ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GUY HENNIART

La conjecture de Langlands locale numérique pour GL(n)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 21, nº 4 (1988), p. 497-544
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1988_4_21_4_497_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 21, 1988, p. 497 à 544.

LA CONJECTURE DE LANGLANDS LOCALE NUMÉRIQUE POUR GL (n)

PAR GUY HENNIART

RÉSUMÉ. — Nous prouvons la correspondance de Langlands locale « numérique » pour $\mathrm{GL}(n)$. Précisément, soit K un corps local non archimédien et n un entier, $n \geqq 1$. Nous considérons l'ensemble des classes d'équivalence de représentations complexes du groupe de Weil de K, continues, irréductibles et de dimension n, et l'ensemble des classes d'équivalence de représentations admissibles irréductibles cuspidales de $\mathrm{GL}(n, \mathrm{K})$. Nous construisons une bijection du premier ensemble sur le second, préservant les conducteurs et compatible à la torsion par les caractères non ramifiés de $\mathrm{K}^{\times}$.

ABSTRACT. — We prove the "numerical" local Langlands correspondence for $\mathrm{GL}(n)$. Precisely, let K be a non-archimedean local field and n a positive integer. We consider the set of equivalence classes of irreducible continuous complex representations of the Weil group of K, of dimension n, and the set of equivalence classes of admissible irreducible cuspidal representations of $\mathrm{GL}(n, \mathrm{K})$. We construct a bijective map from the first set onto the second, preserving conductors and compatible with twisting by unramified characters of $\mathrm{K}^{\times}$.

1. Introduction

1.1. Soit F un corps local commutatif à corps résiduel fini k de cardinal q et de caractéristique p. On choisit une clôture séparable algébrique $\bar{\mathrm{F}}$ de F et on note W_{F} le groupe de Weil de $\bar{\mathrm{F}}$ sur F, G_{F} le groupe de Galois, et I_{F} le groupe d'inertie; l'on munit ces groupes de leur filtration par les sous-groupes de ramification en numérotation supérieure.

Pour tout entier $n \geqq 1$, on note

— $\mathscr{G}_{\mathrm{F}}(n)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations complexes de dimension n du groupe de Weil-Deligne $\mathrm{W}_{\mathrm{F}} \times \mathrm{SU}(2, \mathbf{C})$, continues et semi-simples.

— $\mathscr{G}_{\mathrm{F}}^{0}(n)$ le sous-ensemble de $\mathscr{G}_{\mathrm{F}}(n)$ formé des classes de représentations irréductibles triviales sur $\mathrm{SU}(2, \mathbf{C})$.

— $\mathscr{A}_{\mathrm{F}}(n)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations admissibles irréductibles du groupe localement compact $\mathrm{GL}(n, \mathrm{F})$.

— $\mathscr{A}_{\mathrm{F}}^{0}(n)$ le sous-ensemble de $\mathscr{A}_{\mathrm{F}}(n)$ formé des classes de représentations supercuspidales.

1.2. Pour $n=1$, l'application de réciprocité $\tau_{\mathrm{F}}: \mathrm{W}_{\mathrm{F}} \rightarrow \mathrm{F}^{\times}$ (normalisée de façon que les automorphismes de Frobenius géométriques correspondent aux uniformisantes) donne une bijection $\chi \mapsto \chi \circ \tau_F$ de $\mathscr{A}_F(1)$, ensemble des caractères [1] de $F^\times$, sur $\mathscr{G}_F(1)$, ensemble des caractères de W_F.

Soit $\chi \in \mathscr{A}_F(1)$; si $\sigma \in \mathscr{A}_F(n)$, on note $\chi\sigma \in \mathscr{A}_F(n)$ la classe de représentations $g \mapsto \chi \circ \det(g)\,\sigma(g)$; si $\sigma \in \mathscr{G}_F(n)$ on note $\chi\sigma \in \mathscr{G}_F(n)$ la classe de représentations $g \mapsto \chi \circ \tau_F(g)\,\sigma(g)$. On obtient ainsi une action du groupe $\mathscr{A}_F(1)$ sur $\mathscr{A}_F(n)$ et $\mathscr{G}_F(n)$, appelée torsion par les caractères; elle respecte $\mathscr{A}_F^0(n)$ et $\mathscr{G}_F^0(n)$. En particulier le sous-groupe $\mathscr{X}_F$ de $\mathscr{A}_F(1)$ formé des caractères non ramifiés de $F^\times$ agit sur $\mathscr{A}_F(n)$ et $\mathscr{G}_F(n)$.

Tout élément σ de $\mathscr{G}_F(n)$ ou $\mathscr{A}_F(n)$ possède un conducteur d'Artin; on note $a(\sigma)$ l'exposant de ce conducteur. Il possède également un conducteur de Swan, dont l'exposant est noté $s(\sigma)$; pour $\sigma \in \mathscr{G}_F^0(n)$ ou $\mathscr{A}_F^0(n)$ on a $s(\sigma) = \sup(0, a(\sigma) - n)$.

La conjecture de Langlands locale ([La 1], [He 2]) prédit l'existence d'une bijection $\sigma \mapsto \pi(\sigma)$ de $\mathscr{G}_F(n)$ sur $\mathscr{A}_F(n)$ possédant un grand nombre de propriétés. En particulier, elle doit envoyer $\mathscr{G}_F^0(n)$ sur $\mathscr{A}_F^0(n)$, être compatible à la torsion par les caractères : $\pi(\chi\sigma) = \chi\pi(\sigma)$ pour $\chi \in \mathscr{A}_F(1)$, et préserver les conducteurs : $a(\pi(\sigma)) = a(\sigma)$.

Notre résultat principal peut s'énoncer de la façon suivante; on désigne par K une extension finie de F dans $\bar{F}$ et n un entier, $n \geqq 1$; les notations ci-dessus s'appliquent à K.

THÉORÈME 1.2. — *Il existe une application injective de $\mathscr{G}_K^0(n)$ dans $\mathscr{A}_K^0(n)$ qui préserve les conducteurs et soit compatible à la torsion par les caractères non ramifiés. Toute telle application est* bijective.

Grâce aux résultats de classification de $\mathscr{A}_K(n)$ [Ze], on peut, étant donné pour chaque entier n une application $\mathscr{G}_K^0(n) \to \mathscr{A}_K^0(n)$ comme dans le théorème, construire à partir de là, pour chaque entier n, une bijection de $\mathscr{G}_K(n)$ sur $\mathscr{A}_K(n)$ ayant les mêmes propriétés (*cf.* [Rd]). Cependant je ne sais pas prouver l'existence de bijections conservant les facteurs ε de paires (*cf.* [He 2]). Nous donnons ci-dessous le schéma de la démonstration du théorème 1.2.

1.3. Soient $n \geqq 1$ et $j \geqq 0$ deux entiers. On note $\mathscr{G}_K^{00}(n, j)$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{G}_K^0(n)$, dont la restriction au groupe d'inertie I_K est irréductible, et dont le conducteur de Swan vaut j : On note q_K le cardinal du corps résiduel de K, et on pose

$$C_K(n, j) = \sum_{d \mid n} \sum_{\substack{k \geqq 1 \\ kn \leqq dj}} \operatorname{Card}(\mathscr{X}_K \backslash \mathscr{G}_K^{00}(d, k)).$$

THÉORÈME 1.3. — *On a* $C_K(n, j) = (q_K - 1)\, q_K^j$.

Un énoncé très voisin est conjecturé dans [Ko 2] et y est appelé « conjecture de Langlands locale numérique ». Les rapports entre les théorèmes 1.2 et 1.3, et le lien avec la conjecture de Koch seront établis au paragraphe 2. L'équivalence des deux théorèmes

[1] Pour nous caractère signifie homomorphisme *continu* dans $\mathbf{C}^\times$.

est essentiellement démontrée dans [Ko 2], mais l'argument de [Ko 2] utilise la correspondance entre $\mathscr{A}_{\mathrm{F}}(n)$ et les représentations du groupe multiplicatif d'un corps gauche de centre F et de degré réduit n sur F. La preuve de cette correspondance n'est écrite complètement [DKV, Ro] que si F est de caractéristique nulle; nous montrerons donc au paragraphe 2 comment nous passer de ce résultat en caractéristique non nulle. D'un autre côté, la correspondance en caractéristique non nulle a été annoncée par D. Kazhdan [Ka 1] et les résultats de [Ka 2] permettent d'en reconstituer la preuve [He 9].

1.4. Le premier pas consiste à se ramener au cas où n est une puissance de la caractéristique résiduelle p de F. En effet, supposons que E soit une extension finie fixée de F et soit m un entier naturel premier à p. Il est alors prouvé dans [Ko 2] que si le théorème 1.3 est vrai quand $n=p^r$ et pour toute extension finie modérée totalement ramifiée K de E, alors il est vrai pour $\mathrm{K}=\mathrm{E}$ et $n=p^r m$. Pour prouver le théorème 1.3, on peut donc raisonner par récurrence sur la valuation p-adique r de n, et supposer $n=p^r$. Le cas $r=0$ découle trivialement de la théorie locale du corps de classes. Le cas $r=1$ est prouvé par H. Koch [Ko 1], mais ce résultat, obtenu après de longs calculs, ne nous sera pas nécessaire.

Le cas $j=0$ est également trivial. On raisonne alors par récurrence sur j. La proposition suivante est pour l'essentiel due à E.-W. Zink [Zi].

Proposition 1.4. — *Soit $n=p^r > 1$. Si la restriction à $\mathrm{I_K}$ de $\sigma \in \mathscr{G}^0_{\mathrm{K}}(n)$ est irréductible, et si $s(\sigma)$ est un multiple $n\lambda$ de n, alors il existe un unique caractère η de $\mathrm{U}^{\lambda}_{\mathrm{K}}$ tel que, pour tout caractère $\chi \in \mathscr{A}_{\mathrm{F}}(1)$, χ vérifie $s(\chi\sigma) < s(\sigma)$ si et seulement s'il prolonge η.*

On en déduit la conséquence suivante :

Corollaire 1.4. — *Soient $n=p^r > 1$ et $j=p^r k$, $k \geqq 0$. Alors*

$$\mathrm{C_K}(n, j) = q_{\mathrm{K}}\, \mathrm{C_K}(n, j-1).$$

On peut donc supposer dans la suite que $n=p^r$ ne divise pas j.

1.5. A ce point, il devient nécessaire de distinguer deux cas, suivant la caractéristique de F. Dans le cas où F est de caractéristique p, la théorie des transformées de Fourier locales de Laumon [Lm] nous permet de prouver le résultat suivant :

Théorème 1.5 (F de caractéristique p). — *On a*

$$\mathrm{C_K}(n, j) = \mathrm{C_K}(n+j, j)$$

quels que soient $n=p^r \geqq 1$ et $j \geqq 0$ non divisible par n.

Si n et j sont comme dans le théorème 1.5, on a

$$v_p(n+j) = v_p(j) < r = v_p(n);$$

on obtient donc

$$\mathrm{C_K}(n+j, j) = (q_{\mathrm{K}}-1)\, q^j_{\mathrm{K}} \quad \text{par récurrence}$$

d'où

$$C_K(n, j) = (q_K - 1)\, q_K^j,$$

et le théorème 1.3 est prouvé quand F est de caractéristique p.

Supposons désormais, et jusqu'en 1.10, que F est de caractéristique nulle.

Nous utilisons l'idée, due à Kazhdan [De 2], de comparer les corps locaux de caractéristique nulle et ceux de caractéristique p.

On note v_K la valuation normalisée de K et on pose $e_K = e = v_K(p)$. Soit K′ un corps local de caractéristique p et dont le corps résiduel est le même que celui de K. Alors ([De 2], 3.5), les groupes G_K/G_K^e et $G_{K'}/G_{K'}^e$ sont isomorphes (en tant que groupes *filtrés* par leurs sous-groupes de ramification). Par comparaison de K et K′, on prouve facilement la proposition suivante.

Proposition 1.6. — *Soit φ_K une injection de $\mathcal{G}_K^0(n)$ dans $\mathcal{A}_K^0(n)$ qui soit compatible à la torsion par les caractères non ramifiés et préserve les conducteurs. Alors tout élément $\pi \in \mathcal{A}_K^0(n)$ tel que $s(\pi)/n < e$ est dans l'image de φ_K.*

Le reste de la preuve consiste à construire de telles applications φ_K ainsi que des applications analogues pour des extensions finies bien choisies E de K, et à utiliser d'une part la restriction à E des éléments de $\mathcal{G}_K(n)$ et d'autre part le changement de base de K à E des éléments de $\mathcal{A}_K(n)$, pour se ramener au cas où la proposition 1.6 est applicable (sur E). Dans les trois numéros suivants, nous donnons des précisions sur la démarche suivie.

1.7. Si E est une extension cyclique de K, on dispose de l'application de restriction

$$\mathrm{Res}_{E/K}:\quad \mathcal{G}_K(n) \to \mathcal{G}_E(n).$$

On a

$$\mathrm{Res}_{E/K}(\chi\sigma) = (\chi \circ N_{E/K})\, \mathrm{Res}_{E/K}(\sigma) \text{ pour } \chi \in \mathcal{A}_K(1)$$

et

$$f_{E/K}\,[s(\mathrm{Res}_{E/K}\,\sigma) + c_{E/K}\, n] = \sum_{\eta} s(\eta\sigma)$$

où $f_{E/K}$ est le degré d'inertie de E sur K, $c_{E/K}$ la partie sauvage de l'exposant différental de E sur K et où η parcourt le groupe H des caractères de $K^\times$ triviaux sur $N_{E/K}(E^\times)$.

Le groupe de Galois G de E sur K agit sur $\mathcal{G}_E(n)$ et l'image de $\mathcal{G}_K^0(n)$ par $\mathrm{Res}_{E/K}$ est formée des classes de la forme

$$\rho = \bigoplus_{g \in G/G'} \sigma^g$$

où σ est une classe de représentations irréductibles de W_E, dont on note G′ le stabilisateur dans G.

1.8. Comme F est de caractéristique nulle, on dispose de la théorie du changement de base local pour $\mathrm{GL}(n)$ [AC]. Pour une extension cyclique E de K comme plus haut, Arthur et Clozel construisent une application de changement de base

$$\mathrm{Ch}_{\mathrm{E/K}}: \quad \mathscr{A}_{\mathrm{K}}(n) \to \mathscr{A}_{\mathrm{E}}(n).$$

On a

$$\mathrm{Ch}_{\mathrm{E/K}}(\chi\sigma) = (\chi \circ \mathrm{N}_{\mathrm{E/K}})\,\mathrm{Ch}_{\mathrm{E/K}}(\sigma) \qquad \text{pour} \quad \chi \in \mathscr{A}_{\mathrm{K}}(1)$$

et

$$f_{\mathrm{E/K}}[s(\mathrm{Ch}_{\mathrm{E/K}}\,\sigma) + c_{\mathrm{E/K}}\,n] = \sum_{\eta \in \mathrm{H}} s(\eta\sigma)$$

comme plus haut.

Le groupe de Galois G de E sur K agit sur $\mathscr{A}_{\mathrm{E}}(n)$ et l'image de $\mathscr{A}_{\mathrm{K}}^{0}(n)$ par $\mathrm{Ch}_{\mathrm{E/K}}$ est formée des classes de représentations ρ obtenues de la façon suivante : on choisit un diviseur d de n et $\sigma \in \mathscr{A}_{\mathrm{E}}^{0}(d)$ dont le stabilisateur G′ dans G soit d'indice n/d, on définit une représentation $\bigotimes_{g \in \mathrm{G/G'}} \sigma^{g}$ de $\mathrm{GL}(d, \mathrm{F})^{\mathrm{G/G'}}$, groupe que l'on voit comme sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique de $\mathrm{GL}(n, \mathrm{F})$; cette représentation donne ρ par induction parabolique.

On peut également décrire les fibres de l'application $\mathrm{Ch}_{\mathrm{E/K}}$: si $\pi \in \mathscr{A}_{\mathrm{K}}^{0}(n)$ et $\pi' \in \mathscr{A}_{k}(n)$, on a $\mathrm{Ch}_{\mathrm{E/K}}(\pi) = \mathrm{Ch}_{\mathrm{E/K}}(\pi')$ si et seulement si $\pi = \eta\pi'$ pour un caractère $\eta \in \mathrm{H}$.

Si E′ est une extension finie cyclique de K contenant E, on a

$$\mathrm{Ch}_{\mathrm{E'/K}} = \mathrm{Ch}_{\mathrm{E'/E}} \circ \mathrm{Ch}_{\mathrm{E/K}}.$$

Fixons une $\mathbf{Z}_p$-extension $\tilde{\mathrm{K}}$ de K dans $\bar{\mathrm{F}}$, dont le corps résiduel est fini.

Proposition 1.8. — *Fixons le nombre réel* $\lambda \geqq 0$. *Il existe une extension finie* E *de* K *dans* $\tilde{\mathrm{K}}$ *telle que pour tout entier* $n \geqq 1$ *et tout* $\pi \in \mathscr{A}_{\mathrm{K}}^{0}(n)$ *vérifiant* $s(\pi) \leqq \lambda n$, *on ait, pour tout élément* τ *du support cuspidal de* $\mathrm{Ch}_{\mathrm{E/K}}(\pi)$ [Rd], *disons* $\tau \in \mathscr{A}_{\mathrm{E}}^{0}(r)$, *l'inégalité* $s(\tau) < e_{\mathrm{E}}\, r$.

1.9. Supposons données, pour d entier, $1 \leqq d \leqq n$, des applications

$$\varphi_{\mathrm{K}}^{0}(d): \quad \mathscr{G}_{\mathrm{K}}^{0}(d) \to \mathscr{A}_{\mathrm{K}}^{0}(d),$$

compatibles à la torsion par $\mathscr{X}_{\mathrm{K}}$ et préservant les conducteurs. Alors on dispose d'un procédé standard (*cf.* [Ze] § 10 ou [Rd], voir des précisions en 5.2) pour les prolonger en des applications $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}(d) \to \mathscr{A}_{\mathrm{K}}(d)$ possédant les mêmes propriétés. Si chacune des applications $\varphi_{\mathrm{K}}^{0}(d)$ $d \leqq n$, est injective (resp. bijective) alors chacune des applications $\varphi_{\mathrm{K}}(d)$ l'est aussi. Utilisant la théorie du changement de base et la structure du groupe de Galois d'un corps local, nous prouverons le résultat suivant.

Théorème 1.9. — *Soient n un entier,* $n \geqq 1$, *et* M/L *une extension finie de corps locaux (non archimédiens) de caractéristique nulle, de degré premier. Notons* G *le groupe de Galois de* M *sur* L *et* χ *le groupe des caractères de* $\mathrm{L}^{\times}$ *triviaux sur* $\mathrm{N}_{\mathrm{M/L}}(\mathrm{M}^{\times})$. *On peut alors* *construire, pour $d \leqq n$, des injections $\varphi^0_L(d): \mathscr{G}^0_L(d) \to \mathscr{A}^0_L(d)$ et $\varphi^0_M(d): \mathscr{G}^0_M(d) \to \mathscr{A}^0_M(d)$ préservant les conducteurs et compatibles à la torsion par les caractères non ramifiés, telles que, $\varphi_L(d): \mathscr{G}_L(d) \to \mathscr{A}_L(d)$ et $\varphi_M(d): \mathscr{G}_M(d) \to \mathscr{A}_M(d)$ désignant les applications (injectives) dont la construction est indiquée ci-dessus, on ait la condition de compatibilité*

$$\mathrm{Ch}_{M/L} \circ \varphi_L(d) = \varphi_M(d) \circ \mathrm{Res}_{M/L}, \qquad \text{pour} \quad d \leqq n.$$

Fixons donc les entiers $n \geqq 1$ et $j \geqq 0$. Fixons E comme dans la proposition 1.8. Soit $\pi \in \mathscr{A}^0_K(n)$ de conducteur de Swan j. Soit $\varphi: \mathscr{G}^0_K(n) \to \mathscr{A}^0_K(n)$ une injection préservant les conducteurs et compatible à la torsion par $\mathscr{X}_K$ (le théorème 1.9 implique en particulier l'existence d'une telle injection). On désire prouver que π est dans l'image de φ.

Fixons des injections $\varphi^0_E(d)$ de $\mathscr{G}^0_E(d)$ dans $\mathscr{A}^0_E(d)$, pour $d \leqq n$, prolongées comme susdit en des injections $\varphi_E(d)$ de $\mathscr{G}_E(d)$ dans $\mathscr{A}_E(d)$, préservant conducteurs et action de $\mathscr{X}_E$. Il découle facilement des propositions 1.6 et 1.8 que $\mathrm{Ch}_{E/K}(\pi)$ est dans l'image de $\varphi_E(n)$. On introduit alors une extension intermédiaire $K \subset M \subset E$ et on veut prouver, par récurrence sur le degré de E sur M, que, quelque soit le choix d'injections $\varphi^0_M(d): \mathscr{G}^0_M(d) \to \mathscr{A}^0_M(d)$ préservant conducteurs et action de $\mathscr{X}_M$, prolongées en des injections $\varphi_M(d)$ de $\mathscr{G}_M(d)$ dans $\mathscr{A}_M(d)$, alors $\mathrm{Ch}_{M/K}(\pi)$ est dans l'image de $\varphi_M(n)$. C'est clairement vrai pour $M = E$ d'après ce qui vient d'être dit. Si l'hypothèse de récurrence est vraie pour M distinct de K, on peut introduire l'unique extension L intermédiaire entre K et M et telle que M/L soit de degré p et choisir des injections $\varphi^0_M(d)$ et $\varphi^0_L(d)$ comme dans le théorème 1.9. On considère $\pi_L = \mathrm{Ch}_{L/K}(\pi)$ et $\pi_M = \mathrm{Ch}_{M/K}(\pi)$. Comme, d'après 1.8, on a $\mathrm{Ch}_{M/K} = \mathrm{Ch}_{M/L} \circ \mathrm{Ch}_{L/K}$, on a $\pi_M = \mathrm{Ch}_{M/L}(\pi_L)$. Supposons d'abord $\pi_M \in \mathscr{A}^0_M(n)$. Alors π_M est de la forme $\sigma^0_M(\tau)$ avec $\tau \in \mathscr{G}^0_M(n)$; de plus τ est stable par $\mathrm{Gal}(M/L)$, donc $\tau = \mathrm{Res}_{M/L}(\sigma)$ pour un $\sigma \in \mathscr{G}^0_L(n)$. Posant $\pi' = \varphi^0_L(n)(\sigma)$ on a $\mathrm{Ch}_{M/L}(\pi') = \mathrm{Ch}_{M/L}(\pi_L)$ donc $\pi_L = \eta\pi' = \varphi^0_L(n)(\eta\sigma)$ pour un caractère de $L^\times$ et par suite π_L appartient à l'image de φ^0_L. On traite de manière analogue le cas où $\pi_M \notin \mathscr{A}^0_M(n)$. Cela prouve que π_L est dans l'image de $\varphi_L(n)$. Ceci étant vrai pour un choix des $\varphi^0_L(d)$, l'est pour tout choix, comme on le montrera par les raisonnements de comptage de 1.3. L'hypothèse de récurrence est donc vraie pour L, donc pour K.

1.10. Le plan de l'article est le suivant :

En 2, on analyse les relations entre les théorèmes 1.2 et 1.3.

En 3, on effectue les réductions mentionnées en 1.4.

En 4, utilisant les résultats de Laumon, on prouve le théorème 1.3 en caractéristique p.

En 5, on prouve la proposition 1.6 et ses conséquences.

En 6, en utilisant la théorie du changement de base local de [AC], et en admettant le théorème 1.9, on prouve le théorème 1.2 pour les corps de caractéristique nulle. *Voir* 6.9 pour une description rapide de la méthode utilisée dans le 7 pour prouver le théorème 1.9. Le théorème 1.2 sera alors prouvé en caractéristique nulle, le théorème 1.3 en toute caractéristique et il ne restera plus, au paragraphe 8, qu'à prouver le théorème 1.2 en caractéristique non nulle.

1.11. De notre résultat principal, on peut tirer la conséquence suivante [He 11]. Si F est de caractéristique nulle et $\pi \in \mathscr{A}^0_F(n)$, il existe un entier $r \geqq 1$, une suite finie

$K_0, \ldots, K_r$ d'extensions finies de F dans $\bar{F}$ avec $K_0 = F$, K_{i+1} cyclique sur K_i pour $i = 0, \ldots, r-1$, telles que, posant $\pi_0 = \pi$ et $\pi_{i+1} = \mathrm{Ch}_{K_{i+1}/K_i}(\pi_i)$ pour $i = 0, \ldots, r-1$, on ait $\pi_i \in \mathscr{A}^0_{K_i}(n)$ pour $i = 0, \ldots, r-1$ et $\pi_r \notin \mathscr{A}^0_{K_r}(n)$.

Comme mentionné en [He 7], on peut utiliser la théorie de changement de base pour construire des applications $\sigma_F : \mathscr{G}_F(n) \to \mathscr{A}_F(n)$ possédant bien d'autres propriétés que la compatibilité à la torsion par les caractères et la préservation des conducteurs. Cela fera l'objet d'un article prochain [He 11].

1.12. Je tiens à remercier G. Laumon, dont les discussions sur ses travaux sont l'origine du présent travail. Une lettre que je lui adressai en mars 1986 donne un résumé des méthodes du présent article ([He 8] publié dans [Au] qui constitue une excellente référence sur la conjecture de Langlands locale numérique). J'adresse aussi mes remerciements à D. Kazhdan pour des précisions sur [Ka 1] et la communication de [Ka 2]. J'ai exposé ces résultats à divers séminaires ou colloques à Augsbourg-Irsee, Göttingen, Paris, Bordeaux, Berkeley. Que leurs organisateurs en soient ici remerciés. Enfin cet article a été rédigé en partie lors d'un séjour au M.S.R.I. à Berkeley, dont l'atmosphère a été des plus propices.

2. Comptage de représentations

2.1. Conservons les notations de l'introduction.

Dans ce numéro, nous examinons les rapports entre les théorèmes 1.2 et 1.3, et la « conjecture de Langlands locale numérique » de [Ko 2].

Il sera commode pour la suite de fixer une uniformisante ϖ de F, et un caractère additif non trivial ψ de F dans $\mathbf{C}^\times$. Si K est une extension finie de F dans $\bar{F}$, on notera ϖ_K une uniformisante de K, et ψ_K désignera le caractère $\psi \circ \mathrm{Tr}_{K/F}$ de K dans $\mathbf{C}^\times$.

Soit $\rho \in \mathscr{G}_K(n)$; nous notons $\det \rho$ le caractère de $K^\times$ obtenu de la façon suivante : on prend une représentation $W_K \times SU(2, \mathbf{C}) \to GL(V)$ dans la classe de ρ; on a $\dim_{\mathbf{C}} V = n$, et on en déduit une représentation $W_K \times SU(2, \mathbf{C}) \to GL(\Lambda^n V)$ qui est de dimension 1, donc donnée par un caractère de W_K; par définition de $\det \rho$, ce caractère est $(\det \rho) \circ \tau_K$. Pour tout $\chi \in \mathscr{A}_K(1)$, on a $\det(\chi\rho) = \chi^n \det \rho$.

D'autre part, pour $\rho \in \mathscr{G}_K(n)$, nous noterons $\lambda(\rho)$ la *pente* de ρ, définie comme

$$\lambda(\rho) = \inf\{\lambda \geqq 0,\ \rho(W_K^\lambda) = 1\}.$$

Rappelons qu'on a, pour $\rho \in \mathscr{G}^0_K(n)$

$$s(\rho) = n\,\lambda(\rho) \qquad (\textit{cf.}\ [\text{He } 1]\ \text{Thm. } 3.5\ \text{Cor. } 2)$$

$$\begin{aligned} s(\rho) &= a(\rho) - n \geqq 0 \qquad \text{si} \quad n > 1 \\ &= \sup(0, a(\rho) - 1) \qquad \text{si} \quad n = 1. \end{aligned}$$

2.2. Une représentation complexe σ de dimension finie de W_K qui s'étend en une représentation de G_K est dite *galoisienne*. Si σ est continue, cette extension est unique.

Une représentation complexe continue de W_K, de dimension finie, est galoisienne si et seulement si son image est finie. Si elle est en outre irréductible, cela se produit exactement quand son déterminant est d'ordre fini. Enfin, si $\rho \in \mathscr{G}_K^0(n)$, il existe un caractère non ramifié χ de $K^\times$ tel que $\chi\rho$ soit galoisienne. Pour tous ces faits voir [De 1], 4.10 et [He 1], § 2.

Examinons maintenant le lien entre la torsion de $\sigma \in \mathscr{G}_K^0(n)$ par les caractères non ramifiés et la restriction de σ à I_K,

PROPOSITION 2.2. — *Soient $\sigma \in \mathscr{G}_K^0(n)$, et $\chi \in \mathscr{A}_K(1)$.*

(*a*) *Si $\chi\sigma = \sigma$, alors $\chi^n = 1$.*

(*b*) *Supposons χ non ramifié, d'ordre d exactement. Alors on a $\chi\sigma = \sigma$ exactement quand σ est induite à partir de l'extension non ramifiée de degré d de* K *dans* $\bar{\mathrm{F}}$.

(*c*) *La restriction de σ à I_K est irréductible exactement quand $\chi\sigma \neq \sigma$ pour tout $\chi \in \mathscr{X}_K$.*

Cette proposition est bien connue et se prouve par un jeu d'induction-restriction (*cf.* [Ko 1], p. 266). D'ailleurs un résultat d'un type plus général sera prouvé en 7.7. La partie (*a*) vient de l'égalité $\det \chi\sigma = \chi^n \det \sigma$.

2.3. Soient $n \geqq 1$ et $j \geqq 0$ deux entiers. Rappelons qu'on a noté $C_K(n, j)$ le cardinal $\sum_{d \mid n} \sum_{k \geqq 1,\, kn \leqq dj} \operatorname{Card}(\mathscr{X}_K \diagdown \mathscr{G}_K^{00}(d, k))$.

PROPOSITION 2.3. — *$C_K(n, j)$ est fini.*

D'après [Ko 2] Satz 1, le sous-ensemble $\mathscr{H}_K(d, k)$ de $\mathscr{G}_K^{00}(d, k)$ formé des classes de représentations ρ vérifiant

$$\det \rho(\varpi_K)^{n/d} = 1$$

(elles sont forcément galoisiennes car leur déterminant est d'ordre fini) est fini. Comme pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_K^{00}(d, k)$ il existe un caractère non ramifié χ de $K^\times$ tel que

$$\det \chi\rho(\varpi)^{n/d} = 1 \qquad [cf.\ 2.3(a)],$$

on voit que $\mathscr{X}_K \diagdown \mathscr{G}_K^{00}(d, k)$ au plus autant d'éléments que $\mathscr{H}_K(d, k)$, donc est fini. Cela prouve la proposition.

2.4. Rappelons la conjecture de Langlands locale numérique énoncée par H. Koch ([Ko 2], Vermutung 1) : notons $\mathscr{I}_K(n, j)$ l'union disjointe des $\mathscr{H}_K(d, k)$ quand d parcourt les diviseurs de n, $d \geqq 1$ et k les entiers naturels tels que $kn \leqq dj$; H. Koch conjecture que $\mathscr{I}_K(n, j)$ a pour cardinal $n(q_K - 1) q_K^j$. Soit ρ dans $\mathscr{I}_K(n, j)$ et χ un caractère non ramifié de $K^\times$; alors $\chi\rho$ appartient à $\mathscr{I}_K(n, j)$ si et seulement si $\chi^n = 1$; en ce cas, l'on a $\chi\rho \neq \rho$ (*cf.* prop. 2.2). On en déduit donc que $\operatorname{Card}(\mathscr{I}_K(n, j)) = n\, C_K(n, j)$. Par suite la conjecture de Koch est équivalente à notre théorème 1.3.

2.5. Examinons maintenant les liens entre les théorèmes 1.2 et 1.3.

A tout $\sigma \in \mathscr{A}_K(n)$, on associe son caractère central $\omega_\sigma \in \mathscr{A}_K(1)$. On lui associe également son facteur $\varepsilon(\sigma, \psi_K)$ [GJ], fonction d'une variable complexe de la forme $\alpha . q^{-[n(\psi_K).n + a(\sigma)]s}$ où α appartient à $\mathbf{C}^\times$ et $n(\psi_K)$, l'exposant de ψ_K, ne dépend que de ψ_K.

On note $\mathscr{A}_K^2(n)$ le sous-ensemble de $\mathscr{A}_K(n)$ formé des représentations essentiellement de carré intégrable. D'après Zelevinsky [Ze] elles sont paramétrées biunivoquement par les paires (d, ρ) où d est un diviseur de n et ρ parcourt $\mathscr{A}_K^0(n/d)$. On note $\mathrm{St}_d(\rho)$ la représentation correspondant à (d, ρ). On a

$$\mathrm{St}_1(\rho)=\rho$$
$$\omega_{\mathrm{St}_d(\rho)}=\omega_\rho^d$$
$$a(\mathrm{St}_d(\rho))=da(\rho) \quad \text{si} \quad d\neq 1 \quad \text{ou} \quad d=1, a(\rho)\geqq 1$$
$$a(\mathrm{St}_d(\rho))=n-1 \quad \text{si} \quad d=1, \quad \rho\in\mathscr{X}_K.$$

Pour $\pi\in\mathscr{A}_K^2(n)$, l'exposant de Swan $s(\pi)$ est donné par la formule

$$s(\pi)=\sup(0,\ a(\pi)-n);$$

On a donc dans tous les cas

$$s(\mathrm{St}_d(\rho))=ds(\rho) \qquad \text{pour} \quad \rho\in\mathscr{A}_K^0(n/d).$$

Soit d'autre part D un corps gauche de centre K et de degré réduit n sur K. On note $\mathscr{A}(\mathrm{D})$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations admissibles irréductibles du groupe localement compact $\mathrm{D}^\times$; elles sont de dimension finie. Pour $\sigma\in\mathscr{A}(\mathrm{D})$, on note ω_σ son caractère central, $\varepsilon(\sigma, \psi)$ son facteur ε [GJ]; c'est une fonction d'une variable complexe s de la forme $\alpha.q^{-[n(\psi)n+a(\sigma)]s}$ où α appartient à $\mathbf{C}^\times$ et $a(\sigma)$ est l'exposant du conducteur d'Artin de σ. Si j est le plus petit entier $\geqq 0$ tel que $\sigma(1+\mathrm{P}_\mathrm{D}^j)=1$, où P_D est l'idéal maximal de l'anneau des entiers de D, alors on a $a(\sigma)=j+n-1$ [GJ]. On pose $s(\sigma)=\sup(0,\ a(\sigma)-n)$ et on appelle $s(\sigma)$ l'exposant du conducteur de Swan de σ.

Si $\sigma\in\mathscr{A}(\mathrm{D})$ et $\chi\in\mathscr{A}_K(1)$, on note $\chi\sigma$ la classe de représentations $g\mapsto\chi\circ\mathrm{Nrd}_\mathrm{D}(g)\,\sigma(g)$ où Nrd_D désigne la norme réduite de D; on obtient ainsi une action du groupe $\mathscr{A}_K(1)$ sur $\mathscr{A}(\mathrm{D})$.

2.6. La correspondance de Langlands, établie dans [DKV] et [Ro] quand K est de caractéristique nulle, donne une bijection canonique de $\mathscr{A}_K^2(n)$ sur $\mathscr{A}(\mathrm{D})$, conservant les facteurs ε au signe près, donc conservant les conducteurs, préservant les caractères centraux, et compatible à la torsion par $\mathscr{A}_K(1)$. La représentation triviale de $\mathrm{D}^\times$ correspond à la représentation $\mathrm{St}_n(1)$ dite représentation de Steinberg de $\mathrm{GL}(n, \mathrm{K})$. Remarquons que la correspondance implique que pour $\pi\in\mathscr{A}_K^0(n)$, on a, si $n>1$, $a(\pi)\geqq n$: en effet les seuls éléments σ de $\mathscr{A}_\mathrm{D}$ vérifiant $a(\sigma)=n-1$ sont de la forme $\chi\circ\mathrm{Nrd}_\mathrm{D}$ pour $\chi\in\mathscr{X}_K$ et correspondent donc aux représentations $\mathrm{St}_n(\chi)$ pour $\chi\in\mathscr{A}_K$, qui ne sont pas cuspidales pour $n>1$.

Notons $\mathscr{A}_K^2(n, j, \varpi_K)$ l'ensemble des $\pi\in\mathscr{A}_K^2(n)$ vérifiant $\omega_\pi(\varpi_K)=1$ et $s(\pi)\leqq j$; de même notons $\mathscr{A}_\mathrm{D}(j, \varpi_K)$ l'ensemble des $\sigma\in\mathscr{A}_\mathrm{D}$ vérifiant $\omega_\sigma(\varpi_K)=1$ et $s(\sigma)\leqq j$; c'est un ensemble fini. Si la correspondance de Langlands est prouvée, on a donc

$$|\mathscr{A}_K^2(n, j, \varpi_K)|=|\mathscr{A}_\mathrm{D}(j, \varpi_K)|.$$

En particulier c'est vrai si F est de caractéristique nulle.

2.7. Montrons que ces résultats restent vrais quand F est de caractéristique p. On peut bien sûr pour cela prouver la correspondance de Langlands en caractéristique p ([Ka 1], [Ka 2], [He 9]); mais les détails n'étant pas encore écrits, nous ne voulons pas utiliser cet argument.

Nous remarquons d'abord que $|\mathscr{A}_D(j, \varpi_K)|$ a été calculé par H. Koch [Ko 3]; la réponse ne dépend que de q_K, cardinal du corps résiduel de K, et n. Pour prouver l'égalité pour un corps K de caractéristique p, il suffit de prouver qu'il existe un corps local K′ de même corps résiduel mais de caıactéristique 0, muni d'une uniformisante $\varpi_{K'}$ et tel que

$$|\mathscr{A}_K^2(n, j, \varpi_K| = |\mathscr{A}_{K'}^2(n, j, \varpi_{K'})|.$$

Pour cela nous utilisons l'idée de Kazhdan [Ka 2] et les calculs explicites de R. Howe [Ho 2]. Nous fixons n et notons G le groupe $GL(n, K)$, G′ le groupe $GL(n, K')$, B, B′ leurs sous-groupes d'Iwahori respectifs, munis de leur filtration par des groupes B_e et B'_e. Fixons $l \geqq 1$; d'après R. Howe [Ho 2] les algèbres de Hecke $\mathscr{H}(G, B_{nl})$ et $\mathscr{H}(G', B'_{nl})$ sont isomorphes pourvu que $v_{K'}(p)$ soit assez grand; de plus cet isomorphisme donne une bijection entre les classes de représentations (essentiellement) de carré intégrable de G, ayant un vecteur fixe sous B_{nl}, et les classes de représentations (essentiellement) de carré intégrable de G′ ayant un vecteur fixe sous B'_{nl}; comme l'isomorphisme est obtenu à partir d'une identification de $K^\times/U_K^l$ avec $K'^\times/U_{K'}^l$ envoyant ϖ_K sur $\varpi_{K'}$, on voit que la bijection entre représentations ainsi construite est compatible avec les caractères centraux; en particulier, si π et π' se correspondent, on a $\omega_\pi(\varpi_K) = \omega_{\pi'}(\varpi_{K'})$.

Mais, une représentation essentiellement de carré intégrable de G est générique ([Ze], [Rd]) et par suite elle a un conducteur $\leqq a$ si et seulement si elle possède un vecteur fixe sous un certain sous-groupe compact ouvert K_a de G [JPS 1]. Le même résultat vaut pour G′. Pour $j \geqq 0$ fixé et $a = j + n$, on peut trouver l tel que K_a contienne B_{nl}. Fixons alors K′ comme plus haut, avec $v_{K'}(p)$ assez grand. L'isomorphisme de $\mathscr{H}(G, B_{nl})$ sur $\mathscr{H}(G', B'_{nl})$ transforme la fonction caractéristique de K_a en celle du groupe correspondant pour G′. On obtient donc une bijection de $\mathscr{A}_K^2(n, j, \varpi_K)$ sur $\mathscr{A}_{K'}^2(n, j', \varpi_{K'})$, qui sont donc de même cardinal.

Remarque. — On vérifie facilement que la bijection ainsi construite est compatible à la torsion par les caractères non ramifiés : si $\chi \in \mathscr{X}_K$ vérifie $\chi^n = 1$ et que $\pi \in \mathscr{A}_F^2(n, j, \varpi_K)$ corresponde à $\pi' \in \mathscr{A}_{K'}^2(n, j, \varpi_{K'})$ alors $\chi\pi$ correspond à $\chi'\pi'$, où $\chi' \in \mathscr{X}_{K'}$ est défini par $\chi'(\varpi_{K'}) = \chi(\varpi_K)$.

2.8. Supposons donnée, pour chaque entier d divisant n, une injection φ_d de $\mathscr{G}_K^0(d)$ dans $\mathscr{A}_K^0(d)$ préservant les conducteurs de Swan et compatible à la torsion par les caractères non ramifiés. En modifiant ces injections (sur les orbites de $\mathscr{X}_K$) par torsion par un caractère non ramifié, on peut supposer qu'on a $\omega_{\varphi_d(\sigma)}(\varpi_K) = \det\sigma(\varpi_K)$ pour tout $\sigma \in \mathscr{G}_K^0(d)$. Grâce à la description de $\mathscr{A}_K^2(n)$ donnée en 2.5, on obtient pour tout entier $j \geqq 0$, une injection dans $\mathscr{A}_K^2(n, j, \varpi_K)$ de l'ensemble $\mathscr{G}_K^2(n, j, \varpi_K)$ suivant : c'est l'ensemble des classes de représentations continues complexes σ de $W_{K'}$ irréductibles de dimension d divisant n, de conducteur de Swan k vérifiant $kn \leqq dj$, et de déterminant $\det\sigma$ vérifiant $\det\sigma(\varpi_K)^{n/d} = 1$. Cette injection est compatible à la torsion par les caractères non ramifiés, et l'image de σ comme plus haut a pour conducteur de Swan $(n/d)\,k$.

Supposons que pour j entier naturel fixé, et pour toute extension E de K dans F, non ramifiée et de degré d divisant n, on ait

$$C_E(d, [j/d]) = (q_K^d - 1)\, q_K^{d[j/d]},$$

(où [ ] désigne la partie entière). Alors il découle des calculs de [Ko 2] et [Ko 3] qu'on a

$$|\mathscr{G}_K^2(n, j, \varpi_K)| = |\mathscr{A}_D(j, \varpi_K)|$$

d'où

$$|\mathscr{G}_K^2(n, j, \varpi_K)| = |\mathscr{A}_K^2(n, j, \varpi_K)|$$

par les considérations de 2.7. Par suite l'injection de $\mathscr{G}_K^2(n, j, \varpi_K)$ dans $\mathscr{A}_K^2(n, j, \varpi_K)$ obtenue à partir des φ_d est bijective pour tout j. Il s'ensuit aussitôt que chaque φ_d est bijective également. En ce sens le théorème 1.3 implique le théorème 1.2. Nous construirons aux chapitres 7 et 8 les injections φ_d nécessaires pour appliquer cette démonstration.

Remarque. — Inversement, si l'on sait que les φ_d sont des bijections pour tout diviseur d de n, on peut raisonner en sens inverse et en déduire le théorème 1.3. En effet, on obtient alors pour tout entier $j \geqq 0$ une bijection entre $\mathscr{G}_K^2(n, j, \varpi_K)$ et $\mathscr{A}_D(j, \varpi_K)$, bijection compatible avec la torsion par les caractères non ramifiés (*cf.* rem. 2.7 pour le cas de caractéristique non nulle, qui ne nous servira pas dans la suite). Par 2.3 et 2.4 de [KZ], on a donc alors $C_K(n, j) = (q_K - 1)\, q_K^j$ pour tout $j \geqq 0$. En ce sens le théorème 1.2 implique le théorème 1.3.

3. Réduction du problème

3.1. Dans ce chapitre nous présentons des arguments de réduction pour la preuve du théorème 1.3. Nous avons vu en 2.4 que le théorème 1.3 est équivalent à la conjecture numérique de H. Koch. Il suit alors de [Ko 2] que si r est un entier $r \geqq 0$ et si le théorème 1.3 est vrai pour $n = p^r$ et toute extension modérée E de K dans $\bar{F}$, finie et totalement ramifiée, alors il est également vrai pour K et $n = mp^r$, où m est n'importe quel entier premier à p.

Dans la suite, nous raisonnerons par récurrence sur la valuation p-adique r de n. Nous supposerons donc le théorème 1.3 vrai pour toute extension finie E de K dans $\bar{F}$, pour tout entier $n \geqq 1$ tel que $v_p(n) < r$, et pour tout entier j, et il nous suffira de le prouver pour tout K, pour $n = p^r$, et pour tout j.

Si $n = 1$, $C_K(1, j)$ est le nombre de caractères de $K^\times$ triviaux sur U_K^{j+1} modulo les caractères non ramifiés et par suite $C_K(1, j) = (q_K - 1)\, q_K^j$ comme attendu. Cela prouve le théorème 1.3 quand n est premier à p.

Remarques 1. — Dans le cas où n est premier à p, il découle des travaux de R. Howe et A. Moy ([Ho 1], [Mo]) qu'on peut construire des injections $\mathscr{G}_K^0(n) \to \mathscr{A}_K^0(n)$ comme dans le théorème 1.2, et il suit de la correspondance de Langlands avec les représentations de groupes multiplicatifs de corps gauches (*voir* plus haut) que ces injections sont bijectives. En ce cas les théorèmes 1.2 et 1.3 découlent donc des travaux de Howe et Moy.

2. Dans le cas où $n=p$, le théorème 1.3 a été prouvé par H. Koch ([Ko 1], [Ko 2]). Cependant nous n'utiliserons pas ce fait. Des bijections $\mathscr{G}_K^0(n) \to \mathscr{A}_K^0(n)$ comme dans le théorème 1.2 ont été construites par Kutzko-Moy et l'auteur ([Ku M], [He 5], [He 6]). Les cas $n=2$ et $n=3$ avaient auparavant été traités par Kutzko [Ku] et l'auteur [He 3] respectivement.

3.2. Si $j=0$, $C_K(n, 0)$ est le nombre de caractères modérés de W_F, modulo les caractères non ramifiés : en effet, une représentation irréductible σ de W_K de conducteur de Swan nul est modérée, donc induite par un caractère du groupe de Weil d'une extension non ramifiée de K; sa restriction à I_K ne peut donc être irréductible que si sa dimension vaut 1. On a donc $C_K(n, 0)=q_K-1$, comme attendu. On pourra donc, outre la récurrence sur $r=v_p(n)$, raisonner par récurrence sur j.

3.3. La proposition suivante est pour l'essentiel due à E.-W. Zink ([Zi], 2.3.5); nous présentons ici une preuve différente, avec une précision supplémentaire.

Proposition 3.3. — *Soit σ une représentation continue complexe de W_K, de degré une puissance de p, dont la restriction à I_K soit irréductible. Supposons que le conducteur de Swan $s(\sigma)$ de σ soit non nul et divisible par la dimension p^r de σ.*

Posons $s(\sigma)=n\lambda(\sigma)$. Alors il existe un unique caractère η de $U_K^{\lambda(\sigma)}$ tel que $\chi \in \mathscr{A}_K(1)$ vérifie $s(\chi\sigma) < s(\sigma)$ si et seulement si χ prolonge η.

On peut supposer $r > 1$, la proposition étant claire si σ est un caractère.

Comme la restriction de σ à I_K est irréductible et que le degré de σ est p^r, la restriction de σ au groupe de ramification sauvage P_K est irréductible : si cette restriction était réductible, alors la restriction de σ à I_K serait induite à partir d'un sous-groupe propre d'indice premier à p, ce qui est impossible. Par suite σ est sauvage et homogène au sens de [He 4]. On peut donc, comme en [He 4], associer à σ (et au choix de ψ_K) un élément g_σ de $C_K \otimes \mathbf{Z}[1/p]$ où $C_K=K^\times/U_K^1$. Notant encore v_K la valuation de $C_K \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}[1/p]$ obtenue à partir de la valuation normalisée v_K de K, on a

$$v_K(g_\sigma)=-n(\psi_K)-1-\lambda(\sigma)$$

où $\lambda(\sigma)$ est la pente de σ [*cf.* 2.1].

Si p^r divise $s(\sigma)$ alors $\lambda(\sigma)$, qui est égal à $s(\sigma)/p^r$, est un entier, et g_σ appartient au sous-ensemble C_K de $C_K \otimes \mathbf{Z}[1/p]$.

Pour prouver la proposition, on peut supposer σ galoisienne. Soit E le corps fixé par $\operatorname{Ker}(\sigma).W_K^{\lambda(\sigma)}$; c'est une extension finie galoisienne de K et la restriction de σ à W_E est isotypique, de type $\tilde{\eta} \circ \tau_E$, pour un caractère $\tilde{\eta}$ de $E^\times$. Sur $U_E^{s(\tilde{\eta})}$, ce caractère non trivial est donné par

$$\tilde{\eta}(1+x)=\psi_E(gx)=\psi_K(g\operatorname{Tr}_{E/K}x)$$

pour tout représentant g de g_σ dans $K^\times$ ([He 4], §4). Le caractère $\eta : 1+x \mapsto \psi_K(-gx)$ de $U_K^{\lambda(\sigma)}$ est non trivial, trivial sur $U_K^{\lambda(\sigma)+1}$. Si χ est un prolongement à $K^\times$ de ce caractère, on a

$$\chi \circ N_{E/K}(1+x) = \psi(-g \, . \, \mathrm{Tr}_{E/K}\, x)$$

pour $x \in P_E^{s(\eta)}$: en effet, K est fixé par $W_K^{\lambda(\sigma)}$ donc, si $\lambda(E/K)$ est la borne inférieure des nombres réels $\lambda \geqq 0$ tels que W_E contienne W_K^λ, on a $\lambda(E/K) < \lambda(\sigma) = s(\chi)$; on raisonne alors exactement comme dans [He 2, lemma 2]. Par conséquent $(\chi \circ N_{E/K}) \, . \, \eta$ est trivial sur $U_E^{s(\eta)}$ et par suite $\chi\sigma$ est trivial sur $W_K^{\lambda(\sigma)}$; on a donc bien

$$s(\chi\sigma) < s(\sigma).$$

Inversement, si $\chi \in \mathscr{A}_K(1)$ est tel que $s(\chi\sigma) < s(\sigma)$, alors $\chi\sigma$ est trivial sur $W_K^{\lambda(\sigma)}$ et on en déduit que $\chi\eta^{-1}$ est trivial sur $U_K^{\lambda(\sigma)}$, *i. e.* que χ prolonge η.

Cela prouve la proposition.

Remarque. — Tout caractère $\chi \in \mathscr{A}_K(1)$ vérifiant $s(\chi\sigma) < s(\sigma)$ a pour conducteur de Swan $\lambda(\sigma)$.

3.4. Remarquons qu'inversement, si λ est un entier $\geqq 1$ et si $\sigma \in \mathscr{G}_K(p^r)$ a une restriction à I_K irréductible et vérifie $s(\sigma) < p^r \lambda$, alors pour tout caractère χ d'exposant de Swan λ, on a $s(\chi\sigma) = p^r \lambda$ ([He 1], § 3).

Notons $\chi_1, \ldots, \chi_{q_K}$ un système de représentants des caractères de $K^\times$ d'exposant de Swan $\leqq \lambda$, modulo ceux d'exposant $\leqq \lambda - 1$, avec $\chi_1 = 1$. On obtient des injections

$$\varphi_i : \quad \sigma \mapsto \chi_i \sigma, \qquad i = 2, \ldots, q_K - 1, q_K$$

de $\coprod_{j=0}^{\lambda p^r - 1} \mathscr{G}_K^0(p^r, j)$ dans $\mathscr{G}_K^0(p^r, \lambda p^r)$. Ces injections sont compatibles à la torsion par les caractères non ramifiés, et en particulier les classes de représentations dont la restriction à I_K est irréductible se correspondent. Les images de ces injections forment une partition de $\mathscr{G}_K^0(p^r, \lambda p^r)$ d'après la proposition 3.3, et par suite il y a dans $\mathscr{G}_K^0(p^r, \lambda p^r)$ $(q_K - 1)$-fois autant d'orbites sous $\mathscr{X}_K$ que dans $\coprod_{j=0}^{\lambda p^r - 1} \mathscr{G}_K^0(p^r, j)$, et de même pour les classes de représentations dont la restriction à I_K est irréductible. Reprenant ce raisonnement pour chaque diviseur p^α de p^r on obtient donc, d'après la définition de $C_K(p^r, j)$, l'égalité

$$C_K(p^r, \lambda p^r) = q_K \, C_K(p^r, \lambda p^r - 1)$$

c'est-à-dire le corollaire 1.4.

4. Le cas de caractéristique non nulle

4.1. Dans ce chapitre nous voulons prouver le théorème 1.3 quand K est de caractéristique p. Choisissons un nombre premier l distinct de p, et une clôture algébrique $\bar{\mathbf{Q}}_l$ du corps $\mathbf{Q}_l$ des nombres l-adiques. Une *représentation l-adique* de G_K sera pour nous un morphisme continu σ de G_K dans $GL(V)$, où V est un espace vectoriel de dimension finie sur $\bar{\mathbf{Q}}_l$, où $\mathrm{GL}(V)$ est muni de la topologie l-adique, et où σ est définie sur une extension finie de $\mathbf{Q}_l$ dans $\bar{\mathbf{Q}}_l$. Les représentations l-adiques de G_K forment une catégorie, artinienne et noethérienne, notée $\mathscr{G}^l_K$. A chaque représentation l-adique σ de G_K on peut attacher sa dimension $n(\sigma)$, son exposant d'Artin $a(\sigma)$, son exposant de Swan $s(\sigma)$, sa pente $\lambda(\sigma)=\inf\{\lambda \geqq 0, \sigma(G^\lambda_F)=1\}$, son déterminant $\det\sigma$, un caractère l-adique de $K^\times$. Comme pour les représentations complexes, le groupe des caractères l-adiques de $K^\times$ agit sur $\mathscr{G}^l_K$, par torsion.

Comme en 2.3, on montre que la restriction de $\sigma \in \mathrm{ob}(\mathscr{G}^l_K)$ à I_K est irréductible si et seulement si σ n'est équivalente à $\chi\sigma$ pour aucun caractère l-adique non ramifié χ de $K^\times$. De la structure des représentations l-adiques ([De 1], [Ta]), on tire que si la restriction de σ à I_K est irréductible, alors $\sigma(I_K)$ est fini, et qu'il existe un caractère l-adique non ramifié χ de $K^\times$ tel que $\chi\sigma(G_K)$ soit fini. Pour un tel σ, on a $s(\sigma)=n(\sigma)\lambda(\sigma)$.

4.2. Tout homomorphisme de G_F dans $\mathrm{GL}_n(\bar{\mathbf{Q}}_l)$, d'image finie, est continu et défini sur une extension finie de $\mathbf{Q}$ dans $\bar{\mathbf{Q}}_l$. De même tout homomorphisme de G_F dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$, d'image finie, est continu et défini sur une extension finie de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{C}$. Choisissant un isomorphisme entre la clôture algébrique de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{C}$ et la clôture algébrique de $\mathbf{Q}$ dans $\bar{\mathbf{Q}}_l$, on obtient une bijection entre les classes d'équivalence de représentations complexes de dimension finie et d'image finie de G_F et les classes d'équivalence de représentations l-adiques d'image finie de G_F. Cette bijection préserve la dimension, les conducteurs et est compatible au produit tensoriel et aux déterminants; comme les caractères complexes (non ramifiés) d'ordre fini correspondent aux caractères l-adiques (non ramifiés) d'ordre fini, cette bijection est compatible à la torsion par les caractères (non ramifiés) d'ordre fini; en particulier, on obtient une bijection entre les ensembles d'orbites sous le groupe des caractères non ramifiés d'ordre fini. On en déduit donc que $C_K(n, j)$ est le nombre d'orbites du groupe des caractères non ramifiés l-adiques de $K^\times$, dans l'ensemble des classes d'équivalence de représentations l-adiques de G_K de dimension d (divisant n), dont la restriction à I_F est irréductible et dont l'exposant de Swan vaut au plus dj/n. Nous notons $\bar{\mathscr{G}}^{l,0}_K(n, s)$ l'ensemble des orbites du groupe des caractères l-adiques non ramifiés de $K^\times$ dans l'ensemble des classes d'équivalence de représentations l-adiques de G_K de dimension d, dont la restriction à I_F est irréductible et le conducteur de Swan *exactement* s.

4.3. Supposons maintenant que K est de caractéristique p, et fixons un caractère additif non trivial $\bar{\Psi}$ du corps résiduel de K dans $\bar{\mathbf{Q}}_l^\times$. Nous supposons toujours fixée une uniformisante ϖ_K de K.

Notons $\mathscr{F}$ la transformée $\mathscr{F}^{(0,\infty')}_{\bar{\Psi}}$ de Laumon ([Lm], 2.4.2.3), avec $K=K'$ et pour les uniformisantes ϖ_K et $\varpi_{K'}=\varpi_K$]. D'après [Lm], Thm. 2.4.3 *c*, c'est une équivalence de catégories de $\mathscr{G}^l_K$ sur la sous-catégorie pleine de $\mathscr{G}^l_K$ formée des représentations de pente < 1. Pour $\sigma \in \mathrm{ob}\,\mathscr{G}^l_K$, on a

$$s(\mathscr{F}(\sigma))=s(\sigma)$$
$$n(\mathscr{F}(\sigma))=n(\sigma)+s(\sigma).$$

De plus, de l'origine géométrique de $\mathscr{F}$, il est clair que $\mathscr{F}$ est compatible à la torsion par les caractères l-adiques *non ramifiés* de $K^\times$ (*cf.* [Lm] 2.5.2 et 3.6.3).

Pour tout entier $d \geqq 1$ et tout entier $s \geqq 0$, on a donc une bijection entre $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}^{l,0}(d, s)$ et $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}^{l,0}(d+s, s)$.

PROPOSITION 4.3 (K de caractéristique p). — *Soit $n=p^r$, $r \geqq 0$ et $j \geqq 1$, j non multiple de n.*

Alors on a $\mathrm{C}_{\mathrm{K}}(n, j)-\mathrm{C}_{\mathrm{K}}(n, j-1)=\mathrm{C}_{\mathrm{K}}(n+j, j)-\mathrm{C}_{\mathrm{K}}(n+j, j-1)$.

En effet, posons $j=p^s k$ avec k premier à p; on a donc $s < r$. Alors on a

$$\mathrm{C}_{\mathrm{K}}(n, j)-\mathrm{C}_{\mathrm{K}}(n, j-1)=\sum_{\alpha=0}^{s} \left|\mathscr{G}_{\mathrm{K}}^{l,0}(p^{r-\alpha}, p^{s-\alpha} k)\right|.$$

En effet $\mathrm{C}_{\mathrm{K}}(n, j)-\mathrm{C}_{\mathrm{K}}(n, j-1)$ compte, modulo action des caractères non ramifiés, les classes de représentations de G_{F} de degré $p^{r-\alpha}$ divisant n dont la restriction à I_{F} est irréductible, et dont l'exposant de Swan vaut exactement $p^{-\alpha} j$; par suite α ne peut varier qu'entre 0 et s. Par ce qui précède cette dernière somme vaut aussi

$$\sum_{\alpha=0}^{s} \left|\mathscr{G}_{\mathrm{K}}^{l,0}(p^{s-\alpha}(k+p^{r-s}), p^{s-\alpha} k)\right|.$$

Mais ceci n'est autre que

$$\mathrm{C}_{\mathrm{K}}(n+j, j)-\mathrm{C}_{\mathrm{K}}(n+j, j-1);$$

en effet cette expression compte, modulo les caractères non ramifiés, les classes de représentations de degré d divisant $n+j$, dont la restriction à I_{F} est irréductible et le conducteur de Swan exactement $dj/(n+j)$. Pour qu'il y ait de telles représentations il est nécessaire et suffisant que $(n+j)/d$ divise à la fois $n+j$ et j *i.e.* soit de la forme p^α, $0 \leqq \alpha \leqq s$, et alors on a $d=p^{s-\alpha}(k+p^{r-s})$ et $dj/(n+j)=p^{s-\alpha} k$.

4.4. Nous pouvons maintenant prouver le théorème 1.3.

THÉORÈME. — *Supposons* K *de caractéristique p. Alors on a, pour tout $n \geqq 1$ et $j \geqq 0$*

$$\mathrm{C}_{\mathrm{K}}(n, j)=(q_{\mathrm{K}}-1)\, q_{\mathrm{K}}^{j}.$$

Raisonnant par récurrence sur $r=v_p(n)$, puis sur j, nous avons vu plus haut qu'on pouvait supposer $n=p^r$, $j \geqq 1$, $v_p(j) < r$. D'après la proposition précédente on a

$$\mathrm{C}_{\mathrm{K}}(n, j)=\mathrm{C}_{\mathrm{K}}(n, j-1)+\mathrm{C}_{\mathrm{K}}(n+j, j)-\mathrm{C}_{\mathrm{K}}(n+j, j-1).$$

Comme $v_p(n+j)=v_p(j) < r$, on a par l'hypothèse de récurrence

$$\mathrm{C}_{\mathrm{K}}(n+j, j)=(q_{\mathrm{K}}-1)\, q_{\mathrm{K}}^{j}$$
$$\mathrm{C}_{\mathrm{K}}(n+j, j-1)=(q_{\mathrm{K}}-1)\, q_{\mathrm{K}}^{j-1}$$
$$\mathrm{C}_{\mathrm{K}}(n, j-1)=(q_{\mathrm{K}}-1)\, q_{\mathrm{K}}^{j-1}$$

d'où le résultat.

Remarque. — Il découle de 2.8 et 2.9 que le théorème 1.2 sera également démontré lorsque K est de caractéristique p, dès que nous aurons prouvé l'existence d'injections φ_K comme dans l'énoncé du théorème. Cela sera fait plus loin (§ 8).

5. Comparaison de corps locaux de même corps résiduel

5.1. Nous supposons maintenant, et jusqu'à la fin du paragraphe 7, que F est de caractéristique nulle. Nous utilisons alors, comme mentionné en 1.6, l'idée due à Kazhdan de comparer les corps locaux de caractéristique p et ceux de caractéristique nulle.

Nous continuons de noter e_K, ou simplement e, l'indice de ramification absolu $v_K(p)$ de K. Soit K′ un corps local de caractéristique p et de même corps résiduel que K. Choisissons un isomorphisme

$$(\bigstar) \qquad K^\times/U_K^e \simeq K'^\times/U_{K'}^e$$

préservant la ramification. Alors d'après [De 2], il détermine (à automorphismes intérieurs près) un isomorphisme

$$(\bigstar\bigstar) \qquad G_K/G_K^e \simeq G_{K'}/G_{K'}^e$$

préservant la filtration par les groupes de ramification : pour tout nombre réel λ, $\lambda \leqq e$, l'isomorphisme transforme G_K^λ/G_K^e en $G_{K'}^\lambda/G_{K'}^e$.

Soient n un entier, $n \geqq 1$, et j un entier vérifiant

$$0 \leqq j < ne.$$

Comme l'isomorphisme $(\bigstar\bigstar)$ préserve la ramification, il induit une bijection entre les éléments de $\mathscr{G}_K^0(n)$ de conducteur de Swan j et ceux de $\mathscr{G}_{K'}^0(n)$ de conducteur de Swan j. Cette bijection est compatible avec la torsion par les caractères non ramifiés au sens où, ϖ_K étant une uniformisante fixée de K et $\varpi_{K'}$ son image par $(\bigstar)$, la torsion par $\chi \in \mathscr{X}_K$ correspond à la torsion par le caractère $\chi' \in \mathscr{X}_{K'}$ défini par $\chi'(\varpi_{K'}) = \chi(\varpi_K)$. On obtient donc une bijection entre $\mathscr{G}_K^{00}(n, j)$ et $\mathscr{G}_{K'}^{00}(n, j)$, compatible à l'action des caractères non ramifiés.

On en déduit donc qu'on a

$$C_K(n, j) = (q_K - 1)\, q_K^j.$$

De même, pour toute extension non ramifiée E de K de degré d, divisant n, on a

$$C_E(d, [nj/d]) = (q_K^d - 1)\, q_K^{[nj/d]}.$$

Par le raisonnement de 2.8 on en déduit le résultat suivant (*cf.* proposition 1.6).

PROPOSITION. — *Soit φ_K une injection de $\mathscr{G}_K^0(n)$ dans $\mathscr{A}_K^0(n)$ qui soit compatible à la torsion par $\mathscr{X}_K$ et préserve les conducteurs. Alors tout élément π de $\mathscr{A}_K^0(n)$ vérifiant $s(\pi) < ne_K$ est dans l'image de φ_K.*

5.2. Supposons donnée, pour chaque entier $r \leqq n$, une application φ_r^0 de $\mathscr{G}_K^0(r)$ dans $\mathscr{A}_K^0(r)$ compatible à la torsion par $\mathscr{X}_K$ et préservant les conducteurs. Comme expliqué dans [Ze], § 10, *cf.* aussi [Rd], on peut alors étendre les φ_r^0 en des applications φ_r de $\mathscr{G}_K(r)$ dans $\mathscr{A}_K(r)$, pour $r \leqq n$, qui sont compatibles à la torsion par $\mathscr{X}_K$ et préservent les conducteurs. La construction est la suivante. Pour $\sigma \in \mathscr{G}_K^0(r)$ et d entier $d \geqq 1$, on pose

$$\varphi_{dr}(\sigma \otimes sp(d)) = \mathrm{S}\,t_d(\varphi_r^0(\sigma)),$$

où $sp(d)$ désigne la classe de représentations continues irréductibles de degré d de $\mathrm{SU}(2, \mathbf{C})$. Pour $\sigma_1 \in \mathscr{G}_K(r_1), \ldots, \sigma_k \in \mathscr{G}_K(r_k)$, irréductibles et dont les déterminants ont la même valeur absolue, on pose

$$\varphi_r(\sigma_1 \oplus \ldots \oplus \sigma_k) = \varphi_{r_1}(\sigma_1) \square \ldots \square \varphi_{r_k}(\sigma_k),$$

où $\square$ désigne l'induction parabolique et où $r = r_1 + \ldots + r_k$; on obtient ainsi au second membre une classe de représentations irréductibles essentiellement tempérées. Enfin si σ est un élément quelconque de $\mathscr{G}_K(r)$, on peut écrire $\sigma = \sigma_1 \oplus \ldots \oplus \sigma_k$ où $\sigma_i \in \mathscr{G}_K(r_i)$ est somme de représentations irréductibles dont les déterminants ont la même valeur absolue χ_i, les χ_i vérifiant en outre $\chi_1 > \chi_2 \ldots > \chi_r$; alors $\varphi_r(\sigma)$ est le quotient de Langlands de la représentation induite $\varphi_{r_1}(\sigma_1) \square \ldots \square \varphi_{r_k}(\sigma_k)$. Il est immédiat que si les φ_r^0 sont injectives les φ_r le sont aussi. Si de plus les φ_r^0 sont bijectives, les φ_r le sont également.

Pour $\pi \in \mathscr{A}_K(r)$, on pose

$$\lambda(\pi) = \sup\{\lambda(\rho) \mid \rho \in \text{support cuspidal de } \pi\} \quad [\mathrm{Rd}]$$

On dit que $\lambda(\pi)$ est la pente de π. On a alors la généralisation suivante de la proposition : les applications φ_r, pour $r \leqq n$ préservent λ et tout élément π de $\mathscr{A}_K(r)$ vérifiant $\lambda(\pi) < e_K$ est dans l'image de φ_r.

6. Utilisation du changement de base

6.1. Comme F est de caractéristique nulle, on dispose de la théorie du changement de base pour $\mathrm{GL}(n)$ due à Arthur et Clozel [AC]. Fixons une extension cyclique L/K de corps locaux de caractéristique nulle. Alors on définit [AC I 6.4] une application

$$\mathrm{Ch}_{L/K}: \quad \mathscr{A}_K(n) \to \mathscr{A}_L(n).$$

Cette application possède un grand nombre de propriétés analogues à celles de la restriction

$$\mathrm{Res}_{L/K}: \quad \mathscr{G}_K(n) \to \mathscr{G}_L(n) \qquad (cf.\ 1.7).$$

On a

(1) $$\mathrm{Ch}_{L/K}(\chi\pi) = (\chi \circ \mathrm{N}_{L/K})\,\mathrm{Ch}_{L/K}(\pi) \qquad \text{pour} \quad \chi \in \mathscr{A}_K(1)$$

([AC I], prop. 6.8 et commentaires subséquents)

(2) $$\omega_{\mathrm{Ch}_{L/K}(\pi)} = \omega_\pi \circ N_{L/K} \quad \text{[AC Thm. 6.2]}$$

(3) $$\mathrm{Ch}_{L/K}(\pi^\vee) = \mathrm{Ch}_{L/K}(\pi)^\vee$$

où $^\vee$ désigne les contragrédientes ([AC] I prop. 6.8)

(4) $$\varepsilon(\mathrm{Ch}_{L/K}(\pi), \psi_L) = \varepsilon(\mathrm{Ind}_K^L 1_K, \psi_K)^{-n} \prod_\eta \varepsilon(\eta\pi, \psi_K)$$

où 1_K désigne le caractère trivial de W_K, et où η parcourt le groupe Ξ des caractères de $K^\times$ triviaux sur $N_{L/K} L^\times$ ([AC I] prop. 6.9). On en déduit

(5) $$f_{L/K}\, s(\mathrm{Ch}_{L/K}(\pi)) = -f_{L/K}\, c_{L/K}\, n + \sum_{\eta \in \Xi} s(\eta\pi)$$

où $f_{L/K}$ est le degré d'inertie de L sur K, $c_{L/K}$ la partie sauvage de l'exposant différental de L sur K.

(6) Pour $\pi \in \mathscr{A}_K(n)$ et $\tau \in \mathscr{A}_K(m)$, on a ([AC I], prop. 6.9)

$$L(s, \mathrm{Ch}_{L/K}(\pi) \times \mathrm{Ch}_{L/K}(\tau)) = \prod_{\eta \in \Xi} L(s, \eta\pi \times \tau)$$

où les fonctions L de paires sont celles de [JPS 2].

(7) L'image de $\mathrm{Ch}_{L/K}$ est formée des éléments de $\mathscr{A}_L(n)$ invariants par Gal (L/K) ([AC I], Thm. 6.2 et prop. 6.8). Enfin on prouve l'extension suivante de ([AC I], Thm. 6.2 *e*) par une démonstration analogue.

(8) Si L et K sont des extensions finies de F dans $\bar{F}$ et $\tau \in G_F$

$$\mathrm{Ch}_{L^\tau/K^\tau}(\pi^\tau) = (\mathrm{Ch}_{L/K}(\pi))^\tau \quad \text{pour tout } \pi \in \mathscr{A}_K(n).$$

6.2. Nous aurons besoin de la description de l'image de $\mathscr{A}_K^0(n)$ par $\mathrm{Ch}_{L/K}$ et des fibres de la restriction de $\mathrm{Ch}_{L/K}$ à $\mathscr{A}_K^0(n)$.

Rappelons la notion de représentation dans la série discrète, ou en abrégé *discrète* : ce sont les éléments π de $\mathscr{A}_K^2(n)$ qui sont de carré intégrable *i. e.* dont le caractère central est unitaire. On définit de même la notion de représentation *σ-discrète* de $\mathscr{A}_L(n)$ ([AC I], § 2.3). On dispose de la description suivante des éléments σ-discrets de $\mathscr{A}_L(n)$ [AC I lemme 2.8]. Ici σ est un générateur fixé de Gal (L/K). La notion ne dépend pas en fait du choix de σ et, posant G = Gal (L/K), on pourra parler de représentation G-discrète.

LEMME. — *Soit $\Pi \notin \mathscr{A}_L(n)$, G-discrète. Alors il existe un diviseur m de n et $\Pi_1 \in \mathscr{A}_L(m)$ discrète, telle que pour $r = n/m$ on ait $\Pi_1^{\sigma^r} = \Pi_1$ mais $\Pi_1^{\sigma^i} \neq \Pi_1$ pour $1 \leqq i \leqq r-1$, et que Π soit obtenue, par induction parabolique, à partir de la représentation $\Pi_1 \otimes \Pi_1^\sigma \otimes \ldots \otimes \Pi_1^{\sigma^{r-1}}$ d'un sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique de type $(m, \ldots, m)$ de GL (n, L). Inversement toute telle représentation est G-discrète.*

Dans la situation précédente, nous noterons en abrégé, comme en 5.2,

$$\Pi=\Pi_1 \boxplus \Pi_1^\sigma \boxplus \ldots \boxplus \Pi_1^{\sigma^{r-1}} = \mathop{\boxplus}_{i=0}^{r-1} \Pi_1^{\sigma^i}.$$

Nous savons ([AC I], 6.3) que si $\pi\in\mathscr{A}_K(n)$ est discrète alors $\mathrm{Ch}_{L/K}(\pi)$ est G-discrète, et que si $\Pi\in\mathscr{A}_L(n)$ est stable sous G et G-discrète, alors il existe $\pi\in\mathscr{A}_K(n)$, discrète, telle que $\Pi=\mathrm{Ch}_{L/K}(\pi)$; de plus, tout $\pi\in\mathscr{A}_K(n)$ tel que $\Pi=\mathrm{Ch}_{L/K}(\pi)$ est discret.

Nous dirons que $\Pi\in\mathscr{A}_L(n)$, stable sous G, est *essentiellement G-discrète* s'il existe un caractère non ramifié χ de $L^\times$ tel que $\chi\pi$ soit G-discrète. Nous avons alors :

PROPOSITION. — *L'image de* $\mathscr{A}_K^2(n)$ *par* $\mathrm{Ch}_{L/K}$ *est l'ensemble des éléments stables sous* G *essentiellement* G-*discrets de* $\mathscr{A}_L(n)$. *Si* Π *est un tel élément de* $\mathscr{A}_L(n)$, *tout* $\pi\in\mathscr{A}_K(n)$ *tel que* $\mathrm{Ch}_{L/K}(\pi)=\Pi$ *appartient à* $\mathscr{A}_K^2(n)$.

6.3. Comme signalé en 2.5, pour tout $\pi\in\mathscr{A}_K^2(n)$ il existe un (unique) diviseur d de n et un (unique) élément ρ de $\mathscr{A}_K^0(n/d)$ tels que $\pi=\mathrm{St}_d(\rho)$. De même, soit $\Pi\in\mathscr{A}_L(n)$ stable sous G et essentiellement G-discrète. Alors on peut comme plus haut écrire

$$\Pi=\Pi_1 \boxplus \Pi_1^\sigma \boxplus \ldots \boxplus \Pi_1^{\sigma^{r-1}}$$

où $\Pi_1\in\mathscr{A}_L^2(n/r)$ est uniquement déterminée par Π. Le stabilisateur de Π_1 dans Gal(L/K) est d'indice r dans Gal(L/K). Si on a $\Pi_1=\mathrm{St}_d(\mathrm{T}_1)$ pour un élément T_1 de $\mathscr{A}_L^0(n/d)$ alors le stabilisateur de T_1 dans Gal(L/K) est le même que celui de Π_1 et l'on peut former $\mathrm{T}=\mathrm{T}_1 \boxplus \mathrm{T}_1^\sigma \boxplus \ldots \boxplus \mathrm{T}_1^{\sigma^{r-1}}$ qui est stable sous G et essentiellement G-discrète. Par abus de notation, on notera alors $\Pi=\mathrm{St}_d(\mathrm{T})$. Les éléments de la forme de T seront appelés G-cuspidaux. On a donc

PROPOSITION. — *Soit* $\Pi\in\mathscr{A}_L(n)$ *stable sous* G *et essentiellement* G-*discrète. Alors il existe un unique diviseur* d *de* n *et un unique élément* T *de* $\mathscr{A}_L(n/d)$, *stable sous* G *et* G-*cuspidal, tel que* $\Pi=\mathrm{St}_d(\mathrm{T})$.

6.4. PROPOSITION. — *Soit* $\pi\in\mathscr{A}_K^0(n)$ *et soit* d *un entier*, $d\geqq 1$. *Soit* r *l'indice dans* Ξ *du stabilisateur de* π. *Soit* $\Pi=\mathrm{Ch}_{L/K}(\pi)$.

(i) *Alors* r *divise* n; *de plus* Π *est* G-*cuspidal et* $\Pi=\Pi_1 \boxplus \ldots \boxplus \Pi_1^{\sigma^{r-1}}$ *où* $\Pi_1\in\mathscr{A}_K^0(n/r)$ *a un stabilisateur d'indice* r *dans* Gal(L/K).

(ii) $\mathrm{Ch}_{L/K}(\mathrm{St}_d(\pi))=\mathrm{St}_d(\Pi)$.

(iii) *Si* $\pi'\in\mathscr{A}_K(n)$ *est tel que* $\mathrm{Ch}_{L/K}(\pi')=\mathrm{St}_d(\Pi)$, *alors* $\pi'=\eta\,\mathrm{St}_d(\pi)$ *pour un* $\eta\in\Xi$. *Il y a* [L : K]/r *possibilités distinctes pour* π'.

(iv) *Inversement si* $\mathrm{T}\in\mathscr{A}_L(n)$ *est* G-*stable et* G-*cuspidal il existe* $\pi\in\mathscr{A}_K^0(n)$ *tel que* $\mathrm{T}=\mathrm{Ch}_{L/K}(\pi)$.

Pour la démonstration, on pourrait utiliser la proposition 6.6 de [AC I] et développer les brefs commentaires qui la suivent (le principe d'une telle démonstration est bien connu des experts). Mais la preuve de cette proposition utilise des résultats du chapitre III de [AC], reposant sur la formule des traces globales. Nous ne voulons pas utiliser ces résultats à ce point et donnons ici une autre démonstration basée sur la propriété (6) du changement de base [6.1] et les renseignements donnés par [JPS 2] sur les facteurs L locaux de paires.

Prouvons cette proposition par récurrence sur l'entier $n \geqq 1$.

Soit $\pi \in \mathscr{A}_K^0(n)$ et $\Pi = \mathrm{Ch}_{L/K}(\pi)$; écrivons $\Pi = \mathrm{St}_d(T)$ avec T G-cuspidal : c'est possible grâce aux propositions 6.3 et 6.4. Supposons $d > 1$. Par l'hypothèse de récurrence, on peut supposer que $T = \mathrm{Ch}_{L/K}(\tau)$ où $\tau \in \mathscr{A}_K^0(n/d)$. On a alors

$$L(T^\vee \times \Pi) = \prod_{\eta \in \Xi} L(\tau^\vee \times \eta\pi).$$

Par [JPS 2] le second membre vaut 1, puisque $n \neq n/d$. Cependant, écrivant $T = \Pi_1 \boxplus \ldots \boxplus \Pi_\alpha$, avec $\Pi_i \in \mathscr{A}_K^0(n/d\alpha)$, on a $L(T^\vee \times \Pi) = \prod_{i,j=1}^{\alpha} L(\Pi_i^\vee \times \mathrm{St}_d(\Pi_j))$ qui n'est pas identiquement 1. Cette contradiction prouve qu'on a $d=1$ et que Π est G-cuspidal.

On a

$$L(\Pi^\vee \times \Pi) = \prod_{i,\ j=1}^{\alpha} L(\Pi_i^\vee \times \Pi_j)$$

et comme $\Pi_i \neq \Pi_j$ pour $i \neq j$, l'ordre du pôle en $s=0$ de cette fonction vaut α.

Mais d'autre part

$$L(\Pi^\vee \times \Pi) = \prod_{\eta \in \Xi} L(\pi^\vee \times \eta\pi)$$

et l'ordre du pôle en $s=0$ est donc le cardinal r du stabilisateur de π dans Ξ.

On a donc prouvé (i).

Prouvons (ii). On peut supposer π unitaire. Posons $\Pi' = \mathrm{Ch}_{L/K}(\mathrm{St}_d(\pi))$. Alors

$$L(\Pi^\vee \times \Pi') = \prod_{\eta \in \Xi} L(\pi^\vee \times \eta\, \mathrm{St}_d(\pi))$$

a un pôle d'ordre r en $s=(1-d)/2$.

Mais d'autre part écrivant $\Pi = \Pi_1 \boxplus \ldots \boxplus \Pi_r$ avec $\Pi_i \in \mathscr{A}_L^0(n/r)$, et $\Pi' = \mathrm{St}_t(T)$, où T est G-cuspidal, de la forme $T = T_1 \boxplus \ldots \boxplus T_\alpha$, avec $T_j \in \mathscr{A}_L^0(dn/\alpha t)$, on a

$$L(\Pi^\vee \times \Pi') = \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{\alpha} L(\Pi_i^\vee \times \mathrm{St}_t(T_j)).$$

Comme π est unitaire les Π_i et les T_j le sont également et tout caractère η de $L^\times$ tel que $\eta\,\Pi_i \simeq T_i$ est unitaire; par suite le seul pôle du second membre parmi les nombres réels négatifs apparaît en $s=(1-t)/2$ et son ordre est le cardinal de $\{(i,j),\ 1 \leqq i \leqq r,\ 1 \leqq j \leqq \alpha,\ \Pi_i = T_j\}$. On a donc $d=t$ et $dn/\alpha t = n/r$, d'où $\alpha = r$, et il existe i et j tels que $\Pi_i = T_j$; cela implique $\Pi = T$ et $\Pi' = \mathrm{St}_d(T)$, ce qui prouve (ii).

Passons à (iii). D'après la proposition 6.2, π' est essentiellement de carré intégrable; écrivons comme précédemment $\pi'=\mathrm{St}_t(\tau)$, $\tau\in\mathscr{A}_K^0(n/t)$; on a alors $\mathrm{Ch}_{L/K}(\pi')=\mathrm{St}_t(\mathrm{Ch}_{L/K}(\tau))$, d'où $t=d$ et $\mathrm{Ch}_{L/K}(\tau)=\Pi$.

Alors $L(\Pi^\vee\times\Pi)$ vaut aussi bien

$$\prod_{\eta\in\Xi} L(\pi^\vee\times\eta\pi) \quad \text{que} \quad \prod_{\eta\in\Xi} L(\pi^\vee\times\eta\tau).$$

La première expression a un pôle en $s=0$ d'ordre r donc il existe $\eta\in\Xi$ tel que $\pi=\eta\tau$. Inversement si $\pi'=\eta\pi$ pour un $\eta\in\Xi$ alors $\mathrm{Ch}_{L/K}(\pi')=\Pi$. Comme le stabilisateur de π dans Ξ est r, on a bien $[L:K]/r$ possibilités distinctes pour π'. Cela prouve (iii).

Enfin prouvons (iv).

On a $T=\mathrm{Ch}_{L/K}(\tau)$ avec τ essentiellement de carré intégrable; écrivant $\tau=\mathrm{St}_t(\pi)$, $\pi\in\mathscr{A}_K^0(n/t)$, on obtient $T=\mathrm{St}_t(\mathrm{Ch}_{L/K}(\pi))$ d'où $t=1$ et $T=\mathrm{Ch}_{L/K}(\pi)$, ce qui prouve (iv).

6.5. Des résultats précédents, on tire immédiatement la conséquence suivante :

PROPOSITION 6.5. — *Soit $\Pi\in\mathscr{A}_L(n)$, stable sous* G *et* G-*cuspidale. Écrivons $\Pi=\Pi_1\boxplus\ldots\boxplus\Pi_r$, avec $\Pi_i\in\mathscr{A}_L^0(n/r)$. Alors il existe exactement $[L:K]/r$ éléments π de $\mathscr{A}_K(n)$ tels que $\Pi=\mathrm{Ch}_{L/K}(\pi)$; ils sont cuspidaux et se déduisent l'un de l'autre par multiplication par les caractères de Ξ. Pour chaque tel π, on a*

$$\sum_{\eta\in\Xi} s(\eta\pi)=f_{L/K}(nc_{L/K}+s(\Pi))$$

et

$$\omega_\pi\circ N_{L/K}=\omega_\Pi.$$

Nous aurons besoin de préciser cette proposition dans deux cas particuliers.

Cas I : Le premier est celui où $[L:K]$ est premier à n. On a alors nécessairement $r=1$. Le caractère central ω_π de π est stable sous G; comme L/K est cyclique, il existe exactement $[L:K]$ caractères ω de $K^\times$ tels que $\omega\circ N_{L/K}=\omega_\pi$; ils se déduisent de l'un d'entre eux par multiplication par les éléments de Ξ. Fixons un tel caractère ω et un élément π de $\mathscr{A}_K^0(n)$ tel que $\mathrm{Ch}_{L/K}(\pi)=\Pi$. On a alors

$$\omega_\pi\circ N_{L/K}=\omega_\pi=\omega\circ N_{L/K}$$

et par suite $\omega^{-1}\omega_\pi$ appartient à Ξ.

Soit $\eta\in\Xi$; on a $\omega_{\eta\pi}=\eta^n\omega_\pi$; on a donc $\omega_{\eta\pi}=\omega$ si et seulement si l'égalité $\omega^{-1}\omega_\pi=\eta^n$ est vérifiée; cette équation a une solution et une seule en η puisque n est premier à l'ordre de Ξ. On obtient ainsi une bijection $\omega\mapsto\pi$ entre les caractères ω de $K^\times$ tels que $\omega\circ N_{L/K}=\omega_\pi$ et les éléments π de $\mathscr{A}_K^0(n)$ vérifiant $\mathrm{Ch}_{L/K}(\pi)=\Pi$, bijection caractérisée par $\omega_\pi=\omega$. Pour $\chi\in\mathscr{A}_K(1)$, $\chi\pi$ est caractérisé par les propriétés $\mathrm{Ch}_{L/K}(\chi\pi)=(\chi\circ N_{L/K}).\pi$ et $\omega_{\chi\pi}=\chi^n\omega$. Pour $\tau\in G_F$, π^τ est l'élément (cuspidal) de $\mathscr{A}_{K^\tau}(n)$ caractérisé par les propriétés $\mathrm{Ch}_{L^\tau/K^\tau}(\pi^\tau)=\pi^\tau$ et $\omega_{\pi^\tau}=\omega^\tau$.

Cas II : Le second cas est celui où r est égal à $[L:K]$. L'élément π est alors unique et on a $\eta\pi=\pi$ pour tout $\eta\in\Xi$. Pour $\chi\in\mathscr{A}_K(1)$, $\chi\pi$ est l'unique élément de $\mathscr{A}_K(n)$ dont le changement de base à L soit $(\chi\circ N_{L/K}).\pi$. Pour $\tau\in G_F$, π^τ est l'unique élément (cuspidal) de $\mathscr{A}_{K^\tau}(n)$ dont le changement de base à L^τ soit π^τ.

Il nous faut maintenant préciser, dans ce second cas, le caractère central de π. En l'état actuel de la théorie, il est nécessaire d'utiliser une technique globale, basée sur le chapitre III de [AC].

LEMME (dans le cas II). — *Supposons* $[L:K]=r$. *On a alors*

$$\omega_\pi=\omega_{\Pi\,|\,K^\times} \qquad \textit{si} \quad r \textit{ est impair},$$

$$\omega_\pi=\varepsilon.\,\omega_{\Pi\,|\,K^\times} \qquad \textit{si} \quad r \textit{ est pair},$$

où ε *est l'unique élément d'ordre* 2 *dans* Ξ.

On peut supposer que L/K et π proviennent d'une situation globale analogue. On se trouve donc dans les conditions du lemme 6.4 de [AC, III]. L'identité des caractères globaux, analogue à l'identité locale à démontrer, est vraie à presque toute place (*voir* la démonstration du théorème 6.2 de [AC, III]). Elle est par conséquent vraie à toute place; en la place qui donne L/K et π, on obtient l'identité du lemme.

6.6. Avant de reprendre le cours de la démonstration du théorème 1.2, il nous faut préciser quelques dernières propriétés du changement de base. Tout d'abord le changement de base possède certaines propriétés de compatibilité à l'induction parabolique. Par exemple une représentation tempérée π est de la forme

$$\pi=\pi_1\boxplus\ldots\boxplus\pi_r,$$

où les π_i sont discrètes, on a alors

$$\mathrm{Ch}_{L/K}(\pi)=\mathrm{Ch}_{L/K}(\pi_1)\boxplus\ldots\boxplus\mathrm{Ch}_{L/K}(\pi_r) \quad (\textit{cf.}\ [\mathrm{AC\,I}],\ \S\,6.2).$$

Cette propriété s'étend, par torsion par un caractère de $K^\times$, aux représentations essentiellement tempérées. Si $\pi=\pi_1\boxplus\ldots\boxplus\pi_r$ est essentiellement tempérée, et les π_i essentiellement discrètes, on voit facilement que les éléments (essentiellement tempérés) de $\mathscr{A}_K$ qui ont même changement de base que π à L, sont les éléments

$$\boxplus_{i=1}^{r}\omega_i\pi_i \qquad \text{où} \quad \omega_i\in\Xi.$$

Enfin un élément quelconque π de $\mathscr{A}_K(n)$ est le quotient de Langlands d'une représentation dominante

$$\pi_1\boxplus\ldots\boxplus\pi_r,$$

où les π_i sont essentiellement tempérées; on définit alors $\mathrm{Ch}_{L/K}(\pi)$ comme le quotient de Langlands de la représentation (dominante) $\mathrm{Ch}_{L/K}(\pi_1)\boxplus\ldots\boxplus\mathrm{Ch}_{L/K}(\pi_r)$ (*cf.* [AC I], commentaires après la proposition 6.8). Les formules de 6.1 sont valables dans ce cadre général. On peut alors énoncer une propriété de transitivité du changement de corps de base.

PROPOSITION 6.6. — *Soient* E *une extension finie cyclique de* K *dans* $\bar{\mathrm{F}}$, L *une sous-*K*-extension de* E. *On a alors*

$$\mathrm{Ch}_{\mathrm{E/L}} \circ \mathrm{Ch}_{\mathrm{L/K}}(\pi) = \mathrm{Ch}_{\mathrm{E/K}}(\pi) \quad \textit{pour tout} \ \pi \in \mathscr{A}_{\mathrm{K}}(n).$$

Par ce qui précède, il suffit de considérer le cas d'une représentation π essentiellement discrète; on peut même la supposer cuspidale, grâce à la proposition 6.3. On peut alors choisir une situation globale $\mathrm{E}^0/\mathrm{L}^0/\mathrm{K}^0$ ayant E/L/K comme composante en une place, et prendre π comme composante d'une représentation automorphe cuspidale globale π^0 de $\mathrm{GL}_n(\mathrm{A}_{\mathrm{K}^0})$, représentation à laquelle on peut imposer toutes les conditions utilisées en [AC, I]; on peut même supposer que π^0 ait une composante cuspidale en une place finie où E^0 est non ramifiée, totalement scindée sur K^0. On n'a alors aucune peine, en suivant la construction de [AC, I], à vérifier que $\mathrm{Ch}_{\mathrm{E}^0/\mathrm{K}^0}(\pi^0)$, $\mathrm{Ch}_{\mathrm{L}^0/\mathrm{K}^0}(\pi^0)$ et $\mathrm{Ch}_{\mathrm{E}^0/\mathrm{L}^0} \circ \mathrm{Ch}_{\mathrm{L}^0/\mathrm{K}^0}(\pi^0)$ sont cuspidales et ont presque partout les mêmes composantes; elles sont donc égales partout, ce qui prouve l'identité voulue.

Par le même procédé, on prouve la variante suivante de la proposition 6.6.

Variante 6.6. — Soient E et L deux extensions cycliques de K dans $\bar{\mathrm{F}}$, et M le composé de E et L. On a alors

$$\mathrm{Ch}_{\mathrm{M/E}} \circ \mathrm{Ch}_{\mathrm{E/K}}(\pi) = \mathrm{Ch}_{\mathrm{M/L}} \circ \mathrm{Ch}_{\mathrm{L/K}}(\pi) \quad \text{pour tout} \ \pi \in \mathscr{A}_{\mathrm{K}}(n).$$

6.7. Nous pouvons maintenant poursuivre la preuve du théorème 1.2 (en caractéristique nulle) en suivant la méthode esquissée en 1.8 et 1.9.

Si M est une extension finie de K dans $\bar{\mathrm{F}}$, on note $\psi_{\mathrm{M/K}}$ la fonction ψ de Herbrand relative à l'extension M/K. Pour tout nombre réel λ, on a

$$\mathrm{Gal}(\bar{\mathrm{F}}/\mathrm{K})^{\lambda} \cap \mathrm{Gal}(\bar{\mathrm{F}}/\mathrm{M}) = \mathrm{Gal}(\bar{\mathrm{F}}/\mathrm{M})^{\psi_{\mathrm{M/K}}(\lambda)},$$

et si $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathrm{K}}(n)$ est de pente au plus λ, alors $\mathrm{Res}_{\mathrm{M/K}}(\sigma)$ est de pente au plus $\psi_{\mathrm{M/K}}(\lambda)$.

Cette propriété se transpose au cadre des représentations de GL_n.

PROPOSITION. — *Soit* M/K *une extension finie cyclique de* K *dans* $\bar{\mathrm{M}}$. *Si* $\pi \in \mathscr{A}_{\mathrm{K}}(n)$ *est de pente au plus* λ *alors* $\mathrm{Ch}_{\mathrm{M/K}}(\pi)$ *est de pente au plus* $\psi_{\mathrm{M/K}}(\lambda)$.

Par la transitivité des fonctions de Herbrand et du changement de base [6.6], il suffit de traiter le cas où M/K est cyclique de degré premier l. On note η un générateur du groupe des caractères de $\mathrm{K}^{\times}$ triviaux sur $\mathrm{N}_{\mathrm{M/K}}(\mathrm{M}^{\times})$, et s son conducteur de Swan. Pour prouver la proposition, on peut supposer π dans $\mathscr{A}^0_{\mathrm{K}}(n)$. On a la formule suivante (5) de 6.3

$$f_{\mathrm{M/K}}[s(\mathrm{Ch}_{\mathrm{M/K}}\,\rho) + nc_{\mathrm{M/K}}] = \sum_{i=0}^{i-1} s(\eta^i \pi).$$

Mais on a, pour $\chi \in \mathscr{A}_K(1)$,

$$s(\chi\pi) \leqq \sup(s(\pi), ns(\chi))$$

avec égalité si $s(\pi) \neq ns(\chi)$, ce qui se voit aisément en utilisant la correspondance avec les algèbres à division.

Si M/K est ramifiée, on a $c_{M/K}=(l-1)s$
d'où

$$\begin{aligned} s(\mathrm{Ch}_{M/K}\pi) &= s(\pi) \quad \text{si} \quad \lambda(\pi) < s \\ &= ls(\pi)-n(l-1)s \quad \text{si} \quad \lambda(\pi) > s \\ &\leqq s(\pi) \quad \text{si} \quad \lambda(\pi)=s. \end{aligned}$$

Mais les composants du support cuspidal de $\mathrm{Ch}_{M/K}(\pi)$ sont conjugués sous Gal(M/K), donc de même pente, et $\lambda(\mathrm{Ch}_{M/K}(\pi))=s(\mathrm{Ch}_{M/K}(\pi))/n$, de même que $\lambda(\pi)=s(\pi)/n$. Or on a

$$\psi_{M/K}(\lambda)=\lambda \quad \text{pour} \quad \lambda \leqq s$$
$$\psi_{M/K}(\lambda)=\lambda+l(\lambda-s) \quad \text{pour} \quad \lambda \geqq s,$$

d'où le résultat.

Si M/K est non ramifiée, on a $f_{M/K}=l$, $c_{M/K}=0$ puis $s(\mathrm{Ch}_{M/K}\pi)=s(\pi)$, d'où le résultat par le même argument.

Le corollaire suivant généralise la proposition 1.8. On fixe une $\mathbf{Z}_p$-extension $\tilde{F}$ de F dans $\bar{F}$, de corps résiduel fini. Alors $K\tilde{F}$, notée $\tilde{K}$, est une $\mathbf{Z}_p$-extension de K dans $\bar{F}$, de corps résiduel fini.

Corollaire. — *Soit λ un nombre réel positif. Il existe une extension finie* E *de* K *dans* $\tilde{K}$ *telle que, pour tout entier $n \geqq 1$, toute sous-extension* M *de* E *et tout $\pi \in \mathscr{A}_K(n)$ vérifiant $\lambda(\pi) \leqq \psi_{M/K}(\lambda)$, on ait*

$$\lambda(\mathrm{Ch}_{E/M}\pi) < e_E.$$

En effet $\tilde{K}/K$ est arithmétiquement profinie [Wi 1.2.1] donc $\mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)^{\lambda+1}$ est ouvert dans $\mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)$. Si on choisit une extension finie E_0 de K dans $\tilde{K}$ telle que $\mathrm{Gal}(\tilde{K}/K)^{\lambda+1}$ contienne $\mathrm{Gal}(\tilde{K}/E_0)$, on a alors, pour toute extension finie E de E_0 dans K, $\psi_{E/E_0}(s)=s$ pour $s \leqq \psi_{E_0/K}(\lambda)$. Comme e_E tend vers l'infini avec $[E:E_0]$, le corollaire découle de la proposition.

6.8. Par la méthode exposée en 1.9, nous allons maintenant déduire du corollaire 6.7 la proposition suivante.

Proposition. — *Supposons vrai le théorème* 1.9. *Alors le théorème* 1.2 *l'est aussi : il existe une injection $\mathscr{G}_K^0(n) \to \mathscr{A}_K^0(n)$, préservant les conducteurs et compatible à la torsion par $\mathscr{X}_K$; une telle injection est automatiquement bijective.*

D'après le théorème 1.9, on peut construire une telle injection. Il s'agit simplement d'en prouver la surjectivité. Comme les conducteurs sont préservés, il suffit de se restreindre aux représentations de pente plus petite qu'un nombre réel positif λ fixé. On peut alors fixer une extension finie de E de K, cyclique et de degré une puissance de p, vérifiant les propriétés imposées dans le corollaire 6.7.

Fixons, pour $d \leqq n$, des injections de $\mathscr{G}_{\mathrm{E}}^{0}(d)$ dans $\mathscr{A}_{\mathrm{E}}^{0}(d)$, compatibles à la torsion par $\mathscr{X}_{\mathrm{E}}$ et préservant les conducteurs, et prolongeons-les en des injections de $\mathscr{G}_{\mathrm{E}}(d)$ dans $\mathscr{A}_{\mathrm{E}}(d)$ de la manière indiquée en 5.2. Il découle alors de 5.1 et 5.2 que toute représentation de $\mathscr{A}_{\mathrm{E}}(d)$ de pente $< e_{\mathrm{E}}$ est obtenue.

Introduisons une extension M intermédiaire entre K et E et prouvons, par récurrence sur le degré de E sur M, le résultat suivant : soient, pour $d \leqq n$, des injections $\psi_{\mathrm{M}}^{0}(d)$ de $\mathscr{G}_{\mathrm{M}}^{0}(d)$ dans $\mathscr{A}_{\mathrm{M}}^{0}(d)$, compatibles à l'action de $\mathscr{X}_{\mathrm{M}}$ et préservant les conducteurs; prolongeons-les en des injections $\psi_{\mathrm{M}}(d): \mathscr{G}_{\mathrm{M}}(d) \to \mathscr{A}_{\mathrm{M}}(d)$; alors tout élément π de $\mathscr{A}_{\mathrm{M}}(d)$ de pente $\leqq \psi_{\mathrm{M/K}}(\lambda)$ est dans l'image de $\psi_{\mathrm{M}}(d)$.

D'après la construction de 5.2 et les propriétés du changement de base rappelées en 6.6, il suffit de prouver cette assertion pour $\pi \in \mathscr{A}_{\mathrm{M}}^{0}(d)$.

Elle est en tout cas vraie pour $\mathrm{M}=\mathrm{E}$. Supposons-la vraie pour M distinct de K et notons L l'extension de K incluse dans M, sur laquelle M est de degré p. Fixons, pour $d \leqq n$, des injections $\varphi_{\mathrm{M}}^{0}(d)$ et $\varphi_{\mathrm{L}}^{0}(d)$ comme dans le théorème 1.9, et prolongeons-les en des injections $\varphi_{\mathrm{M}}(d)$ et $\varphi_{\mathrm{L}}(d)$. Nous allons prouver que pour tout $d \leqq n$ tout élément π de $\mathscr{A}^{0}(d)$ de pente $\leqq \psi_{\mathrm{L/K}}(\lambda)$ est dans l'image de $\varphi_{\mathrm{L}}^{0}(d)$. Par les arguments de comptage du paragraphe 4, il découle alors que l'hypothèse de récurrence est vraie pour L.

Soit $\pi \in \mathscr{A}_{\mathrm{L}}^{0}(d)$ et $\Pi=\mathrm{Ch}_{\mathrm{M/L}}(\pi) \in \mathscr{A}_{\mathrm{M}}(d)$. Alors Π est invariante sous $\mathrm{Gal}(\mathrm{M/L})$. Comme π est de pente $\leqq \psi_{\mathrm{L/K}}(\lambda)$, Π est de pente $\leqq \psi_{\mathrm{M/K}}(\lambda)$, donc Π est de la forme $\varphi_{\mathrm{M}}(\mathrm{T})$ pour un (unique) élément T de $\mathscr{G}_{\mathrm{M}}(d)$, qui est invariant par $\mathrm{Gal}(\mathrm{M/L})$. Supposons d'abord Π cuspidale. Alors $\mathrm{T} \in \mathscr{G}_{\mathrm{M}}^{0}(d)$, et T est de la forme $\mathrm{Res}_{\mathrm{M/L}}(\tau)$ pour un $\tau \in \mathscr{G}_{\mathrm{L}}^{0}(d)$. Posant $\pi'=\varphi_{\mathrm{L}}^{0}(d)(\tau)$, on a $\mathrm{Ch}_{\mathrm{M/L}}(\pi')=\mathrm{Ch}_{\mathrm{M/L}}(\pi)=\Pi$, donc $\pi=\eta\pi'=\varphi_{\mathrm{L}}^{0}(d)(\eta\tau)$ pour un caractère η de $\mathrm{L}^{\times}$, et π appartient à l'image de $\varphi_{\mathrm{L}}^{0}(d)$.

Supposons ensuite π non cuspidale; alors l divise d et $\Pi=\Pi_1 \boxplus \Pi_1^{g} \boxplus \ldots \boxplus \Pi_1^{g^{l-1}}$ où g est un générateur de $\mathrm{Gal}(\mathrm{M/L})$ et où $\Pi_1 \in \mathscr{A}_{\mathrm{M}}^{0}(d/l)$ est distinct de Π_1^{g}. On a $\Pi_1=\varphi_{\mathrm{M}}^{0}(d/l)(\mathrm{T}_1)$ pour un unique élément T_1 de $\mathscr{G}_{\mathrm{M}}^{0}(d/l)$ distinct de T_1^{g}, et on a $\mathrm{T}=\mathrm{T}_1 \oplus \mathrm{T}_1^{g} \oplus \ldots \oplus \mathrm{T}_1^{g^{l-1}}$. Il existe un (unique) élément τ de $\mathscr{G}_{\mathrm{L}}(d)$ tel que $\mathrm{Res}_{\mathrm{M/L}}(\tau)=\mathrm{T}$; il est irréductible et comme on a

$$\mathrm{Ch}_{\mathrm{L/K}}(\varphi_{\mathrm{L}}^{0}(\tau))=\varphi_{\mathrm{M}} \circ \mathrm{Res}_{\mathrm{M/L}}\,\tau=\Pi$$

et que π est l'unique élément de $\mathscr{A}_{\mathrm{L}}^{0}(d)$ tel que $\mathrm{Ch}_{\mathrm{L/K}}(\pi)=\Pi$, on a $\varphi_{\mathrm{L}}^{0}(\sigma)=\pi$, et π est dans l'image de $\varphi_{\mathrm{L}}^{0}(\sigma)$.

On a donc prouvé l'hypothèse de récurrence pour L, donc pour K.

Pour prouver le théorème 1.2 en caractéristique nulle et, par les arguments du paragraphe 4, le théorème 1.3, il reste donc à prouver le théorème 1.9.

6.9. Expliquons le principe de construction des applications φ_M et φ_L de 1.6, en l'illustrant par le cas typique de la construction de φ_L^0; le cas général est traité au paragraphe 7.

Soit $\sigma \in \mathscr{G}_L^0(n)$; notons $\bar{\sigma}$ la classe de représentations projectives associée à σ; elle est d'image finie. Notons E le corps fixé par $\mathrm{Ker}(\bar{\sigma})$; alors E est une extension finie galoisienne de L dans $\bar{F}$. Notons G son groupe de Galois.

Soit F_1 le corps fixé par le groupe de ramification sauvage G_1 de G, et soit σ_1 un composant de la restriction de σ à W_{F_1}. Alors σ_1 est de dimension une puissance de p, disons p^r, et il existe une suite finie d'extensions $F_1 = L_0 \subset L_1 \ldots \subset L_r$ avec L_{i+1} cyclique de degré p sur L_i pour $i = 0, \ldots, r-1$, et des représentations $\tau_i \in \mathscr{A}_{L_i}^0(p^{r-i})$ telles que $\tau_0 = \sigma_1$ et $\tau_i = \mathrm{Ind}_{L_{i+1}}^{L_i}(\tau_{i+1})$ pour $i = 0, \ldots, r-1$. Soit π_r le caractère de $L_r^\times$ attaché à σ_r par la théorie locale du corps de classes. Soit i un entier $0 \leqq i \leqq r-1$. Supposons $\pi_{i+1} \in \mathscr{A}_{L_{i+1}}^0(p^{r-i-1})$ construite. Alors $\square\, \pi_{i+1}^g$, où g parcourt $\mathrm{Gal}(L_{i+1}/L_i)$, est stable par $\mathrm{Gal}(L_{i+1}/L_i)$; on montre qu'il est $\mathrm{Gal}(L_{i+1}/L_i)$-cuspidal et on prend pour π_i l'unique élément de $\mathscr{A}_{L_i}^0(p^{r-i})$ qui lui corresponde par le changement de base de L_i à L_{i+1}. On prouve que l'on a attaché à σ_1 un élément $\varphi(\sigma_1)$ qui est bien défini (ne dépend pas des choix effectués plus haut pour la construction). L'application $\sigma_1 \mapsto \varphi(\sigma_1)$ est compatible à la torsion par les caractères, préserve les conducteurs, et est équivariante sous G_F.

Si maintenant σ_0 est un composant de la restriction de σ au sous-groupe d'inertie G_0 de G, contenant σ_1, on peut former $\varphi(\sigma_0)$ de la façon suivante : on construit $\square\, \varphi(\sigma_1)^g$ où g parcourt G_0 modulo le stabilisateur de σ_1 dans G; comme $[G_0 : G_1]$ est premier à la dimension de σ_1, il existe un unique élément π_0 de $\mathscr{A}_{F_0}^0(\dim(\sigma_0))$ qui donne $\square\, \varphi(\sigma_1)^g$ par changement de base de F_0 à F_1 (où F_0 est le corps fixé par G_0), et qui vérifie

$$\omega_{\pi_0} = \det(\sigma_0).$$

On pose alors $\pi_0 = \varphi(\sigma_0)$ et on vérifie, pour l'application $\sigma_0 \mapsto \varphi(\sigma_0)$ les mêmes propriétés que plus haut.

Le même principe de construction s'applique pour construire $\varphi(\sigma)$ à partir de $\varphi(\sigma_0)$, mais cette fois nous n'avons plus de candidat unique. Il faut alors effectuer des choix qui compliquent un peu les arguments reliant φ_M à φ_L (on applique bien sûr le même genre de construction avec M comme corps de base) et l'établissement des propriétés (i) à (iii) du théorème 1.9.

7. Construction d'une correspondance en caractéristique nulle

7.1. Dans ce paragraphe, nous construisons les applications φ_L et φ_M du théorème 1.9, suivant la démarche esquissée à la fin du paragraphe précédent.

Soit E une extension finie de F dans $\bar{F}$. Il sera commode de noter $\mathscr{G}_E^0$ l'union disjointe des $\mathscr{G}_E^0(n)$ pour $n \geqq 1$ et d'utiliser des conventions analogues dans les autres cas. Il sera commode aussi d'identifier les caractères dans $\mathscr{G}_E^0(1)$ et $\mathscr{A}_E^0(1)$ par la théorie du corps de classes. On interprètera aussi les caractères du groupe de Galois d'une extension finie galoisienne K/E comme des éléments de $\mathscr{G}_E^0(1)$ ou $\mathscr{A}_E^0(1)$. Enfin si K est une extension finie de E et $\sigma \in \mathscr{G}_E$, on pourra noter $\sigma_{K/E}$ ou σ_K au lieu de $\mathrm{Res}_{K/E}$; on le fera souvent si σ est un caractère $\chi \in \mathscr{G}_E(1)$; avec nos identifications on pourra écrire indifféremment $\chi_{K/E}$, χ_K, $\chi \circ N_{K/E}$ ou $\mathrm{Res}_{K/E}(\chi)$. De même, pour $\pi \in \mathscr{A}_E$ on pourra noter $\pi_{K/E}$ ou π_K au lieu de $\mathrm{Ch}_{K/E}$ (dans le cas bien sûr où K/E est cyclique). Soit $\sigma: W_E \to GL(V)$ une représentation (complexe, continue de dimension finie) irréductible de W_E. On notera $\bar{\sigma}$ la représentation projective correspondante : $\bar{\sigma}: W_E \to PGL(V)$; l'image de $\bar{\sigma}$ est finie et $\bar{\sigma}$ détermine une injection dans PGL(V) d'un quotient fini de W_E qu'on notera $P(\sigma)$. C'est le groupe de Galois d'une extension finie de E dans $\bar{F}$ et, comme tel, il possède une filtration par ses sous-groupes de ramification; il ne dépend que de la classe de σ, et nous utiliserons la notation $P(\sigma)$ pour un élément σ de $\mathscr{G}_E^0$.

Nous dirons qu'un élément σ de $\mathscr{G}_E^0$ est une *succession d'induites cycliques* si la condition (SIC) suivante est vérifiée :

(SIC) il existe un entier $r \geqq 0$, une suite finie d'extensions de E dans $\bar{F}$

$$E = E_0 \subset E_1 \subset \ldots \subset E_r,$$

telles que E_{i+1}/E_i soit finie cyclique pour $i = 0, \ldots, r-1$, et une suite de classes de représentations irréductibles σ_i de W_{E_i}, telles que

1. $\dim \sigma_r = 1$;
2. pour $i = 0, \ldots, r-1$, on ait

$$\sigma_i = \mathrm{Ind}_{E_{i+1}}^{E_i} \sigma_{i+1};$$

3. $\sigma_0 = \sigma$.

L'entier minimal r tel que (SIC) soit vérifiée sera appelé *indice d'imprimitivité* de σ.

Remarquons que si $P(\sigma)$ est nilpotent, alors σ est bien succession d'induites cycliques; c'est le cas en particulier si $P(\sigma)$ est égal à son sous-groupe de ramification sauvage $P(\sigma)_1$.

Nous notons $\mathscr{G}c_E^0$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{G}_E^0$ qui sont successions d'induites cycliques et $\mathscr{G}c_E$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{G}_E$ qui sont sommes d'éléments de $\mathscr{G}c_E^0$.

7.2. THÉORÈME A. — *Il existe une unique famille d'applications*

$$\psi^0(E): \quad \mathscr{G}c_E^0 \to \mathscr{A}_E^0 = \bigcup_{m \geqq 1} \mathscr{A}_E^0(m)$$

(*où* E *parcourt les extensions finies de* F *dans* $\bar{F}$) *possédant les propriétés suivantes :*

(i) *si* $\sigma \in \mathscr{G}c_E^0(n)$ *alors* $\psi^0(E)(\sigma) \in \mathscr{A}_E^0(n)$;

(ii) *si* $\sigma \in \mathscr{G}c_E^0(1)$ *alors* $\psi^0(E)(\sigma)$ *correspond à* σ *par la théorie locale du corps de classes.*

(iii) *si* $\psi(E): \mathscr{G}c_E \to \mathscr{A}_E (= \bigcup_{m \geqq 1} \mathscr{A}_E(m))$ *désigne l'application obtenue en étendant* $\psi^0(E)$ *de la façon standard* (cf. 5.2), *alors, pour toute extension cyclique finie* M/E *d'extensions finies de* F *dans* $\bar{F}$, *on a*

$$\psi(M) \circ \mathrm{Res}_{M/E} = \mathrm{Ch}_{M/E} \circ \psi(E).$$

B. *Pour toute extension finie* E *de* F *dans* $\bar{F}$, $\psi(E)$ *est injective. Pour tout* $\sigma \in \mathcal{G}c_E$, *on a*

(i) $\omega_{\psi(E)(\sigma)} = \det \sigma$,

(ii) $s(\psi(E)(\sigma)) = s(\sigma)$,

(iii) $\psi(E)(\chi\sigma) = \chi . \psi(E)(\sigma)$ *pour tout* $\chi \in \mathcal{A}_E(1)$,

(iv) $\psi(E^\tau)(\sigma^\tau) = (\psi(E)(\sigma))^\tau$ *pour tout* $\tau \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$,

(v) $L(\psi(E)(\sigma) \times \psi(E)(\sigma')) = L(\sigma \otimes \sigma')$, $\varepsilon(\psi(E)(\sigma) \times \psi(E)(\sigma')) = \varepsilon(\sigma \otimes \sigma')$,

quel que soit $\sigma' \in \mathcal{G}c_E$.

La démonstration de ce théorème prendra de 7.3 à 7.6.

7.3. Une majeure partie du théorème se prouve par récurrence sur l'indice d'imprimitivité. Plus précisément, pour r entier positif, notons $\mathcal{G}c_E^0[r]$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{G}c_E^0$ d'indice d'imprimitivité au plus r. Nous prouvons alors, par récurrence sur r, les propriétés énoncées dans le théorème pour la famille des restrictions des $\psi^0(E)$ à $\mathcal{G}c_E^0[r]$. Comme $\mathcal{G}c_E^0$ est l'union croissante des $\mathcal{G}c_E^0[r]$, le théorème en résulte aussitôt.

Pour $r=0$, on a $\mathcal{G}c_E^0[0] = \mathcal{G}_E(1)$. La condition (ii) de A implique (l'existence et) l'unicité de $\psi^0(E)(\sigma)$ pour $\sigma \in \mathcal{G}_E^0(1)$. Les propriétés (iii) de A et celles de B sont alors conséquences de la théorie du corps de classes et du fait que pour GL(1) le changement de base n'est autre que la composition avec la norme.

Nous supposons donc l'hypothèse de récurrence établie pour un entier $r \geqq 0$ et tâchons de l'établir pour $r+1$. Prenons $\sigma \in \mathcal{G}c_E^0[r+1]$ (qui n'est pas dans $\mathcal{G}c_E^0[r]$). Alors il existe une extension cyclique finie M de E dans $\bar{F}$ et un élément ρ de $\mathcal{G}c_M^0[r]$ tels que

$$\sigma = \mathrm{Ind}_M^E \rho.$$

On a alors

$$\mathrm{Res}_{M/E}\, \sigma = \bigoplus_\tau \rho^\tau,$$

où τ parcourt Gal(M/E), et la condition (iii) de A impose de choisir pour $\psi^0(E)(\sigma)$ un élément π de $\mathcal{A}_E^0$ tel que

$$\mathrm{Ch}_{M/E}(\pi) = \psi(M)(\bigoplus_\tau \rho^\tau) = \boxplus_\tau \psi^0(M)(\rho^\tau).$$

D'après la propriété (iv) de B appliquée à $\rho \in \mathcal{G}c_M^0[r]$, on a

$$\psi^0(M)(\rho^\tau) = (\psi^0(M)(\rho))^\tau$$

et on cherche donc $\pi \in \mathcal{A}_E^0$ tel que

$$\mathrm{Ch}_{M/E}(\pi) = \boxplus_\tau (\psi^0(M)(\rho))^\tau.$$

De plus comme σ est irréductible, les ρ^τ, quand τ parcourt Gal(M/E), sont tous distincts, et comme l'application $\psi^0(M)$ *restreinte à* $\mathcal{G}c_M^0[r]$ est injective, la représentation $\boxplus(\psi^0(M)(\rho))^\tau$ est Gal(M/E)-discrète et il existe, d'après les propriétés du changement de base rappelées en 6.5, cas II, un *unique* élément $\pi \in \mathcal{A}_E^0$ vérifiant

$$\mathrm{Ch}_{M/E}(\pi) = \boxplus_\tau (\psi^0(M)(\rho))^\tau.$$

Si $\sigma \in \mathcal{G}_E^0(n)$, alors il est clair que $\pi \in \mathcal{A}_E^0(n)$.

7.4. Il s'agit cependant, avant de noter $\psi^0(E)(\sigma)$ cet élément, de prouver qu'il est bien indépendant des choix de M et ρ. Une démonstration de nature purement locale est possible, mais nous préférons employer une technique globale, qui nous permet en outre de faire le lien avec le chapitre III de [AC]. Cette technique globale pour prouver des résultats locaux est standard, et nous passerons brièvement sur les détails (*cf.* [He 3], [He 6]). Il est clair tout d'abord que si l'on tord σ par un caractère χ de $E^\times$ et que l'on applique la construction précédente à

$$\chi\sigma = \mathrm{Ind}_M^E(\chi_M\,\rho),$$

l'élément de $\mathscr{A}_E^0$ que l'on obtient n'est autre que $\chi\pi$. Pour prouver l'indépendance des choix de M et ρ, on peut donc supposer σ d'image finie, se factorisant par le groupe de Galois d'une extension finie E′ de E dans $\overline{F}$. On peut alors trouver une extension k'/k de corps globaux, une place v de k' induisant une place encore notée v de k, telles que $\mathrm{Gal}(k'_v/k_v)$ soit $\mathrm{Gal}(k'/k)$ tout entier, et un isomorphisme de k'_v sur E′ envoyant k_v sur E. On obtient donc un isomorphisme de $\mathrm{Gal}(k'/k)$ sur $\mathrm{Gal}(E'/E)$, et σ définit une classe de représentations Σ de $\mathrm{Gal}(k'/k)$ qui, d'après ([AC], Ch. III), vérifie la conjecture d'Artin forte, et à laquelle correspond donc une représentation automorphe cuspidale Π de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{A}_k)$. La représentation Π est obtenue par la même utilisation du changement de base que précédemment, mais dans le cadre global, et il découle de la compatibilité des changements de base local et global ([AC], Ch. III) que π n'est autre que l'élément de $\mathscr{A}_E^0(n)$ correspondant à Π_v par l'isomorphisme de k_v sur E. Mais Π, et Π_v par conséquent, ne dépendent pas des choix de M et ρ.

On a donc à ce point, à tout $\sigma \in \mathscr{G}c_E[r+1]$, associé un élément unique de $\mathscr{A}_E^0$, qu'on peut se permettre de noter $\psi^0(E)(\sigma)$.

7.5. Les propriétés (i) et (ii) de A sont vérifiées par construction. Les propriétés (iii) et (iv) de B sont des conséquences faciles de la construction et de l'unicité dans A. La propriété B (i) découle par récurrence sur r de la construction et du calcul de caractères centraux effectué en 6.5, cas II, par voie globale. On peut tout aussi bien effectuer une démonstration directe sur la construction globale de 7.4.

Si $\sigma' \in \mathscr{G}c_E^0$, on peut se ramener, pour prouver la propriété B(v), au cas où σ et σ' ont toutes deux image finie et choisir l'extension E′/F de 7.4 de sorte que σ et σ' se factorisent par $\mathrm{Gal}(E'/E)$. On obtient alors par 7.4 une représentation Σ' de $\mathrm{Gal}(k'/k)$ correspondant à σ' et une représentation automorphe cuspidale Π' de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{A}_k)$ [si $n(\sigma')=m$], par la conjecture d'Artin forte. Pour presque toute place w de k, Σ_w et π_w d'une part, Σ'_w et π'_w de l'autre, se correspondent par la correspondance non ramifiée et en particulier on a $L(\Sigma_w \otimes \Sigma'_w) = L(\Pi_w \times \Pi'_w)$ et de même pour les facteurs ε. Par des arguments maintenant bien connus (*cf.* [He 3], [He 6], [AC I], 6.10) utilisant l'équation fonctionnelle des fonctions L et des propriétés de dégénérescence des facteurs L et ε sous torsion par des caractères très ramifiés, on en déduit les mêmes égalités à toute place.

La propriété (ii) du B est une conséquence de l'égalité (v) des facteurs ε quand on prend pour σ' la représentation triviale.

7.6. L'injectivité de $\psi(\mathrm{E})$ se ramène immédiatement à celle de $\psi^0(\mathrm{E})$, et si σ et σ' dans $\mathscr{G}c_{\mathrm{E}}^0$ ont même image π par $\psi^0(\mathrm{E})$ alors on a par (v) de B

$$\mathrm{L}(\sigma\otimes\sigma'^{\vee})=\mathrm{L}(\pi\times\pi^{\vee})=\mathrm{L}(\sigma\otimes\sigma^{\vee}).$$

Comme $\mathrm{L}(\sigma\otimes\sigma^{\vee})$ a un pôle d'ordre 1 en $s=0$ il en est de même de $\mathrm{L}(\sigma\otimes\sigma^{\vee})$, ce qui impose $\sigma=\sigma'$.

Enfin, la propriété (iii) de A est aussi immédiate par voie globale : il s'agit de prouver $\psi(\mathrm{M})\circ\mathrm{Res}_{\mathrm{M/E}}(\sigma)=\mathrm{Ch}_{\mathrm{M/E}}\circ\psi(\mathrm{E})(\sigma)$ pour $\sigma\in\mathscr{G}c_{\mathrm{E}}$ que l'on peut supposer, évidemment, irréductible d'image finie. On choisit alors comme en 7.4 une extension E' de E contenant M et on décompose $\mathrm{Res}_{\mathrm{M/E}}(\sigma)$ en $\tau_1\oplus\ldots\oplus\tau_s$, avec chaque τ_i irréductible. On effectue alors la construction de 7.4 pour σ et pour chaque τ_i. On obtient donc des représentations automorphes cuspidales Π de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{A}_k)$ et T_i de $\mathrm{GL}_{n/s}(\mathbb{A}_l)$ (si l/k correspond à M/E). L'égalité à prouver équivaut à

$$\mathrm{Ch}_{l_v/k_v}(\Pi_v)=\boxplus_{i=1}^{s}\mathrm{T}_{i,v}$$

qui provient de l'égalité globale correspondante

$$\mathrm{Ch}_{l/k}(\Pi)=\boxplus_{i=1}^{s}\mathrm{T}_i$$

(où $\boxplus$ désigne encore l'induction parabolique). Cette égalité globale est vraie car elle est vraie à presque toutes les places, et que le changement de base global faible est aussi un changement de base global fort pour les représentations cuspidales ([AC], III, Theorem 5.1).

7.7. A titre d'interlude, nous prouvons un lemme portant essentiellement sur la théorie des représentations des groupes finis, et qui sera utilisé constamment, en 7.8 et 7.12.

LEMME. — *Soit* $\sigma\in\mathscr{G}_{\mathrm{E}}^0(n)$ *et soit* L *une extension* cyclique *de* E *dans* $\bar{\mathrm{F}}$. *Alors* $\mathrm{Res}_{\mathrm{L/E}}(\sigma)$ *est somme de composants irréductibles de multiplicité* 1. *Si* τ *est un tel composant et que son stabilisateur dans* $\mathrm{W_E}$ *est le groupe* $\mathrm{W_{E'}}$ *pour une sous-extension* E' *de* E *dans* L, *alors il existe un unique prolongement* ρ *de* τ *à* $\mathrm{W_{E'}}$ *tel que* $\sigma=\mathrm{Ind}_{\mathrm{E'}}^{\mathrm{E}}\rho$. *On a*

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{E'/E}}\,\sigma=\bigoplus_{g}\rho^g \qquad \textit{où} \quad g \textit{ parcourt } \mathrm{Gal}(\mathrm{E'/E})$$

et $\mathrm{Res}_{\mathrm{L/E'}}(\rho^g)=\tau^{\bar{g}}$ *pour tout* $g\in\mathrm{Gal}(\mathrm{E'/E})$, $\bar{g}$ *en désignant un représentant dans* Gal(L/E). *Les caractères de* Gal(L/E) *qui stabilisent* σ *sont ceux qui sont triviaux sur* Gal(L/E'), *et* σ *est induite à partir d'une sous-extension de* L/E *si et seulement si cette sous-extension est contenue dans* E'.

Démonstration. — Soit τ un composant irréductible de $\mathrm{Res}_{\mathrm{L/E}}\,\sigma$ et E' l'extension de E fixée par le stabilisateur de τ dans Gal(L/E). Alors la théorie de Clifford (*cf.* [CR], § 11 A, [DH] § 2 et [He 2] § 5.7) montre que σ est induite à partir de la représentation ρ de $\mathrm{W_{E'}}$ sur le composant isotypique $\mathrm{V}(\tau)$ de $\mathrm{Res}_{\mathrm{L/E}}\,\sigma$. Mais en utilisant le fait que Gal(L/E') est engendré par un élément, on voit facilement que τ s'étend en une représentation irréductible de $W_{E'}$ (cela tient aussi au fait que $H^2(\mathrm{Gal}(L/E'), \mathbf{C}^\times)=0$ (*cf.* [CR], § 11 A) et la démonstration de 7.15). Tordant par les caractères χ de $\mathrm{Gal}(L/E')$ on obtient $[L:E']$ extensions $\chi\rho$ de τ à $W_{E'}$. Ces extensions sont distinctes : en effet, une équivalence entre ρ et $\chi\rho$, réalisée par un automorphisme de l'espace V d'une représentation dans la classe ρ, est nécessairement scalaire puisqu'il entrelace τ avec lui-même : on obtient donc $\chi=1$ si $\rho=\chi\rho$. On a $\mathrm{Ind}_L^{E'}\tau=\oplus\,\chi\rho$ et donc les $\chi\rho$ sont toutes les classes de représentations irréductibles de $W_{E'}$ dont la restriction à L a τ pour composant. On peut donc prendre pour ρ (la classe de) la représentation de $W_{E'}$ sur $V(\tau)$ et on a alors $\sigma=\mathrm{Ind}_{E'}^{E}\rho$.

On en déduit

$$\mathrm{Res}_{E'/E}\,\sigma=\bigoplus_g \rho^g,\quad \text{où } g \text{ parcourt } \mathrm{Gal}(E'/E)$$

et les ρ^g étant distincts.

On a

$$\mathrm{Res}_{L/E'}\,\rho=\tau$$

d'où, pour $g\in\mathrm{Gal}(E'/E)$ et $\bar{g}\in\mathrm{Gal}(L/E)$ le représentant,

$$\mathrm{Res}_{L/E'}\,\rho^g=\tau^{\bar{g}},$$

ces restrictions étant distinctes quand g parcourt $\mathrm{Gal}(E'/E)$. Soit χ un caractère de $\mathrm{Gal}(L/E)$. On a

$$\chi\sigma=\mathrm{Ind}_{E'/E}((\mathrm{Res}_{E'/E}\,\chi)\,\rho).$$

Si $\mathrm{Res}_{E'/E}\,\chi=1$ alors $\chi\sigma=\sigma$. Inversement si $\chi\sigma=\sigma$ alors $(\mathrm{Res}_{E'/E}\,\chi)\,\rho=\rho^g$ pour un $g\in\mathrm{Gal}(E'/E)$ d'où $\tau=\tau^{\bar{g}}$, $g=\mathrm{id}$, et χ est trivial sur $\mathrm{Gal}(L/E')$.

Il est clair que σ est induite à partir de toutes les sous-extensions de E'/E; inversement si σ est induite à partir d'une sous-extension L' de L/E, alors $\chi\sigma=\sigma$ pour tout caractère χ de $\mathrm{Gal}(L'/E)$ et donc $L'\subset E'$.

Enfin le prolongement ρ de τ à $W_{E'}$ tel que $\sigma=\mathrm{Ind}_{E'}^{E}\rho$ est unique puisqu'un autre prolongement $\chi\rho$, où χ est un caractère non trivial de $\mathrm{Gal}(L/E')$, induit $\eta\sigma$, où η est un prolongement de χ à $\mathrm{Gal}(L/E)$, et $\eta\sigma$ est distinct de σ puisque η n'est pas trivial sur $\mathrm{Gal}(L/E')$.

Ceci termine la preuve du lemme.

Remarque. — La proposition 2.2 découle facilement de ce lemme : il suffit de l'appliquer en prenant $E=K$ et L une extension non ramifiée assez grande de K.

7.8. Nous savons comment construire un élément de $\mathscr{A}_E$ correspondant à σ, si σ est somme de successions d'induites cycliques, et en particulier si σ est irréductible et vérifie $P(\sigma)=P(\sigma)_1$.

Supposons maintenant $\sigma \in \mathscr{G}_{\mathrm{E}}^{0}(n)$. On dira que σ est *essentiellement ramifiée* si on a

$$\mathrm{P}(\sigma)=\mathrm{P}(\sigma)_{0}.$$

Supposons σ essentiellement ramifiée. Notons E_1 le corps fixé par le sous-groupe $\mathrm{P}(\sigma)_1$ de $\mathrm{P}(\sigma)$; c'est une extension finie cyclique de E, de degré premier à p. Notons σ_1 la restriction de σ à $\mathrm{W}_{\mathrm{E}_1}$. Elle est somme de représentations irréductibles de $\mathrm{W}_{\mathrm{E}_1}$ qui forment une orbite sous $\mathrm{Gal}(\mathrm{E}_1/\mathrm{E})$. Chacun de ces composants τ vérifie $\mathrm{P}(\tau)_1=\mathrm{P}(\tau)$ et par suite $\tau \in \mathscr{G}c_{\mathrm{E}_1}^{0}$ et $\deg(\tau)$ est une puissance de p.

Choisissons un tel composant τ. Alors τ est fixé par un sous-groupe $\mathrm{Gal}(\mathrm{E}_1/\mathrm{E}')$ de $\mathrm{Gal}(\mathrm{E}_1/\mathrm{E})$ (qui ne dépend d'ailleurs pas du choix de τ).

La restriction σ' de σ à $\mathrm{W}_{\mathrm{E}'}$ contient un seul composant irréductible ρ tel que $\mathrm{Res}_{\mathrm{E}_1/\mathrm{E}'}(\rho)=\tau$, et on a

$$\sigma'=\bigoplus_{g} \rho^{g},$$

où g parcourt $\mathrm{Gal}(\mathrm{E}'/\mathrm{E})$.

Comme le degré m de τ est une puissance de p et que $\mathrm{Gal}(\mathrm{E}_1/\mathrm{E}')$ est d'ordre premier à p, il existe un unique $\pi \in \mathscr{A}_m^{0}(\mathrm{E}')$ tel que

$$\mathrm{Ch}_{\mathrm{E}_1/\mathrm{E}'}(\pi)=\varphi^{0}(\mathrm{E}_1)(\tau)$$
$$\omega_{\pi}=\det \rho.$$

Pour $g \in \mathrm{Gal}(\mathrm{E}'/\mathrm{E})$, π^{g} est l'unique élément de $\mathscr{A}_m^{0}(\mathrm{E}')$ vérifiant

$$\mathrm{Ch}_{\mathrm{E}_1/\mathrm{E}'}(\pi^{g})=\varphi^{0}(\mathrm{E}_1)(\tau^{\bar{g}})$$

et

$$\omega_{\pi^{g}}=\det(\rho^{g})$$

(où $\bar{g}$ désigne n'importe quel relèvement de g à $\mathrm{Gal}(\mathrm{E}_1/\mathrm{E})$. On peut donc former

$$\boxplus_{g \in \mathrm{Gal}(\mathrm{E}'/\mathrm{E})} \pi^{g} \in \mathscr{A}_{\mathrm{E}'}(n).$$

Il est $\mathrm{Gal}(\mathrm{E}'/\mathrm{E})$-discret (car $\pi^{g}=\pi$ implique $\tau^{\bar{g}}=\tau$ d'où $g=\mathrm{id}$) et par suite il existe un unique élément de $\mathscr{A}_{\mathrm{E}}^{0}(n)$ dont le changement de base à E′ est $\boxplus \pi^{g}$. On note cet élément $\tilde{\psi}^{0}(\mathrm{E})(\sigma)$.

7.9. De cette façon, si nous notons $\mathscr{G}er_{\mathrm{E}}^{0}$ l'ensemble des éléments essentiellement ramifiés de $\mathscr{G}_{\mathrm{E}'}^{0}$ et $\mathscr{G}er_{\mathrm{E}}$ l'ensemble des sommes de tels éléments, on voit qu'on a construit une unique famille d'applications

$$\tilde{\psi}^{0}(\mathrm{E}):\quad \mathscr{G}er_{\mathrm{E}}^{0} \rightarrow \mathscr{A}_{\mathrm{E}}^{0}$$

qu'on étend aussitôt en une famille d'applications

$$\tilde{\psi}(\mathrm{E}):\quad \mathscr{G}er_{\mathrm{E}} \rightarrow \mathscr{A}_{\mathrm{E}}$$

de la façon standard [5.2].

Il ressort immédiatement du théorème 7.2 et de la construction que si σ est de degré 1 alors $\tilde{\psi}(E)(\sigma)$ correspond à σ par la théorie du corps de classes, que $\tilde{\psi}(E)$ conserve les degrés, transforme déterminant en caractère central et est compatible à torsion par les caractères et à l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$. Nous allons établir que $\tilde{\psi}(E)$ est injective sur $\mathcal{G}er_E$ et préserve les conducteurs de Swan.

7.10. L'injectivité de $\tilde{\psi}(E)$ se réduit immédiatement à celle de $\tilde{\psi}^0(E)$. Soient σ et $\sigma' \in \mathcal{G}er_E^0$ ayant la même image π par $\tilde{\psi}^0(E)$. Notons E_1 et E_1' les extensions de E fixées par $P(\sigma)_1$ et $P(\sigma')_1$ respectivement. Notons M le composé de E_1 et E_1'. On a, par construction,

$$\mathrm{Ch}_{E_1/E}(\pi) = \psi(E_1)(\mathrm{Res}_{E_1/E}\,\sigma)$$

et, par la compatibilité de $\psi(E)$ au changement de base [thm 7.1 A (iii)],

$$\mathrm{Ch}_{M/E_1} \circ \mathrm{Ch}_{E_1/E}(\pi) = \psi(M)(\mathrm{Res}_{M/E}\,\sigma).$$

De même, on obtient

$$\mathrm{Ch}_{M/E_1'} \circ \mathrm{Ch}_{E_1'/E}(\pi) = \psi(M)(\mathrm{Res}_{M/E}\,\sigma').$$

Mais par la transitivité du changement de base [Variante 6.6] on a

$$\mathrm{Ch}_{M/E_1} \circ \mathrm{Ch}_{E_1/E}(\pi) = \mathrm{Ch}_{M/E_1'} \circ \mathrm{Ch}_{E_1'/E}(\pi),$$

d'où, puisque $\psi(M)$ est injective,

$$\mathrm{Res}_{M/E}\,\sigma = \mathrm{Res}_{M/E}\,\sigma';$$

on en déduit que $\sigma' = \eta\sigma$ pour un caractère η de $\mathrm{Gal}(M/E)$; en particulier $E_1 = E_1' = M$. De plus l'extension E' de E fixée par le stabilisateur dans $P(\sigma)$ d'un composant de $\mathrm{Res}_{M/E}\,\sigma$ est la même pour σ'. C'est aussi l'extension déterminée par les caractères χ de $\mathrm{Gal}(M/E)$ tels que $\chi\sigma = \sigma$.

Écrivons

$$\rho = \mathrm{Res}_{E'/E}\,\sigma = \rho_1 \oplus \ldots \oplus \rho_s,\ \rho_i \in \mathcal{G}er_E^0$$
$$\tau = \mathrm{Res}_{M/E}\,\sigma = \tau_1 \oplus \ldots \oplus \tau_s,\ \tau_i \in \mathrm{G}\,c_E^0,$$

avec

$$\tau_i = \mathrm{Res}_{M/E'}\,\rho_i \qquad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, s.$$

Alors $\tilde{\psi}(E')(\rho)$ est $\pi_1 \boxplus \ldots \boxplus \pi_s$ où, pour $i = 1, \ldots, s$, π_i est l'unique élément de $\mathcal{A}_{E'}^0$ tel que

$$\mathrm{Ch}_{M/E'}(\pi_i) = \psi^0(M)(\tau_i)$$

et

$$\omega_{\pi_i} = \det \rho_i.$$

Comme σ et $\sigma' = \eta\sigma$ ont même image par $\tilde{\psi}^0_{\mathrm{E}}$, on voit que par construction ρ et $\eta_{\mathrm{E}'} . \rho$ ont même image par $\tilde{\psi}(\mathrm{E}')$. Cela implique en particulier que $\det(\eta_{\mathrm{E}'} . \rho_1) = \det(\rho_1)$ d'où $\eta_{\mathrm{E}'}^{\deg(\rho_1)} = 1$. Mais $\eta_{\mathrm{E}'}$ est d'ordre premier à p et $\deg(\rho_1)$ est une puissance de p d'où $\eta_{\mathrm{E}'} = 1$ et $\sigma' = \eta\sigma = \sigma$.

On a donc prouvé l'injectivité des $\tilde{\psi}(\mathrm{E})$.

Remarque. — L'égalité $\mathrm{L}(\sigma \otimes \sigma') = \mathrm{L}(\tilde{\psi}(\mathrm{E})(\sigma) \times \tilde{\psi}(\mathrm{E})(\sigma'))$ pour σ et σ' dans $\mathscr{G}er_{\mathrm{E}}$ découle facilement de la compatibilité de $\tilde{\psi}(\mathrm{E})$ à la torsion par les caractères et de l'injectivité de $\tilde{\psi}(\mathrm{E})$. Il n'est pas clair que l'identité analogue pour les facteurs ε soit vérifiée. On peut cependant prouver que $\tilde{\psi}(\mathrm{E})$ préserve les conducteurs. Soit donc $\sigma \in \mathscr{G}er^0_{\mathrm{E}}$. Gardons les notations de 7.9. Il est clair que le changement de base, de E à E_1, de $\tilde{\psi}^0(\mathrm{E})(\sigma)$ est $\psi^0(\mathrm{E}_1)(\tau)$. On a

$$s(\psi^0(\mathrm{E}_1)(\tau)) = s(\tau) \quad \text{par le théorème 7.1.}$$

A cause des relations de conducteurs lors de restrictions ou de changement de base [1.8 et 6.5], on obtient $\Sigma\, s(\omega\sigma) = \Sigma\, s(\omega\pi)$ où $\pi = \tilde{\psi}^0(\mathrm{E})(\sigma)$, et où les sommes portent sur les caractères ω de $\mathrm{Gal}(\mathrm{E}_1/\mathrm{E})$. Mais de tels caractères ω sont modérés et $s(\omega\pi) = s(\pi)$, $s(\omega\sigma) = s(\sigma)$, pour tout ω. D'où l'égalité

$$s(\sigma) = s(\pi).$$

En raffinant cette démonstration, on peut montrer qu'une puissance des facteurs $\varepsilon(\sigma)$ est conservée par $\tilde{\psi}(\mathrm{E})$. Le cas des facteurs ε de paires est plus délicat.

7.12. Examinons enfin le comportement des applications $\tilde{\psi}(\mathrm{E})$ vis-à-vis des changements de base cycliques. Par transitivité du changement de base et de la restriction, il suffit de considérer le cas d'une extension M/E, cyclique de degré premier l.

On veut alors prouver le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Soit* M *une extension cyclique de* E *dans* $\overline{\mathrm{F}}$, *de degré premier* l. *Si* $\sigma \in \mathscr{G}er^0_{\mathrm{E}}$ *est tel que* $\mathrm{Res}_{\mathrm{M/E}}(\sigma) \in \mathscr{G}er_{\mathrm{M}}$ *alors* $\mathrm{Ch}_{\mathrm{M/E}}(\tilde{\psi}^0(\sigma)) = \tilde{\psi}(\mathrm{M})(\mathrm{Res}_{\mathrm{M/E}}\,\sigma)$.

Remarquons que l'hypothèse $\sigma \in \mathscr{G}er^0_{\mathrm{E}}$ n'implique pas que $\mathrm{Res}_{\mathrm{M/E}}\,\sigma \in \mathscr{G}er\,\mathrm{M}$. En effet dire que σ est essentiellement ramifiée est dire que l'extension $\mathrm{K}(\sigma)$ de E fixée par le noyau de la représentation projective associée à σ est totalement ramifiée sur E. Tout ce qu'on peut dire des corps fixés par les noyaux des représentations projectives associées aux composants de $\mathrm{Res}_{\mathrm{M/E}}\,\sigma$ est qu'ils sont contenus dans $\mathrm{K}(\sigma)\,\mathrm{M}$, qui n'est pas nécessairement totalement ramifié sur M.

On peut néanmoins conclure que $\mathrm{Res}_{\mathrm{M/E}}\,\sigma \in \mathscr{G}er\,\mathrm{M}$ quand M est non ramifiée sur E, car alors $\mathrm{K}(\sigma)\,\mathrm{M}$ est bien totalement ramifié sur M, ou quand σ est induite à partir de M, car alors M est inclus dans $\mathrm{K}(\sigma)$.

Enfin, on peut aussi remarquer qu'il existe une extension non ramifiée E^{nr} de E telle que $\mathrm{Res}_{ME^{nr}/E}(\sigma)$ appartienne à $\mathscr{G}er_{ME^{nr}}$. On aura alors

$$\mathrm{Ch}_{E^{nr}/E}(\tilde{\psi}^0(E)(\sigma))=\tilde{\psi}(E^{nr})(\mathrm{Res}_{E^{nr}/E}(\sigma))$$
$$\mathrm{Ch}_{ME^{nr}/E}(\tilde{\psi}(E^{nr})(\mathrm{Res}_{E^{nr}/E}(\sigma)))=\tilde{\psi}(ME^{nr})(\mathrm{Res}_{ME^{nr}/E}(\sigma))$$

et par transitivité des changements de base

$$\mathrm{Ch}_{ME^{nr}/M}[\mathrm{Ch}_{M/E}(\tilde{\psi}(E)(\sigma)]=\tilde{\psi}(ME^{nr})(\mathrm{Res}_{ME^{nr}/E}(\sigma)).$$

Une fois prouvé le théorème plus haut, et compte tenu des remarques précédentes, il découle de la construction des $\psi(E)$ que $\psi(E)$ et $\tilde{\psi}$ (E) coïncident sur leur domaine commun de définition $\mathscr{G}er_E \cap \mathscr{G}c_E$.

En fait on peut donner une généralisation commune des $\psi(E)$ et $\tilde{\psi}(E)$ en utilisant successivement l'un ou l'autre des procédés utilisés dans les définitions de $\psi(E)$ et $\tilde{\psi}(E)$. Les compatibilités à vérifier sont alors plus nombreuses, et nous préférons renvoyer à un travail futur [He 11].

7.13. Prouvons donc le théorème 7.12. Traitons d'abord le cas où σ n'est pas induite à partir d'une extension modérément ramifiée, c'est-à-dire où la restriction $\sigma_{E'}$ de σ au corps E' fixé par $P(\sigma)_1$ est irréductible; en particulier, σ est de degré une puissance de p. Posons

$$M'=E'M$$

et, comme convenu en 7.1,

$$\sigma_M=\mathrm{Res}_{M/E}\,\sigma, \qquad \sigma_{E'}=\mathrm{Res}_{E'/E}\,\sigma\in\mathscr{G}^0_{E'},$$
$$\sigma_{M'}=\mathrm{Res}_{M/E}\,\sigma.$$

Posons aussi

$$\pi=\tilde{\psi}^0(E)(\sigma),\ \Pi=\tilde{\psi}(M)(\sigma_M).$$

On a, par construction

$$\mathrm{Ch}_{E'/E}(\pi)=\psi^0(E')(\sigma_{E'}), \qquad \text{d'où} \quad \mathrm{Ch}_{M'/E'}(\mathrm{Ch}_{E'/E}(\pi))=\psi(M')(\sigma_{M'}).$$

Le corps fixé par $P(\tau)_1$, pour un quelconque composant irréductible τ de σ_M, est une sous-extension M'' de M' sur M et comme on a

$$\mathrm{Ch}_{M''/M}(\Pi)=\psi(M'')(\sigma_{M''}) \quad \text{par définition,}$$

on a aussi

$$\mathrm{Ch}_{M'/M}(\Pi)=\psi(M')(\sigma_{M'})$$

d'où

$$\mathrm{Ch}_{M'/M}(\mathrm{Ch}_{M/E}\,\pi)=\mathrm{Ch}_{M'/M}\,\Pi.$$

Supposons d'abord σ_M irréductible; alors $\varepsilon\sigma \neq \sigma$ pour tout caractère non trivial de $\mathrm{Gal}(M/E)$ donc $\varepsilon\pi \neq \pi$ par injectivité de $\tilde{\psi}(E)$; par suite $\mathrm{Ch}_{M/E}\,\pi$ appartient à $\mathscr{A}^0_M$.

De même, σ_M étant irréductible, Π est cuspidal. Comme $\mathrm{Ch}_{M/E}(\pi)$ et Π sont tous deux cuspidaux et ont le même changement de base dans l'extension modérée M′ de M, et le même caractère central, on obtient

$$\Pi=\mathrm{Ch}_{M/E}\,\pi.$$

Supposons ensuite σ_M réductible.

On a donc

$$\sigma_M=\bigoplus_{g\in \mathrm{Gal}(M/E)}\tau^g$$
$$\sigma_{M'}=\bigoplus_{g\in \mathrm{Gal}(M'/E')}\tau'^g$$

où $\tau\in\mathscr{G}^0_M$, $\tau'=\mathrm{Res}_{M'/M}\,\tau\in\mathscr{G}^0_{M'}$.

On obtient donc que $\mathrm{Ch}_{M/E}(\pi)$ a même changement de base à M′ que Π, à savoir

$$\boxplus_{g\in \mathrm{Gal}(M'/E')}\psi^0_{M'}(\tau'^g).$$

On en déduit (*voir* 6.6) que $\mathrm{Ch}_{M/E}(\pi)$ est de la forme

$$\boxplus_{g\in \mathrm{Gal}(M/E)}\omega_g\,\tilde{\psi}^0_M(\tau^g)$$

où ω_g est un caractère de $\mathrm{Gal}(M/M)$. Mais comme $\mathrm{Ch}_{M/E}(\pi)$ est forcément invariant par $\mathrm{Gal}(M/E)$ on a

$$\mathrm{Ch}_{M/E}(\pi)=\omega\Big(\boxplus_{g\in \mathrm{Gal}(M/E)}\tilde{\psi}^0_M(\tau^g)\Big)=\omega\,\Pi$$

pour un caractère ω de $\mathrm{Gal}(M'/M)$. La condition de caractère central impose alors qu'on ait

$$\omega^{p^n}=1 \quad \text{où } p^n \text{ est la dimension de } \sigma,$$

d'où $\omega=1$, car ω est d'ordre premier à p.

On a donc bien

$$\mathrm{Ch}_{M/E}(\pi)=\Pi.$$

7.13. Traitons ensuite le cas où $\sigma=\mathrm{Ind}^E_{E'}\,\tau$ pour une extension modérée (totalement ramifiée) E′ de E, maximale pour cette propriété. Posons $M'=ME'$. On a, par le cas précédent,

$$\mathrm{Ch}_{\mathrm{M}'/\mathrm{E}'}(\tilde{\psi}^0_{\mathrm{E}'}(\tau^g)) = \tilde{\psi}_{\mathrm{M}'}(\mathrm{Res}_{\mathrm{M}'/\mathrm{E}'}(\tau^g))$$

pour tout $g \in \mathrm{Gal}(\mathrm{E}'/\mathrm{E})$.

En effet τ^g est bien essentiellement ramifiée, de même que chacun des composants de sa restriction à M′.

On déduit donc

$$\mathrm{Ch}_{\mathrm{M}'/\mathrm{M}}(\Pi) = \mathrm{Ch}_{\mathrm{M}'/\mathrm{M}}(\mathrm{Ch}_{\mathrm{M}/\mathrm{E}}(\pi)).$$

– Si $\sigma_{\mathrm{M}} = \mathrm{Res}_{\mathrm{M}/\mathrm{E}}\,\sigma$ est irréductible, alors Π et $\mathrm{Ch}_{\mathrm{M}/\mathrm{E}}\,\pi$ sont cuspidales et ont même changement de base à M′, qui est de la forme $\boxplus\,\pi_i$ où les π_i sont au nombre de $[\mathrm{M}':\mathrm{M}]$, cuspidaux, distincts, et conjugués sous $\mathrm{Gal}(\mathrm{M}'/\mathrm{M})$.

– Si σ_{M} est réductible, deux cas sont possibles; si $\mathrm{M} \subset \mathrm{E}'$, alors Π et $\mathrm{Ch}_{\mathrm{M}/\mathrm{E}}\,\pi$ ont même changement de base à E′, qui est de la forme $\boxplus\,\pi_i$ où les π_i sont au nombre de $[\mathrm{E}':\mathrm{E}]$, cuspidaux, distincts et conjugués sous $\mathrm{Gal}(\mathrm{E}'/\mathrm{E})$; si $\mathrm{M} \subset \mathrm{E}'$, alors M/E est sauvagement ramifiée (car σ n'est pas induite à partir d'une extension non ramifiée ou d'une extension cyclique, modérément ramifiée, et non incluse dans E′). Par suite on a $l=p$; on voit facilement que cela impose que τ_{M} est réductible et donc que Π et $\mathrm{Ch}_{\mathrm{M}/\mathrm{E}}\,\pi$ ont même changement de base à M′, qui est de la forme $\boxplus\,\pi_i$ où les π_i sont au nombre de $[\mathrm{M}':\mathrm{E}]$, cuspidaux, distincts et conjugués sous $\mathrm{Gal}(\mathrm{M}'/\mathrm{E})$.

Dans tous ces cas, il découle de 6.6 qu'il n'y a qu'un seul élément de $\mathscr{A}_{\mathrm{M}}$ qui ait le bon changement de base à M′. On conclut alors à l'égalité $\Pi_i = \mathrm{Ch}_{\mathrm{M}/\mathrm{E}}\,\pi$, d'où le théorème 7.12.

7.14. Rappelons ici certaines propriétés de la famille d'applications $\tilde{\psi}(\mathrm{E})$ que nous avons définie.

Pour $\sigma \in \mathscr{G}er_{\mathrm{E}}$, on a

(i) $\omega_{\tilde{\psi}(\mathrm{E})(\sigma)} = \det \sigma$.

(ii) $\tilde{\psi}(\mathrm{E})(\chi\sigma) = \chi\,\tilde{\psi}(\mathrm{E})(\sigma)$ pour $\chi \in \mathscr{A}_{\mathrm{E}}(1)$.

(iii) $\tilde{\psi}(\mathrm{E}^\tau)(\sigma^\tau) = (\tilde{\psi}(\mathrm{E})(\sigma))^\tau$ pour $\tau \in \mathrm{Gal}(\bar{\mathrm{F}}/\mathrm{F})$.

(iv) $s(\tilde{\psi}(\mathrm{E})(\sigma)) = s(\sigma)$.

(v) $\tilde{\psi}(\mathrm{E})$ est injective.

(vi) si $\sigma \in \mathscr{G}er_{\mathrm{E}}(1) = \mathscr{G}_{\mathrm{E}}(1)$ alors $\tilde{\psi}(\mathrm{E})(\sigma)$ est donné par la théorie du corps de classes.

(vii) si $\sigma \in \mathscr{G}c_{\mathrm{E}}$ alors $\tilde{\psi}(\mathrm{E})(\sigma) = \psi(\mathrm{E})(\sigma)$.

(viii) si M/E est une extension cyclique de degré premier telle que $\mathrm{Res}_{\mathrm{M}/\mathrm{E}}\,\sigma$ appartienne à $\mathscr{G}er_{\mathrm{M}'}$ alors

$$\mathrm{Ch}_{\mathrm{M}/\mathrm{E}}(\tilde{\psi}(\mathrm{E})(\sigma)) = \tilde{\psi}(\mathrm{M})(\mathrm{Res}_{\mathrm{M}/\mathrm{E}}\,\sigma).$$

7.15. On veut bien entendu poursuivre la construction. Soit $\sigma \in \mathscr{G}^0_{\mathrm{E}}$. Notons E_0 l'extension de E fixée par $\mathrm{P}(\sigma)_0$; c'est une extension cyclique non ramifiée de E. Si E′ est la sous-extension fixée par le stabilisateur dans $\mathrm{Gal}(\mathrm{E}_0/\mathrm{E})$ d'un composant irréductible quelconque de $\mathrm{Res}_{E_0/E}(\sigma)$, alors, posant

$$\rho = \mathrm{Res}_{E'/E}(\sigma)$$

et

$$\tau = \mathrm{Res}_{E_0/E}(\sigma),$$

on peut écrire

$$\rho = \rho_1 \oplus \ldots \oplus \rho_s \qquad \text{avec} \quad s = [E' : E]$$

et

$$\tau = \tau_1 \oplus \ldots \oplus \tau_s \qquad \text{avec} \quad \tau_i = \mathrm{Res}_{E_0/E'}(\rho_i).$$

On a $\tau_i \in \mathscr{G}er^0_{E_0}$, (d'où $\tau \in \mathscr{G}er_{E_0}$) et $\tilde{\psi}_{E_0}(\tau_1)$ a $\mathrm{Gal}(E_0/E')$ pour stabilisateur dans $\mathrm{Gal}(E_0/E)$. Par suite, il existe $[E_0 : E']$ éléments distincts π de $\mathscr{A}^0_{E'}$ tels que $\mathrm{Ch}_{E_0/E'}(\pi) = \psi_{E_0}(\tau_1)$; ils se déduisent de l'un d'entre eux, disons π_1, par torsion par les caractères de $\mathrm{Gal}(E_0/E')$. Par contre, on *ne peut pas* spécifier uniquement π_1 en imposant son caractère central, car il n'y a aucune raison pour que $[E_0 : E']$ soit premier au degré de τ_1; le cas contraire se produit d'ailleurs déjà pour les représentations primitives σ de degré 2, quand $P(\sigma)$ est isomorphe au groupe symétrique S_4.

Néanmoins, si nous choisissons un tel élément π_1 alors pour $g \in \mathrm{Gal}(E'/E)$, π_1^g est un élément de $\mathscr{A}^0_E$, vérifiant $\mathrm{Ch}_{E_0/E'}(\pi_1^g) = \tilde{\varphi}_{E_0}(\tau_1^g)$. On peut donc former $\boxplus\, \pi_1^g$ [où g parcourt $\mathrm{Gal}(E'/E)$], qui est discret sous $\mathrm{Gal}(E'/E)$ puisque $\pi_1^g = \pi_1$ implique $\tau_1^g = \tau_1$ d'où $g = \mathrm{id}$. Par suite il existe un unique élément π de $\mathscr{A}^0_E$ tel que $\mathrm{Ch}_{E'/E}(\pi) = \boxplus\, \pi_1^g$. On montre comme en 7.11 qu'on a $s(\pi) = s(\sigma)$. *On peut poser* $\pi_E(\sigma) = \pi$, et pour chaque caractère $\chi \in \mathscr{X}_E$, $\pi_E(\chi\sigma) = \chi\pi$. Pour prouver que cette définition est licite, il suffit de voir que si $\chi \in \mathscr{X}_E$ vérifie $\chi\sigma = \sigma$, alors on a $\chi\pi = \pi$. Si $\chi\sigma = \sigma$ alors on a $\chi_{E'} . \rho_1 = \rho_j$ pour $1 \leqq j \leqq s$. Si L est le corps fixé par $\mathrm{Ker}(\chi)$ et $M = LE_0$ alors on obtient $\mathrm{Res}_{M/E_0}(\tau_1) = \mathrm{Res}_{M/E_0}(\tau_j)$; mais ces restrictions sont distinctes pour $j \neq 1$ puisque par le lemme 7.7 la restriction à W_M de σ est sans multiplicité.

Pour chaque classe de $\mathscr{G}^0_E$ modulo $\mathscr{X}_E$, on peut de cette façon choisir un $\pi \in \mathscr{A}^0_E$ correspondant à un élément σ de la classe, et définir l'application π_E sur la classe. Il est clair, par construction, que π_E est compatible à la torsion par $\mathscr{X}_E$ et préserve les conducteurs. On démontre, de manière analogue à 7.9, que π_E est injective (*voir* les arguments utilisés dans les cas plus compliqués en 7.19 et 7.25). Cependant on ne sait pas si ces applications π_E ainsi construites sont compatibles à l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$, à la torsion par $\mathscr{A}_E(1)$ ou au changement de base, et cela ne suffit pas à prouver le théorème 1.2. Il nous faudra bien prouver le théorème 1.9.

7.16. Dorénavant, nous fixons une extension cyclique M/L comme dans le théorème 1.9, de degré premier l. Nous gardons les notations de 1.9. En particulier G désigne le groupe $\mathrm{Gal}(M/L)$ et Ξ son groupe des caractères.

Fixons $\sigma \in G_L^0(n)$. Le stabilisateur H de σ dans $\mathscr{X}_L \times \Xi$ est fini. On notera N l'extension de E correspondant à H. Deux possibilités se présentent alors :

1° σ est induite à partir de N. C'est le cas si H est cyclique, et en particulier si M/L est non ramifiée.

2° σ n'est pas induite à partir de N. Cela ne peut se produire que si H contient un (unique) sous-groupe isomorphe à $\mathbf{Z}/l\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/l\mathbf{Z}$. Alors, en particulier, N contient M.

Le premier cas se subdivise d'ailleurs en deux sous-cas.

1° *a.* N contient M *i. e.* σ est induite à partir de M.

1° *b.* $N \cap M = L$.

7.17. Plaçons-nous d'abord dans le cas 1° *a.*

LEMME. — *Supposons σ induite à partir de* N *contenant* M. *Quels que soient $\chi \in \mathscr{X}_N$ et les composants irréductibles τ et τ' de* $\mathrm{Res}_{N/L}(\sigma)$, *$\chi\tau = \tau'$ implique $\tau = \tau'$ et $\chi = 1$. En particulier, les restrictions à une extension non ramifiée de* N *de τ et τ' distincts restent irréductibles et distinctes.*

En effet, si on étend χ en un caractère η de W_L, on obtient, puisque $\sigma = \mathrm{Ind}_N^L \tau = \mathrm{Ind}_N^L \tau'$ par 7.7,

$$\sigma = \eta\sigma, \qquad \text{d'où} \quad \eta \in H \quad \text{et} \quad \eta_N = \chi = 1.$$

La dernière assertion vient du fait que si τ se réduit sur une extension non ramifiée, on a $\chi\tau = \tau$ pour un $\chi \in \mathscr{X}_N$ $\chi \neq 1$; si τ et τ' deviennent égaux sur une extension non ramifiée de N, ils diffèrent par un caractère de $\mathscr{X}_N$.

Choisissons alors un composant τ de $\mathrm{Res}_{N/L}(\sigma)$ et choisissons aussi comme en 7.12 un élément $\pi \in \mathscr{A}_N^0$ correspondant à τ. Pour $g \in H$, $\chi \in \mathscr{X}_N$, associons à $\chi\tau^g$ l'élément $\chi\pi^g$ de $\mathscr{A}_N^0$. Cette définition est licite à cause du lemme précédent. Pour $g \in H$ le changement de base de π^g à une extension non ramifiée assez grande N^{nr} de N est, par construction, $\tilde{\psi}(N^{nr})(\mathrm{Res}_{N^{nr}/N} \tau^g)$. Le lemme précédent montre que les restrictions $\mathrm{Res}_{N^{nr}/N} \tau^g$ sont irréductibles et distinctes quand g parcourt H. On en déduit que les π^g sont cuspidaux et distincts. Pour $g \in G$ et $\chi \in \mathscr{X}_M$, considérons $\boxplus \chi_N \pi^h$, où h parcourt les éléments de H se projetant sur g dans le quotient G de H; c'est un élément Gal(N/M)-cuspidal et on voit qu'il existe un unique élément dans $\mathscr{A}_M^0$, dont le changement de base à N soit $\underset{h}{\boxplus} \chi_N \pi^h$; on le note $\varphi_M^0(\chi\rho^g)$ où $\rho = \mathrm{Ind}_N^M \tau$.

On a alors

$$\varphi_M^0(\chi\rho^g) = \chi\varphi_M^0(\rho)^g \qquad \text{pour} \quad g \in G,\ \chi \in \mathscr{X}_M.$$

De même $\underset{g \in G}{\boxplus} \chi_M \varphi_M^0(\rho)^g$ est Gal(M/L)-cuspidal pour tout $\chi \in \mathscr{X}_L$, et on note $\varphi_L^0(\chi\sigma)$ l'unique élément de $\mathscr{A}_L^0$ dont le changement de base à M soit $\underset{g \in G}{\boxplus} \chi_M \varphi_M^0(\rho)^g$.

On a alors

$$\varphi_L^0(\chi\omega\sigma) = \chi\omega\varphi_L^0(\sigma)$$

quels que soient $\chi \in \mathscr{X}_L$, $\omega \in \Xi$. On a aussi

$$\mathrm{Ch}_{M/L} \circ \varphi_L^0(\chi\omega\sigma) = \varphi_M \circ \mathrm{Res}_{M/L}(\chi\omega\sigma).$$

Remarquons enfin que, pour une extension non ramifiée assez grande N^{nr} de N, on a

$$\mathrm{Ch}_{N^{nr}/L}(\varphi_L^0(\sigma)) = \tilde{\Psi}(N^{nr})(\mathrm{Res}_{N^{nr}/L}\,\sigma)$$

et, pour tout composant ρ^g de $\mathrm{Res}_{M/L}\,\sigma$ ($g \in \mathrm{Gal}(M/L)$)

$$\mathrm{Ch}_{N^{nr}/M}(\varphi_M^0(\rho^g) = \tilde{\Psi}(N^{nr})(\mathrm{Res}_{N^{nr}/M}(\rho^g)) \quad (cf.\ 7.12).$$

7.18. Plaçons-nous dans le cas 1° *b*. La méthode est très semblable à la précédente. On prouve d'abord, comme plus haut, le lemme suivant :

LEMME. — *Supposons* σ *induite à partir de* N, *mais* N *ne contenant pas* M. *Quels que soient* $\chi \in \mathscr{X}_N$, $\omega \in \Xi$ *et les composants irréductibles* τ *et* τ' *de* $\mathrm{Res}_{N/L}\,\sigma$, *l'égalité* $\chi\omega_N\tau = \tau'$ *implique* $\tau = \tau'$ *et* $\chi\omega_N = 1$. *En particulier les restrictions à une extension non ramifiée de* MN *de composants irréductibles distincts de* $\mathrm{Res}_{N/L}\,\sigma$ *restent irréductibles et distincts.* ■

On choisit comme plus haut un composant irréductible τ de $\mathrm{Res}_{N/L}(\sigma)$ et un élément π de $\mathscr{A}_N^0$ lui correspondant comme en 7.12. Pour $g \in H$, $\chi \in \mathscr{X}_N$, $\omega \in \Xi$, on associe à $\chi\omega_N\tau^g$ l'élément $\chi\omega_N\pi^g$ de $\mathscr{A}_N^0$. Puis, pour $\chi \in \mathscr{X}_L$, $\omega \in \Xi$, on prend pour $\varphi_L^0(\chi\sigma)$ l'unique élément de $\mathscr{A}_L^0$ dont le changement de base à N est $\boxplus_{g \in H} \chi_N\omega_N\pi^g$ (on vérifie comme plus haut que $\square_{g \in H} \chi_N\omega_N\pi^g$ est H-cuspidal). On a alors

$$\varphi_L^0(\chi\omega\sigma) = \chi\omega\sigma) = \chi\omega\varphi_L^0(\sigma) \qquad \text{pour} \quad \chi \in \mathscr{X}_L, \quad \omega \in \Xi.$$

De plus on a

$$\omega\varphi_L^0(\sigma) \neq \varphi_L^0(\sigma) \qquad \text{pour} \quad \omega \in \Xi\ \omega \neq 1:$$

en effet l'égalité entraînerait

$$\bigoplus_{g \in H} \omega_{N^{nr}}\,\mathrm{Res}_{N^{nr}/N}\,\tau^g = \bigoplus_{g \in H} \mathrm{Res}_{N^{nr}/N}\,\tau^g$$

pour toute extension non ramifiée N^{nr} assez grande de N, d'où $\omega_{N^{nr}} = 1$ par le lemme, puis $\omega_N\pi = \pi$, ce qui impose $\omega_N = 1$ et $\omega = 1$ puisque $\mathrm{Ch}_{N^{nr}/N}(\pi)$ est cuspidal. On prend alors, pour tout $\chi \in \mathscr{X}_M$, $\varphi_M^0(\chi\,\mathrm{Res}_{M/L}\,\sigma)$ comme $\chi_M\,\mathrm{Ch}_{M/L}(\varphi_L^0(\sigma)) \in \mathscr{A}_M^0$.

On a de manière immédiate les propriétés

$$\varphi_M^0(\chi(\mathrm{Res}_{M/L}\,\sigma)^g) = \chi\varphi_M^0(\mathrm{Res}_{M/L}\,\sigma)^g \quad \text{pour tout} \ \ \chi \in \mathscr{X}_M \quad \text{et} \quad g \in G$$

et

$$\varphi_M^0(\mathrm{Res}_{M/L}(\chi\omega\sigma)) = \mathrm{Ch}_{M/L}(\varphi_L^0(\chi\omega\sigma)) \qquad \text{pour} \quad \chi \in \mathscr{X}_L, \quad \omega \in \Xi.$$

De plus, pour une extension non ramifiée N^{nr} assez grande de MN, le changement de base de $\varphi_L^0(\sigma)$ à N^{nr} est bien $\psi_{N^{nr}}(\mathrm{Res}_{N^{nr}/L}\,\sigma)$.

Remarque. — Supposons N non ramifiée sur L. Soient $\chi\in\mathscr{X}_N$, $\omega\in\Xi$ et $g\in H$. Supposons qu'on ait

$$\chi\omega_N\,\pi^g=\pi$$

alors on a $\chi\omega_N=1$, $g=1$ d'où $\chi=\omega=1$. Par suite, si on a $\chi\in\mathscr{X}_{MN}$ et $g\in\mathrm{Gal}(MN/L)$ tels que $\chi\,\mathrm{Ch}_{M/L}(\pi)^g=\mathrm{Ch}_{M/L}(\pi)$, alors on a $g=1$ et $\chi=1$.

7.19. Dans les cas 1° *a* et *b*, nous avons donc construit π_M sur les classes modulo $\mathscr{X}_M\times G$ des composants irréductibles de $\mathrm{Res}_{M/L}\,\sigma$, et π_L sur la classe de σ modulo $\mathscr{X}_L\times\Xi$. Ces constructions vérifient, sur ces ensembles de définition, les propriétés du théorème 1.9 sauf peut-être l'injectivité qu'il faudrait vérifier. Traitons dès maintenant cette vérification, en remarquant que dans le cas 2° à traiter aux numéros suivants, comme dans les cas 1° *a* et *b*, la construction de $\varphi_L^0(\sigma)$ pour $\sigma\in\mathscr{G}_L^0$ est telle que, pour une extension non ramifiée assez grande M^{nr} de M, le changement de base à M^{nr} de $\varphi_L^0(\sigma)$ est

$$\psi(M^{nr})(\mathrm{Res}_{M^{nr}/L}\,\sigma).$$

Par suite, si σ et $\sigma'\in\mathscr{G}_L^0$ ont la même image par φ_L^0, alors σ et σ' diffèrent par un caractère $\chi\omega$, où $\chi\in\mathscr{X}_L$ et $\omega\in\Xi$. De même, on ramène l'injectivité de φ_M^0 au cas d'une classe modulo $\mathscr{X}_M$.

Prouvons ces injectivités dans les cas 1° *a* et 1° *b*.

Prenons donc $\sigma\in\mathscr{G}_L^0$ et $\chi\in\mathscr{X}_L$, $\omega\in\Xi$ tels que

$$\varphi_L^0(\omega\chi\sigma)=\varphi_L^0(\sigma).$$

Par changement de base à N, cela impose

$$\boxplus_{g\in H}(\omega\chi)_N\,\pi^g=\boxplus_{g\in H}\pi^g$$

avec les notations de 7.14 et 7.15.

Choisissons une extension non ramifiée assez grande N^{nr} de N, telle que le changement de base de π^g à N^{nr} soit $\tilde{\psi}(N^{nr})(\mathrm{Res}_{N^{nr}/N}\,\tau)^g$. Par suite, on voit que $(\omega\chi)_N$ est non ramifié et

$$(\omega\chi)_N\,\pi=\pi$$

ce qui impose $(\omega\chi)_N=1$ puisque π reste cuspidal sur toute extension non ramifiée de N.

On a alors $\omega\chi\sigma=\sigma$.

On raisonne de même pour prouver l'injectivité de φ_M^0 sur une classe modulo $\mathscr{X}_M$ dans les cas 1° *a* et 1° *b*.

7.20. Examinons maintenant le cas 2°. Il existe alors une extension non ramifiée L^{nr} de L telle que $N=ML^{nr}$ et l'extension N/L^{nr} est cyclique, ramifiée de degré *l*. Comme L^{nr}/L est cyclique, σ est en tout cas induite à partir de L^{nr}. Soit $\tau_1\in\mathscr{G}_{L^{nr}}^0$ induisant σ.

Soit $\omega \in \Xi$, $\omega \neq 1$; on a $\omega\sigma = \sigma$. On ne peut avoir $\omega_{L^{nr}} \tau_1 = \tau_1$ car alors τ_1 serait induite à partir de N et ce serait aussi le cas de σ. Donc $\omega_{L^{nr}} \tau_1 = \tau_1^\gamma$ pour un élément γ, nécessairement d'ordre l, de $\mathrm{Gal}(L^{nr}/L)$. Notons L' le sous-corps de L^{nr} fixé par γ et M' le corps $L'M$. On a alors le diagramme de corps suivant :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& N \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & \\
L^{nr} \arrow[dr, dash] & & M' \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
& L' \arrow[dr, dash] & & M \arrow[dl, dash] \\
& & L &
\end{tikzcd}$$

et le groupe $\mathrm{Gal}(N/L')$ est l'unique sous-groupe de H isomorphe à $(\mathbf{Z}/l\,\mathbf{Z})^2$.

Notons ρ l'induite à L' de τ_1. La restriction de ρ à L^{nr} est $\bigoplus_{i=0}^{l-1} \tau_1^{\gamma^i}$ et par suite la restriction de ρ à N est isotypique de type τ où $\tau = \mathrm{Res}_{N/L^{nr}}(\tau_1)$; on a $\mathrm{Res}_{N/L'}(\rho) = l\tau$.

Utilisons alors la théorie de Clifford ([CR] § 11A). Il existe une représentation projective T de $W_{L'}$, prolongeant la représentation projective de W_N définie par τ, et une représentation projective S de $W_{L'}$, triviale sur W_N et de multiplicateur inverse de celui de T, telles qu'on ait $\bar{\rho} = T \otimes S$. Comme on a $H^2(G_{L'}, \mathbf{C}^\times) = 0$ (*cf.* par exemple [He 1], § 2), les représentations projectives T et S se relèvent en des représentations linéaires t et s. Comme $t \otimes s$ définit la même représentation projective que ρ, on peut supposer t et s choisies de sorte que $\rho = t \otimes s$.

La représentation projective S de $\mathrm{Gal}(N/L')$ est irréductible. Comme $\mathrm{Gal}(N/L')$ est un groupe abélien élémentaire de type (l, l), la représentation linéaire s est de type Heisenberg : sa restriction à W_N est une somme de l fois le même caractère η de W_N, qui est invariant par $\mathrm{Gal}(N/L')$ mais ne se prolonge pas à $W_{L'}$; par contre il se prolonge à $W_{L^{nr}}$ (ou W_M) de l façons différentes, et l'induite à $W_{L'}$ de chacun de ces caractères est s. La restriction de ρ à L^{nr} contient τ_1 qui est donc de la forme $\eta_1 . \mathrm{Res}_{L^{nr}/L'}(t)$ pour un prolongement η_1 de η à $W_{L^{nr}}$. De même, les composants de la restriction de ρ à M sont les $\eta_2 \mathrm{Res}_{M/L}(t)$ quand η_2 parcourt les prolongements de η à W_M.

7.21. Fixons un tel composant $\tau_2 = \eta_2 \mathrm{Res}_{M'/L'} t$. Alors τ_1 et τ_2 se restreignent à N en une même représentation

$$\tau = \eta . \mathrm{Res}_{N/L'} t$$

Lemme. — (i) On a

$$\mathrm{Res}_{M'/L'} \rho = \bigoplus_g \tau_2^g = \bigoplus_\varepsilon \varepsilon\tau_2$$

où g parcourt $\mathrm{Gal}(M'/L')$ *et* ε *les caractères de* $\mathrm{Gal}(N/M')$. *Les* τ_2^g *pour g parcourant* $\mathrm{Gal}(M'/L)$ *sont irréductibles et distincts. Les* τ_2^g *pour g parcourant* $\mathrm{Gal}(M'/M)$ *restent irréductibles et distincts sur toute extension non ramifiée de* M.

(ii) On a

$$\mathrm{Res}_{L^{nr}/L} \rho = \bigoplus_g \tau_1^g = \bigoplus_\varepsilon \varepsilon\tau_1$$

où g parcourt $\mathrm{Gal}(\mathrm{L}^{nr}/\mathrm{L}')$ *et* ε *les caractères de* $\mathrm{Gal}(\mathrm{N}/\mathrm{L}^{nr})$. *Les* τ_1^g *pour g parcourant* $\mathrm{Gal}(\mathrm{L}'/\mathrm{L})$ *restent irréductibles et distincts pour toute extension non ramifiée de* L^{nr}.

(iii) *On a* $\mathrm{Res}_{\mathrm{N}/\mathrm{L}'}\,\rho = l\,\tau = l\,\eta\,\mathrm{Res}_{\mathrm{N}/\mathrm{L}'}(t)$.

(iv) *Soit* $\mathrm{Gal}(\mathrm{L}'/\mathrm{L}_0)$ *le stabilisateur de t dans* $\mathrm{Gal}(\mathrm{L}'/\mathrm{L})$, t_0 *une extension de t à* $\mathrm{W}_{\mathrm{L}_0}$ *et* $\mathrm{T} = \mathrm{Ind}_{\mathrm{L}_0}^{\mathrm{L}}\,t_0$. *Alors on est, pour* T, *dans le cas* 1° *b*. [*l'extension* N(T) *attachée à* T *étant alors* L_0] *ou bien dans le cas* 2° [*l'extension* N(T) *étant alors* $\mathrm{L}_0\mathrm{M}$]. *Les* t^g *pour* $g \in \mathrm{Gal}(\mathrm{L}_0/\mathrm{L})$ *restent irréductibles sur toute extension non ramifiée de* N, *et distincts sur toute extension non ramifiée de* L′.

Démonstration. — Les formules pour les restrictions de ρ à M′, N et L^{nr} sont claires. Comme l'induite de τ_2 à L est irréductible, les τ_2^g pour $g \in \mathrm{Gal}(\mathrm{M}'/\mathrm{L})$ sont irréductibles et distincts. Comme l'induite de τ_2 à M est irréductible, l'assertion sur les τ_2^g, $g \in \mathrm{Gal}(\mathrm{M}'/\mathrm{M})$, découle de 7.7. De même, l'induite de τ_1 à L est irréductible, d'où l'assertion sur les τ_1^g, $g \in \mathrm{Gal}(\mathrm{L}'/\mathrm{L})$. Ceci prouve (i) (ii) et (iii).

Prouvons (iv). La restriction de t à N est irréductible par construction. Il en est donc de même de la restriction de t^g à N pour $g \in \mathrm{Gal}(\mathrm{L}_0/\mathrm{L})$. Soit $\chi \in \mathscr{X}_{\mathrm{N}}$ tel que $\chi\,\mathrm{Res}_{\mathrm{N}/\mathrm{L}'}(t^g) = \mathrm{Res}_{\mathrm{N}/\mathrm{L}'}(t^g)$. On a alors $\chi\tau = \tau$, d'où, par induction à L′, $l\chi'\rho = l\rho$ pour tout $\chi' \in \mathscr{X}_{\mathrm{L}'}$ prolongeant χ; on a donc $\chi'\rho = \rho$ et, par (ii), $\chi'_{\mathrm{L}^{nr}} = 1$ d'où $\chi = 1$. Par suite, les t^g pour $g \in \mathrm{Gal}(\mathrm{L}_0/\mathrm{L})$ restent irréductibles sur toute extension non ramifiée de N. La dernière assertion de (iv) découle de 7.7.

Notons H(T) le groupe des caractères dans $\mathscr{X}_{\mathrm{L}} \times \Xi$ qui fixent T; alors N(T) est l'extension définie par H(T).

Elle contient ML_0. Si on est dans le cas 1° *a* pour T, alors $\mathrm{N}(\mathrm{T}) = \mathrm{ML}_0$ et t_0 est induite à partir de ML_0. Par suite, t est induite de M′, ce qui n'est pas. Si on est dans le cas 1° *b*. avec $\mathrm{N}(\mathrm{T}) \neq \mathrm{L}_0$ alors t_0 est induite à partir de N(T) qui est ramifiée cyclique de degré l sur L_0. Par suite t est induite à partir de N(T) L′ qui est ramifiée cyclique de degré l sur L′, donc en particulier incluse dans N; cela contredit le fait que la restriction de t à N est irréductible.

La dernière assertion de (iv) découle de 7.7. On a prouvé le lemme.

7.22. Conservons les notations de la partie (iv) du lemme 7.21 et notons Ξ_{L_0} le groupe des caractères de $\mathrm{Gal}(\mathrm{M}_0/\mathrm{L}_0)$, qu'on peut aussi voir comme le groupe des restrictions à $\mathrm{W}_{\mathrm{L}_0}$ des éléments de Ξ (nous utiliserons sans commentaire une notation analogue dans les numéros suivants). Pour T, on a vu qu'on pouvait se trouver dans les cas 1° *b*. ou 2°. Cependant la méthode utilisée dans le cas 1° *b*, ou encore la méthode utilisée ici dans les cas 2° montrent que l'on peut prouver l'hypothèse de récurrence suivante :

(HR) On peut définir :

1° sur la classe de t_0 modulo $\mathscr{X}_{\mathrm{L}_0} \times \Xi_{\mathrm{L}_0} \times \mathrm{Gal}(\mathrm{L}_0/\mathrm{L})$ une application injective $\alpha \mapsto \pi(\alpha)$ dans $\mathscr{A}_{\mathrm{L}_0}^0$, qui conserve le degré et soit équivariante sous $\mathscr{X}_{\mathrm{L}_0} \times \Xi_{\mathrm{L}_0} \times \mathrm{Gal}(\mathrm{L}_0/\mathrm{L})$ (et, en particulier, préserve les stabilisateurs);

2° sur la classe de $\mathrm{Res}_{\mathrm{M}_0/\mathrm{L}_0}\,t_0$ modulo $\mathscr{X}_{\mathrm{M}_0} \times \mathrm{Gal}(\mathrm{M}_0/\mathrm{L})$, une application injective $\beta \mapsto \pi(\beta)$ qui conserve le degré et soit équivariante;

ces applications étant compatibles au changement de base de L_0 à M_0, en un sens évident, et telles que, pour toute extension non ramifiée assez grande L^{gr} de L on ait

$$\mathrm{Ch}_{L^{gr}/L_0}(\pi(\alpha)) = \tilde{\psi}(L^{gr})(\mathrm{Res}_{L^{gr}/L_0}(\alpha))$$

et

$$\mathrm{Ch}_{ML^{gr}/M_0}(\pi(\beta)) = \tilde{\psi}(ML^{gr})(\mathrm{Res}_{ML^{gr}/M_0}(\beta)).$$

Dans le cas 1° *b* cette hypothèse a été établie en 7.18 (*cf.* en particulier la remarque finale de 7.18 pour l'injectivité). Dans le cas 2°, l'hypothèse sera établie à la fin de ce paragraphe. Remarquons que l'on pourra bien raisonner par récurrence sur la dimension, puisque celle de T est strictement inférieure à celle de σ!

Par changement de base de L_0 à L', on obtient donc, sur la classe de t modulo $\mathscr{X}_{L'} \times \Xi_{L'} \times \mathrm{Gal}(L'/L)$, une application $\alpha \mapsto \pi(\alpha)$ dans $\mathscr{A}^0_{L'}$ qui est injective et équivariante, et sur la classe de $\mathrm{Res}_{M'/L'}(t)$ modulo $\mathscr{X}_{M'} \times \mathrm{Gal}(M'/L)$, une application $\beta \mapsto \pi(\beta)$ dans $\mathscr{A}^0_{M'}$, qui est injective et équivariante, ces applications étant compatibles au changement de base de L' à M' et vérifiant, pour toute extension non ramifiée assez grande L^{gr} de L'

$$\mathrm{Ch}_{L^{gr}/L'}(\pi(\alpha)) = \tilde{\psi}(L^{gr})(\mathrm{Res}_{L^{gr}/L'}(\alpha))$$

$$\mathrm{Ch}_{ML^{gr}/M'}(\pi(\beta)) = \tilde{\psi}(ML^{gr})(\mathrm{Res}_{ML^{gr}/M'}(\beta)).$$

7.23. Nous sommes maintenant capable d'effectuer les constructions voulues de $\varphi^0_L(\sigma)$ et $\varphi_M(\mathrm{Res}_{M/L}\,\sigma)$. Posons $\pi = \pi(t) \in \mathscr{A}^0_{L'}$ l'élément obtenu au numéro précédent. Les changements de base $\pi_{L^{nr}}$, $\pi_{M'}$, π_N de π à L^{nr}, M', N respectivement, sont cuspidaux.

L'élément $\boxplus\, \eta_2^g \pi_{M'}$, où g parcourt $\mathrm{Gal}(M'/L')$ est stable sous $\mathrm{Gal}(M'/L')$. Si $g \in \mathrm{Gal}(M'/L')$ est tel que $\eta_2^g \pi_{M'} = \eta_2 \pi_{M'}$, alors on a $\varepsilon\pi_{M'} = \pi_{M'}$ pour $\varepsilon = \eta_2^g/\eta_2$, caractère de Gal(N/M'); ce n'est possible que si $\varepsilon = 1$ puisque π_N est cuspidal. Ceci prouve que $\underset{g}{\boxplus}\, \eta_2^g \pi_{M'}$ est Gal(M'/L')-cuspidal, donc est le changement de base d'un unique $\Pi \in \mathscr{A}^0_{L'}$.

Formons $\boxplus\, \Pi^g$, g parcourant Gal(L'/L); c'est bien sûr stable sous Gal(L'/L). Si on a $\Pi^g = \Pi$ pour $g \in \mathrm{Gal}(L'/L)$, on obtient, par changement de base à une extension non ramifiée assez grande N^{gr} de N

$$\underset{h \in \mathrm{Gal}(M'/L')}{\boxplus} l\,\eta^g_{N^{gr}}\,\mathrm{Ch}_{N^{gr}/L'}(\pi)^{gh} = \underset{h \in \mathrm{Gal}(M'/L')}{\boxplus} l\,\eta_{N^{gr}}\,\mathrm{Ch}_{N^{gr}/L'}(\pi)^{h}$$

d'où $l\,\mathrm{Res}_{N^{gr}/N}(\tau)^g = l\,\mathrm{Res}_{N^{gr}/N}(\tau)$, d'où encore

$$\mathrm{Res}_{N^{gr}/N}(\tau)^g = \mathrm{Res}_{N^{gr}/N}(\tau)$$

ce qui contredit la partie (i) du lemme 7.21 sauf si $g = 1$. Donc $\underset{g \in \mathrm{Gal}(L'/L)}{\boxplus} \Pi^g$ est Gal(L'/L)-cuspidal; c'est donc le changement de base de L à L' d'un unique élément de $\mathscr{A}^0_L$, qu'on note $\varphi^0_L(\sigma)$.

De même, on vérifie que $\underset{g \in \mathrm{Gal}(M'/M)}{\boxplus} (\eta_\alpha \pi_{M'})^g$ est $\mathrm{Gal}(M'/M)$ cuspidal, et on note $\varphi_M^0(\nu)$, pour $\nu = \mathrm{Ind}_{M'}^{M} \tau_2$, l'élément de $\mathscr{A}_M^0$ qu'il détermine.

7.24. Soient $\omega \in \Xi$ et $\varepsilon \in \mathscr{X}_L$ tels que

$$\omega \varepsilon \sigma = \sigma$$

alors $\omega\varepsilon \in H$ donc ε est trivial sur $W_{L^{nr}}$.

On a de toute façon $\omega \varphi_L^0(\sigma) = \varphi_L^0(\sigma)$ par construction. Pour voir qu'on a $\varepsilon \varphi_L^0(\sigma) = \varphi_L^0(\sigma)$, il suffit de voir que l'on a $\varepsilon_{L'} \Pi = \Pi$ et même que

$$\underset{g}{\boxplus} \varepsilon_{M'} \eta_2^g \pi_{M'} = \underset{g}{\boxplus} \eta_2^g \pi_{M'}$$

g parcourant $\mathrm{Gal}(L'/L)$. Mais ceci est clair puisque $\varepsilon_{L'}$ étant trivial sur $W_{L^{nr}}$, on a $\underset{g}{\oplus} \varepsilon_{M'} \eta_2^g = \underset{g}{\oplus} \eta_2^g$. On peut donc poser

$$\varphi_L^0(\omega \varepsilon \sigma) = \omega \varepsilon \varphi_L^0(\sigma) \qquad \text{pour} \quad \omega \in \Xi, \quad \varepsilon \in \mathscr{X}_L.$$

Soit $\varepsilon \in \mathscr{X}_M$ et $g \in G$ tels que

$$\varepsilon \nu^g = \nu.$$

Alors g correspond à un élément, encore noté g, de $\mathrm{Gal}(M'/L')$ et $\nu^g = \mathrm{Ind}_{M'}^{M}(\tau_2^g) = \mathrm{Ind}_{M'}^{M}(\varepsilon' \tau_2)$ où $\varepsilon' = \eta_2^g/\eta_2$ est trivial sur W_N. On a donc $\mathrm{Ind}_{M'}^{M}(\varepsilon_{M'} \varepsilon' \tau_2) = \mathrm{Ind}_{M'}^{M}(\tau_2)$ ce qui impose, par le lemme 7.21 (i), qu'on ait $\varepsilon_{M'} = \varepsilon' = 1$ d'où $g = 1$, $\varepsilon_{M'} = 1$. On en tire immédiatement $\varepsilon \varphi_M^0(\nu^g) = \varphi_M^0(\nu)$. On peut donc poser, pour $g \in \mathrm{Gal}(M/L)$ et $\varepsilon \in \mathscr{X}_M$

$$\varphi_M^0(\varepsilon \nu^g) = \varepsilon \varphi_M^0(\nu)^g.$$

Comme, pour $\varepsilon \in \mathscr{X}_L$, $\mathrm{Ch}_{M/L}(\varphi_L^0(\varepsilon\sigma))$ et $\varphi_M(\mathrm{Res}_{M/L}(\varepsilon\sigma))$ ont même changement de base à M', on voit facilement qu'ils sont égaux.

7.25. Par construction, les changements de base à une extension non ramifiée assez grande N^{gr} de N sont donnés par l'application $\tilde{\psi}(N^{gr})$. Il reste à prouver l'injectivité de φ_L^0 et φ_M^0 et pour cela, on se ramène, comme en 7.19, à prouver que pour $\omega \in \Xi$, $\varepsilon \in \mathscr{X}_L$, $g \in \mathrm{Gal}(M/L)$,

$$\varphi_L^0(\varepsilon\omega\sigma) = \varphi_L^0(\sigma) \quad \text{implique} \quad \varepsilon\omega\sigma = \sigma$$

et de même $$\varphi_M^0(\varepsilon_M \nu^g) = \varphi_M^0(\nu^g) \quad \text{implique} \quad \varepsilon_M \nu = \nu.$$

On a de toute façon $\omega\sigma = \sigma$. Si on a

$$\varphi_L^0(\varepsilon\sigma) = \varphi_L^0(\sigma) \qquad \text{pour} \quad \varepsilon \in \mathscr{X}_L,$$

on a par changement de base à N

$$l \underset{g \in \mathrm{Gal}(L'/L)}{\boxplus} \varepsilon_N (\eta \,.\, \pi_N)^g = l \underset{g \in \mathrm{Gal}(L'/L)}{\boxplus} (\eta \pi_N)^g$$

ce qui impose

$$\varepsilon_{\mathrm{N}}\,\eta\pi_{\mathrm{N}}=\eta\pi_{\mathrm{N}}, \qquad \varepsilon_{\mathrm{N}}\,\pi_{\mathrm{N}}=\pi_{\mathrm{N}}$$

et enfin $\varepsilon_{\mathrm{N}}=1$ puisque π_{N} reste cuspidal sur N^{gr}. Par suite on a bien $\varepsilon_{\mathrm{L}^{nr}}=1$ et $\varepsilon\sigma=\sigma$.

La démonstration pour φ_{M}^{0} est analogue et laissée au lecteur. Cela prouve l'injectivité de φ_{L}^{0} et φ_{M}^{0}.

Il ne nous reste plus, pour terminer la preuve du théorème 1.9, qu'à vérifier l'hypothèse de récurrence (HR) énoncée en 7.22.

Pour $\varepsilon\in\mathscr{X}_{\mathrm{L}^{nr}}$, $\omega\in\Xi_{\mathrm{L}^{nr}}$, $g\in\mathrm{Gal}(\mathrm{L}^{nr}/\mathrm{L})$, on associe à $\varepsilon\omega\tau_1^g$ l'élément $\varepsilon\omega(\eta_1\,\pi_{\mathrm{L}^{nr}})^g$. De même pour $\varepsilon\in\mathscr{X}_{\mathrm{N}}$ et $g\in\mathrm{Gal}(\mathrm{N}/\mathrm{M})$ on associe à $\varepsilon\tau^g$ l'élément $\varepsilon(\eta\pi_{\mathrm{N}})^g$. Le fait que ces applications soient bien définies et injectives se vérifie comme plus haut; l'équivariance est claire par construction, de même que la propriété de compatibilité aux changements de base à N et N^{gr}.

On a (enfin)! prouvé le théorème 1.9.

8. Construction en caractéristique non nulle

8.1. Il nous reste à parachever la démonstration du théorème 1.2, pour K de caractéristique p, en prouvant l'existence d'injections φ_{K} comme dans l'énoncé du théorème. La méthode la plus simple consiste à reprendre l'argument de réduction à la caractéristique nulle déjà utilisé. On se fixe un entier $j\geqq 0$ et veut donner une injection $\varphi_{\mathrm{K}}:\mathscr{G}_{\mathrm{K}}^{0}(n,j)\to\mathscr{A}_{\mathrm{K}}^{0}(n,j)$ (où la notation j indique qu'on ne considère que des représentations de conducteurs de Swan $\leqq j$), préservant les conducteurs et compatible à la torsion par les caractères non ramifiés. On prend pour cela une extension K′ de $\mathbf{Q}_p$ d'indice de ramification e sur $\mathbf{Q}_p$ assez grand pour qu'un choix d'uniformisantes ϖ_{K} et $\varpi_{\mathrm{K}'}$ de K et K′ donne un isomorphisme $\mathscr{G}_{\mathrm{K}}/\mathscr{G}_{\mathrm{K}}^{e}\simeq\mathscr{G}_{\mathrm{K}}/\mathscr{G}_{\mathrm{K}'}^{e}$, d'où une bijection

$$\mathscr{G}_{\mathrm{K}}^{0}(n,j)\simeq\mathscr{G}_{\mathrm{K}'}^{0}(n,j)$$

préservant les conducteurs, et compatible avec l'action des caractères non ramifiés au sens de 5.1. De même on peut avoir choisi e assez grand pour qu'on ait aussi une bijection (*cf.* 2.7)

$$\mathscr{A}_{\mathrm{K}}^{0}(n,j)\simeq\mathscr{A}_{\mathrm{K}'}^{0}(n,j)$$

préservant les conducteurs et compatible à l'action des caractères non ramifiés. On peut alors transporter une injection

$$\varphi_{\mathrm{K}'}^{0}:\quad\mathscr{G}_{\mathrm{K}'}^{0}(n,j)\to\mathscr{A}_{\mathrm{K}'}^{0}(n,j)$$

en une injection

$$\varphi_{\mathrm{K}}^{0}:\quad\mathscr{G}_{\mathrm{K}}^{0}(n,j)\to\mathscr{A}_{\mathrm{K}}^{0}(n,j)$$

possédant les mêmes propriétés.

C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

[AC] J. ARTHUR et L. CLOZEL, *Base Change for* GL (n), prépublication, septembre 1986 [*Annals of Mathematics Studies*, P.U.P. (à paraître)].

[Au] *Representation Theory and Number Theory in Connection with the Local Langlands Conjecture* (*Comptes Rendus d'une conférence à l'Université d'Augsburg*, J. RITTER éd., prépublication avril 1987).

[CR] C. CURTIS et I. REINER, *Methods of Representation Theory I*, Wiley Interscience, 1981.

[De 1] P. DELIGNE, *Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions* L, in *Modular Functions of One Variable II* (*Lecture Notes in Math.*, n° 349, 1981, p. 89-118).

[De 2] P. DELIGNE, *Les corps locaux de caractéristique p, limites de corps locaux de caractéristique zéro*, in *Représentations des groupes réductifs sur un corps local*, Hermann, Coll. Travaux en cours, Paris 1984, p. 119-157.

[DH] P. DELIGNE et G. HENNIART, *Sur la variation, par torsion, des constantes locales d'équations fonctionnelles de fonctions* L (*Invent. Math.*, n° 64, 1981, p. 89-118).

[DKV] P. DELIGNE, D. KAZHDAN et M.-F. VIGNERAS, *Représentations des algèbres centrales simples p-adiques*, in *Représentations des groupes réductifs sur un corps local*, Hermann, Coll. Travaux en cours, Paris 1984, p. 33-117.

[GJ] R. GODEMENT et H. JACQUET, *Zeta Functions of Simple Algebras* (*Lecture Notes in Math.*, n° 260, 1972).

[He 1] G. HENNIART, *Représentations du groupe de Weil d'un corps local* (*l'Enseignement mathématique*, t. 26, 1980, p. 155-172).

[He 2] G. HENNIART, *La conjecture de Langlands locale pour* GL (n), in *Journées arithmétiques de Metz*, septembre 1981 (*Astérisque*, n° 94, 1982, p. 67-85).

[He 3] G. HENNIART, *La conjecture de Langlands locale pour* GL (3), (*Mémoires de la S.M.F.*, nouvelle série, n° 11/12, 1984).

[He 4] G. HENNIART, *Galois ε-Factors modulo Roots of Unity* (*Invent. Math.*, vol. 78, 1984, p. 117-126).

[He 5] G. HENNIART, *La conjecture de Langlands locale pour* GL (p), *C.R. Acad. Sci. Paris*, t. 299, 1984, p. 73-76).

[He 6] G. HENNIART, *On the Local Langlands Conjecture for* GL (n)*: the Cyclic Case* (*Annals of Math.*, t. 123, 1986, p. 145-203).

[He 7] G. HENNIART, *Le point sur la conjecture de Langlands pour* GL (N) *sur un corps local*, in *Séminaire de théorie des nombres de Paris* 1983-1984 (*Progress in Mathematics*, t. 59, Birkhäuser 1985, p. 115-131).

[He 8] G. HENNIART, *Preuve de la conjecture de Langlands locale numérique pour* GL (n), lettre à G. Laumon du 27 mars 1986 parue dans [Au].

[He 9] G. HENNIART, *Représentations des algèbres centrales simples sur un corps local de caractéristique non nulle, d'après des idées de D. Kazhdan*, en préparation.

[He 10] G. HENNIART, *Changement de base local pour* GL (n), *en caractéristique non nulle*, en préparation.

[He 11] G. HENNIART, *Quelques conséquences de la théorie du changement de base pour* GL (n), en préparation.

[Ho 1] R. HOWE, *Tamely Ramified Supercuspidal Representations of* GL (n) (*Pacific Journal of Mathematics*, vol. 73, 1977, p. 437-460).

[Ho 2] R. HOWE (with the Collaboration of A. Moy), *Harish-Chandra homomorphisms for p-Adic Groups* (*C.B.M.S. Regional Conference Series in Math.*, n° 59, A.M.S. Providence, 1985).

[JPS 1] H. JACQUET, I. I. PIATETSKI-SHAPIRO et J. SHALIKA, *Conducteur des représentations du groupe linéaire* (*Math. Ann.*, 256, 1979, p. 199-214).

[JPS 2] H. JACQUET, I. I. PIATETSKI-SHAPIRO et J. SHALIKA, *Rankin-Selberg Convolutions* (*Amer. J. of Math.*, vol. 105, 1983, p. 367-464).

[Ka 1] D. KAZHDAN, *Exposé au colloque en la mémoire de Harish-Chandra*, I.A.S. Princeton, mai 1984.

[Ka 2] D. KAZHDAN, *Representations of Groups Over Close Local Fields*, Prépublication, Harvard University, 1985.

[Ko 1] H. KOCH, *On the local Langlands Conjecture for Central Division Algebras of Index p* (*Invent. Math.*, vol. 62, 1980, p. 243-268).

[Ko 2] H. KOCH, *Bemerkungen zur numerischen lokalen Langlands Vermutung*, prépublication Ad W der DDR, P-Math 28/81, Berlin 1981 (*Proceedings Steklov Inst.*, n° 163, 1984, p. 129-136).

[Ko 3] H. KOCH, *Eisensteinsch Polynomfolgen und Arithmetiken in Divisionsalgebren über lokalen Körpen* (*Math. Nachr.*, vol. 104, 1981, p. 229-251).

[Ku] Ph. KUTZKO, *The Langlands Conjecture for* GL(2) *of a Local Field* (*Ann. of Math.*, 112, 1980, p. 381-412).

[Ku M] Ph. KUTZKO et A. MOY, *On the Local Langlands Conjecture in Prime Dimension* (*Ann. of Math.*, 121, 1985, p. 495-517).

[KZ] H. KOCH et E.-W. ZINK, *Bemerkungen zur numerischen lokalen Langlands Vermutung II*, prépublication Ad W der DDR, P-MATH 01/82, Berlin 1982 (*Proceedings Steklov Inst.*, n° 163, 1984, p. 137-140).

[La 1] R. P. LANGLANDS, *Problems in the Theory of Automorphic Forms*, in *Lecture in Modern Analysis III* (*Lecture notes in Math.*, n° 170, 1970, p. 18-86).

[Lm] G. LAUMON, *Transformation de Fourier géométrique, constantes d'équations fonctionnelles et conjecture de Weil* (*Publ. Math. I.H.E.S.*, n° 65, 1987, p. 131-210).

Mo] A. MOY, *Local Constants and the Tame Langlands Correspondence* (*Amer. J. of Math.*, vol. 108, 1986, p. 863-929).

[Rd] F. RODIER, *Représentations de* GL(n, k) *où k est un corps p-adique* (*Séminaire Bourbaki*, 34e année, 1981-1982, exposé n° 583 (*Astérisque, n*° 92-93, 1982, *p.* 201-218)).

[*Ro*] J. ROGAWSKI, *Representations of* GL(n) *and Division Algebras Over a p-Adic Field* (*Duke Math. J.*, vol. 50, 1983, p. 161-196).

[Ta] J. TATE, *Number Theoretic Background* in *Automorphic Forms, Representations and* L *Functions*, P.S.P.M. 33, A.M.S. Providence 1979, Part II, p. 3-22.

[Wi] J.-P. WINTENBERGER, *Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux; applications* (*Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4e série, 16, 1983, p. 59-89).

[Ze] A. ZELEVINSKY, *Induced Representations of Reductive p-Adic Groups II on Irreducible Representations of* GL(n) (*Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, 4e série, t. 3, 1980, p. 165-210).

[Zi] E.-W. ZINK, *Remarks on a Local Langlands Conjecture*, prépublication AdW der DDR, P/MATH 14/82, Berlin 1980.

(Manuscrit reçu le 14 décembre 1987,
révisé le 7 juin 1988).

G. HENNIART,
Université Paris-XI
Mathématiques
Bât. 425
91405 Orsay Cedex
et
École Normale Supérieure
45, rue d'Ulm
75251 Paris Cedex 05.