Annales scientifiques de l'É.N.S.

R. Elkik

Fibrés d'intersections et intégrales de classes de Chern

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 22, nº 2 (1989), p. 195-226

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1989_4_22_2_195_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 22, 1989, p. 195 à 226.

FIBRÉS D'INTERSECTIONS ET INTÉGRALES DE CLASSES DE CHERN

PAR R. ELKIK

Introduction

Dans les pages qui suivent, nous remplissons une partie (petite), du programme tracé par Deligne dans « *le Déterminant de la cohomologie* », [D] : étant donné un morphisme projectif plat Cohen-Macaulay de dimension d : $f : X \to S$, et $d+1$ fibrés inversibles sur X nous construisons le faisceau d'intersection de ces fibrés relativement à S. C'est un faisceau inversible sur S qui dépend de façon multiadditive des fibrés sur X, et dont la première classe de Chern est « *l'intégrale suivant les fibres de f du produit des classes de Chern des fibrés sur* X ».

Dans le cas des familles de courbes lisses, il existe trois approches différentes :

— la plus ancienne, développée par Deligne dans SGA 4 XVIII. 1 est celle que nous étendons ici.

— Deligne a donné plus récemment une définition en terme de symboles, de l'intersection. Si l et m sont deux sections à diviseurs disjoints des fibrés L et M sur X, le symbole $\langle l, m \rangle$ est un générateur du fibré d'intersection. Les symboles sont reliés par la règle : pour f fonction rationnelle sur X on a : $\langle fl, m \rangle = f(\operatorname{div} m)\langle l, m \rangle$ (et la relation symétrique).

Ici, comme dans SGA 4, ces trivialisations de l'intersection apparaissent ultérieurement.

— Un autre point de vue est développé dans [M. B]. L'intersection de L et M, y est définie par la formule

$$(\operatorname{Det} R f_* L \otimes M) \otimes (\operatorname{Det} R f_* L)^{-1} \otimes (\operatorname{Det} R f_* M)^{-1} \otimes \operatorname{Det} R f_* 0_X.$$

Les isomorphismes d'additivité, pour L et M de degré 0, sont alors déduits de la structure de biextension sur le fibré de Poincaré $\mathscr{P}$ sur $\mathscr{J} \times \check{\mathscr{J}}$ ($\mathscr{J}$ jacobienne de X/S).

Dans le cas général, c'est-à-dire en dimension quelconque, et sans hypothèse de lissité, l'intersection doit aussi s'exprimer en termes de déterminants d'images directes (comme l'indique le titre de [D]), malheureusement, pour l'instant, des problèmes de signe obscurcissent sérieusement la situation.

Dans la première partie, après quelques sorites sur les suites régulières nous donnons une définition du faisceau d'intersection de faisceaux suffisamment amples sur X et des isomorphismes d'additivité. Bien que le matériel nécessaire pour étendre la définition à des faisceaux inversibles quelconques soit disponible à ce moment-là, nous avons préféré reporter cette généralisation à la 3^e partie, après avoir construit en II des trivialisations locales de l'intersection et les isomorphismes de symétrie.

Dans la partie IV nous effectuons quelques calculs sur ces fibrés d'intersection et utilisons le degré d'intersection de d fibrés en droite sur une famille de dimension d dont nous rappelons une définition.

A la fin nous associons à la donnée de fibrés vectoriels E_i sur X et d'entiers k_i de somme $d+1$, un fibré inversible sur S, qui représente « l'intégrale le long des fibres de f du produit des k_i^e classes de Chern des E_i ». Primitivement nous utilisions pour cela un « splitting principle ». La présentation adoptée ici, qui fait un détour par les classes de Segre est nettement plus claire et plus opérationnelle. Elle nous a été suggérée simultanément par O. Gabber et L. Illusie.

Signalons qu'une autre approche apparaît dans « chow categories » de Franke. Preprint Iena, juin 1988.

I. L'intersection de fibrés suffisamment amples

I.1. Sections régulières. — I.1.1. Si $\mathscr{E}$ est un fibré vectoriel sur un schéma nœthérien X et $s : O_X \to \mathscr{E}$ une section de $\mathscr{E}$, on désigne par $Z(s)$ les sous-schéma fermé de X où s s'annule (*i.e.* le support du conoyau de $\mathscr{E}^\vee \to O_X$), et par $K.(s)$ le complexe de Koszul augmenté :

$$K.(s) : \ldots \Lambda^{p+1}\mathscr{E}^\vee \to \Lambda^p \mathscr{E}^\vee \ldots \to \mathscr{E}^\vee \to O_X \to O_{Z(s)} \to 0.$$

On dit que s est régulière si $K.(s)$ est exact, c'est-à-dire si, en tout point x de $Z(s)$, l'image par $s^\vee$ d'une base locale de $\mathscr{E}^\vee$ est une suite régulière de l'anneau $O_{X,x}$.

Si $\mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_p$, $p \in \mathbb{N}^*$, sont des fibrés vectoriels sur X munis de sections $s_i : O_X \to \mathscr{E}_i$, on note $Z(s_1, \ldots, {}_p)$ (ou $Z(s)$) le fermé $\bigcap_{i=1}^{p} Z(s_i)$.

I.1.2. Définition. — Soient X un schéma projectif sur un corps k, Cohen-Macaulay, purement de dimension d, et n un entier inférieur ou égal à $d+1$. Pour tout $i \in [1, n]$ soit $\mathscr{L}_i$ un faisceau inversible ample sur X, muni d'une section l_i. On dit que la suite de sections $l = (l_1, \ldots, l_n)$ est régulière si la section $\bigoplus_{i=1}^{n} l_i$ du fibré $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathscr{L}_i$ est régulière. En particulier la régularité de la suite l est indépendante de l'ordre des termes.

Notons un moment Z_j pour $Z(l_1, \ldots, l_j)$ avec $Z_0 = X$.

I.1.3. Lemme. — *Soit $i \in [1, n]$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *la suite l est régulière;*

(*b*) *les suites $(l_1, \ldots, l_i)$ d'une part, et $(l_{i+1} | Z_i, \ldots, l_n | Z_i)$ d'autre part, sont régulières;*

(*c*) *$\forall j \in [1, n]$ Z_j est de dimension $n-j$;*

(*d*) Z_n *est de dimension* $d-n$.

En outre sous ces hypothèses les fermés Z_j sont Cohen-Macaulay.

Démonstration. — Comme $\mathscr{L}_j$ est ample, si $\operatorname{Dim} Z_{j-1}$ est strictement positif alors Z_j est non vide et $\operatorname{Dim} Z_j \geqq \operatorname{Dim} Z_{j-1}-1$. En particulier Z_j est non vide pour $j \leqq d$.

En outre si A est un anneau local nœthérien Cohen-Macaulay et $(a_1, \ldots, a_j)$ une suite d'éléments de l'idéal maximal, l'anneau quotient $A/_{(a_1, \ldots, a_j)}$ a pour dimension Dim $A-j$ si et seulement si $(a_1, \ldots, a_j)$ est une suite régulière, et dans ce cas $A/_{(a_1, \ldots, a_j)}$ est Cohen-Macaulay.

Le lemme en résulte.

I.1.4. Définition. — Soit maintenant $f: X \rightarrow S$ un morphisme projectif plat Cohen-Macaulay purement de dimension d de schémas nœthériens et soient $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_n$, n-faisceaux inversibles f-amples sur X munis de sections $l_i : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathscr{L}_i$. On suppose toujours $n \leqq d+1$.

On dit que la suite de sections $l=(l_1, \ldots, l_n)$ est f-régulière si quelque soit le point s de S la suite $(l_1 | X_s, \ldots, l_n | X_s)$ est régulière.

La proposition suivante est bien connue.

I.1.5. Proposition. — 1. *Soit s un point de* S. *La suite* $(\underline{l}) | X_s$ *est régulière ssi* $K.(l)$ *est exact aux points de* X_s *et* $Z(\underline{l})$ *plat sur* S *aux points de* X_s, [EGA IV, *chap.* 0, *prop.* 15.1.16] *et donc*

2. $(\underline{l})$ *est f-régulière ssi* $K(\underline{l})$ *est exact et* $Z(\underline{l})$ S-*plat*.

D'après le lemme ces conditions sont encore équivalentes à $Z(\underline{l})$ est S-plat, S-Cohen-Macaulay, de dimension relative *d-n*.

I.2. Intersection. La construction de base. — Dans toute la suite $f: X \rightarrow S$ désigne un morphisme projectif plat Cohen-Macaulay purement de dimension d de schémas nœthériens. Si $h : T \rightarrow S$ est une S-schéma on considère le diagramme cartésien :

$$\begin{tikzcd} X \times_S T = X_T \arrow[r, "h_X"] \arrow[d, "f_T"] & X \arrow[d, "f"] \\ T \arrow[r, "h"] & S \end{tikzcd}$$

Si $j : T' \rightarrow T$ est un S-morphisme on note j_X l'application $I_X \times j : X_{T'} \rightarrow X_T$.

Lorsqu'aucune confusion ne risque d'en résulter, si $\mathscr{F}$ est une $\mathcal{O}_S$-faisceau cohérent (resp. un $\mathcal{O}_X$-faisceau cohérent), on désignera encore par $\mathscr{F}$ son image inverse sur tout S-schéma (resp. X-schéma).

I.2.1. DÉFINITION. — On dit qu'un faisceau inversible $\mathscr{L}$ sur X est f-suffisamment ample (f.s.a.) si les conditions suivantes sont remplies :

1. $\mathscr{L}$ est f-ample.

2. Il existe un fibré vectoriel V sur S muni d'une surjection : $f^* \mathrm{V} \to \mathscr{L} \to 0$.

Cette notion a l'avantage d'être stable par produit tensoriel.

I.2.2. DÉFINITION. — On dira alors que V (muni de la surjection précédente) est un S-fibré engendrant $\mathscr{L}$.

I.2.3. Soit toujours $n \leqq d+1$ et soient $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_n$ des faisceaux f.s.a. sur X, et pour tout $i \in [1, n]$ un fibré V_i sur S muni d'une surjection

$$f^* \mathrm{V}_i \to \mathscr{L}_i \to 0.$$

Posons $\mathbb{P}_i = \mathbb{P}(\mathrm{V}_i^{v}) \quad i \in [1, n]$

$$\underline{\mathbb{P}} = \mathbb{P}_1 \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathbb{P}_2 \times \ldots \underset{\mathrm{S}}{\times} \mathbb{P}_n \xrightarrow{p} \mathrm{S}.$$

On note ξ_i le fibré canonique sur $\mathbb{P}_i$ (et son image inverse sur tout $\mathbb{P}_i$-schéma), et on désigne par ζ_i la section de $\mathscr{L}_i \otimes \xi_i$ sur $\mathrm{X}_{\mathbb{P}_i}$ déduite de l'injection canonique $\xi_i^{\vee} \to \mathrm{V}_i$ et de la surjection donnée $f^* \mathrm{V}_i \to \mathscr{L}_i$.

I.2.4. THÉORÈME. — *Les notations sont celles de* I.2.3.

(*a*) *L'ensemble des points q de $\underline{\mathbb{P}}$ tels que la suite $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ soit régulière dans la fibre X_q est un ouvert* U *de* $\underline{\mathbb{P}}$.

(*b*) *Soient* $\mathrm{T} \xrightarrow{h} \mathrm{S}$ *un* S*-schéma,* $\mathscr{M}_i$, $i \in [1, n]$, *des faisceaux inversibles sur* T, *et* $m_i : \mathscr{M}_i \to h^* \mathrm{V}_i$, $i \in [1, n]$ *des homomorphismes. On note l_i la section de $\mathscr{L}_i \otimes \mathscr{M}_i^{-1}$ sur X_T déduite de m_i et de $f^* \mathrm{V}_i \to \mathscr{L}_i$. Alors si la suite $(l_i, \ldots, l_n)$ est f_T régulière, les applications $m_i^{\vee} : h^* \mathrm{V}_i^{\vee} \to \mathscr{M}_i^{\vee}$ sont surjectives et le* S*-morphisme de* T *dans* $\mathbb{P}$ *qu'on en déduit se factorise à travers* U.

(*c*) *Pour tous s dans* S, *l'intersection du complémentaire de* U *avec la fibre $p^{-1}(s)$ est un fermé de codimension supérieure ou égale à $d-n+2$ dans $p^{-1}(s)$.*

Démonstration. — Seul le point (*c*) nécessite une démonstration. On peut supposer que S est le spectre d'un corps. On raisonne par récurrence sur n. Pour $n=1$, c'est l'assertion (*b*) du lemme suivant :

I.2.5. LEMME. — (*a*) *Soient* $\mathrm{Y} \xrightarrow{g} k$ *un schéma projectif purement de dimension d sur un corps k, $\mathscr{L}$ un fibré ample sur* Y *et* V *un k-espace vectoriel muni d'une surjection* $g^* \mathrm{V} \to \mathscr{L} \to 0$.

Alors $\dim_k \mathrm{V} \geqq d+1$.

(*b*) *Si* Y *est Cohen-Macaulay, il existe une famille finie de sous-espaces vectoriels de* V, $\mathrm{W}_1, \ldots, \mathrm{W}_r$ *de codimension supérieure ou égale à $d+1$, tels qu'un élément v de* V *définit une section régulière de $\mathscr{L}$ si et seulement si* $v \notin \bigcup_{i=1}^{r} \mathrm{W}_i$.

Démonstration. — (*a*) En effet comme $\mathscr{L}$ est ample une section de $\mathscr{L}$, ne peut être partout non nulle et définit donc un fermé de dimension au moins $d-1$. L'énoncé en résulte par récurrence sur d.

(*b*) Soient Y_i, $i \in [1, r]$ les composantes irréductibles réduites de Y, η_i le point générique de Y_i, et W_i l'espace des sections de V nulles dans $\mathscr{L}_{\eta_i}$, le quotient $V|_{W_i}$ engendre $\mathscr{L}|_{Y_i}$ donc, par a, la codimension de W_i est supérieure ou égale à $d+1$. De plus un élément de v définit une section régulière de $\mathscr{L}$ ssi il n'appartient à aucun W_i.

Fin de la démonstration du théorème. — Soit $U_{n-1} \subset \mathbb{P}_1 \times \ldots \times \mathbb{P}_{n-1}$, l'ouvert au-dessus duquel la suite $(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1})$ est régulière. Par hypothèse de récurrence, le complémentaire de U_{n-1} dans $\mathbb{P}_1 \times \ldots \times \mathbb{P}_{n-1}$ est de codimension au moins égale à $d-n+3$. En outre le fermé $Z_{n-1} = Z(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1})$ de $X_{U_{n-1}}$ est de dimension relative $d-n+1\ (\geqq 0)$ sur U_{n-1}. On a

$$\begin{array}{ccccc} U & \longrightarrow & U_{n-1} \times \mathbb{P}_n & \longrightarrow & \mathbb{P} \\ & & \Big\downarrow q & & \Big\downarrow q \\ & & U_{n-1} & \longrightarrow & \mathbb{P}_1 \times \ldots \times \mathbb{P}_{n-1} \end{array}$$

où q est la projection.

Soient $x \in U_{n-1}$, $y \in q^{-1}(x) = \mathbb{P}_n$. Alors y appartient à U ssi la section correspondante de $\mathscr{L}_n$ est une section régulière de $\mathscr{L}_n|_{Z_{n-1}}(x)$. Donc si y appartient au complémentaire d'un fermé de $\mathbb{P}_n$ de codimension supérieure ou égale à $\operatorname{Dim}(Z_{n-1})_x + 1$ dans $\mathbb{P}_n$.

I.2.6. Soit $\mathbb{P} = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_i \xrightarrow{p} S$, un produit de fibrés projectifs sur un schéma S, F un fermé de $\mathbb{P}$ tel que pour tout $s \in S$ on ait $\dim \mathbb{P}_s\text{-}\operatorname{Dim} F_s \geqq 2$. On désigne par U l'ouvert $\mathbb{P} - F$ et par ξ_i le fibré canonique sur $\mathbb{P}_i$. On dira qu'un fibré en droite $\mathscr{N}$ sur U se descend à S à ξ-torsion près, s'il existe des entiers r_i, $i \in [1, n]$ un fibré A sur S et un isomorphisme de fibrés sur U $\varphi : \mathscr{N} \xrightarrow{\sim} p^* A \otimes \bigotimes_{i=1}^{n} \xi_i^{r_i}$.

LEMME. — (*a*) *Quels que soient les fibrés inversibles* A *et* A′ *sur* S *on a*

$$\operatorname{Hom}_S(A, A') \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathbb{P}}(p^* A, p^*, A') \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_U(p^* A, p^* A')$$

[EGA IV.4) 21-13-2, 21-13-4].

(*b*) *Si* $\mathscr{N}$ *se descend à* ξ*-torsion près, les entiers* r_i *sont uniquement déterminés, et* A *est déterminé à isomorphisme unique près par* φ.

C'est une conséquence immédiate de (*a*).

(*c*) *Supposons qu'on ait, pour tout* $s \in S$, $\operatorname{Dim} \mathbb{P}_s - \operatorname{Dim} F_s \geqq 3$. *Alors tout fibré inversible sur* U *se descend à* ξ*-torsion près* [SGA 1962, *chap.* XII.4.9].

I.2.7. Nous reprenons les hypothèses et notations de I.2.3 avec $n=d$. Grâce à la construction précédente, on obtient le diagramme :

$$(\mathrm{D})\qquad \begin{tikzcd} Z \arrow[r] & X_U \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ & U \arrow[r, "p"] \arrow[dr] & S \\ & & \mathbb{P} \arrow[u] \end{tikzcd}$$

où $Z=Z(\zeta_1, \ldots, \zeta_d)$ est fini et plat sur U.

PROPOSITION. — *Soit $\mathscr{L}_{d+1}$ est un faisceau inversible* (*quelconque*) *sur* X, *alors le faisceau inversible sur* U $\mathscr{N}=N_{Z/U}(\mathscr{L}_{d+1}|Z)$ *se descend à* S *à* ξ *torsion près.*

Démonstration. — Soit $\Omega\subset\mathbb{P}_1\times\ldots\times\mathbb{P}_{d-1}$ l'ouvert au-dessus duquel la suite $(\zeta_1, \ldots, \zeta_{d-1})$ est régulière et définit une famille de courbes sur Ω. D'après I.2.4(*c*) et I.2.6(*c*) il suffit de montrer que $\mathscr{N}$ se descend à Ω à ξ_d torsion près.

La proposition résulte donc du lemme suivant.

I.2.8. LEMME. — *La proposition* I.2.7 *est vérifiée si* $d=1$.

Démonstration. — (*a*) l'énoncé est de nature locale sur S.

(*b*) On dit qu'un fibré O_X-faisceau inversible $\mathscr{L}$ est fortement *f*-ample s'il existe un fibré vectoriel W sur S engendrant $\mathscr{L}$, tel que le fermé F_W de $\mathbb{P}(\check{W})$ complémentaire de U_W au-dessus duquel la section marquée ζ_W de $\mathscr{L}\otimes\xi_W$ est régulière vérifie la condition : $\forall s\in S\quad \operatorname{Dim}\mathbb{P}(\check{W})_s-\operatorname{Dim}F_{W_s}\geqq 3$. Cela signifie encore que pour tout $s\in S$ et toute composante intègre X_i de X_s l'image de W dans $H^0(X_i, \mathscr{L})$ est de dimension $\geqq 3$.

(*c*) Si $\mathscr{L}_1$ est fortement ample l'énoncé est vérifié. En effet si W est un fibré engendrant $\mathscr{L}_1$ et vérifiant la condition (*b*), il est clair que $W\oplus V_1$ vérifie la condition (*b*). On peut donc supposer que V_1 est un sous-fibré de W. On dispose alors d'une immersion $j:\mathbb{P}(\check{V}_1)\subsetneq\mathbb{P}(\check{W})$ avec $U=j^{-1}(U_W)$. Le fibré $\mathscr{N}$ est l'image inverse par j du fibré analogue sur U_W. Celui-ci se descend grâce à I.2.6.*c*). Il en est donc de même de $\mathscr{N}$.

(*d*) Supposons qu'il existe un fibré inversible $\mathscr{L}$ sur X tel que $\mathscr{L}$ et $\mathscr{M}=\mathscr{L}\otimes\mathscr{L}_1$ soient fortement amples alors $\mathscr{N}$ se descend à ξ-torsion près : soient V un fibré engendrant $\mathscr{L}$, et $W=V\otimes V_1$; on désigne par U_V (resp. U_W) l'ouvert de $\mathbb{P}(\check{V})$ [resp. $\mathscr{P}(\check{W})$] au-dessus duquel la section marquée ζ_V (resp. ζ_W) de $\mathscr{L}\otimes\xi_V$ (resp. $\mathscr{M}\otimes\xi_W$) est régulière et par $\mathscr{N}_V$ (resp. $\mathscr{N}_W$) la norme sur U_V (resp. U_W) de $\mathscr{L}_{2/Z(\zeta_V)}$ (resp. $\mathscr{L}_{2/Z(\zeta_W)}$).

On dispose d'une immersion $j:\mathbb{P}(\check{V})\times\mathbb{P}_1\subsetneq\mathbb{P}(\check{W})$ avec

$$j^*(\zeta_W)=\xi_V\otimes\xi_1,\ j^*(\zeta_W)=\zeta_V\otimes\zeta_1.$$

On a de plus $j^{-1}(U_W)=U_V\times\mathbb{P}_1\cap\mathbb{P}(\check{V})\times U$ et si on désigne par Ω cet ouvert, on a sur Ω

$$j^*(\mathcal{N}_W)=\mathcal{N}_V\otimes\mathcal{N}_1 \qquad (cf.\ \mathrm{I}.3.5).$$

L'assertion (d) en résulte.

(e) Il nous suffit maintenant de montrer que localement sur S, $\mathcal{L}_1$ est différence de deux fibrés fortement amples. Soit $s\in S$. On peut trouver un O_X-faisceau inversible f-ample $\mathcal{L}$ vérifiant

(i) l'image directe $f_*\mathcal{L}$ (resp. $f_*(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}_1)$) est un fibré vectoriel sur S engendrant $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}_1$).

(ii) Pour toute composante irréductible X_i de X_s on a $\mathrm{Dim}(H^0(X_i,\mathcal{L}))$ [resp. $\mathrm{Dim}(H^0(X_i,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}_1))\geqq 3$] et l'application canonique

$$f_*\mathcal{L}\to H^0(X_i,\mathcal{L})\,[\text{resp.}\ f_*(\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}_1)\to H^0(X_i,\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}_1)]$$

est surjective. Les fibrés $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}_1$ sont alors fortement f amples dans un voisinage de s.

I.2.9. On désigne momentanément par $\tilde{p}(\mathcal{N})$ le fibré inversible sur S dont I.2.7 affirme l'existence.

LEMME. — *Le faisceau $\tilde{p}(\mathcal{N})$ est uniquement déterminé par les fibrés $\mathcal{L}_1,\ \ldots,\ \mathcal{L}_{d+1}$ sur* X, *i. e. ne dépend pas du choix des* V_i.

Démonstration. — Supposons qu'on dispose de V_i et V_i' avec

$$f^*V_i\to\mathcal{L}_i\to 0,\ f^*V_i'\to\mathcal{L}_i\to 0,\ i\in[1,\ d].$$

Quitte à remplacer V_i par $V_i\oplus V_i'$ on peut supposer que V_i' est un facteur direct de V_i. La construction précédente faite avec les fibrés V_i' conduit au diagramme :

$$(\mathrm{D}')\qquad \begin{tikzcd} Z' \arrow[rr] & & X_{U'} \arrow[rr] \arrow[d] & & X \arrow[d, "f"] \\ & & U' \arrow[rr, "p'"] \arrow[dr] & & S \\ & & & \mathbb{P}' \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Comme V_i' est un facteur direct de V_i on dispose d'une immersion $j:\mathbb{P}'\to\mathbb{P}$ et d'isomorphismes $j^*\xi_i=\xi_i'$. On a $U'=j^{-1}(U)$, $Z'=j^{-1}(Z)$ $\mathcal{N}'=j^*\mathcal{N}$. Le lemme en résulte.

Remarque. — De même les entiers r_i tels que $\mathcal{N}=p^*\tilde{p}\mathcal{N}\otimes\left(\bigotimes_i \xi_i^{r_i}\right)$ sont indépendants du choix des V_i, ils seront « calculés » ultérieurement (IV.2.1).

I.2.10. DÉFINITION. — Les hypothèses et notations sont celles de I.2.7. On appelle faisceau d'intersection des faisceaux $(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_{d+1})$ relativement à S le faisceau $\widetilde{p}(\mathscr{N})$ et on le note désormais $I_{X/S}(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_{d+1})$ [ou $I_{X/S}(\underline{\mathscr{L}})$].

I.2.11. *Remarque.* — Si le fibré f.s.a. $\mathscr{L}$ est muni d'une section $s : O_X \to \mathscr{L}$, on peut choisir un fibré V sur S, engendrant $\mathscr{L}$, de telle sorte que s provienne d'une section de V sur S. Dans la suite de cet article on sous entendra toujours, lorsque c'est utile que V a été choisi ainsi, et que la section de V relevant s a été choisie. On la désignera d'ailleurs aussi par s.

I.3. PREMIÈRES. *Propriétés.* — I.3.1. La formation du faisceau $I_{X/S}(\underline{\mathscr{L}})$ (ainsi que toutes les constructions qui vont suivre) commute à tout changement de base $T \to S$. De plus le faisceau d'intersection est fonctoriel pour les isomorphismes de fibrés en droites sur X.

I.3.2. *Additivité par rapport au* $d+1^e$ *faisceau.* — Si $\mathscr{L}^1_{d+1}$ et $\mathscr{L}^2_{d+1}$ sont des faisceaux inversibles sur X et si $\mathscr{L}_{d+1} = \mathscr{L}^1_{d+1} \otimes L^2_{d+1}$, on dispose d'un isomorphisme d'additivité

$$\Sigma_{d+1} : I_{X/S}(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_d, \mathscr{L}^1_{d+1}) \otimes I_{X/S}(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_d, \mathscr{L}^2_{d+1}) \xrightarrow{\sim} I_{X/S}(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_d, \mathscr{L}_{d+1})$$

qui provient de l'additivité des normes et est donné pour l^1 et l^2 sections locales non nulles de $\mathscr{L}^1_{d+1/Z}$ et $\mathscr{L}^2_{d+1/Z}$ par

I.3.3. $$N_{Z/U}(l^1) \otimes N_{Z/U}(l^2) \to N_{Z/U}(l^1 \otimes l^2).$$

I.3.4. *Remarque.* — De même qu'on s'est contenté d'appeler Σ_{d+1} ce qu'on aurait dû noter $\Sigma_{d+1}(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_d, \mathscr{L}^1_{d+1} \otimes \mathscr{L}^2_{d+1})$ de même on se dispensera d'écrire le diagramme dont la commutativité, évidente d'après I.3.3, traduit l'associativité de Σ_{d+1}.

I.3.5. *Additivité par rapport aux autres termes.* — Soit $i \in [1, d]$, et soient $\mathscr{L}^1_i$ *et* $\mathscr{L}^2_i$ deux faisceaux f. s. a. tels que $\mathscr{L}_i = \mathscr{L}^1_i \otimes \mathscr{L}^2_i$. Il existe un isomorphisme d'additivité :

$$\Sigma_i : \quad I_{X/S}(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}^1_i, \ldots \mathscr{L}_{d+1}) \otimes I_{X/S}(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}^2_i, \ldots, \mathscr{L}_{d+1})$$
$$\xrightarrow{\sim} I_{X/S}(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_i, \ldots, \mathscr{L}_{d+1})$$

défini de la manière suivante :

Pour $h \in [1, 2]$, soit V^h_i un fibré sur S engendrant $\mathscr{L}^h_i$. On définit de manière évidente $\mathbb{P}^h_i$, ξ^h_i, ζ^h_i et on pose $\mathbb{P}^h = \mathbb{P}_1 \times \ldots \times \mathbb{P}^h_i \times \ldots \mathbb{P}_d$. On choisit $V_i = V^1_i \otimes V^2_i$, de sorte qu'on dispose d'une immersion $j : \mathbb{P}^1_i \times \mathbb{P}^2_i \to \mathbb{P}_i$ avec $j^* \xi_i = \xi^1_i \otimes \xi^2_i$.

On note encore j l'immersion de $\mathbb{Q} = \mathbb{P}_1 \times \ldots \times \mathbb{P}^1_i \times \mathbb{P}^2_i \times \ldots \mathbb{P}_d$ dans $\mathbb{P}$, et $\pi_h : \mathbb{Q} \to \mathbb{P}^h$ la projection. Si U (resp. U^1, resp. U^2) est l'ouvert de $\mathbb{P}$ (resp. P^1, resp. $\mathbb{P}^2$) au-dessus duquel $(\zeta_1, \ldots, \zeta_i, \ldots, \zeta_d)$ [resp. $(\zeta_1, \ldots, \zeta^1_i, \ldots, \zeta_d)$, resp. $(\zeta_1, \ldots, \zeta^2_i, \ldots, \zeta_d)$] est régulière, on a dans $\mathbb{Q}$, $j^{-1}(U) = \pi_1^{-1}(U^1) \cap \pi_2^{-1}(U^2)$. Désignons cet ouvert par W. Les sous-schémas fermés $Z^1 = Z(\zeta_1, \ldots, \zeta^1_i, \ldots, \zeta_d)$ et $Z^2 = Z(\zeta_1, \ldots, \zeta^2_i, \ldots, \zeta_d)$ de X_W, sont des sous-schémas fermés de $Z = Z(\zeta_1, \ldots, \zeta_i, \ldots, \zeta_d)$ et le noyau de la surjection

$\mathcal{O}_Z \to \mathcal{O}_{Z^1}$ (resp. $\mathcal{O}_Z \to \mathcal{O}_{Z^2}$) est un $\mathcal{O}_{Z^2}$ (resp. $\mathcal{O}_{Z^1}$) faisceau inversible. Si $\mathscr{F}$ est un $\mathcal{O}_Z$-faisceau inversible on a donc un isomorphisme de W-modules

$$\mathrm{N}_{Z/W}(\mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{N}_{Z^1/W}(\mathscr{F} \mid Z^1) \otimes \mathrm{N}_{Z^2/W}(\mathscr{F} \mid Z^2)$$

défini, pour f section locale non nulle de $\mathscr{F}$ par :

I.3.6. $$\mathrm{N}_{Z/W}(f) \to \mathrm{N}_{Z^1/W}(f \mid Z^1) \otimes \mathrm{N}_{Z^2/W}(f \mid Z^2).$$

On obtient Σ_i en prenant pour $\mathscr{F}$ le faisceau $\mathscr{L}_{d+1} \mid Z$.

I.3.7. *Remarque* (*cf.* I.3.4). — La formule I.3.6 permet de vérifier « l'associativité de Σ_i ».

I.3.8. Quels que soient les entiers i, $j \in [1, d+1]$, $i \neq j$ le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{I}_{X/S}(\mathscr{L}_1 \dots, \mathscr{L}_i^1 \otimes \mathscr{L}_i^2 \dots \mathscr{L}_j^1 \otimes \mathscr{L}_j^2 \dots \mathscr{L}_{d+1}) \arrow[r, "\Sigma_i"] \arrow[d, "\Sigma_j"] & \bigotimes_{h=1,2} \mathrm{I}_{X/S}(\mathscr{L}_1 \dots \mathscr{L}_i^h, \dots \mathscr{L}_j^1 \otimes \mathscr{L}_j^2 \dots \mathscr{L}_{d+1}) \arrow[d, "\Sigma_j \otimes \Sigma_j"] \\
\bigotimes_{k=1,2} \mathrm{I}_{X/S}(\mathscr{L}_1 \dots \mathscr{L}_i^1 \otimes \mathscr{L}_i^2, \dots \mathscr{L}_j^k \dots \mathscr{L}^{d+1}) \arrow[r, "\Sigma_i \otimes \Sigma_i"] & \bigotimes_{\substack{h=1,2\\k=1,2}} \mathrm{I}_{X/S}(\mathscr{L}_1 \dots \mathscr{L}_i^h, \dots \mathscr{L}_j^k \dots \mathscr{L}_{d+1})
\end{tikzcd}$$

Cela se vérifie sur les formules d'additivité $\mathrm{I}_{3.3}$ et $\mathrm{I}_{3.6}$.

II. Trivialisations locales. Isomorphismes de symétrie

II.1. SYMÉTRIE DE $\mathrm{I}_{X/S}$ PAR RAPPORT AUX d PREMIERS TERMES.

PROPOSITION. — *Les notations sont celles de* I.2.7. *On désigne en outre par* σ *une permutation de* $[1, d]$ *et par* $\underline{\mathscr{L}}_\sigma$ *la suite* $(\mathscr{L}_{\sigma(1)}, \dots, \mathscr{L}_{\sigma(d)}, \mathscr{L}_{d+1})$. *Il existe alors un isomorphisme naturel* $\varphi_\sigma : \mathrm{I}_{X/S}(\underline{\mathscr{L}}) \to \mathrm{I}_{X/S}(\underline{\mathscr{L}}_\sigma)$, *compatible en un sens évident aux isomorphismes d'additivité.*

Reprenons les notations de I.2.7 et considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \times \dots \times \mathbb{P}_d \arrow[r, "\pi_\sigma"] \arrow[dr, "p"'] & \mathbb{P}_\sigma = \mathbb{P}_{\sigma(1)} \times \dots \times \mathbb{P}_{\sigma(d)}. \arrow[d, "p_\sigma"] \\
 & S
\end{tikzcd}$$

où $\pi_\sigma(x_1, \dots, x_d) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(d)})$.

Notons ξ_i' le pull back du faisceau canonique sur $\mathbb{P}_i$ par la $\sigma^{-1}(i)$-ième projection $\mathbb{P}_\sigma \to \mathbb{P}_i$. On a donc $\pi_\sigma^* \xi_i' = \xi_i$. Dans le diagramme :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] & X_U \arrow[r] \arrow[d] & X_{\mathbb{P}} \arrow[r] \arrow[d] & X_{\mathbb{P}_\sigma} \arrow[r] \arrow[d] & X_{U_\sigma} \arrow[r] \arrow[d] & Z_\sigma \\ & U \arrow[r] & \mathbb{P} \arrow[r] & \mathbb{P}_\sigma \arrow[r] & U_\sigma & \end{tikzcd}$$

où U et Z ont été définis et où U_σ, Z_σ sont définis de manière analogue, on a $\pi_\sigma(U) = U_\sigma$ et le diagramme suivant est cartésien :

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "(1 \times \pi_\sigma)/Z"] \arrow[d] & Z_\sigma \arrow[d] \\ U \arrow[r, "\pi_\sigma"] & U_\sigma \end{tikzcd}$$

Comme $\mathscr{L}_{d+1}$ est défini sur X, on a un isomorphisme canonique de $N_{Z/U}(\mathscr{L}_{d+1} \mid Z)$ sur $\pi_\sigma^*(N_{Z_\sigma/U_\sigma}(\mathscr{L}_{d+1} \mid Z_\sigma))$. Grâce à l'identification $\pi_\sigma^* \xi_i' = \xi_i$ et à I.2.6.*a*) on obtient :

$$\varphi_\sigma : \quad I_{X/S}(\underline{\mathscr{L}}) \xrightarrow{\sim} I_{X/S}(\underline{\mathscr{L}}_\sigma)$$

Si l'on suppose que $\mathscr{L}_1 = \mathscr{L}_2 = \mathscr{L}$ et que σ est la transposition (1,2), φ_σ n'est pas en général l'identité. Il sera calculé en (IV.2.3).

II.2. Restrictions a des diviseurs. Trivialisations locales.

II.2.1. Proposition. — *Supposons que pour un $i \in [1, d]$, $\mathscr{L}_i$ soit muni d'une section f régulière l_i définissant le diviseur relatif* Y. *Il existe alors un isomorphisme canonique :*

$$I_{X/S}(\mathscr{L}_1 \dots \mathscr{L}_{d+1}) \xrightarrow{[\dots l_i \dots]} I_{Y/S}(\mathscr{L}_1 \mid Y, \dots, \hat{\mathscr{L}}_i, \dots, \mathscr{L}_{d+1} \mid Y)$$

(il y a $d+1$ places dans le crochet et l_i est en i-ième position).

Cet isomorphisme est compatible en un sens évident aux isomorphismes d'additivité Σ_j, $j \neq i$, et compatible aux isomorphismes de symétrie φ_σ dans le sens suivant :

Soit ψ (resp. ψ') la bijection croissante de $[1, d-1]$ sur $[1, \ldots, \hat{\imath}, \ldots, d]$ (resp. $[1, \ldots, \sigma^{-1}(i), \ldots, d]$). On pose $\sigma' = \psi^{-2} \circ \sigma \circ \psi'$ et $\mathscr{L}'_j = \mathscr{L}_{\psi(j)} \mid \mathrm{Y}$. Alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{I}_{\mathrm{X/S}}(\underline{\mathscr{L}}) \arrow[r, "\varphi_\sigma"] \arrow[d, "{[\ldots l_i \ldots]}"'] & \mathrm{I}_{\mathrm{X/S}}(\underline{\mathscr{L}}_\sigma) \arrow[d, "{[\ldots l_i \ldots]}"] \\
\mathrm{I}_{\mathrm{Y/S}}(\underline{\mathscr{L}}') \arrow[r, "\varphi_{\sigma'}"] & \mathrm{I}_{\mathrm{Y/S}}(\underline{\mathscr{L}}'_{\sigma'}).
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — Il suffit de construire $[\ldots l_i \ldots]$, les compatibilités en résulteront trivialement. Reprenons la construction I.2.7. La section l_i fournit un S. morphisme $\overline{l}_i : \mathrm{S} \to \mathbb{P}_i$ et un isomorphisme de $\overline{l}_i^* \xi_i$ sur O_S (*cf.* I.2.10). On en déduit une immersion : $j = \; : \mathbb{P}_1 \times \ldots \times \hat{\mathbb{P}}_i \times \ldots \mathbb{P}_d \to \mathbb{P}$.

L'ouvert $\mathrm{V} = j^{-1}(\mathrm{U})$ est l'ouvert de $\mathbb{P}_1 \times \ldots \times \hat{\mathbb{P}}_i \times \ldots \times \mathbb{P}_d$ au-dessus duquel la suite $(\zeta_1 \mid \mathrm{Y}, \ldots, \hat{\zeta}_i, \ldots \zeta_d \mid \mathrm{Y})$ est régulière.

Si l'on désigne comme toujours par Z le fermé de $\mathrm{X_U}$ défini par $(\zeta_1 \ldots \zeta_d)$ et par Z' le fermé de $\mathrm{Y_V}$ défini par $(\zeta_1 \mid \mathrm{Y}, \ldots, \hat{\zeta}_i, \ldots \zeta_d \mid \mathrm{Y})$, alors dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{X_V} \arrow[r, "j_\mathrm{X}"] & \mathrm{X_U} \\
 & \mathrm{Y_V} \arrow[ur, hook] & & \\
\mathrm{Z}' \arrow[ur, hook] \arrow[rr, "j_{\mathrm{X/Z'}}"] \arrow[d] \arrow[drr, phantom, "\square"] & & \mathrm{Z} \arrow[uur, hook] \arrow[d] & \\
\mathrm{V} \arrow[rr, "j"] & & \mathrm{U} &
\end{tikzcd}$$

le carré $\square$ est cartésien. La proposition en résulte.

II.2.2. Plus généralement soit $\mathrm{J} = (i_1 \ldots i_j)$ un sous-ensemble de $[1, d]$ et supposons qu'on ait pour tout $i \in \mathrm{J}$ une section l_i de $\mathscr{L}_i$ de telle sorte que la suite $(l_i \ldots l_{i_j})$ soit *f.* régulière et définisse le fermé $\mathrm{Y} \to \mathrm{X}$.

On a un isomorphisme canonique $[\ldots l_{i_1} \ldots l_{i_2} \ldots l_{i_j} \ldots]$ de $\mathrm{I}_{\mathrm{X/S}}(\underline{\mathscr{L}})$ sur $\mathrm{I}_{\mathrm{Y/S}}[\mathscr{L}_1 \mid \mathrm{Y} \ldots \hat{\mathscr{L}}_{i_1} \mid \mathrm{Y} \ldots \hat{\mathscr{L}}_{i_j} \mid \mathrm{Y} \ldots \mathscr{L}_{d+1} \mid \mathrm{Y}]$ qu'on peut obtenir soit directement en adaptant la démonstration de II.2.1 soit par itération de II.2.1.

Dans le cas particulier où $J=[1, d]$, Y est fini et plat sur S et on obtient

$$[l_1, \ldots, l_d, .] : \mathrm{I}_{X/S}(\mathscr{L}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{N}_{Y/S}(\mathscr{L}_{d+1/Y}).$$

La compatibilité à la symétrie se lit dans ce cas :

II.2.3. $[l_1, \ldots, l_d, .]=[l_{\sigma(1)}, \ldots, l_{\sigma(d)}, .]\circ\varphi_\sigma$.

II.2.4. *Trivialisations locales.* — Soit comme à la fin de II.2.2 une suite f-régulière $(l_1, \ldots, l_d)$ de sections de $(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_d)$ définissant le fermé Y fini et plat sur S, et soit l_{d+1} une section de $\mathscr{L}_{d+1}$, dont la restriction à Y est partout non nulle. L'image réciproque par $[l_1, \ldots, l_d, .]$ de la section $\mathrm{N}_{Y|S}(l_{d+1})$ est une trivialisation de $\mathrm{I}_{X/S}(\underline{\mathscr{L}})$ qu'on notera $\langle l_1, \ldots, l_{d+1}\rangle$. Pour toute permutation σ de $[1, d]$ on a, d'après II.2.3 :

II.2.5. $\varphi_\sigma(\langle l_1, \ldots, l_{d+1}\rangle)=\langle l_{\sigma(1)}, \ldots, l_{\sigma(d)}, l_{d+1}\rangle$.

— De même, quel que soit $i\in[1, d+1]$ on a (avec des notations évidentes) :

II.2.6. $\Sigma_i(\langle l_1, ., l_i^1, ., l_{d+1}\rangle\otimes\langle l_1, ., l_i^2, ., l_{d+1}\rangle)=\langle l_1, ., l_i^1\otimes l_i^2, ., l_{d+1}\rangle$.

Ceci résulte de la définition des trivialisations $\langle l_1, \ldots, l_{d+1}\rangle$ et des formules d'additivité I.3.3 et I.3.6.

II.2.7. *Remarque.* — Si les faisceaux, $(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_{d+1})$, sont tous supposés f. s. a. une suite de sections $(l_1, \ldots, l_{d+1})$ définit une trivialisation, comme plus haut, si elle est f-régulière au sens de I.1.3. Et il résulte du théorème I.2.4, que, les faisceaux d'intersections admettent de telles trivialisations, localement pour la topologie étale sur S. En particulier un S-homomorphisme de $\mathrm{I}_{X/S}(\underline{\mathscr{L}})$ dans un S-fibré vectoriel est entièrement déterminé par sa valeur sur les trivialisations de ce type au-dessus de tout S-schéma.

II.3. Extension des isomorphismes de symétrie. — On suppose que les $(d+1)$ fibrés $\mathscr{L}_1 \ldots \mathscr{L}_{d+1}$ sont f. s. a.

Théorème. — *Soit* σ *une permutation de* $[1, d+1]$; *il existe un isomorphisme* $\varphi_\sigma : \mathrm{I}_{X/S}(\underline{\mathscr{L}}) \to \mathrm{I}_{X/S}(\underline{\mathscr{L}}_\sigma)$ *tel que pour tout* S-*schéma* $T\to S$, *et toute suite* f_T-*régulière* $(l_1 \ldots l_{d+1})$ *de sections de* $(\mathscr{L}_1 \ldots \mathscr{L}_{d+1})$ *sur* X_T *on ait*

$$\varphi_\sigma(\langle l_1 \ldots l_{d+1}\rangle)=\langle l_{\sigma(1)}, \ldots, l_{\sigma(d+1)})\rangle.$$

Démonstration. — D'après II.2.7 φ_σ est entièrement déterminé par cette propriété. On connaît déjà φ_σ dans le cas où $\sigma(d+1)=d+1$. Il suffit donc de montrer son existence dans le cas où σ est la transposition $(d, d+1)$. On utilise pour cela une « version cohomologique » de l'intersection sur les familles de courbes.

II.3.1. *Rappels sur le déterminant de l'image directe.* — Soit $g : Y\to T$ un morphisme propre de schémas noethériens et soit $\mathscr{F}$ un O_Y-module cohérent, plat sur T. On peut, suivant [KM] définir un O_T-module inversible gradué $\mathrm{Det}\,\mathrm{Rg}_*\mathscr{F}$, qui est placé en degré $\mathscr{X}_{Y/T}(\mathscr{F})$ (où $\mathscr{X}_{Y/T}$ désigne la caractéristique d'Euler Poincaré relative). Dans ce qui suit nous allons seulement considérer le faisceau inversible sans graduation sous jacent à $\mathrm{D}\,\mathrm{et}\,\mathrm{R}\,g_*\mathscr{F}$ que nous noterons $\Delta g_*\mathscr{F}$, et extraire de [KM], ce que nous utiliserons.

(i) A une suite exacte courte de O_X-modules cohérents T-plats :

$$\Sigma: \quad 0 \to \mathscr{F}' \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}'' \to 0$$

est associée un isomorphisme : $\Delta g_* \mathscr{F} \xrightarrow{\sim} \Delta g_* \mathscr{F}' \otimes \Delta g_* \mathscr{F}''$.

(ii) Soit un diagramme commutatif de suites exactes courtes :

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & & \\
 & 0 \arrow[r] & G \arrow[u] \arrow[r, "v", "\sim"'] & H \arrow[u] \arrow[r] & 0 & \\
\text{(I)} & 0 \arrow[r] & A \arrow[u] \arrow[r] & B \arrow[u] \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \\
\text{(II)} & 0 \arrow[r] & D \arrow[u] \arrow[r] & E \arrow[u] \arrow[r] & F \arrow[u, "u"'] \arrow[r] & 0 \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & \\
 & & \text{(II')} & \text{(I')} & &
\end{tikzcd}$$

Des suites exactes (I) et (II) on déduit d'après (i) un isomorphisme

$$\psi: \quad \Delta g_* \mathrm{B} \otimes (\Delta g_* \mathrm{A})^{-1} \otimes (\Delta g_* \mathrm{E})^{-1} \otimes \Delta g_* \mathrm{D} \xrightarrow{\sim} \Delta g_* \mathrm{C} \otimes (\Delta g_* \mathrm{F})^{-1}.$$

L'isomorphisme u induit un isomorphisme $\Delta g_* u : \Delta g_* \mathrm{C} \xrightarrow{\sim} \Delta g_* \mathrm{F}$, donc une trivialisation que nous notons $\tilde{u}$ de $\Delta g_* \mathrm{C} \otimes (\Delta g_* \mathrm{F})^{-1}$.

De même en considérant les suites I′ et II′ on obtient un isomorphisme

$$\psi': \quad \Delta g_* \mathrm{B} \otimes (\Delta g_* \mathrm{A})^{-1} \otimes (\Delta g_* \mathrm{E})^{-1} \otimes \Delta g_* \mathrm{D} \xrightarrow{\sim} \Delta g_* \mathrm{H} \otimes (\Delta g_* \mathrm{G})^{-1}$$

et grâce à l'isomorphisme v on définit une section non nulle $\tilde{v}$ du second membre. Alors si on désigne par χ la caractéristique d'Euler Poincaré relative on a :

$$\psi^{-1}(\tilde{u}) = (-1)^{\chi(\mathrm{F}) \cdot \chi(\mathrm{G})} \psi'^{-1}(\tilde{v}).$$

II.3.2. *Démonstration de II.3.* — (*a*) On traite d'abord le cas $d=1$.

Soient $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ des faisceaux f.s.a sur X, et pour $i=1,2$: V_i un S-fibré engendrant $\mathscr{L}_i$, $\mathbb{P}_i = \mathbb{P}(\check{\mathrm{V}}_i) \xrightarrow{p_i} \mathrm{S}$, $\xi_i = O_{\mathbb{P}_i}(1)$, ζ_i section marquée de $\mathscr{L}_i \otimes \xi_i$, U_i l'ouvert au-dessus duquel ζ_i est régulière, et définit le diviseur relatif D_i, δ_i le degré de D_i sur U_i.

Par définition de $I_{X|S}$ on a sur U_1

$$p_1^* I_{X/S}(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) \otimes \xi_1^{r_1} \xrightarrow{\sim} N_{D_1/U_1}(\mathscr{L}_2 | D_1) \tag{1}$$

$$(\text{resp. } p_2^* I_{X/S}(\mathscr{L}_2, \mathscr{L}_1) \otimes \xi_2^{r_2} \xrightarrow{\sim} N_{D_2/U_2}(\mathscr{L}_1 | D_2)). \tag{2}$$

Si l_1 est une section régulière de $\mathscr{L}_1$ au-dessus de S (ou d'un S-schéma), on lui associe un S-morphisme $\bar{l}_1 : S \to U_1$ et une identification $\bar{l}_1^* \xi_1 = O_S$. L'isomorphisme $[l_1, .]$ est alors défini par la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
\bar{l}_1^*(1) : \bar{l}_1^*(p_1^* I_{X/S}(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) \otimes \xi_1^{r_1}) & \xrightarrow{\sim} & \bar{l}_1^* N_{D_1/U_1}(\mathscr{L}_2 | D_1) \\
\| & & \| \\
[l_1, .] : I_{X/S}(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) & \xrightarrow{\sim} & N_{E_1/S}(\mathscr{L}_2 | E_1)
\end{array}$$

Posons $\mathbb{Q} = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_2 \xrightarrow{\pi_i} \mathbb{P}_1$, $q = p_i \circ \pi_i$, $W_i = \pi_i^{-1}(U_i)$. Soit V l'ouvert de $\mathbb{Q}$ au-dessus duquel (ζ_1, ζ_2) est régulière.

De l'isomorphisme (1) et l'additivité des normes on déduit au-dessus de W_1 un isomorphisme

$$\beta_1 : \quad q^* I_{X/S}(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) \otimes \xi_1^{r_1} \otimes \xi_2^{\delta_1} \xrightarrow{\sim} N_{D_1/W_1}(\mathscr{L}_2 \otimes \xi_2 | D_1).$$

Au-dessus de V le terme de droite est trivialisé par $N(\zeta_2)$.

Soit (l_1, l_2) est une suite de sections régulières de $(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2)$ sur S on lui associe $\bar{l} : S \to V$, relevant $\bar{l}_1$ et des identifications $\bar{l}^*(\xi_i) = O_S$, $i = 1,2$. On obtient :

$$\begin{array}{ccc}
\bar{l}^*(\beta_1) : \bar{l}^*(q^* I_{X/S}(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) \otimes \xi_1^{r_1} \otimes \xi_2^{\delta_2}) & \xrightarrow{\sim} & \bar{l}^* N_{D_1/V}(\mathscr{L}_2 \otimes \xi_2 | D_1) \\
\| & & \| \\
I_{X/S}(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) & \xrightarrow{\sim} & N_{E_1/S}(\mathscr{L}_2 | E_1).
\end{array}$$

Et la trivialisation $\langle l_1, l_2 \rangle$ de $I_{X/S}(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2)$ est induite par $N(\zeta_2)$. On obtient $\langle l_2, l_1 \rangle$ en inversant les rôles de $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$.

Posons $M_i = \mathscr{L}_i \otimes \xi_i$, et considérons sur $\mathbb{Q}$ le fibré

$$\mathscr{D} = \Delta f_*(M_1 \otimes M_2) \otimes (\Delta f_* M_1)^{-1} \otimes (\Delta f_* M_2)^{-1} \otimes \Delta f_* O_{X_\mathbb{Q}}.$$

Il existe un faisceau A sur S et des entiers h_1 et h_2 tels qu'on ait un isomorphisme de fibrés sur $\mathbb{Q}$

$$\theta : \quad q^* A \otimes \xi_1^{h_1} \otimes \xi_2^{h_2} \xrightarrow{\sim} \mathscr{D}.$$

On dispose au-dessus de W_1 des suites exactes :

$$0 \to \mathcal{O}_X \overset{\zeta_1}{\to} M_1 \to M_1 \,|\, D_1 \to 0$$

$$0 \to M_2 \overset{1 \otimes \zeta_1}{\to} M_2 \otimes M_1 \to M_2 \otimes M_1 \,|\, D_1 \to 0.$$

On en déduit un isomorphisme :

$$\gamma_1 : \quad \mathscr{D} \overset{\sim}{\to} \Delta f_* ((M_1 \otimes M_2)_{|D_1}) \otimes (\Delta f_* M_1 \,|\, D_1)^{-1}.$$

Il existe un isomorphisme canonique ε_1 du terme de droite sur $N_{D_1/V}(M_2)$. Et on obtient en composant :

$$\beta_1^{-1} \circ \varepsilon_1 \circ \gamma_1 \circ \theta : q^* A \otimes \xi_1^{h_1} \otimes \xi_2^{h_2} \overset{\sim}{\to} q^* I_{X/S}(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2) \otimes \xi_1^{r_1} \otimes \xi_2^{\delta_1}.$$

Cet isomorphisme provient des égalités : $r_1 = h_1$, $r_2 = \delta_1$ et d'un S-isomorphisme

$$\psi_1 : \quad A \overset{\sim}{\to} I_{X/S}(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2).$$

Une construction analogue au-dessus de W_2 permet de définir

$$\psi_2 : \quad A \overset{\sim}{\to} I_{X/S}(\mathscr{L}_2, \mathscr{L}_1).$$

Si l'on se restreint à V les suites exactes utilisées s'insèrent dans le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & & \\
0 \arrow[r] & M_2 \,|\, D_2 \arrow[r, "\bar{\zeta}_1"] \arrow[u] & M_1 \otimes M_2 \,|\, D_2 \arrow[r] \arrow[u] & 0 & \\
0 \arrow[r] & M_2 \arrow[r] \arrow[u] & M_1 \otimes M_2 \arrow[r] \arrow[u] & M_1 \otimes M_2 \,|\, D_1 \arrow[u] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X \arrow[r, "\zeta_1"] \arrow[u, "\zeta_2"] & M_1 \arrow[r] \arrow[u] & M_1 \,|\, D_1 \arrow[r] \arrow[u, "\bar{\zeta}_2"'] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Il résulte donc de II.3 (ii) que les sections de $(\varepsilon_1 \circ \gamma_1 \circ \theta)^{-1}(N(\zeta_2))$ et $(\varepsilon_2 \circ \gamma_2 \circ \theta)^{-1}(N(\zeta_1))$ de $q^* A \otimes \xi_1^{h_1} \otimes \xi_2^{h_2}$ sur V différent par un facteur $(-1)^{\delta_1 \delta_2}$.

L'isomorphisme cherché de $I_{X/S}(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2)$ sur $I_{X/S}(\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2)$ est donc $(-1)^{\delta_1 \delta_2} \psi_2 \circ \psi_1^{-1}$.

(*b*) *Cas général.* — Soit donc $X \xrightarrow{f} S$ de dimension relative d, soit $(\underline{\mathscr{L}}) = (\mathscr{L}, \ldots, \mathscr{L}_{d+1})$ une suite de faisceaux f. s. a sur X. Pour tout $i \in [1, d-1]$ on pose $V_i = f_* \mathscr{L}_i$, $\mathbb{P}_i = \mathbb{P}(V_i)^\vee$ et $\mathbb{P}_1 \times \ldots \times \mathbb{P}_{d-1}$.

Soit U l'ouvert de $\mathbb{P}$ au-dessus duquel la suite $(\zeta_1, \ldots, \zeta_{d-1})$ est régulière et définit donc une famille de courbes $Y \rightarrow U$.

Il suffit d'appliquer (*a*) au couple de faisceaux $(\mathscr{L}_d, \mathscr{L}_{d+1})$ sur Y.

II.3.3. Sous les hypothèses précédentes, soient $(l_1, \ldots, l_{d+1})$ une suite régulière de sections de $(\mathscr{L}_1 \ldots \mathscr{L}_{d+1})$ et f une fonction méromorphe sur X telle que la suite $(l_1, \ldots, fl_i, \ldots, l_{d+1})$ soit régulière. On a alors dans $I_{X/S}(\underline{\mathscr{L}})$

$$\langle l_1, \ldots, fl_i, \ldots, l_{d+1} \rangle = N_{Z/S}(f|_Z) \langle l_1 \ldots l_i \ldots l_{d+1} \rangle$$

où $Z = Z(l_1, \ldots, \hat{l}_i, \ldots, l_{d+1})$.

C'est clair si $i = d+1$ et en résulte par symétrie pour i quelconque.

III. Faisceau d'Intersection. Cas général

III.1. On considère toujours $f: X \rightarrow S$ comme en I.2 et $\underline{\mathscr{L}} = (\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_{d+1})$ désigne maintenant une suite de faisceaux inversibles quelconques sur X. Pour tout $i \in [1, d+1]$ on suppose donnés des faisceaux inversibles f. s. a. sur X, $\mathscr{L}_{i,0}$ et $\mathscr{L}_{i,1}$, et un isomorphisme $\mathscr{L}_i \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}_{i,0} \otimes (\mathscr{L}_{i,1})^{-1}$.

On désigne par K l'ensemble des applications de $\{1, \ldots, d+1\}$ dans $\{0, 1\}$ et pour k dans K on pose $\varepsilon_k = \prod_{i=1}^{d+1} (-1)^{k(i)}$.

Il résulte de l'existence des isomorphismes Σ_i et de la commutativité des diagrammes I.3.8 que le faisceau $\bigotimes_{k \in K} I_{X/S}(\mathscr{L}_{1,k_1}, \ldots, \mathscr{L}_{d+1,k_{d+1}})^{\varepsilon_k}$ est défini à isomorphisme unique près par $\underline{\mathscr{L}}$. On définit donc

III.1.1. $$I_{X/S}(\underline{\mathscr{L}}) = \bigotimes_{k \in K} I_{X/S}(\mathscr{L}_{1,k_1}, \ldots, \mathscr{L}_{d+1,k_{d+1}})^{\varepsilon_k}.$$

Il résulte encore de l'additivité dans le cas f. s. a. et de la commutativité 1.3.8, que pour tout $i \in [1, d+1]$ et toute suite $(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_i^1, \mathscr{L}_i^2, \ldots, \mathscr{L}_{d+1})$ de faisceaux inversibles sur X, l'isomorphisme d'additivité est bien défini :

III.1.2. $$\Sigma_i : \quad I_{X/S}(\mathscr{L}_1 \ldots \mathscr{L}_i^1 \ldots \mathscr{L}_{d+1}) \otimes I_{X/S}(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_i^2 \ldots \mathscr{L}_{d+1}) \rightarrow I_{XS}(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_i^1 \otimes \mathscr{L}_i^2 \ldots \mathscr{L}_{d+1}).$$

III.1.3. Le diagramme I.3.8, est commutatif sans hypothèse restrictive sur les faisceaux inversibles considérés sur X.

III.2. Supposons donnée, pour tout $i \in [1, d+1]$ et tout $j \in [0, 1]$ une section $l_{i,j}$ de $\mathscr{L}_{i,j}$ de telle sorte que pour tout $k \in \mathrm{K}$ la suite $(l_{1,k_1}, \ldots, l_{d+1,k_{d+1}})$ soit régulière. La section $\bigotimes_{k \in \mathrm{K}} \langle l_{1,k_1}, \ldots, l_{d+1,k_{d+1}} \rangle^{\varepsilon_k}$ est une trivialisation de $\mathrm{I}_{\mathrm{X/S}}(\underline{\mathscr{L}})$ et il résulte des formules d'additivité II.2.6, II.2.7 que :

III.2.1. Cette trivialisation ne dépend que des sections méromorphes $l_i = l_{i,0} \otimes (l_{i,1})^{-1}$ de $\mathscr{L}_i$, $i \in [1, d+1]$. Si on la note $\langle l_1, \ldots, l_{d+1} \rangle$:

III.2.2. Les formules d'additivité II.2.6, restent valables.

III.2.3. Définition. — On dira qu'une telle suite $(l_1, \ldots, l_{d+1})$ est une suite amplement régulière de sections méromorphes.

III.2.4. *Remarque.* – On doit noter qu'une suite de sections, par exemple holomorphes, n'ayant pas de zéros communs, n'est pas nécessairement amplement régulière bien que le complexe de Koszul associé soit exact. Il y a toutefois « assez » de suites amplement régulières dans le sens de II.2.7.

III.2.5. Pour toute permutation $\sigma \in [1, d+1]$, on peut étendre la définition de $\varphi_\sigma : \mathrm{I}_{\mathrm{X/S}}(\underline{\mathscr{L}}) \to \mathrm{I}_{\mathrm{X/S}}(\underline{\mathscr{L}}_\sigma)$ au cas de faisceaux quelconques. Ces isomorphismes commutent aux isomorphismes d'additivité et pour toute suite amplement régulière de sections méromorphes on a

$$\varphi_\sigma(\langle l_1, \ldots, l_{d+1} \rangle) = \langle l_{\sigma(1)}, \ldots, l_{\sigma(d+1)} \rangle.$$

III.2.6. *Restriction à un diviseur.*

Proposition. — *Soient $i \in [1, d+1]$ et l_i une section régulière de $\mathscr{L}_i$ définissant le diviseur relatif* Y.

(*a*) *Il existe un isomorphisme canonique* $[\ldots l_i \ldots]$ *de* $\mathrm{I}_{\mathrm{X/S}}(\underline{\mathscr{L}})$ *sur* $\mathrm{I}_{\mathrm{Y/S}}(\mathscr{L}_1 | \mathrm{Y}, \ldots, \hat{\mathscr{L}}_i, \ldots, \mathscr{L}_{d+1} | \mathrm{Y})$. *(Dans le cas particulier où* $\mathrm{Y} = \varnothing$ *ce dernier faisceau est égal à* O_{S}.)

(*b*) *Si l_i s'insère dans une suite amplement régulière $\langle l_1, \ldots, l_i, \ldots, l_{d+1} \rangle$ on a :*

$$[\ldots l_i \ldots] \langle l_1, \ldots, l_{d+1} \rangle = \langle l_1 | \mathrm{Y}, \ldots, l_i | \mathrm{Y}, \ldots, l_{d+1} | \mathrm{Y} \rangle.$$

Démonstration. – Par symétrie on peut supposer $i = d$ et par additivité $\mathscr{L}_j$ f.s.a. $\forall j \neq d$. Écrivons comme plus haut $\mathscr{L}_d = \mathscr{L}_{d,0} \otimes \mathscr{L}_{d,1}^{\otimes -1}$. Soit $\mathrm{V}_{d,0}$ (resp. $\mathrm{V}_{d,1}$) un S fibré engendrant $\mathscr{L}_{d,0}$ (resp. $\mathscr{L}_{d,1}$). Quitte à remplacer $\mathrm{V}_{d,0}$ par $\mathrm{V}_{d,0} \oplus \mathrm{V}_{d,1}$ (I.2.9 Lemme), où $\mathrm{V}_{d,1} \to f_* \mathscr{L}_{d,1} \xrightarrow{\otimes l_d} f_* \mathscr{L}_{d,0}$, on peut supposer que l'application $l \to l \otimes l_d$ de $\mathscr{L}_{d,1}$ dans $\mathscr{L}_{d,0}$ se relève en un homomorphisme localement scindé : $\mathrm{V}_{d,1} \to \mathrm{V}_{d,0}$. On dispose donc d'une immersion $j : \mathbb{P}_1 \times \ldots \times \mathbb{P}_{d-1} \times \mathbb{P}_{d,1} \to \mathbb{P}_1 \times \ldots \times \mathbb{P}_{d-1} \times \mathbb{P}_{d,0}$. La situation est analogue à celle de I.3.5 et on obtient comme en *loc. cit.* un isomorphisme de $\mathrm{I}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_{d,0}, \mathscr{L}_{d+1})$ sur

$$\mathrm{I}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_{d,1}, \mathscr{L}_{d+1}) \otimes \mathrm{I}_{\mathrm{Y/S}}(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_{d-1}, \mathscr{L}_{d+1}).$$

III.2.7. *Remarque.* — Il résulte de III.2.6 que si $(l_1, \ldots, l_{d+1})$ est une suite de sections telles que l_1 soit régulière, $l_2 | \operatorname{Div} l_1$ régulière, etc., on peut encore définir une trivialisation $\langle l_1, \ldots, l_{d+1} \rangle$ de $I_{X/S}(\underline{\mathscr{L}})$ (nous l'utiliserons en IV.2.2).

IV. Quelques calculs d'intersection

Nous aurons besoin de la notion de degré d'intersection de d fibrés en droites sur X que nous rappelons en IV.I.

IV.0 Soient G et H deux groupes abéliens et h une application (d'ensembles) de G dans H. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on appelle n^e différence pointée de h l'application $D_n h : G^n \to H$ définie par :

$$D_n h(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{I \subset [1, n]} (-1)^{n+\# I} h(\sum_{i \in I} x_i)$$

où on convient que $\sum_{i \in \varnothing} x_i = 0$.

IV.0.1. $D_n h$ est invariante sous l'action du groupe symétrique sur G^n.

IV.0.2. En décomposant l'ensemble des parties de $[1, n+1]$ en celles qui contiennent $n+1$ et les autres on obtient aisément :

$$D_{n+1} h(x_1, \ldots, x_n, a) = \sum_{I \subset [1, n]} (-1)^{n+\# I} h((\sum_{i \in I} x_i) + a) - \sum_{I \subset [1, n]} (-1)^{n+\# I} h(\sum_{i \in I} x_i).$$

IV.0.3. De manière analogue on vérifie que :

$$\begin{aligned} D_{n+1} h(x_1, \ldots, x_{n+1}) = {} & D_n h(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + x_{n+1}) \\ & - D_n h(x_1, \ldots, x_n) - D_n h(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}). \end{aligned}$$

IV.0.4. En particulier $D_n h$ est n linéaire si $D_{n+1} h$ est identiquement nulle et on a alors, quels que soient $(x_1, \ldots, x_n, a) \in G^{n+1}$:

$$D_n h(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{I \subset [1, n]} (-1)^{n+\# I} h((\sum_{i \in I} x_i) + a)$$

IV.1. Soit $f : X \to S$ un morphisme projectif plat purement de dimension d, avec S connexe. Si $\mathscr{F}$ est un O_X-module cohérent S.plat on note $\mathscr{X}_{X/S}(\mathscr{F})$ la caractéristique d'Euler Poincaré relative de $\mathscr{F}$ sur S.

IV.1.1. Définition. — Si $d > 0$, on appelle degré d'intersection sur S et on note $\delta_{X/S}$ la d-ième différence de l'application $\mathscr{X}_{X/S} : \operatorname{Pic} X \to \mathbb{Z}$.

IV.1.2. Proposition. — 1. *L'application $\delta_{X/S}$ est d-linéaire.*

2. *Si $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_d$ sont des faisceaux inversibles sur X et l_i une section régulière de $\mathscr{L}_i$ définissant le diviseur relatif Y on a*

$$\delta_{X/S}(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_d) = \delta_{Y/S}(\mathscr{L}_1 | Y, \ldots, \hat{\mathscr{L}}_i, \ldots, \mathscr{L}_d | Y).$$

Si $d=1$ le second membre doit être interprété comme le rang de O_Y sur O_S.

Démonstration. — On peut supposer que S est le spectre d'un corps (infini). On raisonne par récurrence sur d. Démontrons d'abord 2. On peut supposer $i=d$. Pour tout fibré $\mathscr{F}$ sur X on a une suite exacte :

$$0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}_d \to \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}_d \,|\, Y \to 0.$$

Grâce à l'additivité des caractéristiques d'Euler-Poincaré on obtient donc :

$$\delta_{X/S}(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_d) = \sum_{I \subset [1, d-1]} (-1)^{d+\ I-1} \mathscr{H}_{Y/S}((\bigotimes_{i \in I} \mathscr{L}_i) \otimes \mathscr{L}_d).$$

D'après l'hypothèse de récurrence et IV.0.4 le second membre est égal à $\delta_{Y/S}(\mathscr{L}_1 \,|\, Y, \ldots, \mathscr{L}_{d-1} \,|\, Y)$ ce qui établit 2).

D'après l'hypothèse de récurrence et 2) $\delta_{X/S}(\ldots, \mathscr{L}_d)$ est donc $d-1$ linéaire si $\mathscr{L}_d$ admet une section, par exemple si $\mathscr{L}_d$ est très ample; et la $(d+1)$-ième différence $D_{d+1}\mathscr{X}_{X/S}(\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_{d+1})$ est donc nulle dès que l'un des $\mathscr{M}_i$ est très ample. Soient alors $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_d$ des faisceaux inversibles sur X; écrivons $\mathscr{L}_d$ comme différence de 2 faisceaux très amples $\mathscr{L}_d = \mathscr{L}_{d,0} \otimes \mathscr{L}_{d,1}^{\otimes -1}$. On a :

$$\begin{aligned}\delta_{X/S}(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_{d,0}) &= \delta_{X/S}(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_d \otimes \mathscr{L}_{d,1}) \\ &= \delta_{X/S}(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_d) + \delta_{X/S}(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_{d,1}) - D_{d+1}\mathscr{X}_{X/S}(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_d, \mathscr{L}_{d,1}).\end{aligned}$$

Le dernier terme est nul, donc :

$$\delta_{X/S}(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_d) = \delta_{X/S}(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_{d,0}) - \delta_{X/S}(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_{d,1})$$

on en déduit la linéarité de $\delta_{X/S}$ par rapport aux $d-1$ premiers termes et par symétrie la d. linéarité.

Remarque. — Si S′ est fini plat sur S de rang r et si X est un S′ schéma projectif plat on a

$$\delta_{X/S}(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_d) = r \,.\, \delta_{X/S'}(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_d).$$

IV.1.3. Plus généralement soient $h : X \to X'$ et $g : X' \to S$ des morphismes projectifs plats purement de dimension respective d et d' de schémas connexes. Alors

$$\delta_{X/S}(h^* \mathscr{L}_1, \ldots, h^* \mathscr{L}_d, \mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_d) = \delta_{X'/S}(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_{d'}) \,.\, \delta_{X/X'}(\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_d).$$

Parenthèse. — Pour $f : X \to S$ projectif plat Cohen-Macaulay on dispose du foncteur $\operatorname{Det} Rf_*$ de la catégorie *Pic X* (avec pour morphismes les isomorphismes) dans la catégorie *Pic gradue S*. Modulo un problème sur l'ordre des termes, on peut considérer la $d+1^e$ différence

$$D_{d+1} \operatorname{Det} Rf_* : (\mathit{Pic}\ X)^{d+1} \to \mathit{Pic\ gradue\ S}$$

(d'après le paragraphe précédent, l'image est d'ailleurs en degré 0). Il est relativement clair (d'abord dans le cas suffisamment ample par réductions successives à des diviseurs puis en général en utilisant des trivialisations des $d+2^e$ différences), que les faisceaux $D_{d+1}\operatorname{Det} Rf_*(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_{d+1})$ et $I_{X/S}(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_{d+1})$ sont isomorphes. On souhaiterait une présentation qui rende, isomorphismes et trivialisations de ce type, canoniques.

IV.2. On reprend les notations de III : $f: X \to S$ est un morphisme projectif plat Cohen macaulay, purement de dimension d, S connexe et $\underline{\mathscr{L}}=(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_{d+1})$, une suite de faisceaux inversibles sur X. Les isomorphismes construits ci-dessous commutent aux changements de base sur S, de sorte que la proposition « si $(l_1, \ldots, l_{d+1})$ est une suite de sections f. régulières » signifie « si T est un S schéma, et $(l_1, \ldots, l_{d+1})$ une suite f_T régulière... ».

IV.2.1. *a.* Proposition. — *Supposons que pour un certain* $i \in [1, d+1]$, *le faisceau* $\mathscr{L}_i$ *soit l'image inverse d'un faisceau* $\mathscr{L}$ *sur* S. *Alors il existe un isomorphisme canonique*

$$\theta: \quad I_{X/S}(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_{d+1}) \xrightarrow{\sim} \mathscr{L}^{\delta}$$

où $\delta=\delta_{X/S}(\mathscr{L}_1, \ldots, \hat{\mathscr{L}}_i, \ldots, \mathscr{L}_{d+1})$. *Si* $(l_1, \ldots, l_{d+1})$ *est une suite de sections amplement régulière, avec* l *section non nulle de* $\mathscr{L}$ *sur* S *et* $l_i=f^* l$, *on a*

$$\theta(\langle l_1, \ldots, l_{d+1}\rangle)=l^{\delta}.$$

Démonstration. — Par symétrie, on peut supposer $i=d+1$, et par additivité, $\mathscr{L}_j$ f. s. a. et l_j holomorphe pour $j<d$. Il suffit alors de reprendre la construction de base en notant que le rang de $Z(\zeta_1, \ldots, \zeta_d)$ sur U est égal à $\delta_{X_{\mathbb{P}/\mathbb{P}}}(\mathscr{L}_1 \otimes \xi_1, \ldots \mathscr{L}_d \otimes \xi_d)$ donc égal à δ, puisque ξ_i provient de $\mathbb{P}$.

IV.2.1. *b.* Sous les hypothèses précédentes, $I_{X/S}(\underline{\mathscr{L}})$ est donc canoniquement trivialisé si $\delta=0$, par exemple, s'il existe un second indice j tel que $\mathscr{L}_j$ provienne de S.

IV.2.1. *c.* Reprenons la construction de base et ses notations, on a :

$$I_{X_{U/U}}(\mathscr{L}_1 \otimes \xi_1, \ldots, \mathscr{L}_d \otimes \xi_d, \mathscr{L}_{d+1}) \xrightarrow{\langle \zeta_1, \ldots, \zeta_d, \cdot \rangle} \mathscr{N}.$$

Posons $\delta_i=\delta_{X/S}(\mathscr{L}_1, \ldots, \hat{\mathscr{L}}_i, \ldots, \mathscr{L}_{d+1})$. On a d'après ce qui précède

$$I_{X_{U/U}}(\mathscr{L}_1 \otimes \xi_1, \ldots, \mathscr{L}_d \otimes \xi_d, \mathscr{L}_{d+1}) \xrightarrow{\sim} p^* I_{X/S}(\underline{\mathscr{L}}) \otimes \bigotimes_{i=1}^{d} \xi_i^{\delta_i}.$$

Donc les entiers r_i introduits en I.2.8, sont égaux aux δ_i.

IV.2.2. *a.* Proposition. — *Soit* $S' \xrightarrow{\pi} S$ *un* S *schéma fini et plat et supposons que* f *se factorise en* $X \xrightarrow{f'} S' \xrightarrow{\pi} S$ *avec* f' *plat Cohen-Macaulay surjectif. Alors une suite de sections* $(l_1, \ldots, l_{d+1})$ f*-amplement régulière est* f'*-amplement régulière et il existe un isomorphisme* *canonique*

$$n: \quad I_{X/S}(\underline{\mathscr{L}}) \xrightarrow{\sim} N_{S'/S} I_{X/S'}(\underline{\mathscr{L}})$$

tel que pour toute suite f-régulière on ait :

$$n(\langle l_1, \ldots, l_{d+1} \rangle) = N_{S'/S} \langle l_1, \ldots, l_{d+1} \rangle.$$

On peut supposer $\mathscr{L}_i$, f. s. a. pour tout $i \leqq d$. Soient V_i un S fibré engendrant $\mathscr{L}_i$, et $V'_i = V_i \underset{O_S}{\otimes} O_{S'}$. Alors $\mathbb{P}' = \prod_{i=1}^{d} \mathbb{P}(V'^{\vee}_i)$ est égal à $\mathbb{P} \underset{S}{\times} S'$ l'ouvert et U′ de $\mathbb{P}'$, au-dessus duquel $(\zeta_1, \ldots, \zeta_d)$ est f' régulière contient $U \underset{\mathbb{P}}{\times} \mathbb{P}'$.

La proposition se réduit donc à un énoncé élémentaire sur les normes.

(*b*) Proposition. — *Soit* $X' \xrightarrow{g} X$ *un morphisme projectif plat Cohen-Macaulay purement de dimension* d'. *Soient* q *un entier* $\leqq d+d'+1$, $\mathscr{L} = (\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_q)$ *une suite de fibrés inversibles sur* X, $\mathscr{M} = (\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_{d+d'+1})$ *une suite de fibrés inversibles sur* X′ *avec* $\mathscr{M}_i = g^* \mathscr{L}_i$ *pour tout* $i \in [1, q]$. *Alors :*

(i) *Si* $q = d$ *il existe un isomorphisme canonique*

$$\psi : I_{X'/S}(\mathscr{M}) \xrightarrow{\sim} I_{X/S}(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_{d'}, I_{X'/X}(\mathscr{M}_{d+1}, \ldots, \mathscr{M}_{d+d'+1})).$$

Si $(l_1, \ldots, l_d)$ *est une suite f-amplement régulière de section de* $(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_d)$ *et* $(m_{d+1}, \ldots, m_{d+d'+1})$ *une suite g-amplement régulière de sections de* $(\mathscr{M}_{d+1}, \ldots, \mathscr{M}_{d+d'+1})$. *On a :*

$$\psi \langle g^* l_1, \ldots, g^* l_d, m_{d+1}, \ldots, m_{d+d'+1} \rangle = \langle l_1, \ldots, l_d, \langle m_{d+1}, \ldots, m_{d+d'+1} \rangle \rangle$$

(*où le* 1^er^ *membre est bien défini par III.* 2.7).

(ii) *Si* $q = d+1$ (*et* X *connexe*) *il existe un isomorphisme canonique :*

$$I'_{X/S}(\underline{\mathscr{M}}) \xrightarrow{\sim} I_{X/S}(\underline{\mathscr{L}})^{\delta}$$

où $\delta = \delta_{X'/X}(\mathscr{M}_{d+2}, \ldots, \mathscr{M}_{d+d'+1})$.

(iii) *Si* $q \geqq d+2$ $I_{X'/S}(\underline{\mathscr{M}})$ *est canoniquement trivialisé.*

Démonstration. — Compte tenu de IV. 2.1 il suffit de démontrer (i). On peut supposer les faisceaux $\mathscr{L}_i$ f. s. a (et les sections l_i holomorphes). Soient pour $i \in [1, d]$, V_i engendrant

$\mathcal{L}_i$ et $\underline{\mathbb{P}}=\prod_{i=1}^{d} \mathbb{P}(V_i^{\vee})$ et considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r] \arrow[d] & X'_U \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[d] \\
Z \arrow[r] & X_U \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
 & U \arrow[r] \arrow[dr] & S \\
 & & \mathbb{P} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

où U est l'ouvert de régularité de $(\zeta_1, \dots, \zeta_d)$, $Z=Z(\zeta_1, \dots, \zeta_d)$ et $Y=X'\times_X Z$. On a sur U : (pour certains entiers r_i) :

$$\begin{aligned}
I_{X'/S}(\underline{\mathcal{M}})\otimes \bigotimes_{i=1}^{d} \xi_i^{r_i} &= I_{X'_{U}/U}(g^*\mathcal{L}_1\otimes\xi_1, \dots, g^*\mathcal{L}_d\otimes\xi_{d'}, \mathcal{M}_{d+1}, \dots, \mathcal{M}_{d+d+1}) \\
&\simeq I_{Y/U}(\mathcal{M}_{d+1}, \dots, \mathcal{M}_{d+d'+1}) \simeq N_{Z/U}(I_{Y/Z}(\mathcal{M}_{d+1}, \dots; \mathcal{M}_{d+d'+1})) \\
&\simeq N_{Z/U}(I_{X'/X}(\mathcal{M}_{d+1}, \dots, \mathcal{M}_{d+d'+1})) \\
&\simeq I_{X/S}(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_d, I_{X'/X}(\mathcal{M}_{d+1}, \dots, \mathcal{M}_{d+d'+1}))\otimes \bigotimes_i \xi_i^{r_i},
\end{aligned}$$

le dernier isomorphisme étant la définition de $I_{X/S}$.

IV.2.3. *L'isomorphisme de symétrie.* — On reprend $f: X \to S$ comme d'habitude et soient $(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{d+1})$ des faisceaux inversibles sur X. On suppose qu'on a, pour 2 entiers distincts i, j $\mathcal{L}_i=\mathcal{L}_j=\mathcal{L}$ et soit σ la transposition (i, j), alors l'automorphisme φ_σ de $I_{X/S}(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}, \dots, \mathcal{L}, \dots, \mathcal{L}_{d+1})$ est égal à $(-1)^\delta$ où δ est le degré d'intersection sur S des faisceaux $\mathcal{L}, \mathcal{L}_1, \dots, \hat{\mathcal{L}}_i, \dots, \hat{\mathcal{L}}_j, \dots, \mathcal{L}_{d+1}$.

Démonstration. — Par additivité on peut supposer $\mathcal{L}_k$ f. s. a pour tout k. Par restrictions successives au diviseur d'une section des $\mathcal{L}_k$, $k\neq i, j$, on peut supposer que X est une courbe et le résultat est alors conséquence de la démonstration de II.3.2. *a*.

IV.2.4. Soit $u=(u_1, \dots, u_{d+1})$ une suite d'isomorphismes de fibrés en droites sur X, $u_i: \mathcal{L}_i \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}'_i$. Il lui est associé un isomorphisme sur S, $I_{X/S}(u)$ de $I_{X/S}(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_{d+1})$ sur $I_{X/S}(\mathcal{L}'_1, \dots, \mathcal{L}'_{d+1})$ tel que pour toute suite régulière on ait $I_{X/S}(u)(\langle l_1, \dots, l_{d+1}\rangle)=\langle u_1(l_1), \dots, u_{d+1}(l_{d+1})\rangle$.

Soit alors pour tout $i\in[1, d+1]$ une section λ_i de O_S^* et soit u la suite d'isomorphismes : $u_i=\lambda_i I_d$, $u_i\in \mathrm{Aut}_X(\mathcal{L}_i)$. L'automorphisme $I_{X/S}(u)$ de $I_{X/S}(\mathcal{L})$ est alors l'homothétie de rapport $\prod_{i=1}^{d+1} \lambda_i^{\delta_i}$ où $\delta_i=\delta_{X/S}(\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_i, \dots, \mathcal{L}_{d+1})$. Cela résulte de II.3.3 ou de IV.2.1.

IV.3. PROPOSITION. — *Soit $\mathscr{E}$ un fibré vectoriel de rang $d+1$ sur* S *et soit $\mathbb{P}=\mathbb{P}(\mathscr{E})$ le fibré projectif associé. Alors il existe un isomorphisme canonique*

$$\psi: \quad \mathrm{I}_{\mathbb{P}/\mathrm{S}}(O_{\mathbb{P}}(1), O_{\mathbb{P}}(1), \ldots, O_{\mathbb{P}}(1)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Det}\, \mathscr{E}.$$

Si e est une section de $\mathscr{E}$, notons $\bar{e}$ la section correspondante de $O(1)$. Si $(e_1, \ldots, e_{d+1})$ est une base de E, *la suite $(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_{d+1})$ est régulière et*

IV.3.1. $$\psi(\langle \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_{d+1} \rangle) = e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_{d+1}.$$

Démonstration. — Si $\mathscr{E}'$ est un fibré vectoriel sur S, $\mathbb{P}'$ le fibré projectif associé à $\mathscr{E}'$ et $u: \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ un isomorphisme de fibrés vectoriels, il existe un isomorphisme $\bar{u}$

$$\bar{u}: \quad \mathrm{I}_{\mathbb{P}/\mathrm{P}}(O_{\mathbb{P}}(1), \ldots, O_{\mathbb{P}}(1)) \to \mathrm{I}_{\mathbb{P}'/\mathrm{S}}(O_{\mathbb{P}'}(1), \ldots, O_{\mathbb{P}'}(1))$$

tel que pour toute base locale $(e_1, \ldots, e_{d+1})$ de $\mathscr{E}$ on ait

$$\bar{u}(\langle \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_{d+1} \rangle) = \langle \overline{u(e_1)}, \ldots, \overline{u(e_{d+1})} \rangle.$$

En particulier si u est un automorphisme de $\mathscr{E}$ il lui correspond $\chi(u) \in O_{\mathrm{S}}^*$, tel que pour toute base $(e_1, \ldots, e_{d+1})$ de $\mathscr{E}$ on ait

$$\langle \overline{u(e_1)}, \ldots, \overline{u(e_{d+1})} \rangle = \chi(u) \langle \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_{d+1} \rangle.$$

χ est un caractère de $\mathrm{G}l(\mathscr{E})$ donc une puissance de déterminant. En l'évaluant sur $\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$ on vérifie aisément que $\chi(u) = \mathrm{Det}\, u$.

L'isomorphisme ψ, défini par IV.3.1, est donc indépendant du choix de la base, ce qui établit la proposition.

V. L'intégration de classes de Chern

Nous commençons par définir des intégrales de classes de Segre. Toutefois ce que nous notons ici $s_i(\mathrm{E})$ correspond en fait à la i-ième classe de Segre du fibré dual $\mathrm{E}^{\vee}$ [F. chap. III].

On utilisera dans la suite la notation suivante : si $\mathscr{L}$ est un fibré en droite et i un entier le symbole $\mathscr{L}\{i\}$ désigne la suite de fibrés inversibles formée du faisceau $\mathscr{L}$ répété i fois.

On désigne comme précédemment par $f: \mathrm{X} \to \mathrm{S}$ un morphisme projectif plat Cohen-Macaulay purement de dimension d.

V.1. INTÉGRATION DE CLASSES DE SEGRE. — Soient E_i, $i \in [1, n]$ des fibrés vectoriels sur X de rangs respectifs r_i+1. On note $\mathbb{P}_i$ le fibré projectif $\mathbb{P}(E_i)$, ξ_i le fibré canonique sur $\mathbb{P}_i$, et $\mathbb{P}$ l'espace produit $\mathbb{P}_1 \times_X \mathbb{P}_2 \times \ldots \times_X \mathbb{P}_n$.

V.1.1. *Définition.* — Soient k_i, $i \in [1, n]$ des entiers strictement positifs de somme $d+1$; on définit le fibré inversible sur S, $I_{X/S}\langle s_{k_1}(E_1), \ldots, s_{k_n}(E_n)\rangle$ par la formule

$$I_{X/S}\langle s_{k_1}(E_1), \ldots, s_{k_n}(E_n)\rangle = I_{\mathbb{P}/S}(\xi_1\{r_1+k_1\}, \ldots, \xi_n\{r_n+k_n\}).$$

V.1.2. *Remarques.* — (*a*) Si les entiers k_i vérifient $\Sigma k_i = d$, on pose

$$\delta_{X/S}\langle s_{k_1}(E_1), \ldots, s_{k_n}(E_n)\rangle = \delta_{\mathbb{P}/S}(\xi_1\{r_1+k_1\}, \ldots, \xi_n\{r_n+k_n\}).$$

(*b*) On peut étendre la définition V.1.1 au cas où certains entiers k_i sont nuls (la somme totale étant toujours $d+1$). Comme $\delta_{\mathbb{P}_i/X}(\xi_i\{r_i\})=1$ on déduit de IV.2.2 que si $k_i=0$ on a

$$I_{X/S}\langle s_{k_1}(E_1), \ldots, s_{k_n}(E_n)\rangle = I_{X/S}\langle s_{k_1}(E_1), \ldots, \widehat{s_{k_i}(E_i)}, \ldots, s_{k_n}(E_n)\rangle.$$

(*c*) Si $\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_{d+1}$ sont des fibrés en droites sur X on a par définition :

$$I_{X/S}\langle s_1(\mathscr{L}_1), \ldots, s_1(\mathscr{L}_{d+1})\rangle = I_{X/S}(\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_{d+1}).$$

(*d*) On reprend les notations de V.1.1 et on suppose que pour une valeur de j le fibré E_j est de rang 1, on a alors :

$$I_{X/S}\langle s_{k_1}(E_1), \ldots, s_{k_j}(E_j), \ldots, s_{k_n}(E_n)\rangle$$
$$= I_{X/S}\langle s_{k_1}(E_1), \ldots, s_1(E_j), \ldots, s_1(E_j), \ldots, s_{k_n}(E_n)\rangle$$

où $s_1(E_j)$ est répété k_j fois.

(*e*) Supposons que pour une valeur de j l'entier k_j soit égal à 1. Il résulte alors de IV.3 que

$$I_{X/S}\langle s_{k_1}(E_1), \ldots, s_1(E_j), \ldots, s_{k_n}(E_n)\rangle = I_{X/S}\langle s_{k_1}(E_1), \ldots, s_1(\mathrm{Det}\, E_j), \ldots, s_{k_n}(E_n)\rangle.$$

(*f*) Soit $u=(u_1, \ldots, u_n)$ une suite d'isomorphismes de fibrés vectoriels sur $X: u_i: E_i \xrightarrow{\sim} E'_i$. Il est associé à u un isomorphisme

$$I_{X/S}\langle u\rangle : I_{X/S}\langle s_{k_1}(E_1), \ldots, s_{k_n}(E_n)\rangle \xrightarrow{\sim} I_{X/S}\langle s_{k_1}(E'_1), \ldots, s_{k_n}(E'_n)\rangle.$$

Soit pour tout $i \in [1, n]$ une section λ_i de O_S^* et prenons pour u la suite définie par $u_i = \lambda_i I_d : E_i \xrightarrow{\sim} E_i$. L'automorphisme $I_{X/S}\langle u\rangle$ de $I_{X/S}\langle s_{k_1}(E_1), \ldots, s_{k_n}(E_n)\rangle$ est alors l'homothétie de rapport $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i^{(r_i+k_i)\delta_i}$ où $\delta_i = \delta_{X/S}\langle s_{k_1}(E_1), \ldots, s_{k_i-1}(E_i), \ldots, s_{k_n}(E_n)\rangle$. Cela résulte de la définition V.1.1 et de IV.2.3.

V.2. MULTIPLICATIVITÉ DES CLASSES DE SEGRE.

V.2.1. LEMME. — *Les notations sont celles de* V.1.1 *et on suppose que pour un certain j le fibré E_j admet un sous-fibré en droites* L. *On a alors un isomorphisme canonique*

$$I_{X/S}\langle s_{k_1}(E_1), \ldots, s_{k_j}(E_j), \ldots, s_{k_n}(E_n)\rangle$$

$$\xrightarrow{\sim} \bigotimes_{\substack{\alpha \geqq 0,\ \beta \geqq 0\\ \alpha+\beta=k_j}} I_{X/S}\langle s_{k_1}(E_1), \ldots, s_\alpha(L), s_\beta(E_j/L), \ldots, s_{k_n}(E_n)\rangle$$

(la mention $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$ sera omise dans la suite).

Démonstration. — De l'inclusion $L \subsetneq E_j$ on déduit sur $\mathbb{P}_j$ une section σ du fibré $\check{\mathscr{L}} \otimes E_j$ définissant le fermé $\mathbb{P}(E_j/L)$ dans $\mathbb{P}_j$. Dans le second membre de la formule V.1.1 on remplace le premier des termes ξ_j par $(\xi_j \otimes \check{L}) \otimes L$. Par additivité et réduction au diviseur de σ on obtient un isomorphisme

$$I_{X/S}\langle s_{k_1}(E_1), \ldots, s_{k_j}(E_j), \ldots, s_{k_n}(E_n)\rangle$$

$$\xrightarrow{\sim} I_{X/S}\langle s_{k_1}(E_1), \ldots, s_{k_j}(E_j/L), \ldots, s_{k_n}(E_n)\rangle \otimes$$
$$I_{X/S}\langle s_{k_1}(E_1), \ldots, s_1(L), s_{k_j-1}(E_j), \ldots, s_{k_n}(E_n)\rangle$$

En renouvelant cette construction k_j fois et en utilisant la remarque V.1.2.d on obtient l'isomorphisme cherché.

V.2.2. PROPOSITION. — (*a*) *Les notations sont celles de* V.1.1. *On suppose qu'on a en outre une suite exacte de fibrés*

$$0 \to F \to E_j \to F' \to 0.$$

On a alors un isomorphisme canonique

$$\varphi:\quad I_{X/S}\langle s_{k_1}(E_1), \ldots, s_{k_j}(E_j), \ldots, s_{k_n}(E_n)\rangle$$

$$\xrightarrow{\sim} \bigotimes_{\alpha+\beta=k_j} I_{X/S}\langle s_{k_1}(E_1), \ldots, s_\alpha(F), s_\beta(F'), \ldots, s_{k_n}(E_n)\rangle.$$

(*b*) *Supposons qu'on ait une filttation de* E_j *par des sous-fibrés* $0=E_j^0 \subset E_j^1 \subset E_j^2 \subset E_j^3 = E_j$. *Le diagramme suivant d'isomorphismes* [*donnés par* (*a*)] *est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc}
I_{X/S}\langle \ldots, s_{k_j}(E_j), \ldots\rangle & \xrightarrow{\sim} & \displaystyle\bigoplus_{\alpha+\beta=k_j} I_{X/S}\langle \ldots s_\alpha(E_j^1)\, s_\beta(E_j/E_j^1) \ldots\rangle \\
\downarrow & & \downarrow \\
\displaystyle\bigotimes_{\alpha+\beta=k_j} I_{X/S}\langle \ldots s_\alpha(E_j^2)\, s_\beta(E_j/E_j^2) \ldots\rangle & \xrightarrow{\sim} & \displaystyle\bigotimes_{\alpha+\beta+\gamma=k_j} I_{X/S}\langle \ldots s_\alpha(E_j^1),\ s_\beta(E_j^2/E_j^1),\ s_\gamma(E_j/E_j^2)
\end{array}$$

Démonstration. — (*a*) Si F (resp. F′) est muni d'une filtration F. (resp. F′.) dont les quotients successifs sont des fibrés en droites F_i, $i \in [1, \mathrm{rg}\, F]$, (resp. F'_j, $j \in [1, \mathrm{rg}\, F']$), on obtient un isomorphisme $\varphi(F., F'.)$ entre les deux membres de V.2.2. *a* de la façon suivante :

Si on utilise de façon répétée le lemme V.2.1 pour développer chacun des membres en terme des F_i et F'_j on obtient des expressions développées identiques pour les deux membres.

V.2.3. Considérons alors la variété de drapeaux $D = \mathrm{Drap}(F) \times_X \mathrm{Drap}(F') \xrightarrow{\pi} X$, on désigne par r la dimension de π et par $\mathscr{F}.$ (resp. $\mathscr{F}'.$) la filtration universelle de F (resp. F′) sur D. Choisissons une suite $\underline{\mathscr{L}} = (\mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_r)$ de fibrés inversibles sur D vérifiant $\delta_{D/X}(\underline{\mathscr{L}}) = 1$. [Pour se convraincre qu'une telle suite on écrit π comme composé de projections $\pi_i : \mathbb{P}(V_i) \to Y_i$ où V_i est un fibré vectoriel sur le schéma Y_i. La suite formée du fibré universel sur $\mathbb{P}(V_i)$ répété $\mathrm{rg}.V_i - 1$ fois répond à la question pour le morphisme π_i on conclut grâce à IV.1.3]. D'après ce qui précède on dispose d'un isomorphisme $\varphi(\mathscr{F}., \mathscr{F}'.)$ entre

$$I_{D/S}\langle s_{k_1}(E_1, \ldots, s_{k_j}(E_j), \ldots, s_{k_n}(E_n), s_1(\mathscr{L}_1), \ldots, s_1(\mathscr{L}_r)\rangle$$

et

$$\bigotimes_{\alpha+\beta=k_j} I_{D/S}\langle s_{k_1}(E_1), \ldots, s_\alpha(F)\, s_\beta(F'), \ldots, s_{k_n}(E_n), s_1(\mathscr{L}_1), \ldots, s_1(\mathscr{L}_r)\rangle.$$

Or la source et le but de $\varphi(\mathscr{F}., \mathscr{F}.)$ sont respectivement isomorphes via IV.2.2 à la source et au but de V.2.2. *a*. De plus l'isomorphisme qu'on en déduit entre les 2 membres de V.2.2. *a* est indépendant du choix de $\underline{\mathscr{L}}$ d'après les formules explicitant l'isomorphisme ψ de IV.2.2. C'est l'isomorphisme φ annoncé.

Pour vérifier (*b*) il suffit de vérifier que l'isomorphise $\varphi(F., F'.)$ du début de ce paragraphe coïncide avec φ. On en déduira en effet que les deux isomorphismes diagonaux du diagrammes (*b*) peuvent être décrits de la même façon en utilisant les filtrations universelles sur $\mathrm{Drap}\, E_1 \times_X \mathrm{Drap}\, E_2/E_1 \times_X \mathrm{Drap}\, E/E_2$.

Aux filtrations F. et F′. est associée une section $\sigma : X \to D$ dont l'image s'obtient par réductions successives aux diviseurs de sections des fibres en droites $\check{F}_i \otimes \mathscr{F}_j (i<j)$ et $\check{F}'_i \otimes \mathscr{F}'_j (i<j)$ ($\mathscr{F}'_i$ et $\mathscr{F}'_j$ désignent les quotients successifs des filtrations universelles $\mathscr{F}.$ et $\mathscr{F}'.$). Si l'on prend pour suite auxiliaire $\underline{\mathscr{L}}$ en V.2.3 la suite de ces fibrés en droites, il apparaît que φ et $\varphi(F., F'.)$ se déduisent l'un et l'autre de $\varphi(\mathscr{F}., \mathscr{F}'.)$ par réduction à σ.

V.3. Passage aux classes de Chern. — Soit $\mathscr{E}$ un ensemble de fibrés vectoriels sur X. On désigne par $S(\mathscr{E})$ [resp. $C(\mathscr{E})$, resp. $SC(\mathscr{E})$] — ou simplement s'il n'y a pas d'ambiguité par S, C, SC, le monoïde libre engendré par les symboles $\{s_k(E);\ k \in \mathbb{N}^*,\ E \in \mathscr{E}\}$ (resp. $\{c_k(E);\ k \in \mathbb{N}^*,\ E \in \mathscr{E}\}$, resp. $\{s_k(E), c_k(E);\ k \in \mathbb{N}^*,\ E \in \mathscr{E}\}$ et par $\mathbb{Z}[S]$ (resp. $\mathbb{Z}[SC]$) l'algèbre libre engendrée par S (resp. SC).

On gradue ces algèbres en affectant à $s_k(E)$ et $c_k(E)$ le poids k pour tout $E \in \mathscr{E}$.

Il pourra être commode d'écrire des symboles $s_0(\mathrm{E})$, $c_0(\mathrm{E})$ dont on convient qu'ils sont égaux à 1 (*cf.* V.1.2.*b*).

Par « produit de classes de Chern d'éléments de $\mathscr{E}$ » on entendra dans la suite un élément de $\mathrm{C}(\mathscr{E})$.

On considère l'algèbre quotient (graduée) $q : \mathbb{Z}[\mathrm{SC}] \to \mathrm{Q}$, définie par les relations

$$(\mathrm{R}) : \quad \begin{aligned} c_1(\mathrm{E}) &= s_1(\mathrm{E}), \qquad \forall\, \mathrm{E} \in \mathscr{E} \\ c_n(\mathrm{E}) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} s_k(\mathrm{E})\, c_{n-k}(\mathrm{E}), \qquad \forall\, n > 1, \quad \forall\, \mathrm{E} \in \mathscr{E}. \end{aligned}$$

Le composé de q avec l'inclusion naturelle de $\mathbb{Z}[\mathrm{S}]$ dans $\mathbb{Z}[\mathrm{SC}]$ est un isomorphisme grâce auquel on identifie dans la suite Q à $\mathbb{Z}[\mathrm{S}]$.

V.3.1. Définition. — Soit $m \in \mathrm{S}$ un élément de degré $d+1$ qui s'écrit $m = s_{k_1}(\mathrm{E}_1) \dots s_{k_n}(\mathrm{E}_n)$. On définit $\mathrm{I}_{\mathrm{X/S}}(m)$ par la formule

$$\mathrm{I}_{\mathrm{X/S}}(m) = \mathrm{I}_{\mathrm{X/S}} \langle s_{k_1}(\mathrm{E}_1), \dots, s_{k_n}(\mathrm{E}_n) \rangle$$

et on étend $\mathrm{I}_{\mathrm{X/S}}$ par linéarité à $\mathbb{Z}[\mathrm{S}]_{d+1}$. Pour $m \in \mathbb{Z}[\mathrm{SC}]_{d+1}$ on définit alors $\mathrm{I}_{\mathrm{X/S}}(m)$ par la formule

$$\mathrm{I}_{\mathrm{X/S}}(m) = \mathrm{I}_{\mathrm{X/S}}(q(m))$$

et on l'appellera l'intégrale de m le long de f.

Pour $\mathscr{L}_1, \dots, \mathscr{L}_{d+1}$ des fibrés en droites sur X, le O_{S}-faisceau noté ici $\mathrm{I}_{\mathrm{X/S}}(c_1(\mathscr{L}_1) \dots c_1(\mathscr{L}_{d+1}))$ coïncide avec ce qu'on notait en III $\mathrm{I}_{\mathrm{X/S}}(\mathscr{L}_1, \dots, \mathscr{L}_{d+1})$. Cet abus de notation semble la moins mauvaise solution.

V.3.2. On étend de la même façon la définition de $\delta_{\mathrm{X/S}}$ à $\mathbb{Z}[\mathrm{SC}]_d$ (*cf.* V.1.2.*a*).

V.4. Propriétés générales. — Tous les fibrés considérés sur X sont supposés appartenir à $\mathscr{E}$. Les lettres m, m', m'' désignent des éléments de $\mathbb{Z}[\mathrm{SC}]$ dont on sous-entendra toujours qu'ils ont un degré convenable pour que l'expression écrite ait un sens.

La plupart des assertions qui suivent se déduisent de façon formelle des résultats antérieurs, en se ramenant d'abord par linéarité au cas où m, m'... appartiennent à S, puis à une intersection de fibrés en droites via V.1.1.

On note par le signe = un isomorphisme canonique entre deux fibrés. Nous n'expliciterons pas les nombreuses compatibilités entre ces isomorphismes qui résultent des paragraphes précédents. Si $h : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ est un morphisme et $\mathscr{E}'$ une famille de fibrés sur X' contenant $h^*(\mathrm{E})$ pour tout E dans $\mathscr{E}$, on définit un homomorphisme h^* de $\mathbb{Z}[\mathrm{SC}(\mathscr{E})]$ dans $\mathbb{Z}[\mathrm{SC}(\mathscr{E}')]$ en posant $h^*(c_i(\mathrm{E})) = c_i(h^*(\mathrm{E}))$ $h^*(s_i(\mathrm{E})) = s_i(h^*(\mathrm{E}))$.

V.4.1. Considérons un carré cartésien

$$\begin{tikzcd} X'=X\times_S S' \arrow[r, "g_X"] \arrow[d, "f'"] & X \arrow[d, "f"] \\ S' \arrow[r, "g"] & S. \end{tikzcd}$$

Alors $I_{X'/S'}(h^*(m))=h^*I_{X/S}(m)$.

V.4.2. Soit $g: X'\to X$ un morphisme projectif plat Cohen-Macaulay de dimension d' (avec X connexe). Soient $m\in SC(\mathscr{E})$, $m'\in SC(\mathscr{E}')$. Alors

$$I_{X/S}(h^*(m).m')=\begin{cases} I_{X/S}(m.c_1(I_{X'/X}(m')) & \text{si } d^0 m'=d'+1 \\ I_{X/S}(m)\,\delta^{X'/X}(m') & \text{si } d^0 m'=d' \\ O_S & \text{si } d^0 m'<d'. \end{cases}$$

Cela résulte de IV.2.2.

V.4.3. Pour tout E dans $\mathscr{E}$ on a d'après V.1.2.*e* et (R) :

$$I_{X/S}(m.c_1(E)\,m')=I_{X/S}(m.c_1(\operatorname{Det} E).m').$$

V.4.4. Si $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}'$, $\mathscr{L}''$ sont des fibrés inversibles sur X avec $\mathscr{L}=\mathscr{L}'\otimes\mathscr{L}''$ on a

$$I_{X/S}(mc_1(\mathscr{L})\,m')=I_{X/S}(mc_1(\mathscr{L}')\,m')\otimes I_{X/S}(mc_1(\mathscr{L}'')\,m')=I_{X/S}(m\,(c_1(\mathscr{L}')+c_1(\mathscr{L}''))\,m').$$

V.4.5. Si $\mathscr{L}$ est un fibré de rang 1 sur X, à une section f régulière de $\mathscr{L}$ définissant le diviseur Y est associé un isomorphisme :

$$I_{X/S}(mc_1(\mathscr{L})\,m')\xrightarrow{\sim} I_{Y/S}(m.m').$$

V.4.6. On dispose d'isomorphismes de symétrie

$$I_{X/S}(m.m'.m''.m''')\xrightarrow{\sim} I_{X/S}(m.m''.m'.m''').$$

V.4.7. Pour $\mathscr{L}$ fibré en droites sur X on a quelque soit $k>1$ $I_{X/S}(mc_k(\mathscr{L})\,m')=O_S$. En raisonnant par récurrence sur k, on déduit des relations (R) :

$$I_{X/S}(mc_k(\mathscr{L})\,m')=I_{X/S}(m.((-1)^{k+1}s_k(\mathscr{L})+(-1)^k s_{k-1}(\mathscr{L}).s_1(\mathscr{L}))\,m')$$

et on conclut grâce à V.1.2.*d*.

V.4.8. *Multiplicativité des classes de Chern.*

THÉORÈME. — (*a*) A *une suite exacte de fibrés sur* X

$$0\to F\to E\to F'\to 0$$

est associé un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{I}_{X/S}(m\,.\,c_n(\mathrm{E})\,m') \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{\alpha+\beta=n} \mathrm{I}_{X/S}(mc_\alpha(\mathrm{F})\,c_\beta(\mathrm{F}')\,.\,m').$$

(*b*) *Supposons qu'on ait une filtration de* E *par des sous-fibrés* $0=\mathrm{E}^0\subset \mathrm{E}^1\subset \mathrm{E}^2\subset \mathrm{E}^3=\mathrm{E}$. *Le diagramme suivant (dans lequel les isomorphismes sont ceux donnés par* (*a*) *est commutatif*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{I}_{X/S}(m\,.\,c_n(\mathrm{E})\,m' \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \bigotimes\limits_{\alpha+\beta=n} \mathrm{I}_{X/S}(mc_\alpha(\mathrm{E}_1)\,c_\beta(\mathrm{E}/\mathrm{E}_1)\,m') \arrow[d] \\
\bigotimes\limits_{\alpha+\beta=n} \mathrm{I}_{X/S}(mc_\alpha(\mathrm{E}_2)\,c_\beta(\mathrm{E}/\mathrm{E}_2)\,m') \arrow[r, "\sim"] & \bigotimes\limits_{\alpha+\beta+\gamma=n} \mathrm{I}_{X/S}(mc_\alpha(\mathrm{E}_1)\,c_\beta(\mathrm{E}_2/\mathrm{E}_1)\,c_\gamma(\mathrm{E}/\mathrm{E}_2))
\end{tikzcd}$$

Démonstration (l'auteur remercie le referee qui lui a évité ici un calcul maladroit). — Notons tout d'abord que les relations (R) sont équivalentes aux relations $(\mathrm{R_T})$ dans l'algèbre de séries formelles $\mathbb{Z}[\mathrm{S}][[\mathrm{T}]]$:

$$\mathrm{R_T}:\quad (1-s_1(\mathrm{G})\,\mathrm{T}+\ldots+(-1)^n s_n(\mathrm{G})\,\mathrm{T}^n\ldots)(1+c_1(\mathrm{G})\,\mathrm{T}+\ldots$$
$$+c_n(\mathrm{G})\,\mathrm{T}^n+\ldots)=1,\ \forall\,\mathrm{G}\in\mathscr{E}.$$

Désignons par $\mathbb{Z}[s(\mathrm{E})]$ la sous-algèbre de $\mathbb{Z}[\mathrm{S}]$ engendrée par les symboles $(s_n(\mathrm{E}))_{n\in\mathbb{N}}$ et considérons l'homomorphisme $\alpha : \mathbb{Z}[s(\mathrm{E})]\to\mathbb{Z}[\mathrm{S}]$ défini par

$$\alpha(s_n(\mathrm{E}))=\sum_{p+q=n} s_p(\mathrm{F})\,s_q(\mathrm{F}'),\qquad \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

On déduit de $\mathrm{R_T}$ la relation

$$\alpha(1+c_1(\mathrm{E})\,\mathrm{T}+\ldots+c_n(\mathrm{E})\,\mathrm{T}^n\ldots)=[(1-s_1(\mathrm{F})\,\mathrm{T}+\ldots)(1-s_1(\mathrm{F}')\,\mathrm{T}+\ldots]^{-1}$$
$$=(1+c_1(\mathrm{F}')\,\mathrm{T}+\ldots)(1+c_1(\mathrm{F})\,\mathrm{T}+\ldots).$$

D'après V.2.2 on dispose pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et tout m_k, m'_k (de degrés convenables) d'isomorphismes canoniques

$$\mathrm{I}_{X/S}(m_k\,s_k(\mathrm{E})\,m'_k)\xrightarrow{\sim}\mathrm{I}_{X/S}(m_k\,\alpha(s_k(\mathrm{E}))\,m'_k)$$

et donc pour tout $\mathrm{P}\in\mathbb{Z}[s(\mathrm{E})]_n$ d'un isomorphisme

$$\mathrm{I}_{X/S}(m\,\mathrm{P}\,m')\xrightarrow{\sim}\mathrm{I}_{X/S}(m\,\alpha(\mathrm{P})\,m')$$

$$[\text{via } \mathrm{I}_{X/S}(m\,\mathrm{AB}\,m')\xrightarrow{\sim}\mathrm{I}_{X/S}(m\,\alpha(\mathrm{A})\,\mathrm{B})\,m')\xrightarrow{\sim}\mathrm{I}_{X/S}(m\,\alpha(\mathrm{A})\,\alpha(\mathrm{B})\,m')$$

ou

$$\mathrm{I}_{X/S}(m'\,AB\,m') \xrightarrow{\sim} \mathrm{I}_{X/S}(m\,A\,\alpha(B)\,m') \xrightarrow{\sim} \mathrm{I}_{X/S}(m\,\alpha(A)\,\alpha(B)\,m')$$

indifféremment, on vérifie aisément que les 2 isomorphismes composés coïncident]. On obtient donc en particulier un isomorphisme

$$\mathrm{I}_{X/S}(mc_n(E)\,m') \xrightarrow{\sim} \bigotimes_{\alpha+\beta=n} \mathrm{I}_{X/S}(mc_\beta(F')\,c_\alpha(F)\,m')$$

et celui de l'énoncé s'en déduit par symétrie.

L'assertion (*b*) du théorème résulte alors de V.2.2.*b*.

V.4.9. PROPOSITION. — *Si n est strictement supérieur au rang de* E *on a :*

$$\mathrm{I}_{X/S}(m\,.\,c_n(E)\,.\,m') = \mathcal{O}_S.$$

Démonstration. — Pour E de rang 1 c'est l'assertion V.4.7. Pour obtenir le cas général on utilise un « splitting principle » comme en V.2.2 c'est-à-dire qu'on se ramène par passage à une variété de drapeaux au cas où E est extension successive de fibrés en droites, la proposition est alors conséquence de V.4.8.

V.4.10. *Restriction à une section d'un fibré.*

PROPOSITION. — *Soient* E *un fibré de rang r sur* X *et s une section f régulière de* E *définissant le fermé* Y. *On a alors un isomorphisme canonique :*

$$\mathrm{I}_{X/S}(mc_r(E)\,m') \xrightarrow{\sim} \mathrm{I}_{Y/S}(m\,.\,m').$$

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur r. Pour $r=1$ c'est l'assertion V.4.5. Sinon on considère le fibré projectif $\mathbb{P}=\mathbb{P}(E) \xrightarrow{p} X$ sur lequel on a la suite exacte

$$0 \to H \to E \to \xi \to 0.$$

Soit m'' un produit de classes de Chern sur $\mathbb{P}$ vérifiant $\delta_{\mathbb{P}/X}(m'')=1$, par exemple $c_1(\xi)^{r-1}$. On a (en omettant d'écrire p^*) :

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_{X/S}(mc_r(E)\,m') &= \mathrm{I}_{\mathbb{P}/S}(mc_r(E)\,m'\,m'') \quad \text{d'après V.4.2.} \\ &= \mathrm{I}_{\mathbb{P}/S}(mc_{r-1}(H)\,c_1(\xi)\,m'\,m'') \quad \text{d'après V.4.8 et 9.} \end{aligned}$$

La section s de E induit une section $f\circ p$ régulière, $\bar{s}$ de ξ dont on désigne le diviseur par D. Au-dessus de D s définit une section $\tilde{s}$ de H, régulière relativement à S et définissant le fermé $Z = \mathbb{P} \times_X Y$. On obtient donc par récurrence

$$\begin{aligned} I_{\mathbb{P}/S}(mc_r(E)\, m'\, m'') &\xrightarrow{\sim} I_{D/S}(mc_{r-1}(H)\, m'\, m'') \\ &\xrightarrow{\sim} I_{Z/S}(mm'\, m'') \\ &\xrightarrow{\sim} I_{Y/S}(mm') \quad \text{d'après V.4.2} \end{aligned}$$

V.4.11. On pose $\operatorname{Aut}(\mathscr{E}) = \prod_{E \in \mathscr{E}} \operatorname{Aut}_X(E)$. A tout couple (u, m) formé d'un élément $u = (u_E)_{E \in \mathscr{E}}$ de $\operatorname{Aut}(\mathscr{E})$ et d'un élément $m \in \mathbb{Z}[SC]_{d+1}$ correspond un automorphisme $I_{X/S}(u, m)$ de $I_{X/S}(m)$. Si on voit $I_{X/S}(u, m)$ comme un élément de $\Gamma(S, O_S^*)$ on a :

$$I_{X/S}(u \circ v, m) = I_{X/S}(u, m) . I_{X/S}(v, m)$$

$$I_{X/S}(u, m + m') = I_{X/S}(u, m) . I_{X/S}(u, m').$$

Si $E \in \mathscr{E}$, et $\lambda \in \Gamma(S, O_S^*)$ on désigne par λ_E l'élément de $\operatorname{Aut} \mathscr{E} : (\lambda_E)_{E'} = I_d$ si $E' \neq E\, (\lambda_E)_E = \lambda\, I\, d$.

Proposition. — *Soit* E *un fibré de rang* r *sur* X. *On désigne par* D_E *la dérivation de degré*-1 *de* $\mathbb{Z}[SC]$ *définie par*

$$\left.\begin{aligned} D_E(s_k(E)) &= (r + k - 1)\, s_{k-1}(E) \\ D_E(c_k(E)) &= (r + 1 - k)\, c_{k-1}(E) \end{aligned}\right\} \forall k \geqq 1$$

$D_E(s_k(E')) = D_E(c_k(E')) = 0$, $\forall E' \neq E$, $\forall k \geqq 1$. *Alors pour tout* $m \in \mathbb{Z}[SC]_{d+1}$, *on a :*

$$I_{X/S}(\lambda_E, m) = \lambda^{\delta_{X/S}(D_E(m))}.$$

Démonstration. — Il est clair que D_E induit une dérivation, que l'on note d_E de la sous-algèbre $\mathbb{Z}[S]$. De plus pour tout $m \in S$ de degré $d+1$ on a $I_{X/S}(\lambda_E, m) = \lambda^{\delta_{X/S}(d_E(m))}$, d'après V.1.2.*f* et ce résultat s'étend à tout $m \in \mathbb{Z}[S]_{d+1}$ par linéarité. Pour achever la démonstration il suffit donc de vérifier que $q \circ D_E = d_E \circ q$. [On rappelle que $q : \mathbb{Z}[SC] \to \mathbb{Z}[S]$ est l'application de passage au quotient par les relations (R)]. On a seulement à vérifier $q \circ D_E(c_k(E)) = d_E \circ q(c_k(E))$ pour tout $n \geqq 1$. On procède par récurrence sur n. Pour $n = 1$ on a $D_E(c_1(E)) = d_E(s_1(E)) = r$. Dans le calcul qui suit seul le fibré E intervient. On se permettra donc d'écrire s_i (resp. c_i) pour $s_i(E)$ [resp. $c_i(E)$]. De plus on identifiera s_i et $q(s_i)$ et on écrira $\bar{c}_i$ pour $q(c_i)$.

On a $\bar{c}_n = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} s_k \bar{c}_{n-k} + (-1)^{n+1} s_n$.

Par hypothèse de récurrence on a donc :

$$d_{\mathrm{E}}(\bar{c}_n)=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}(r+k-1)\,s_{k-1}\,\bar{c}_{n-k}$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}(r+1-n+k)\,s_k\,\bar{c}_{n-k-1}+(-1)^{n+1}(r+n-1)\,s_{n-1}.$$

En regroupant les termes $s_j\bar{c}_{n-j-1}$ pour $j\in[1, n-2]$ on obtient

$$\begin{aligned}d_{\mathrm{E}}(\bar{c}_n)&=(-1)^2 r\bar{c}_{n-1}+(1-n)\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j+1}s_j\bar{c}_{n-j-1}\\&\qquad+(-1)^n rs_{n-1}+(-1)^{n+1}(r+n-1)\,s_{n-1}\\&=r\bar{c}_{n-1}+(1-n)\left(\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j+1}s_j\bar{c}_{n-j-1}+(-1)^n s_{n-1}\right)=(r+1-n)\,\bar{c}_{n-1}=\overline{\mathrm{D}_{\mathrm{E}}(c_n)}.\end{aligned}$$

V.4.12. De manière analogue soit $\mathscr{L}$ un fibré en droites sur S et soit $\mathscr{E}'$ l'ensemble de fibrés sur X obtenu à partir de $\mathscr{E}$ en remplaçant E par $\mathrm{E}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}}\mathscr{L}$. Si on désigne par $\mathrm{T}:\mathbb{Z}[\mathrm{SC}(\mathscr{E})]\to\mathbb{Z}[\mathrm{SC}(\mathscr{E}')]$ l'homomorphisme défini par $\mathrm{T}(c_k(\mathrm{E}))=c_k(\mathrm{E}\otimes\mathscr{L})$, $\mathrm{T}(c_k(\mathrm{E}'))=c_k(\mathrm{E}')$ si $\mathrm{E}'\neq\mathrm{E}$ (et de même avec s_k) on a pour tout m

$$\mathrm{I}_{\mathrm{X/S}}(\mathrm{T}(m))=\mathrm{I}_{\mathrm{X/S}}(m)\otimes\mathscr{L}^{\delta_{\mathrm{X/S}}(\mathrm{D}_{\mathrm{E}}(m))}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[D] P. Deligne, *Le déterminant de la cohomologie*, Preprint, 1987.

[F] W. Fulton, *Intersection Theory* (*Ergebnisse der Mathematik*, Springer Verlag, 1984).

[KM] F. Knudsen et D. Mumford, *The Projectivity of the Moduli Space of Stable Curves* I : *Preliminaries on* « det » *and* « div » (*Math. Scand.*, vol. 39, 1976, p. 19-55).

[M.B] L. Moret-Bailly, dans *Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell*, Exposé II, (*Astérisque*, vol. 127).

(Manuscrit reçu le 23 juin 1988,
révisé le 30 septembre 1988).

R. Elkik,
U.A. n° 752,
Université de Paris-Sud,
Mathématique, bât. n° 425,
91405 Orsay (France).