ est un disque D_t . $D_t \cap \mathbb{R}^2$ est un segment d'extrémité dans ∂D_t . D'autre part, $D_t \cap \{x=0\}$ consiste en deux points $a, b \in D_t \cap \mathbb{R}^2$ (fig. 4.1).

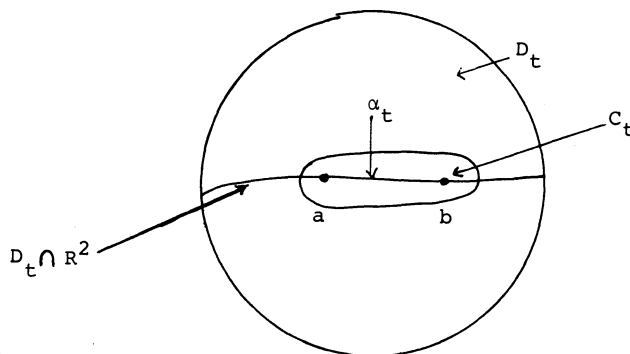


Fig. 4.1

Soit C_t un disque de D_t contenu dans un voisinage aussi petit que l'on veut du segment $\alpha_t \subset D_t \cap \mathbb{R}^2$ limité par a et b (fig. 4.1).

5. D'après (4), les trajectoires de χ partant de ∂C_t sont transverses aux sphères $S(\varepsilon')$ et ne rencontrent pas le plan $x=0$ (d'après 1). On note $\widetilde{\partial C}_t$ (resp. $\widetilde{\partial D}_t$) le cercle de $f_t^{-1}(\lambda_0) \cap B(\varepsilon)$ obtenu de ∂C_t (resp. ∂D_t) en le poussant le long de χ . Ainsi, $\partial C_t \subset S(\varepsilon(t))$ et $\widetilde{\partial C}_t \subset S(\varepsilon(0))$ sont isotopes par une isotopie laissant le plan $x=0$ invariant.

6. Puisque $\overline{D_t - C_t} \cap \{x=0\} = \Phi$ et d'après (1) les plongements de ∂D_t et ∂C_t dans $S(\varepsilon(t))$ sont isotopes modulo $x=0$, ainsi que ceux de $\widetilde{\partial D}_t$ et $\widetilde{\partial C}_t$ dans $S(\varepsilon(0))$.

7. L'application $\pi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ définie par $\pi(x, y) = (x^v, y)$ est un revêtement ramifié le long de $x=0$. Il est clair que $g_t = f_t \circ \pi$. Soit $\varphi(x, y) = |x|^{2v} + |y|^2$; elle vérifie les propriétés de la remarque suivant le corollaire 2. 4. Notons $\Sigma(\varepsilon)$ [resp. $\Delta(\varepsilon)$] la variété difféomorphe à une sphère (resp. une boule) définie par $\varphi(x, y) = \varepsilon^2$ (resp. $\varphi(x, y) \leq \varepsilon^2$). Les applications

$$\Delta(\varepsilon(t)) \xrightarrow{\pi} B(\varepsilon(t)), \quad \Sigma(\varepsilon(t)) \xrightarrow{\pi} S(\varepsilon(t))$$

et

$$G_t = g_t^{-1}(\lambda_t) \cap \Delta(\varepsilon(t)) \xrightarrow{\pi} D_t = f_t^{-1}(\lambda_t) \cap B(\varepsilon(t))$$

sont des revêtements ramifiés le long de $x=0$.

8. En tout point $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, $x \neq 0$, le champ $\pi^*\chi$ relevant le champ χ par π est transverse aux surfaces de niveaux de g_t et se projette par g_t sur γ .

9. Soit $G'_t = \pi^{-1}(C_t) \subset G_t$ et $\widetilde{\widetilde{\partial G'_t}}$ la sous-variété de $g_t^{-1}(\lambda_0)$ obtenu en poussant $\partial G'_t$ le long de $\pi^*\chi$. Soit d'autre part $\widetilde{\partial G'_t}$ (resp. $\widetilde{\widetilde{\partial G'_t}}$) la sous-variété de $g_t^{-1}(\lambda_0)$ obtenue en poussant $\partial G'_t$ (resp. $\partial G'_t$) le long de $\text{grad } |g_t|$.

On a les isotopies de plongements suivantes (\sim pour isotopie):

10. $\partial G'_t \subset \Sigma(\varepsilon(t)) \underset{1}{\sim} \partial G_t \subset \Sigma(\varepsilon(t))$ d'après (6) et (7) (en fait $\overline{G_t - G'_t}$ est difféomorphe au produit $\partial G'_t \times [0, 1]$).

11. $\partial G'_t \subset \Sigma(\varepsilon(t)) \underset{1}{\sim} \widetilde{\widetilde{\partial G'_t}} \subset \Sigma(\varepsilon(0))$ car π étant un revêtement en dehors de $x=0$ relève l'isotopie entre $\partial C_t \subset S(\varepsilon(t))$ et $\widetilde{\partial C}_t \subset S(\varepsilon(0))$ en une isotopie (mod $x=0$).

12. $\widetilde{\partial G'_t} \subset \Sigma(\varepsilon(0)) \underset{1}{\sim} \widetilde{\widetilde{\partial G'_t}} \subset \Sigma(\varepsilon(0))$ car $\text{grad } |g_t|$ et $\pi^*\chi$ sont transverses aux niveaux $g_t^{-1}(p)$, $p \in \gamma$ (en fait $\widetilde{\partial G'_t}$ et $\widetilde{\widetilde{\partial G'_t}}$ sont isotopes dans $g_t^{-1}(\lambda_0)$, λ_0 étant l'extrémité de γ).

Les enlacements $\partial G_t \subset \Sigma(\varepsilon(t))$ et $\widetilde{\partial G_t} \subset \Sigma(\varepsilon(0))$ sont donc isotopes d'après 10, 11, 12. De plus ce sont des enlacements fibrés (car ∂G_t l'est) et G_t et $\widetilde{G_t}$ sont des surfaces de Seifert minimales pour ces enlacements. Elles sont donc isotopes d'après [12] (fig. 4. 2).

Comme corollaire immédiat de la démonstration, on obtient:

COROLLAIRE 4.2. — Soit K un cercle plongé dans $g_t^{-1}(\lambda_t) \cap B(\varepsilon(t))$ et \tilde{K} le cercle plongé dans $g_t^{-1}(\lambda_0) \cap B(\varepsilon(0))$ obtenu en poussant K le long de γ (λ_0 et λ_t désignant les extrémités de γ). Alors les plongements $K \subset S(\varepsilon(t))$ et $\tilde{K} \subset S(\varepsilon)$ sont isotopes.

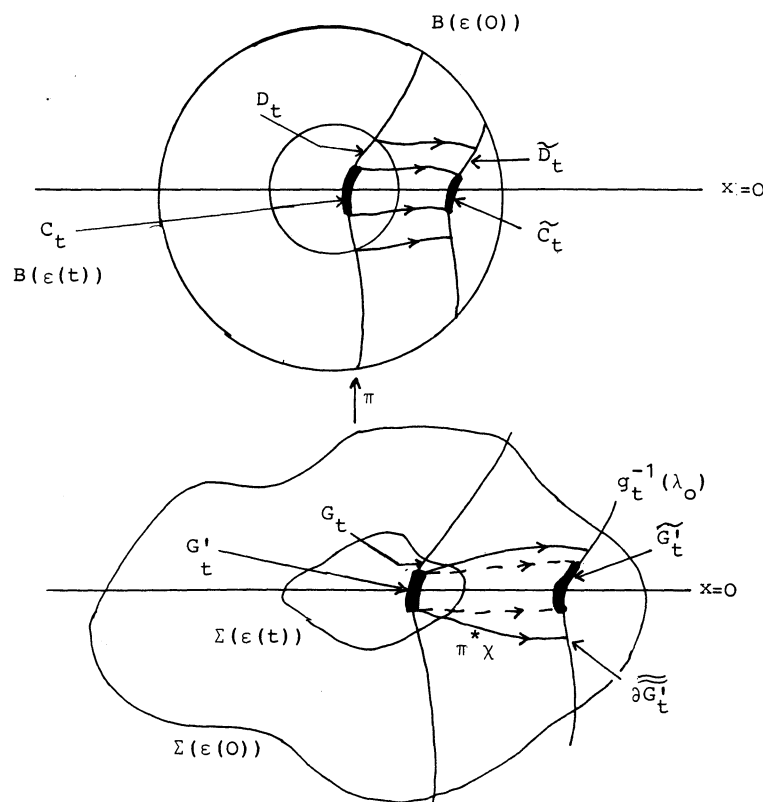


Fig. 4.2

Démonstration. — Tout cercle K de G_t étant isotope à un cercle de G'_t disjoint de $x=0$, il suffit de reprendre la démonstration précédente en remplaçant ∂C_t (resp. ∂G_t) par $\pi(K)$ (resp. K).

5. La famille $ty^2 + f(x, uy) + y^n$

Soit $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germe de fonction holomorphe à singularité isolée en 0 et μ son nombre de Milnor. A changement de coordonnées linéaires près, on peut supposer que $f(x, 0) = x^v$, v étant l'ordre de f . On suppose de plus que la direction $y=0$ est générique au sens de [6] par exemple.

Soit $g_{t,u} = ty^2 + f(x, uy) + y^n$ où n est un entier pair, grand par rapport à μ .

(1) Soit $(\varepsilon(t, u), \eta(t, u))$ un couple adapté à $g_{t,u}$ et posons $\varepsilon(0, 0) = \varepsilon$, $\eta(0, 0) = \eta$. Il existe donc un voisinage $T \times U \subset \mathbb{R}^2$ de $(0, 0)$ tel que pour tout $(t, u) \in T \times U$ la fibre $g_{t,u}^{-1}(\lambda)$ est transverse à $S(\varepsilon)$, pour tout $\lambda \in D(\eta)$.

(2) Soit γ le rayon réel positif contenu dans $D(\eta)$ d'extrémité $\lambda_0 \in \partial D(\eta)$.

Le champ $\text{grad} |g_{t,0}|$ définit une trivialisation de $g_{t,0}^{-1}(\gamma, 0) \cap B(\varepsilon)$.

(3) $ty^2 + f(x, uy) + y^n$ étant une déformation de $x^\nu + y^n$, il existe $t_0 > 0$ et $u_0 > 0$, tels que pour tout $(t, u) \in [0, t_0] \times [0, u_0] \subset T \times U$, $g_{t,u}$ possède $(\nu-1) \times (n-1) = \mu(g_{0,0})$ points (resp. valeurs) critiques (comptés avec leur multiplicité) dans $B(\varepsilon)$ [resp. $D(\eta)$].

D'après ([9]; chap III), $g_{0,u}$ pour $u \neq 0$ est analytiquement équivalente à $f(x, y)$. La fonction $g_{0,u}$ ($u \neq 0$) admet donc $0 \in \mathbb{C}^2$ comme point singulier de multiplicité μ et $(\nu-1) \times (n-1) - \mu$ points (resp. valeurs) critiques non nuls dans $B(\varepsilon)$ [resp. $D(\eta)$].

Pour $u \neq 0$ et $t \neq 0$, $g_{t,u}$ admet $0 \in \mathbb{C}^2$ comme point singulier de multiplicité $(\nu-1)$ (car analytiquement équivalente à $ty^2 + x^\nu$).

(4) Dans $B(\varepsilon(0, u_0))$ [resp. $D(\eta(0, u_0))$], la fonction g_{t,u_0} considérée comme déformation de $g_{0,u_0} = f(x, u_0 y) + y^n$ admet 0 comme point singulier de multiplicité $\nu-1$ et $\mu - (\nu-1)$ points critiques de Morse, dont les valeurs critiques correspondantes sont dans $D(\eta(0, u_0)) - D(\eta(t, u_0))$ (fig. 5. 2).

(5) Considérons la famille $g_{t_0,u}$, $u \in [0, u_0]$. Le point $0 \in \mathbb{C}^2$ est point critique de multiplicité $\nu-1$: on peut supposer que les valeurs critiques autres que contenues dans $D(\eta)$, correspondent à des points critiques de Morse uniques. On peut donc suivre les valeurs critiques non nulles de $g_{t_0,u}$ quand u varie de 0 à u_0 . On les notent $C_1(u), \dots, C_r(u) \in D(\eta)$, $r = (\nu-1)(n-1) - (\nu-1) = (\nu-1)(n-2)$ (fig. 5. 2).

(6) Parmi les valeurs critiques $C_1(u_0), \dots, C_r(u_0)$, $s = \mu - (\nu-1)$ d'entre elles sont dans $D(\eta(0, u_0))$ [voir (4)]. On suppose que ce sont les s premières.

LEMME FONDAMENTAL 5. 1. — *Il existe une famille de chemins plongés dans $D(\eta(0, u_0))$, $v_1(u_0), \dots, v_s(u_0)$, joignant l'origine $0 \in \mathbb{C}^2$ aux valeurs critiques $C_1(u_0), \dots, C_s(u_0)$, disjoints sauf en leur extrémité commune 0 telle que l'on puisse les déformer différemment en une famille de chemins plongés dans $D(\eta)$, $\{v_1(u), \dots, v_s(u)\}$ pour $u \in [0, u_0]$ vérifiant :*

- (i) $\{v_i(u); i = 1, \dots, s\}$ joignent 0 à $C_i(u)$;
- (ii) ils ne se rencontrent qu'en 0;
- (iii) ils évitent les autres valeurs critiques $C_{s+1}(u), \dots, C_r(u)$;
- (iv) pour $u=0$, les chemins $\{v_i(0)\}$ évitent le rayon réel positif (fig. 5. 1).

Ce lemme est tout à fait analogue au lemme 2 de [3]. Sa démonstration est donnée en appendice.

COROLLAIRE 5. 2. — *La famille $ty^2 + f(x, y) + y^n$ vérifie la propriété S.I. pour n pair.*

Démonstration. — Fixons $t_0, u_0 > 0$ vérifiant les propriétés ci-dessus.

(7) Il est facile de voir que la famille $t_0 y^2 + f(x, uy) + y^n$ ($u \in [0, u_0]$) est holomorphiquement triviale (en fait holomorphiquement équivalente à $t_0 y^2 + x^\nu$).

On peut donc choisir un couple adapté $(\varepsilon(t_0, 0), \eta(t_0, 0))$ commun à toutes les fonctions $g_{t_0,u}$, $u \in [0, u_0]$. On a alors les inclusions $D(\eta(t_0, u_0)) = D(\eta(t_0, 0)) \subset D(\eta(0, u_0)) \subset D(\eta)$ (fig. 5. 1).

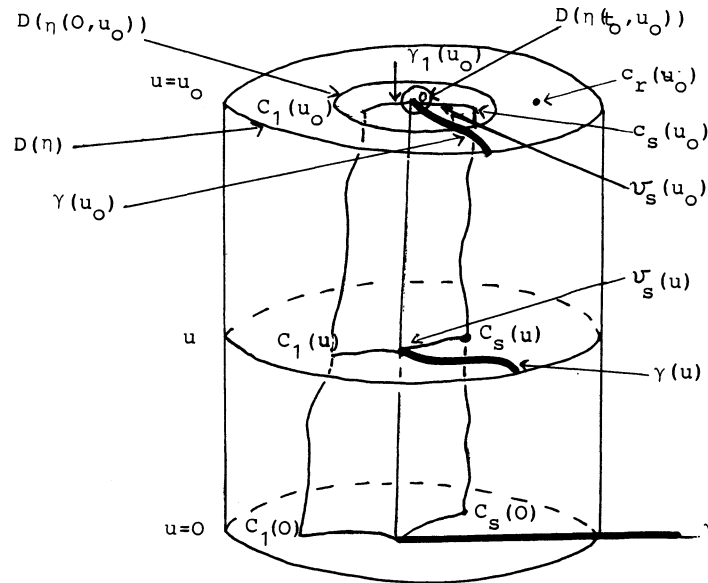


Fig. 5.1

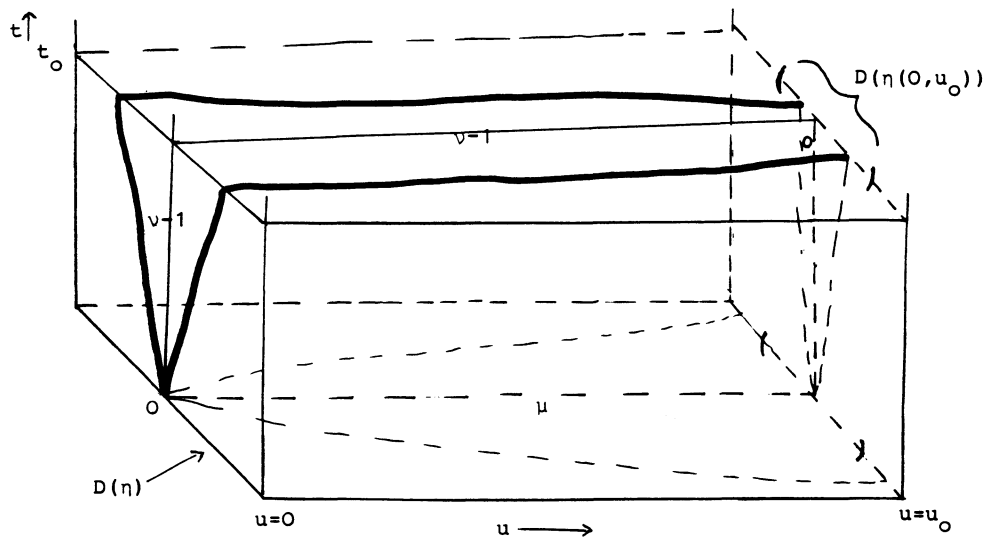


Fig. 5.2

(8) D'après le lemme 5.1, on peut déformer le chemin γ fixant $(\gamma \cap D(\eta(t_0, 0)))$, en une famille $\gamma(u)$ de chemins plongés dans $\overline{D(\eta)} - D(\eta(t_0, 0))$, d'extrémité $\lambda(u) \in \partial D(\eta)$ tel que $\gamma(u)$ évite les chemins $\{v_i(u); i=1, \dots, s\}$ et les valeurs critiques $C_{s+1}(u), \dots, C_r(u)$ et tel que $\gamma(u_0) \cap D(\eta(0, u_0))$ soit connexe (fig. 5.1).

(9) D'après (8), on peut définir une famille à un paramètre de trivialisations \mathcal{T}_u de $g_{t_0, u}^{-1}(\gamma(u)) \cap B(\varepsilon)$. Notons (fig. 5.3 b) $\lambda(t_0, u_0)$ [resp. $\tilde{\lambda}(u_0)$] l'unique point d'intersection de $\gamma(u_0)$ avec $\partial D(\eta(t_0, 0))$ (resp. $\partial D(\eta(0, u_0))$). On pose alors $G_{t_0, u_0} = g_{t_0, u_0}^{-1}(\lambda(t_0, u_0)) \cap B(\varepsilon(t_0, 0))$ et on note \tilde{G}_{t_0, u_0} (resp. $\tilde{\tilde{G}}_{t_0, u_0}$) l'image dans $g_{t_0, u_0}^{-1}(\tilde{\lambda}(u_0)) \cap B(\varepsilon(0, u_0))$ (resp. $g_{t_0, u_0}^{-1}(\lambda(u_0))$) de G_{t_0, u_0} par la trivialisation \mathcal{T}_{u_0} (fig. 5.3 a)).

(10) Les sous-variétés $G_{t_0, u_0} \subset S(\varepsilon(t_0, 0))$ et $\tilde{G}_{t_0, u_0} \subset S(\varepsilon)$ sont isotopes. En effet il suffit d'utiliser le lemme 4.1 pour la famille $g_{t, 0} = ty^2 + x^\gamma + y^n$ et le fait que la donnée $(B(\varepsilon), B(\varepsilon(t_0, 0)), g_{t_0, 0}^{-1}(\gamma))$ est isotope à la donnée $(B(\varepsilon), B(\varepsilon(t_0, 0)), g_{t_0, u_0}^{-1}(\gamma(u_0)))$ d'après (8).

(11) La trivialisation \mathcal{T}_{u_0} réalise un cobordisme entre $\tilde{G}_{t_0, u_0} \subset S(\varepsilon(0, u_0))$ et $\tilde{\tilde{G}}_{t_0, u_0} \subset S(\varepsilon)$. D'après le lemme 2.1 et le lemme de Gordon 3.2, les enlacements du bord $\partial \tilde{\tilde{G}}_{t_0, u_0} \subset S(\varepsilon)$ et $\partial \tilde{G}_{t_0, u_0} \subset S(\varepsilon)(0, u_0)$ sont isotopes. Par unicité des surfaces minimales des enlacements fibrés [12], les sous-variétés $\tilde{\tilde{G}}_{t_0, u_0} \subset S(\varepsilon)$ et $\tilde{G}_{t_0, u_0} \subset S(\varepsilon(0, u_0))$ sont isotopes. D'après (10) les sous-variétés $G_{t_0, u_0} \subset S(\varepsilon(t_0, 0))$ et $\tilde{G}_{t_0, u_0} \subset S(\varepsilon(0, u_0))$ sont isotopes. Ceci prouve que la famille à un paramètre t , $g_{t, u_0} = ty^2 + f(x, u_0 y) + y^{2m}$ vérifie la propriété S.I. le long du chemin $\gamma(u_0)$.

COROLLAIRE 5.3. — La famille $ty^2 + f(x, y)$ vérifie la propriété S.I.

Démonstration. — Il suffit de considérer la famille $h_{s, t} = ty^2 + f(x, u_0 y) + sy^{2m}$, $s \in [0, 1]$, et de faire des raisonnements déjà faits plus haut.

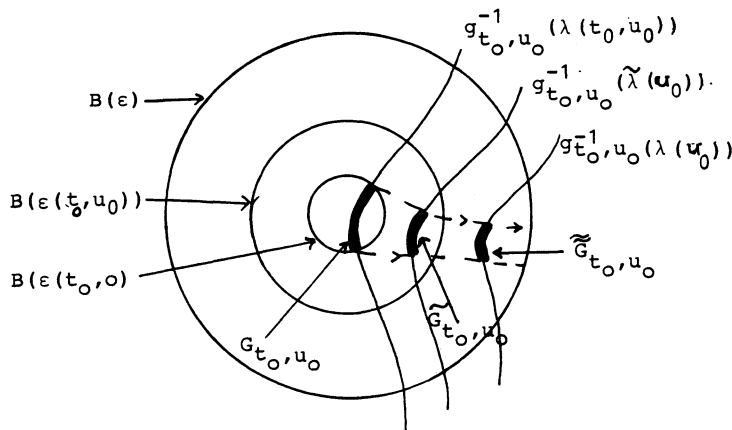


Fig. 5.3 a

LEMME 5.4. — Soient $(\varepsilon(t), \eta(t))$ un couple adapté à $f_t = ty^2 + f(x, y)$, γ un chemin plongé dans $\overline{D(\eta)} - D(\eta(t))$, d'origine $\lambda(t) \in D(\eta(t))$, d'extrémité $\lambda(0) \in \partial D(\eta)$ donné par le corollaire 5.3. Soit K un cercle plongé dans $f_t^{-1}(\lambda_t) \cap B(\varepsilon(t))$, dénoué dans $S(\varepsilon(t))$ (après l'identification « tube-boule ») et \tilde{K} le cercle de $f_t^{-1}(\lambda(0)) \cap B(\varepsilon)$ obtenu en poussant K le long de γ . Alors \tilde{K} est dénoué dans $S(\varepsilon)$.

Démonstration. — On reprend les notations du début du paragraphe 5. Soit K' un cercle plongé dans $g_{t_0, u_0}^{-1}(\lambda_{t_0, 0}) \cap B(\varepsilon(t_0, 0))$, \tilde{K}' (resp. \tilde{K}') le cercle de $g_{t_0, u_0}^{-1}(\lambda_{u_0}) \cap B(\varepsilon)$ (resp. $g_{t_0, u_0}^{-1}(\lambda_{t_0, u_0}) \cap B(\varepsilon(0, u_0))$) obtenu en poussant K le long de γ_{u_0} (pour les notations voir (1), (2), (9) et la figure 5.3). D'après le corollaire 4.2 et l'isotopie entre γ_{u_0} et γ_0 , les plongements $K' \subset S(\varepsilon(t_0, u_0))$ et $\tilde{K}' \subset S(\varepsilon)$ sont isotopes, donc \tilde{K}' est dénoué dans $S(\varepsilon)$. D'après le lemme 2.1 il existe un cobordisme dans $\overline{B(\varepsilon) - B(\varepsilon(0, u_0))}$ d'origine \tilde{K}' , d'extrémité \tilde{K}' n'ayant que des points critiques d'indice 0 et 1. D'après le lemme de Gordon (lemme 3.1), \tilde{K}' est isotope à \tilde{K}' et est donc dénoué dans $S(\varepsilon(0, u_0))$.

Le lemme 5.4 résulte alors de la démonstration du corollaire 5.3.

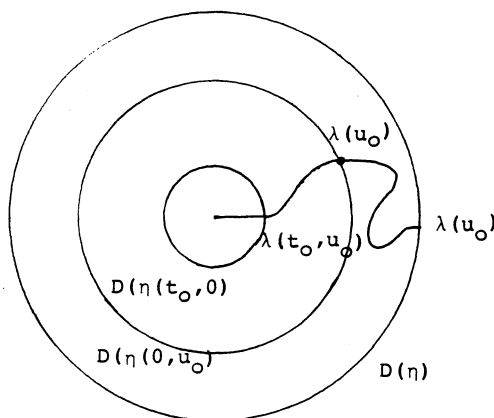


Fig. 5.3 b

6. Les cycles évanescents de $y^2 + x^n$ sont dénoués

LEMME 6.1. — *Pour toute Morsification et tout choix de chemins de $y^2 + x^n$, les cycles évanescents correspondants sont dénoués.*

On peut obtenir toutes les configurations de cycles en fixant une Morsification et en faisant tous les choix possibles de chemins (cela résulte de [8], où par connexité du complémentaire de l'hypersurface de bifurcation, on peut joindre deux Morsifications par un chemin dans les Morsifications). Soit $f_t(x)$ une Morsification de x^n ; $y^2 + f_t(x)$ en est une pour $y^2 + x^n$.

LEMME 6.2. — *Pour tout choix de chemins de la Morsification $g_t = y^2 + f_t(x)$, la famille des cycles S_1, \dots, S_{n-1} dans $g_t^{-1}(\ast)$ vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout (i, j) , $(i \neq j)$ S_i et S_j sont ou bien disjoints ou se coupent en un point.*
2. *Si $S_i \cap S_j$, $S_j \cap S_k$, $S_i \cap S_k$ sont des points alors ils sont confondus $(i \neq j \neq k)$.*

Démonstration. — On suppose que $0 \in \mathbb{C}$ est valeur régulière de f_t . $f_t^{-1}(0)$ est constitué de n points notés $\{a_1, \dots, a_n\}$. On note encore C_1, \dots, C_{n-1} les points critiques de f_t et $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ les valeurs critiques correspondantes de f_t , supposées toutes distinctes. On choisit des chemins γ_i plongés dans \mathbb{C} joignant $0 \in \mathbb{C}$ à α_i , disjoints sauf en leur origine 0 . On note D_i un petit disque centré en α_i et α'_i l'intersection de ∂D_i avec γ_i (fig. 6.1).

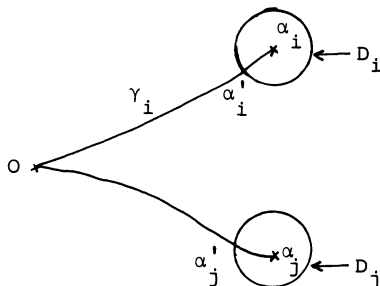


Fig. 6.1

Quand on fait tendre un point $u \in \mathbb{C}$ de 0 vers α_i le long de γ_i , deux points de $f_t^{-1}(u)$ tendent vers le point critique C_i . Ces deux points proviennent d'une paire $\{a_{k_i}, a_{k'_i}\} \subset \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. En les suivant le long de γ_i , ils engendrent un arc plongé $\widetilde{\gamma}_i$ d'extrémité $a_{k_i}, a_{k'_i}$ contenant le point C_i . La paire $\{a_{k_i}, a_{k'_i}\} \subset f_t^{-1}(0)$ est le cycle évanescant de f correspondant à C_i et au chemin γ_i . L'union $\bigcup_i \widetilde{\gamma}_i$ est un arbre connexe de \mathbb{C} de sommets $\{a_1, \dots, a_n\}$ (car $\bigcup_i \widetilde{\gamma}_i$ a le type d'homotopie de $f_t^{-1}(\bigcup_i \gamma_i) \approx f_t^{-1}(D)$ où D est une petite boule de \mathbb{C} contenant $\bigcup_i \gamma_i$). Il est facile de voir que le cycle évanescant S_i dans $g_t^{-1}(0)$ correspondant à α_i et γ_i est l'image réciproque par le revêtement ramifié le long de $f_t^{-1}(0)$, à deux feuillets, $\pi: g_t^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{C}$ donné par $\pi(x, y) = x$, du segment $\widetilde{\gamma}_i$. Au voisinage d'un point $(a_i, 0)$ l'application de revêtement $\pi: g_t^{-1}(0) \rightarrow \mathbb{C}$ est équivalente à $z \rightarrow z^2$. Si donc deux chemins $\widetilde{\gamma}_i$ et $\widetilde{\gamma}_j$ sont disjoints, les cycles S_i, S_j correspondants sont disjoints; si $\widetilde{\gamma}_i, \widetilde{\gamma}_j$ se rencontrent en un sommet a_k , les cycles correspondants se coupent transversalement au seul point $(a_k, 0)$. Ceci prouve la première partie du lemme 6.2. La deuxième partie résulte du fait que $\bigcup_i \gamma_i$ est un arbre.

LEMME 6.3. — (a) Il existe une boule $B \subset g_t^{-1}(*)$ telle que pour tout $i = 1, 2, \dots, (n-1)$, $B \cap S_i$ est connexe et contient tous les points d'intersection $(S_i \cap S_j)$.

(b) $g_t^{-1}(*)$ est difféomorphe à la surface (réelle) obtenues de B en attachant des anses d'indice 1 d'âmes $\overline{S_i - B}$.

Démonstration. — (a) est facile à réaliser compte tenu du lemme 6.2. (b) On note $S'_i = \overline{S_i - B}$ et on désigne par \widetilde{S}'_i un voisinage tubulaire de S'_i dans $g_t^{-1}(*)$. Soit encore

$S = B \cup \bigcup_i \widetilde{S}_i$, la sous-variété de $g_i^{-1}(*)$. On sait que les cycles évanescents $\{S_1, \dots, S_{n-1}\}$ forment une base d'homologie de $g_i^{-1}(*)$. Il en résulte que l'inclusion $i: S \rightarrow g_i^{-1}(*)$ est une équivalence d'homologie. D'après la classification des surfaces, $\overline{g_i^{-1}(*)} - S$ est difféomorphe à $\partial S \times [0, 1]$. Le lemme 6.3 en résulte.

Fin de démonstration du lemme 6.1. — Soit (ε, η) un couple adapté de $g_0 = y^2 + x^n$ et t une petite valeur du paramètre vérifiant les propriétés (2) qui suivent la définition 1.2 de l'introduction. On note $\{\alpha_i\}$ [resp. (C_i)] les valeurs (resp. points) critiques de g_t , $\{\gamma_i\}$ un système de chemins plongés joignant 0 à α_i , D (resp. D_i) un petit disque de $D(\eta)$ centré en 0 (resp. α_i) (fig. 6.2). On note encore γ'_i une famille de chemins plongés dans D , disjoints entre eux, disjoints des γ_i , joignant ∂D_i à $\partial D(\eta)$.

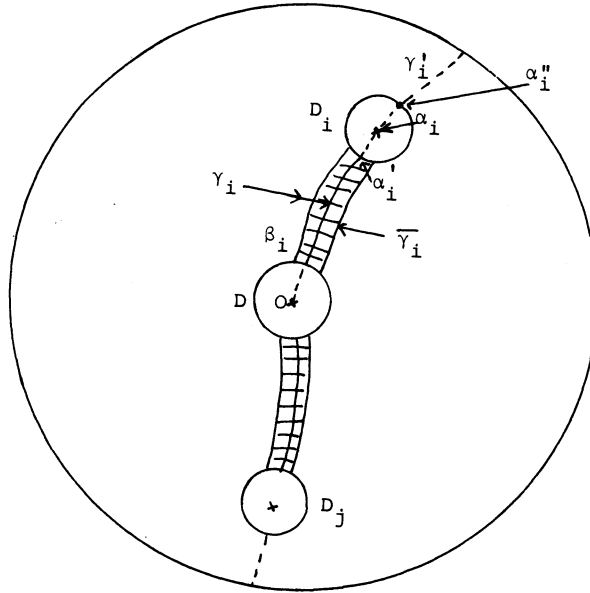


Fig. 6.2

On note $\alpha'_i = \gamma_i \cap \partial D_i$, $\beta_i = \partial D \cap \gamma_i$, $\bar{\gamma}_i$ un épaississement de γ_i . En considérant la fonction $|g_t|$, il est facile de voir qu'on passe de $g_t^{-1}(D)$ à $g_t^{-1}(D(\eta))$ en attachant des anses d'indice 2 sur le cercle $S_i \subset g_t^{-1}(\beta_i) \subset g_t^{-1}(\partial D)$, obtenu du cycle évanescents $S'_i \subset g_t^{-1}(\alpha'_i)$ correspondant au point critique C_i en le poussant le long de γ_i . De plus, la sphère (=cercle) transverse à cette anse d'indice 2, contenue dans $\partial[g_t^{-1}(D(\eta)) \cap B(\varepsilon)] \simeq S^3$ est le cycle évanescents \tilde{S}_i obtenu du cycle $S''_i \subset g_t^{-1}(\alpha''_i)$ en le poussant le long de γ'_i (fig. 6.2). D'après le lemme 6.3 (b), $G = g_t^{-1}(0) \cap B(\varepsilon)$ est obtenu de la boule B^2 en attachant $(n-1)$ anses d'indice 1, h_1, \dots, h_{n-1} dont les âmes sont $\overline{S_i} - B$, S_i étant les cycles évanescents dans $g_t^{-1}(0)$. L'application g_t étant une submersion sur D , $g_t^{-1}(D)$ est difféomorphe à $g_t^{-1}(0) \times D = G \times D$. Chaque anse d'indice 1, $h_i \times D$ est tuée exactement par la 2-anse définie par $S_i \subset g_t^{-1}(\beta_i)$. Il en résulte que la sphère

transverse à chacune des anses d'indice 2, qui est \tilde{S}_i , est dénouée dans $\partial[g_i^{-1}(D(\eta)) \cap B(\varepsilon)]$.

7. Un résultat de Gabrielov et la fin de la démonstration de la proposition 1.4

Soient $f: (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ une fonction holomorphe à singularité isolée en 0, (x, y) un système de coordonnées génériques de \mathbb{C}^2 et $h_t = f(x, y) + ty^2$. D'après la construction fondamentale (3) de l'introduction, la fibre G_t de h_t ($t \neq 0$) en 0 est canoniquement plongée (à isotopie près) dans la fibre G_0 de $f = h_0$.

Le théorème de Gabrielov (théorèmes 1 et 2 de [3]) peut s'énoncer ainsi :

THÉORÈME 3. — *Il existe une morsification de h_t et un système de chemins (voir (3) de l'introduction) (vérifiant une condition (V) de [3] p. 16) donnant une configuration de cycles $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{v-1}$ de h_t ($\sim y^2 + x^v$) et une configuration de cycles $\{\sigma_i^m; i=1, 2, \dots, v-1; m_i=1, 2, \dots, r_i\}$ pour f telles que $\sigma_i^m = h^m(\sigma_i)$ où h est la monodromie géométrique de f , $\sigma_i \subset G_t \subset G_0$.*

Commentaire. — C'est le théorème 1 de [3]. Il est énoncé dans [3] dans le cadre homologique mais la démonstration est géométrique et donne précisément le résultat ci-dessus (voir le lemme 2 de [3]).

Fin de démonstration de la proposition 1.4. — Soient $(\varepsilon(t), \eta(t))$ [resp. (ε, η)] un couple adapté à h_t (resp. f), $\lambda_t \in \partial D(\eta(t))$ l'extrémité du rayon positif, γ un chemin de $\overline{D(\eta)} - \overline{D(\eta(t))}$ le long duquel h_t vérifie la propriété S.I. (corollaire 5.2) et λ l'extrémité de $\gamma \in \partial D(\eta)$. On peut prendre $G_t = h_t^{-1}(\lambda_t) \cap B(\varepsilon(t))$ et $G_0 = h_t^{-1}(\lambda_t) \cap B(\varepsilon)$. D'après le lemme 6.1, les cycles $\sigma_1, \dots, \sigma_{v-1} \subset G_t$ sont dénoués dans $\partial B(\varepsilon(t))$. Soient $\tilde{\sigma}_i, \tilde{\sigma}_i^m \subset h_t^{-1}(\lambda) \cap B(\varepsilon)$ les cycles obtenus de $\sigma_i, \sigma_i^m \subset G_0$ en les poussant dans $h_t^{-1}(\lambda) \cap B(\varepsilon)$ à l'aide d'une trivialisation de $h_t^{-1}(\gamma) \cap B(\varepsilon)$. D'après le lemme 5.4, les cycles $\tilde{\sigma}_i$ sont dénoués dans $\partial B(\varepsilon)$. De plus, $\tilde{\sigma}_i^m = h^m(\tilde{\sigma}_i)$, où h est la monodromie de f . Cette monodromie est celle de la fibration de Milnor de $\partial B(\varepsilon) - f^{-1}(0) \rightarrow S^1$. Donc $\tilde{\sigma}_i^m$ est isotope dans $\partial B(\varepsilon)$ à $\tilde{\sigma}_i$ et est donc dénoué pour tout m . La famille $\{\tilde{\sigma}_i^m\}$ étant une configuration de cycles évanescents de f , ceci démontre la proposition 1.4.

8. Appendice : démonstration du lemme fondamental 5.1

(1) Soit $g_{t,u} = ty^2 + f(x, uy) + y^n$ où $y=0$ est une direction générique (au sens de [6]). La courbe polaire de f relativement à $y=0$, donnée par $\partial f / \partial x = 0$, est une courbe analytique réduite et lisse en dehors de 0. On note $(\Gamma_i; i=1, \dots, k)$ les composantes irréductibles de Γ et $x = b_i y^{\beta_i} + \dots$ leur développement de Puiseux. La fonction f en restriction à Γ_i est donnée par : $f = a_i y^{\alpha_i} + \dots$ où $a_i \in \mathbb{C}$, $\alpha_i \in \mathbb{Q}^+$ et $\alpha_i \geq v(f)$ (prop. 2 de [3]). On suppose dans la suite que $v(f) \geq 3$.

(2) *Remarque.* — Par un changement de variable $y \rightarrow by$, on peut modifier aussi peu qu'on veut chacun des a_i de (1).

(3) Les points critiques de $g_{t,u}$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, uy) &= 0 \\ 2ty + u \frac{\partial f}{\partial y}(x, uy) + ny^{n-1} &= 0. \end{aligned}$$

En différenciant l'identité sur $\Gamma_t: f(x, uy) = a_i u^{\alpha_i} y^{\alpha_i} + \dots$, il est immédiat que les valeurs critiques de $ty^2 + f(x, uy) + y^n$ sont asymptotiquement celles de $ty^2 + a_i u^{\alpha_i} y^{\alpha_i} + y^n$.

En posant $\delta = u^{\alpha_i} \in [0, 1]$, on est ramené à l'étude des valeurs critiques de la famille $k_{\delta,t} = ty^2 + a \delta y^\alpha + y^n$ où :

- $n \in \mathbb{N}$ est pair
- $t > 0$ est un réel > 0 aussi petit que l'on veut
- δ et un paramètre réel variant de 0 à 1
- $a \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{Q}^+$, $3 \leq \alpha < n$.

(4) Posons $\alpha = p/q$, p et q premiers entre eux. Pour $t > 0$ petit et $\delta = 1$, la fonction $k_{1,t}$ admet $p - 2q$ points critiques non nuls, petits avec t , asymptotiquement donnés par $2t + a \delta \alpha y^{\alpha-2} = 0$. Les petites valeurs critiques correspondantes sont asymptotiquement données par $t(1 - (2/\alpha)) (-2t/a\alpha)^{2q/p-2q}$. En perturbant a aussi peu qu'on veut (rem. 2) ces valeurs critiques n'appartiennent pas au demi-axe réel positif.

(5) Ces petites valeurs critiques correspondent aux valeurs critiques de $g_{t,u}$ contenues dans $D(\eta(0, u))$ (lemme 5.1).

(6) Pour $\delta = 0$, toutes les valeurs critiques non nulles de $k_{0,t}$ sont petites avec t .

Le lemme 5.1 résulte immédiatement du lemme suivant :

LEMME A.1. — Soit $k_{\delta,t}(y) = ty^2 + a \delta y^\alpha + y^n$ où δ, a, α vérifient les propriétés (3) ci-dessus et $n \equiv 0 \pmod{4}$. Alors il existe $t_0 > 0$ tel que pour presque tout $a \in \mathbb{C}$, les valeurs critiques non nulles de $k_{\delta,t}$ ne sont pas réelles positives pour tout $(\delta, t) \in [0, 1] \times (0, t_0]$.

Démonstration. — En posant $z = -y^2$, on se ramène à l'étude de la famille $h_{\delta,t} = -tz + b \delta z^\beta + z^m$ où $b \in \mathbb{C}$ et m est pair. En posant $u = z \delta^{-1/m-\beta}$ ($\delta \neq 0$) (où $\delta^{-1/m-\beta}$ désigne la détermination réelle positive) on se ramène à l'étude de $l_{\delta,t} = \delta^{m/m-\beta} (-tu \delta^{-(m-1)/m-\beta} + bu^\beta + u^m)$.

(7) Soit $v_0 \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < v_0 < (m-\beta)/(m-1)$ et posons $\delta \geq t^{v_0}$. Alors $\tau = t \delta^{-(m-1)/m-\beta}$ est un infiniment petit avec t . Les «petits» points (resp. valeurs) critiques de $\widetilde{l}_{\delta,\tau} = -\tau u + bu^\beta + u^m$ sont asymptotiquement donnés par $-\tau + b \beta u^{\beta-1} = 0$ (resp. $\tau(\tau/b \beta)^{1/\beta-1}((1/\beta)-1)$). Pour presque tout $b \in \mathbb{C}$ (c'est-à-dire presque tout $a \in \mathbb{C}$) ces valeurs critiques ne sont pas réelles positives.

(8) Les grands points (resp. valeurs) critiques sont donnés asymptotiquement par $b \beta + m u^{m-\beta} = 0$ (resp. $(-b \beta/m)^{m/m-\beta}(1-(m/\beta))$).

Pour presque tout $b \in \mathbb{C}$, ces valeurs critiques ne sont pas réelles positives.

Le lemme A.1 résulte alors du lemme A.2 et de la figure A.1 :

LEMME A.2. — Dans le quart de plan $\delta \geq 0$, $t \geq 0$, il existe un voisinage V de $(0,0)$ tel que pour $(\delta, t) \in V$ les valeurs critiques non nulles de $k_{\delta, t}$ ($t \neq 0$) ne sont pas réelles positives pour presque tout $a \in \mathbb{C}$.

Démonstration. — Dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_*^+$, l'ensemble S des points (δ, t) tels que $h_{\delta, t} = -tz + b\delta z^\beta + y^m$ possède une valeur critique réelle strictement positive est semi-algébrique. Si le lemme A.2 était faux, il existerait par le lemme des petits chemins ([10]; §3) un chemin analytique $\gamma: [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ contenu dans S avec $\gamma(0) = 0$. On peut supposer γ du type: $\gamma(s) = (\delta(s), t(s))$ avec $t(s) = s^\nu$, $\delta = a_1 s^\mu + \dots$, $a_1 > 0$.

On pose $k_s = k_{\delta(s), t(s)} = -s^\nu z + ba_1 s^\mu z^\beta + z^m$. On va montrer que k_s ne possède pas de valeurs critiques réelles positives, d'où la contradiction.

(9) Les points critiques de k_s sont donnés par $-s^\nu + ba_1 \beta s^\mu z^{\beta-1} + mz^{m-1} = 0$ et sont donc tous petits avec s . Soit $z = \alpha s^\lambda + (\text{termes d'ordre plus grand en } s)$ un développement de Puiseux des points critiques, où $\alpha \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{Q}^+$ et s^λ la détermination réelle positive. En substituant dans (9) il vient :

$$(10) \quad -s^\nu + ba_1 \beta \alpha^{\beta-1} s^{\mu+\lambda(\beta-1)} + m \alpha^{m-1} s^{\lambda(m-1)} + \dots = 0.$$

Quatre cas se présentent :

- cas 1 : $\nu = \mu + \lambda(\beta - 1) < \lambda(m - 1)$;
- cas 2 : $\nu = \lambda(m - 1) < \mu + \lambda(\beta - 1)$;
- cas 3 : $\nu > \mu + \lambda(\beta - 1) = \lambda(m - 1)$;
- cas 4 : $\nu = \mu + \lambda(\beta - 1) = \lambda(m - 1)$.

(11) Dans les cas 1, 2, 3, 4 on tire respectivement de (10) les relations :

$$\alpha^{\beta-1} = \frac{1}{ba_1 \beta}, \quad \alpha^{m-1} = \frac{1}{m}, \quad \alpha^{m-\beta} = -\frac{ba_1 \beta}{m},$$

$$-1 + ba_1 \beta \alpha^{\beta-1} + m \alpha^{m-1} = 0.$$

Dans les cas 1, 2, 3 les valeurs critiques correspondantes sont asymptotiquement données par, respectivement :

$$s^{\nu+\lambda} \left(\frac{1}{ba_1 \beta} \right)^{1/\beta-1} \left(-1 + \frac{1}{\beta} \right), \quad s^{\nu+\lambda} \left(\frac{1}{m} \right)^{1/(m-1)} \left(-1 + \frac{1}{m} \right),$$

$$s^{\nu+\lambda} \left(-\frac{ba_1 \beta}{m} \right)^{\beta/m-\beta} ba_1 (1 - \beta/m).$$

Pour presque tout $b \in \mathbb{C}$, ces valeurs critiques ne sont pas réelles positives (dans le cas 2, on utilise le fait que m est pair, $m = n/2$).

Dans le cas 4, la valeur critique est asymptotiquement donnée par: $s^{\nu+\lambda} (-\alpha + ba_1 \alpha^\beta + \alpha^m)$ avec $-1 + ba_1 \beta \alpha^{\beta-1} + m \alpha^{m-1} = 0$. Mais pour presque tout $b \in \mathbb{C}$ la fonction $-z + ba_1 z^\beta + z^m$ n'a pas de valeur critique réelle positive.

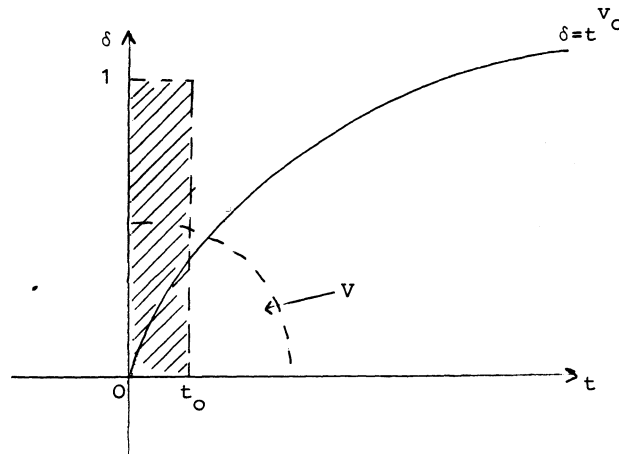


Fig. A. 1

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. ANDREOTTI et T. FRANKEL, *The Lefschetz Theorem on Hyperplane Sections* (*Annals of Math.*, vol. 69, 1959, p. 713-717).
- [2] J. P. DUFOUR, *Bi-stabilité des fronces* (*C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 285, sept. 1977, p. 445-448).
- [3] A. M. GABRIELOV, *Polar Curves and Intersection Matrices of Singularities* (*Interventiones Math.*, vol. 54, 1979, p. 15-22).
- [4] C. McA. GORDON, *Ribbon Concordance of Knots in the 3-Sphere* (*Math. Ann.*, vol. 257, 1981, p. 157-170).
- [5] D. GROMOLL et W. MEYER, *On Differentiable Fonctions with Isolated Critical Points* (*Topology*, t. 8, 1969).
- [6] HAMM et LÊ DUNG TRANG, *Un théorème de Zariski de type Lefschetz* (*Ann. Scient. de l'École Norm. Sup.*, t. 6, 1973).
- [7] J. HEMPEL, *Residual Finiteness for Haken Manifolds*, Preprint (Rice University).
- [8] E. LOJENGA, *The Complement of the Bifurcation Variety of a Simple Singularity* (*Invent Math.*, 23, 1974, p. 105-116).
- [9] J. MARTINET, *Singularities of Smooth Fonctions* (*London Math. Soc. Lectures Notes*, n° 58).
- [10] J. MILNOR, *Singular Points of Complex Hypersurfaces* (*Annals of Math. Studies*, n° 61, 1968).
- [11] L. P. NEUWIRTH, *Knot Groups* (*Annals of Math. Studies*, Princeton Univ. Press, n° 56).
- [12] J. STALLING, *On Fiberings Certain 3-Manifolds*. *Topology of 3-Manifolds and Related Topics*, Prentice Hall, 1961.
- [13] W. THURSTON, *The Geometry and Topology of 3-Manifolds* (*Lectures Notes*, Princeton).
- [14] F. WALDHAUSEN, *On Irreducible 3-Manifolds which Are Sufficiently Large* (*Ann. Math.*, vol. 87, 1968, p. 56-88).
- [15] Y. H. WAN, *Morse Theory for Two Fonctions* (*Topology*, vol. 14, n° 3, 1975).

(Manuscrit reçu le 1^{er} octobre 1987,
révisé le 15 septembre 1988).

B. PERRON,
Université de Dijon,
Laboratoire de Topologie,
U.A.-C.N.R.S. n° 755, B.P. 138,
21004 Dijon Cedex.