ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉTIENNE FOUVRY

Autour du théorème de Bombieri-Vinogradov. II

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 20, nº 4 (1987), p. 617-640
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1987_4_20_4_617_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4e série, t. 20, 1987, p. 617 à 640.

AUTOUR DU THÉORÈME DE BOMBIERI-VINOGRADOV. II

PAR ETIENNE FOUVRY

I. Introduction

Pour évaluer la répartition de la fonction arithmétique $(f)=(f_n)$ dans la progression arithmétique $\{a,\ a+q,\ a+2q,\ \dots\}$ où a et q sont des entiers premiers entre eux, on introduit la quantité :

$$\Delta((f);\ x;\ q,\ a)=\sum_{\substack{n\equiv a\,[q]\\ n\leqq x}} f_n-\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{(n,\ q)=1\\ n\leqq x}} f_n.$$

Maintenant, pour la répartition en moyenne de (f) dans les progressions arithmétiques, relativement à la pondération $(c)=(c_q)$, on pose

$$\mathrm{E}((c),\ (f);\ x,\ \mathrm{Q};\ a)=\sum_{\substack{(q,\ a)=1\\ q\leqq \mathrm{Q}}} c_q\,\Delta((f);\ x;\ q,\ a).$$

Pour des raisons techniques, on demande à (f) et (c) d'être d'ordre κ (κ entier positif). Par définition, on dit que la suite $(\zeta)=(\zeta_n)$ est *d'ordre* κ si on a, pour tout n, l'inégalité :

$$|\zeta_n|\leqq \tau_\kappa(n).$$

Dans cette expression, $\tau_\kappa(n)$ est le nombre de manières d'écrire n en produit de κ entiers positifs, et le lemme 1 entraîne qu'en moyenne $|\zeta_n|$ est plus petit qu'une puissance de $\log n$.

On dit que (f) est bien répartie, en moyenne, avec la pondération (c) jusqu'au niveau Q, si, pour tout A et tout entier $a\neq 0$, on a la majoration

$$\mathrm{E}((c),\ (f);\ x,\ \mathrm{Q};\ a)\ll_{a,\ \mathrm{A}} x\,\mathscr{L}^{-\mathrm{A}} \tag{1.1}$$

(on a posé $\mathscr{L}=\log x$). Un tel type d'inégalité est crucial dans les problèmes de crible et le théorème de Bombieri-Vinogradov ([2], [17]) combiné avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, entraîne que la fonction de von Mangoldt (Λ) est bien répartie en moyenne jusqu'au niveau $x^{1/2-\varepsilon}$, pour tout $\varepsilon>0$, avec toute pondération (c) d'ordre κ' (dans ce cas, la majoration (1.1) est uniforme sur a). L'exposant 1/2 est critique dans cette question et n'a pas été franchi, *stricto sensu* [*voir* toutefois [4] pour une légère mais impressionnante amélioration dans le cas d'une inégalité moins précise que (1.1)].

La démonstration du théorème de Bombieri-Vinogradov repose sur l'inégalité de grand crible et passe nécessairement par l'étude, pour tout A, de l'inégalité :

$$\text{(1.2)} \qquad \mathrm{E}((c), (\alpha) * (\beta); x, \mathrm{Q}; a) \ll_{a, \mathrm{A}, \kappa} x \mathscr{L}^{-\mathrm{A}}$$

où $(\alpha) = (\alpha_m)$ et $(\beta) = (\beta_n)$ sont deux suites d'ordre κ qui satisfont d'autres conditions naturelles et qui ont leurs supports respectivement inclus dans [M, 2M] et [N, 2N] (la convolution de Dirichlet est représentée par $*$ et on a posé $x = 4\mathrm{MN}$).

Le principe du grand crible (par exemple [3], Theorem 0) entraîne que (1.2) est vrai avec $\mathrm{Q} = x^{1/2-\varepsilon}$. Iwaniec et Fouvry furent les premiers à franchir, dans le contexte de l'inégalité (1.2), la valeur 1/2 de l'exposant ([6], [7], [11]). Ils utilisèrent la méthode de dispersion de Linnik et l'estimation des sommes de Kloosterman, conséquence des travaux de Weil (*voir* lemme 3) et dégagèrent l'importance de la valeur du nombre

$$\nu = (\log \mathrm{N})/(\log x)$$

pour dépasser 1/2.

Vers cette époque, Deshouillers et Iwaniec, partant de la formule de Kuznietsov, qui relie une somme de sommes de Kloosterman aux coefficients de Fourier de formes paraboliques, fournirent de nouvelles majorations pour les sommes de Kloosterman en moyenne, majorations qui se sont avérées très utiles dans plusieurs problèmes de théorie analytique des nombres ([5]).

Iwaniec et Fouvry, se tournant alors vers ces nouveaux outils, améliorèrent leurs résultats ([8], [12]). En particulier, ils montrèrent que (Λ) est bien répartie, en moyenne, avec toute pondération (λ) bien factorisable de niveau $\mathrm{Q} = x^{17/32-\varepsilon}$.

Par définition, on dit que (λ) est *bien factorisable de niveau* Q, si cette suite est d'ordre 1 et si, pour toute décomposition

$$\mathrm{Q} = \mathrm{Q}_1 \mathrm{Q}_2 \qquad (\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2 \geqq 1)$$

il existe deux suites (λ_1) et (λ_2) d'ordre 1, respectivement nulles hors de $[1, \mathrm{Q}_1]$ et $[1, \mathrm{Q}_2]$, vérifiant l'égalité

$$(\lambda) = (\lambda_1) * (\lambda_2).$$

La spécificité du crible linéaire de Rosser-Iwaniec réside en la présence de coefficients bien factorisables dans le terme d'erreur [14].

Enfin, Bombieri, Friedlander et Iwaniec écrivirent deux articles monumentaux ([3], [4]) où ils perfectionnèrent les techniques précédentes (ainsi l'exposant 17/32 évoqué ci-dessus est remplacé par 4/7). Ils placèrent leur étude dans un cadre très général et surent tirer un profit maximal des compensations offertes par les majorations de [5].

L'objet de cet article est de présenter des résultats obtenus par une variante de la méthode de dispersion et par l'utilisation, soit de majorations en moyenne, soit de majorations individuelles des sommes de Kloosterman (lemmes 3 et 4). Ce travail est en quelque sorte la continuation de [8] (ou encore de [3], § 10, Third method) et donne des informations sur la répartition en moyenne de $(\alpha) * (\beta)$ lorsque ν est très petit.

Pour présenter le théorème principal, on convient que $(\gamma) = (\gamma_r)$ et $(\xi) = (\xi_s)$ sont deux suites dont les supports sont dans [R, 2R] et [S, 2S]. On suppose aussi que (β) se répartit harmonieusement dans les progressions arithmétiques de modules $\leqq (\log 2\mathrm{N})^{\mathrm{B}}$, sous la forme suivante :

Pour tout B, *on a l'égalité*

$$\sum_{\substack{n \equiv n_0\,[k] \\ (n,\, d)=1}} \beta_n = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{(n,\, dk)=1} \beta_n + \mathrm{O}_{\varkappa,\, \mathrm{B}}(\mathrm{N}\,\tau_\varkappa(d)(\log 2\mathrm{N})^{-\mathrm{B}}) \tag{1.3}$$

pour tout $d \geqq 1$, $k \geqq 1$ *et* $(k, n_0) = 1$.

La condition (1.3) donne sur (β) une information de même nature que le théorème de Siegel-Walfisz sur la fonction (Λ).

Théorème. — *Soient* κ *et* a *deux entiers* ($\kappa \geqq 1$ *et* $a \neq 0$) *et soient* (α), (β), (γ) *et* (ξ) *quatre suites comme ci-dessus, d'ordre* κ. *On suppose aussi que* (β) *vérifie* (1.3).

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, *tout* $\mathrm{N} \geqq x^{\varepsilon}$ *et tout* $\mathrm{A} > 0$, *l'inégalité*

$$\mathrm{E}((\gamma) * (\xi), (\alpha) * (\beta); x, 4\mathrm{RS}; a) \ll_{a,\, \mathrm{A},\, \varepsilon,\, \varkappa} x\, \mathscr{L}^{-\mathrm{A}} \tag{1.4}$$

est vraie dès que l'une des cinq conditions suivantes est vérifiée :

$$\max(\mathrm{N}^{-1}\mathrm{R}^2\mathrm{S},\ \mathrm{N}^{3/2}\mathrm{R}^{7/4}\mathrm{S}^2) \leqq x^{1-\varepsilon} \tag{C.1}$$

$$\max(\mathrm{R}^2\mathrm{S},\ \mathrm{N}^{5/4}\mathrm{R}^{7/4}\mathrm{S}^2) \leqq x^{1-\varepsilon} \tag{C.2}$$

$$\max(\mathrm{N}^{-1}\mathrm{R}^2\mathrm{S},\ \mathrm{N}^3\mathrm{R}\mathrm{S}^{5/2},\ \mathrm{N}^{3/2}\mathrm{R}^{3/2}\mathrm{S}^2,\ \mathrm{N}^{6/5}\mathrm{R}^{8/5}\mathrm{S}^{9/5}) \leqq x^{1-\varepsilon} \tag{C.3}$$

$$\max(\mathrm{R}^2\mathrm{S},\ \mathrm{N}^{5/2}\mathrm{R}\mathrm{S}^{5/2},\ \mathrm{N}^{5/4}\mathrm{R}^{3/2}\mathrm{S}^2) \leqq x^{1-\varepsilon} \tag{C.4}$$

$$\max(\mathrm{N}\mathrm{R}^2\mathrm{S},\ \mathrm{N}^2\mathrm{R}\mathrm{S}^{5/2},\ \mathrm{N}^{5/4}\mathrm{R}^{3/2}\mathrm{S}^2) \leqq x^{1-\varepsilon} \tag{C.5}$$

Dans le cas des conditions (C.1) *ou* (C.2), *la majoration* (1.4) *est uniforme pour* $|a| \leqq x$ *et dans le cas de* (C.3), (C.4) *ou* (C.5), *elle l'est pour* $|a| \leqq \mathscr{L}^{\mathrm{A}}$.

En faisant $\mathrm{S} = 1$ dans la condition (C.1), on a directement :

Corollaire 1. — *Soient* (c), (α) *et* (β) *trois suites d'ordre* κ. *On suppose aussi que* (β) *vérifie* (1.3). *Alors, pour tout* $\varepsilon > 0$ *et tout* $\mathrm{A} > 0$, *on a, uniformément pour* $|a| \leqq x$, *l'estimation :*

$$\mathrm{E}((c), (\alpha) * (\beta); x, \mathrm{Q}; a) \ll_{\mathrm{A},\, \varepsilon,\, \varkappa} x\, \mathscr{L}^{-\mathrm{A}}$$

pour $\mathrm{N} \geqq x^{\varepsilon}$ *et* $\mathrm{Q}x^{\varepsilon} \leqq \min(x^{1/2}\mathrm{N}^{1/2},\ x^{4/7}\mathrm{N}^{-6/7})$.

L'intérêt de ce corollaire est l'intervalle d'uniformité sur a. Remarquons qu'on franchit la borne $\mathrm{Q} = x^{1/2-\varepsilon}$ pour $x^{\varepsilon} \leqq \mathrm{N} \leqq x^{1/12-\varepsilon}$ et qu'en faisant $\mathrm{S} = 1$ dans (C.3), on retrouve le théorème 1 de [8], et le théorème 3 de [3].

Intéressons-nous maintenant au niveau de répartition de $(\alpha) * (\beta)$ avec une pondération bien factorisable. On a :

COROLLAIRE 2. — *Soient* κ, a, (α) *et* (β) *comme dans le théorème et soit* (λ) *une suite bien factorisable de niveau* $Q = x^{\theta(\nu)-\varepsilon}$. *Alors, pour tout* $\varepsilon > 0$ *et tout* $A > 0$, *on a l'estimation :*

$$E((\lambda), (\alpha) * (\beta);\, x,\, Q;\, a) \ll_{a,\, A,\, \varepsilon,\, \kappa} x\, \mathscr{L}^{-A}$$

dans chacun des deux cas suivants :

(i) *uniformément pour* $|a| \leqq x$, $\varepsilon \leqq \nu \leqq 1/10$, $\theta(\nu)$ *étant défini par* $\theta(\nu) = (5 - 5\nu)/9$;

(ii) *uniformément pour* $|a| \leqq \mathscr{L}^A$, $\varepsilon \leqq \nu \leqq 1/5$, $\theta(\nu)$ *étant défini par* $\theta(\nu) = (6 - 5\nu)/10$.

Le premier cas est une conséquence de (C.2) du théorème en décomposant $(\lambda) = (\lambda_1) * (\lambda_2)$ avec

$$Q_1 = R = x^{((4+5\nu)/9)-(\varepsilon/2)}$$

et

$$Q_2 = S = x^{((1-10\nu)/9)-(\varepsilon/2)}$$

Le second cas est une conséquence de (C.4) avec

$$Q_1 = R = x^{((4+5\nu)/10)-(\varepsilon/2)}$$

et

$$Q_2 = S = x^{(1/5)-\nu-(\varepsilon/2)}$$

L'emploi de (C.1), au lieu de (C.2), aurait conduit à la même valeur de $\theta(\nu)$, mais avec des valeurs différentes de Q_1 et Q_2 ($x^{(4+14\nu)/9-\varepsilon/2}$ et $x^{(1-19\nu)/9-\varepsilon/2}$ respectivement, $\nu \leqq 1/19$). Le phénomène est identique lorsqu'on remplace (C.4) par (C.3), (on choisirait $Q_1 = x^{(4+15\nu)/10-\varepsilon/2}$ et $Q_2 = x^{1/5-2\nu-\varepsilon/2}$, $\nu \leqq 1/10$).

La partie (i) de ce corollaire est le premier résultat de ce type (*voir* cependant [6], chap. 3) et est très intéressante par la grande région d'uniformité sur a. De même que le corollaire 1, il peut être employé dans des questions proches du problème de Goldbach; c'est ainsi que Balog en a déduit le

COROLLAIRE 3 [1]. — *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un entier* $N(\varepsilon)$ *tel que tout entier* n *supérieur à* $N(\varepsilon)$ *s'écrive comme somme de deux entiers dont tous les facteurs premiers sont inférieurs à* $n^{4/(9\sqrt{e})+\varepsilon}$.

Quant à la partie (ii) du corollaire 2, elle améliore la valeur $\theta(\nu) = 1/2 + \nu/2$ $(\varepsilon \leqq \nu \leqq 1/10)$ obtenue précédemment comme conséquence directe du théorème 1 de [8] ou du théorème 3 de [3] (*voir* aussi [10] Lemma 6).

Un autre intérêt du corollaire 2 est que l'exposant du niveau de répartition est d'autant meilleur que ν est petit, on obtient alors de nouvelles formes du théorème de Brun-Titschmarch en moyenne. On a :

COROLLAIRE 4. — *Soient* $\varepsilon > 0$, $A > 0$, $9/10 \leqq \zeta \leqq 1 - \varepsilon$ *et* a *un entier vérifiant* $|a| \leqq x$ (resp. $|a| \leqq \mathscr{L}^A$). *Il existe alors* $x_0(\varepsilon, A)$ *et un sous-ensemble* $\mathscr{Q} = \mathscr{Q}(\varepsilon, a, x, \zeta)$ *de*

$[x^\zeta, 2x^\zeta]$ *de cardinal inférieur à* $x^\zeta \mathscr{L}^{-A}$ *tels que, pour* $x \geqq x_0(\varepsilon, A)$ *et* $q \in [x^\zeta, 2x^\zeta] \setminus \mathscr{Q}$, *on ait l'inégalité*

$$\pi(x; q, a) \leqq \left(\frac{18}{5\zeta} + \varepsilon\right) \frac{x}{\varphi(q) \log x} \tag{1.5}$$

$$\left(\text{resp. } \pi(x; q, a) \leqq \left(\frac{20}{5\zeta+1} + \varepsilon\right) \frac{x}{\varphi(q) \log x}\right) \tag{1.6}$$

Le passage du corollaire 2 au corollaire 4 est classique : il utilise le crible de Rosser-Iwaniec ([14]) pour cribler la suite

$$\mathscr{A}^{(q)} = \{ n \leqq x;\ n \equiv a\,[q] \}$$

et un processus d'échange pour évaluer, en moyenne, les termes d'erreur (*voir* [9], § 5, par exemple).

Les coefficients $18/(5\zeta)$ et $20/(5\zeta+1)$ apparaissent comme les fonctions $2/\theta(1-\zeta)$ où θ est définie au corollaire 2. L'inégalité (1.5) améliore, pour $9/10 < \zeta < 1$, le théorème 10 de [15] où le coefficient $18/(5\zeta)$ était remplacé par 4. De même (1.6) améliore le théorème 3 de [9] où apparaissait la constante $4/(2-\zeta)$.

Il faut souligner que les deux coefficients des inégalités (1.5) et (1.6) ont des limites plus petites que 4 lorsque ζ tend vers 1.

Pour terminer, on donne une autre application à la répartition des nombres premiers dans les progressions arithmétiques. On s'intéresse à la question suivante :

Soient $a \neq 0$, (γ_{q_1}) et (δ_{q_2}) deux suites de réels vérifiant $|\gamma_{q_1}| \leqq 1$ et $|\delta_{q_2}| \leqq 1$. Pour quels nombres θ_1 et θ_2 a-t-on l'estimation :

Pour tout A

$$\sum_{q_1 \leqq x^{\theta_1}} \sum_{\substack{q_2 \leqq x^{\theta_2} \\ (q_1 q_2,\, a) = 1}} \gamma_{q_1} \delta_{q_2} \left(\pi(x; q_1 q_2, a) - \frac{\operatorname{Li} x}{\varphi(q_1 q_2)}\right) = O_{a,\,A}(x \mathscr{L}^{-A})\,? \tag{1.7}$$

Le théorème de Bombieri-Vinogradov entraîne que (1.7) est vrai pour $\theta_1 + \theta_2 < 1/2$, et Bombieri, Friedlander et Iwaniec ont démontré ([3], Théorème 8) que (1.7) est vrai également pour $(\theta_1, \theta_2) \in \mathscr{D}$, où

$$\mathscr{D} = \{ (\theta_1, \theta_2);\ \theta_1 \geqq \theta_2,\ \theta_1 < 1/3,\ \theta_2 < 1/5,\ 5\theta_1 + 2\theta_2 < 2 \text{ et } \theta_1 + \theta_2 < 29/56 \}$$

Remarquons d'abord qu'on peut omettre, dans la définition de $\mathscr{D}$, la condition $\theta_1 < 1/3$ (car $\theta_1 \geqq 1/3$ entraîne $\theta_1 + \theta_2 < 1/2$), et, qu'en suivant soigneusement leur démonstration, leur résultat est en fait valable pour $(\theta_1, \theta_2) \in \mathscr{D}^*$, où

$$\mathscr{D}^* = \left\{ (\theta_1, \theta_2);\ \theta_1 \geqq \theta_2,\ \theta_1 + 3\theta_2 < 1,\ \theta_1 + \theta_2 < 29/56,\ \theta_1 < \max\left(\frac{1}{2} - \theta_2, \frac{2}{5}(1-\theta_2)\right)\right\}$$

On peut donc traverser la borne critique 1/2 dans le théorème de Bombieri-Vinogradov, pour une certaine factorisation de la pondération. Ce résultat est plus profond que celui déjà cité, où apparaît un coefficient bien factorisable.

On démontre :

COROLLAIRE 5. — *L'estimation* (1.7) *est vraie pour* $(\theta_1, \theta_2) \in \mathscr{D}'$ *où*

$$\mathscr{D}' = \{(\theta_1, \theta_2);\ \theta_1 \geqq \theta_2,\ \theta_1 + 3\theta_2 < 1,\ \theta_1 + \theta_2 < 29/56,\ 4\theta_1 + \theta_2 < 403/266\quad 7\theta_1/4 + \theta_2 < 403/532\}.$$

On obtient ainsi un léger agrandissement de $\mathscr{D}^*$, autour du point (1/3, 5/29). La démonstration de ce corollaire profite du théorème pour N très petit, elle sera donnée au paragraphe VI.

II. Lemmes

Le lemme 1 donne deux propriétés classiques de la fonction $\tau_\varkappa$.

LEMME 1. — *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *et tout entier* $\kappa \geqq 1$, *on a la majoration*

$$\tau_\varkappa(n) \ll_{\varkappa,\, \varepsilon} n^\varepsilon.$$

Si a et q sont deux entiers premiers entre eux et si q vérifie l'inégalité $1 \leqq q \leqq x^{0,9}$, *on a la majoration*

$$\sum_{\substack{n \leqq x \\ n \equiv a\,[q]}} \tau_\varkappa^2(n) \ll_{\varkappa'} x q^{-1} \mathscr{L}^{\varkappa'},$$

où κ' *est une constante ne dépendant que de* κ.

Pour la démonstration de la deuxième inégalité, on se reportera à [16], Theorem 2.

On rappelle maintenant une propriété de la valeur moyenne du p.g.c.d. de deux entiers.

LEMME 2. — *Pour a, entier non nul, on a la majoration*

$$\sum_{n \leqq x} (a, n) \leqq x\,\tau_2(a).$$

On écrit simplement

$$\sum_{n \leqq x} (a, n) \leqq \sum_{d \mid a} d \sum_{\substack{n \leqq x \\ d \mid n}} 1 = \sum_{d \mid a} d \left[\frac{x}{d}\right] \leqq x\tau_2(a).$$

Pour énoncer les résultats sur les sommes de Kloosterman, nous utiliserons les notations suivantes :

— $e(t) = e^{2\pi i t}$

— $\overline{m}$ est l'inverse de *m modulo q*, [pour $(m, q) = 1$] dans une relation de congruence ou dans la fraction $\overline{m}/q$.

– $\mathbf{1}_T$ désigne pour $T \geqq 1$, la fonction caractéristique de l'intervalle [T, 2T]

– $\tilde{\mathbf{1}}_T$ une fonction, dont le support est inclus dans [T/2, 3T], qui vérifie

$$\tilde{\mathbf{1}}_T \geqq \mathbf{1}_T$$

et qui a des dérivées de tout ordre, satisfaisant l'inégalité

$$\forall l \geqq 0 \quad \tilde{\mathbf{1}}_T^{(l)}(t) \ll_l T^{-l}$$

– $t \sim T$ signifie $T < t \leqq 2T$.

Le lemme suivant est une conséquence de la majoration de Weil des sommes de Kloosterman. On a ([13], p. 36) :

LEMME 3. — *Soient* A_1, A_2 *tels qu'on ait* $0 < A_2 - A_1 \leqq b$. *Alors, pour tout* ε *positif, on a*

$$\sum_{\substack{A_1 < a \leqq A_2 \\ (c,\, b)=1}} e\left(d\frac{\bar{c}}{b}\right) \ll_\varepsilon (b, d)^{1/2} b^{1/2+\varepsilon}$$

On donne maintenant la majoration en moyenne des sommes de Kloosterman-Ramanujan, le lemme suivant est un cas particulier du Theorem 12 de [5] :

LEMME 4. — *Soient* C, D, L, R *et* $S \geqq 1$, $(b_{l,\,r,\,s})$ *une suite de nombres complexes. On note* $\mathscr{K}(C, D, L, R, S)$ *la somme*

$$\mathscr{K}(C, D, L, R, S) = \sum_{\substack{l \sim L,\ r \sim R,\ s \sim S \\ (r,\, s)=1}} b_{l,\,r,\,s} \sum_{\substack{c,\ d \\ (rd,\ sc)=1}} \tilde{\mathbf{1}}_C(c)\,\tilde{\mathbf{1}}_D(d)\, e\left(l\frac{\overline{rd}}{sc}\right).$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, *on a la majoration*

$$\mathscr{K}(C, D, L, R, S) \ll_\varepsilon (CDLRS)^\varepsilon K(C, D, L, R, S) \Big(\sum_{l \sim L,\ r \sim R,\ s \sim S} |b_{l,\,r,\,s}|^2 \Big)^{1/2}$$

où

$$K^2(C, D, L, R, S) = CS(RS+L)(C+DR) + D^2 LRS^{-1} + C^2 DS\sqrt{(RS+L)R}.$$

Pour la démonstration du corollaire 5, nous aurons besoin des deux lemmes suivants, qui donnent le niveau de répartition de formes trilinéaires :

LEMME 5 ([3], Theorem 4). — *Soient* $(\alpha) = (\alpha_m)_{m \sim M}$, $(\beta) = (\beta_n)_{n \sim N}$, $(\lambda) = (\lambda_l)_{l \sim L}$ *trois suites d'ordre* κ. *On suppose que* (β) *vérifie* (1.3) *et qu'on a l'implication*

$$p \mid ln \text{ et } p \leqq \exp(\mathscr{L}^{1/4}) \quad \Rightarrow \quad \beta_n \lambda_l = 0.$$

(on a posé $x = 8LMN$).

Sous ces conditions, on a l'inégalité

$$E((c), (\alpha) * (\beta) * (\lambda); x, Q; a) \ll_{a,\, A,\, \kappa,\, \varepsilon} x \mathscr{L}^{-A} \tag{2.1}$$

pour toute pondération (c) *d'ordre* κ, *pour tout entier* a, *pour tout* A, *dès que les nombres* L, M, N *et* Q *vérifient les inégalités*

$$\mathrm{LN} \geqq \mathrm{Q} x^{\varepsilon}, \qquad \mathrm{L}^3 \mathrm{N}^2 \leqq \mathrm{Q} x^{1-\varepsilon}, \qquad \mathrm{L}^2 \mathrm{N}^4 (\mathrm{L}+\mathrm{N}) \leqq x^{2-\varepsilon}.$$
$$\mathrm{L}, \mathrm{M} \textit{ et } \mathrm{N} \geqq x^{\varepsilon}.$$

Comme cas particulier, on a

LEMME 6 ([4] Theorem 5). — *Soient* $(\alpha)=(\alpha_m)_{m\sim \mathrm{M}}$, $(\lambda)=(\lambda_l)_{l\sim \mathrm{L}}$ *deux suites d'ordre* κ *et soit* $(\beta)=(\beta_n)_{n\sim \mathrm{N}}$ *la fonction caractéristique d'un intervalle inclus dans* [N, 2N]. *L'inégalité* (2.1) *est vérifiée dès que* L, M, N *et* Q *vérifient les inégalités*

$$\mathrm{LN} > \mathrm{Q} x^{\varepsilon}, \qquad \mathrm{L}^4 \mathrm{MQ} < x^{2-\varepsilon}, \qquad \mathrm{L}^2 \mathrm{MQ}^2 < x^{2-\varepsilon}$$
$$\mathrm{L}, \mathrm{M} \textit{ et } \mathrm{N} > x^{\varepsilon}.$$

On rappelle le lemme 6 de [8] qui servira à faire une partition des variables, ce lemme évite d'imposer la condition que $\beta_n=0$ dès que n a des petits facteurs premiers (condition (A_4) de [3]).

LEMME 7. — *Pour* ω *entier* $\geqq 1$ *et* $\mathrm{T} \geqq 2$, *on note*

$$\mathscr{T}_{\omega}(\mathrm{T}) = \{(l, l');\ 1 \leqq l, l' \leqq \mathrm{T}, (l, l')=1, \omega(l) \text{ et } \omega(l') \leqq \omega\}$$

[*le nombre de facteurs premiers de* l *est noté* $\omega(l)$]. *Il existe une constante absolue* C_0 *et une partition de* $\mathscr{T}_{\omega}(\mathrm{T})$ *en au plus* $(\mathrm{C}_0 \log \mathrm{T})^{\omega^2}$ *sous ensembles* $\mathscr{T}'_j(\mathrm{T})$ *ayant la propriété suivante :*

$$(l, l') \text{ et } (l_1, l'_1) \in \mathscr{T}'_j(\mathrm{T}) \quad \Rightarrow \quad (l, l'_1)=1.$$

III. Début de la démonstration du théorème

1. CONVENTIONS ET RESTRICTIONS. — On désignera par ε un réel positif très petit par rapport au nombre ε introduit dans l'énoncé du théorème. On pose

$$(c)=(\gamma) * (\xi)$$

la suite $(c)=(c_q)$ est donc d'ordre 2κ et est nulle pour $q>\mathrm{Q}$ avec $\mathrm{Q}=4\mathrm{RS}$. Les symboles $\kappa_1, \kappa_2, \ldots$ désignent des fonctions de κ uniquement, fonctions qu'il est inutile de préciser.

Pour faciliter la démonstration, on doit préparer les variables.

Pour des raisons techniques, nous supposerons l'implication

$$\omega(n) > \mathscr{L}^{1/5} \quad \Rightarrow \quad \beta_n=0 \tag{3.1}$$

et aussi

$$n \mid a \quad \Rightarrow \quad \beta_n=0 \tag{3.2}$$

En effet l'erreur entraînée par cette supposition est $O(x\mathscr{L}^{-A-1})$ donc négligeable pour la démonstration du théorème (*voir* relation (7.5) de [8]).

De même, on suppose

$$\omega(s) > \mathscr{L}^{1/5} \quad \Rightarrow \quad \xi_s = 0 \tag{3.3}$$

Ceci est permis, car en désignant par

$$\mathscr{S} = \{ S \leqq s \leqq 2S ; \omega(s) > \mathscr{L}^{1/5} \}$$

on a l'égalité

$$|\mathscr{S}| \ll \exp\left(-\frac{\log 2}{2} \mathscr{L}^{1/5} \right) S$$

(démonstration analogue à la relation (7.4) de [8]) et, par conséquent, la majoration

$$\sum_{\substack{(rs,\, a)=1 \\ s \in \mathscr{S}}} \gamma_r \xi_s \Delta((\alpha) * (\beta); rs, a) \ll \sum_{\substack{(rs,\, a)=1 \\ s \in \mathscr{S}}} \gamma_r \xi_s \frac{x}{rs} \mathscr{L}^{\varkappa_1} \ll x \mathscr{L}^{\varkappa_2} |\mathscr{S}|^{1/2} S^{-1/2} \ll x \mathscr{L}^{-A}$$

obtenue par le lemme 1 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2. Présentation de la méthode. — Avec les notations introduites précédemment, on a l'inégalité

$$E^2((c), (\alpha) * (\beta); x, Q; a) \ll M \mathscr{L}^{\varkappa_3} \sum_m \tilde{\mathbf{I}}_M(m) \left\{ \sum_{(q,\, am)=1} c_q \left(\sum_{n \equiv \overline{am}\,[q]} \beta_n - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{(n,\, q)=1} \beta_n \right) \right\}^2 \tag{3.4}$$

qui s'obtient par interversion des sommations, par utilisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et du lemme 1 puisque (α) est d'ordre κ.

La factorisation de (c) sera utilisée plus tard, c'est ici que réside la différence avec les démonstrations de la Proposition 1 de [12] et des théorèmes 1 et 2 de [3]. En effet dans ces articles, E est écrit sous la forme

$$E = \sum_{r,\, m} \gamma_r \alpha_m \left(\sum_{s,\, n} \xi_s \beta_n - \dots \right)$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz est appliquée à la double somme en r et m.

Comme d'habitude dans la méthode de dispersion, la partie droite de (3.4) est exprimée en

$$M \mathscr{L}^{\varkappa_3} \{ W(Q) - 2V(Q) + U(Q) \}$$

après avoir développé le carré de l'accolade. Ainsi, pour prouver le théorème, il suffit de prouver la majoration

$$W(Q) - 2V(Q) + U(Q) \ll MN^2 \mathscr{L}^{-A} \tag{3.5}$$

pour tout A.

3. Réduction de la démonstration. — La technique de dispersion consiste à exprimer $U(Q)$, $V(Q)$ et $W(Q)$ comme somme d'un terme principal naturel et d'un terme d'erreur. Mais ici, la tâche est facilitée puisque le calcul des mêmes expressions apparaît dans [8], § VII et VIII (on pourrait aussi utiliser [3]). On exploite donc diverses formules de [8], toutefois, dans cet article, les calculs faits sous l'hypothèse $|c_q| \leqq 1$, alors qu'ici (c) est d'ordre 2κ, mais cette généralisation est sans peine.

Ainsi, la formule (7.14) de [8] donne

$$V(Q) = U(Q) + O(N^2 Q x^{\varepsilon}). \tag{3.6}$$

La formule (8.10) fournit

$$W(Q) = W_2(Q) + \sum_{(d, d_1, \delta, \delta_1, \delta_2) \in \mathscr{E}} \tilde{W}_2(Q, d, d_1, \delta, \delta_1, \delta_2) + O(MN^2 x^{-\varepsilon/2}). \tag{3.7}$$

Dans cette expression, $W_2(Q)$ est le terme principal, il provient du terme d'ordre $h=0$ dans un développement en série de Fourier. Le second terme, qui sera défini et étudié plus tard, correspond aux termes d'ordre $h\,(1 \leqq |h| \leqq H)$ avec

$$H = M^{-1} Q^2 x^{\varepsilon}$$

dans le développement en série de Fourier. Pour être complet, signalons que la condition (3.2) est utilisée pour justifier les majorations (8.2), (8.3) et (8.4) de [8].

Il est clair que le terme principal de $W(Q) - 2V(Q) + U(Q)$ est

$$T(Q) = W_2(Q) - U(Q)$$

et au paragraphe IX de [8], on prouve que $T(Q)$ vérifie

$$T(Q) \ll MN^2 \mathscr{L}^{-A} \tag{3.8}$$

pour tout A, ceci est une conséquence de (1.3) et de l'inégalité

$$\log N \geqq \varepsilon \mathscr{L}.$$

4. Transformation du terme d'erreur de (3.7). — On spécifie maintenant la somme dans (3.7). Cette somme est faite sur l'ensemble

$$\mathscr{E} = \{(d, d_1, \delta, \delta_1, \delta_2);\, d, d_1, \delta, \delta_1, \delta_2 < x^{\varepsilon}, (\delta, ad) = (\delta_1, \delta_2) = 1, d_1 \mid d^{\infty} \text{ et } \delta_1 \delta_2 \mid \delta^{\infty}\}.$$

En combinant (3.6), (3.7) et (3.8), il devient manifeste que, pour démontrer (3.5), il suffit d'établir, pour tout $(d, d_1, \delta, \delta_1, \delta_2) \in \mathscr{E}$, l'inégalité

$$\tilde{W}_2 = \tilde{W}_2(Q, d, d_1, \delta, \delta_1, \delta_2) \ll MN^2 x^{-6\varepsilon}. \tag{3.9}$$

Il est temps de donner la définition de $\tilde{W}_2$, d'après les relations (8.12), (8.13), (8.14) et (8.15) de [8], on a

$$(3.10)\quad \tilde{W}_2 = D^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{I}_M(t) \sum_{(k_1, k_2)\in\mathcal{K}} \frac{c_{\delta\delta_1 k_1}}{k_1}\frac{c_{\delta\delta_2 k_2}}{k_2} \sum_{(n_1, n_2)\in\mathcal{N}} \beta_{dd_1 n_1}\beta_{dn_2} \sum_{0<|h|\leqq H} e(\ldots)\,dt.$$

Dans cette expression, on a posé

$$D = \delta\delta_1\,\delta_2$$
$$\mathcal{K} = \{(k_1, k_2); (k_1, k_2) = (k_1 k_2, ad\delta) = 1\}.$$
$$\mathcal{N} = \{(n_1, n_2); d_1 n_1 \equiv n_2\,[\delta], (n_1, dk_1) = (n_2, k_2) = (d_1 n_1, n_2) = (n_1 n_2, \delta) = 1\}.$$

Le symbole $e(\ldots)$ désigne la quantité

$$(3.11)\quad e(\ldots) = e\left(hu\frac{\bar{k}_1\bar{k}_2}{D} - ah\frac{\bar{n}_1\bar{k}_1\bar{k}_2}{D'}\right)e\left(-\frac{aht}{k_1 k_2 D} + \frac{ah}{n_1 k_1 k_2 D'}\right)$$
$$e\left(ah(d_1 n_1 - n_2)\frac{\bar{D}'\bar{n}_2\bar{k}_1}{n_1 k_2}\right) = e_1(.)\,e_2(.)\,e_3(.)\quad \text{(par définition)}$$

où u désigne un entier qui ne dépend que des classes de n_1 et n_2 modulo D, où D′ vaut dd_1D.

5. DÉCOMPOSITION DE (c). — C'est maintenant qu'on utilise la définition de (c) pour écrire

$$\delta\delta_2 k_2 = rs \qquad (r\sim R, s\sim S).$$

En remarquant que si $g(r, s)$ est une fonction de r et s, à support borné, on a l'égalité

$$\sum_{\substack{r, s\\ \delta\delta_2 \mid rs}} g(r, s) = \sum_{\substack{\Delta, \Delta'\\ \delta\delta_2 = \Delta\Delta'}} \sum_{r'} \sum_{\substack{s'\\ (s', \Delta) = 1}} g(\Delta r', \Delta' s')$$

et en découpant l'ensemble $0<|h|\leqq H$, en intervalles de la forme $H'\leqq|h|\leqq 2H'$, on voit que la définition (3.10) conduit à la majoration

$$(3.12)\qquad \tilde{W}_2 \ll M x^{5\varepsilon} \sup_{\substack{M/2\leqq t\leqq 3M\\ \Delta\mid\delta\delta_2\\ 0<H'\leqq H}} |W_3(t, \Delta, H')|$$

avec

$$(3.13)\quad W_3(t, \Delta, H') = \sum_{(k_1, r', s')\in\mathcal{K}^*(\Delta)} \frac{c_{\delta\delta_1 k_1}}{k_1}\frac{\gamma_{\Delta r'}}{r'}\frac{\xi_{\Delta' s'}}{s'} \sum_{(n_1, n_2)\in\mathcal{N}^*} \beta_{dd_1 n_1}\beta_{dn_2} \sum_{|h|\sim H'} e(\ldots)$$

avec

$$\mathcal{K}^*(\Delta) = \{(k_1, r', s'); (s', \Delta) = 1\, (k_1, r' s') \in \mathcal{K}\}$$
$$\Delta' = \delta\delta_2 \Delta^{-1}$$

et $\mathcal{N}^*$ est défini comme $\mathcal{N}$, à la différence près que la condition $(n_2, k_2) = 1$ est remplacée par $(n_2, r' s') = 1$. Dans l'expression de $e(\ldots)$, on a évidemment remplacé la variable k_2 par $r' s'$.

6. Intégration par parties. — On se propose d'éliminer le facteur analytique

$$e_2^*(.) = e\left(-\frac{aht}{k_1 r' s' \mathrm{D}} + \frac{ah}{n_1 k_1 r' s' \mathrm{D}'}\right)\frac{\mathrm{K}_1}{k_1}\frac{\mathrm{R}'}{r'}\frac{\mathrm{S}'}{s'}$$

de l'expression (3.13). (On a posé

$$\mathrm{K}_1 = \mathrm{Q}\delta^{-1}\delta_1^{-1}, \mathrm{R}' = \mathrm{R}\Delta^{-1} \text{ et } \mathrm{S}' = \mathrm{S}\Delta'^{-1}).$$

La fonction $e_2^*(.)$ varie doucement si on la considère comme fonction des cinq variables h, k_1, n_1, r', s'. Plus précisément, en tenant compte de l'ordre de grandeur des paramètres a ($|a| \leqq x$), t ($|t| \leqq 3\mathrm{M}$), D ($\mathrm{D} \leqq x^{3\varepsilon}$) et D′ ($\mathrm{D}' \leqq x^{5\varepsilon}$), on voit que les dérivées partielles d'ordre au plus un, par rapport à chacune des cinq variables, vérifient à un facteur $x^{100\varepsilon}$ près, les conditions du lemme 5 de [8] qui permet d'intégrer par parties. On a finalement la majoration de $\mathrm{W}_3(t, \Delta, \mathrm{H}')$ défini en (3.13):

$$\mathrm{W}_3(t, \Delta, \mathrm{H}') \ll \mathrm{Q}^{-2} x^{200\varepsilon} \sup_{\mathrm{H}'', \mathrm{K}_1', \mathrm{R}_1', \mathrm{S}_1', \mathrm{N}_1'} |\mathrm{W}_4(\Delta, \mathrm{H}', \mathrm{H}'', \mathrm{K}_1', \mathrm{R}_1', \mathrm{S}_1', \mathrm{N}_1')|$$

avec

$$(3.14)\quad \mathrm{W}_4 = \sum_{\substack{(k_1, r', s') \in \mathcal{K}^*(\Delta) \\ k_1 \leqq \mathrm{K}_1', r' \leqq \mathrm{R}_1', s' \leqq \mathrm{S}_1'}} c_{\delta\delta_1 k_1} \gamma_{\Delta r'} \xi_{\Delta' s'} \sum_{\substack{(n_1, n_2) \in \mathcal{N}^* \\ n_1 \leqq \mathrm{N}_1'}} \beta_{dd_1 n_1} \beta_{dn_2} \sum_{|h| \sim \mathrm{H}', |h| \leqq \mathrm{H}''} e_1(.) e_3(.)$$

7. Ultime préparation des variables. — D'après les hypothèses (3.1) et (3.3), on voit que tout triplet (n_1, n_2, s') ayant une contribution non nulle à (3.14) donc tel que

$$\xi_{\Delta' s'} \beta_{dd_1 n_1} \beta_{dn_2} \neq 0, \qquad \text{et} \qquad (n_2, n_1 s') = 1$$

est tel que $\omega(n_2)$ et $\omega(n_1 s') \leqq 2\mathcal{L}^{1/5} := \omega$.

Le lemme 7 permet de découper l'ensemble $\mathcal{T}_\omega(x)$ en $O(x^\varepsilon)$ sous-ensembles Ω' tels que

$$\left.\begin{array}{r}(n_2, n_1 s') \in \Omega' \\ \text{et} \quad (n_2', n_1' s'') \in \Omega'\end{array}\right\} \Rightarrow (n_2, n_1' s'') = 1.$$

On remarque aussi que le facteur $e_1(.)$ ne dépend en fait que des classes de $n_1 \pmod{\mathrm{D}'}$, $n_2 \pmod{\mathrm{D}}$, $h \pmod{\mathrm{D}'}$, $k_1 \pmod{\mathrm{D}'}$, $r' \pmod{\mathrm{D}'}$ et $s' \pmod{\mathrm{D}'}$. Autrement dit, on rend $e_1(.)$ fixe en astreignant n_1, n_2, h, k_1, r' et s' à parcourir des progressions arithmétiques modulo D ou modulo D′ suivant les cas. En raison de l'ordre de grandeur de D et D′, on décompose donc $W_3(t, \Delta, H')$ en $O(x^{50\varepsilon})$ sommes où les congruences des variables ci-dessus sont bloquées.

Ces deux remarques fournissent une majoration plus agréable d'écriture de la quantité W_4 définie par (3.14):

$$W_4 \ll x^{100\varepsilon} \sup_{(\tilde{\beta})} W_5(\tilde{\beta}) \tag{3.15}$$

où $W_5(\tilde{\beta})$ est défini par

$$W_5(\tilde{\beta}) = \sum_{k_1 \sim K_1} \sum_{\substack{(r', k_1 D') = 1 \\ r' \sim R'}} \left| \sum_{\substack{h, n_1, n_2, s' \\ (n_1 r' s', k_1 n_2 D') = 1}} \tilde{\beta}(h, n_1, n_2, s') e\left(ah(d_1 n_1 - n_2) \frac{\bar{D}' \bar{n}_2 \bar{k}_1}{n_1 r' s'} \right) \right| \tag{3.16}$$

et où le supremum est pris sur l'ensemble des suites $(\tilde{\beta})$ de module inférieur à 1, qui valent zéro dès que l'une ou l'autre des quatre propriétés suivantes n'est pas vérifiée

$$h \sim H', \qquad n_1 \sim N d^{-1} d_1^{-1}, \qquad n_2 \sim N d^{-1}, \qquad s' \sim S' \tag{3.17}$$

et qui vérifient la propriété

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{\beta}(h, n_1, n_2, s') \neq 0 \\ \tilde{\beta}(h', n_1', n_2', s'') \neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow (d_1 n_1, n_2) = (n_2, n_1 s') = (n_2, n_1' s'') = 1 \tag{3.18}$$

En rassemblant les expressions (3.9), (3.12), (3.14) et (3.15), on constate, que pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que $W_5(\tilde{\beta})$ vérifie

$$W_5(\tilde{\beta}) \ll N^2 R^2 S^2 x^{-1\,000\,\varepsilon}. \tag{3.19}$$

Cette majoration sera le but des paragraphes suivants et se fera soit avec le lemme 3 soit avec le lemme 4.

IV. Majoration de $W_5(\tilde{\beta})$. Première méthode

L'inégalité de Cauchy-Schwarz, transforme la relation (3.16) en l'inégalité

$$\begin{aligned} W_5(\tilde{\beta}) \ll K_1^{1/2} R'^{1/2} \Bigg\{ & \sum_{\substack{r' \sim R' \\ (r', D') = 1}} \sum_{\substack{h, n_1, n_2, s' \\ h', n'_1, n'_2, s'' \\ (n_2 n'_2 D', n_1 n'_1 r' s' s'') = 1}} \tilde{\beta}(h, n_1, n_2, s') \\ & \bar{\tilde{\beta}}(h', n_1', n_2', s'') \sum_{\substack{k_1 \sim K_1 \\ (k_1, n_1 n'_1 r' s' s'') = 1}} e\left(l \frac{\bar{D}' \bar{n}_2 \bar{n}'_2 \bar{k}_1}{n_1 n'_1 r' s' s''} \right) \Bigg\}^{1/2} \\ & = K_1^{1/2} R'^{1/2} \{ W_{l=0} + W_{l \neq 0} \}^{1/2}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Dans la relation précédente, on a posé

$$l=a\,(hn'_1\,n'_2\,s''\,(d_1\,n_1-n_2)-h'\,n_1\,n_2\,s'\,(d_1\,n'_1-n'_2)) \tag{4.2}$$

et $W_{l=0}$ (resp. $W_{l\neq 0}$) désignent la contribution des termes avec $l=0$ (resp. $l\neq 0$). Signalons que c'est ici, pour réduire au même dénominateur dans (4.1) qu'a été utilisée la relation (3.18).

1. LA DIAGONALE $W_{l=0}$. — Pour compter le nombre de solutions de l'équation $l=0$ on est ramené à examiner l'égalité

$$hn'_1\,n'_2\,s''\,(d_1\,n_1-n_2)=h'\,n_1\,n_2\,s'\,(d_1\,n'_1-n'_2). \tag{4.3}$$

La condition $(d_1\,n_1,\,n_2)=1$ [*voir* (3.18)] entraîne que

$$n_1\,|\,hn'_1\,n'_2\,s''$$

et, de même,

$$n_2\,|\,hn'_1\,n'_2\,s''.$$

Ainsi, dès que h, n'_1, n'_2 et s'' sont fixés, il y a $O(x^\varepsilon)$ possibilités pour n_1 et n_2. Le nombre de solutions de (4.3) est ainsi

$$\ll H'\,N^2\,S\,x^\varepsilon$$

ce qui donne la majoration

$$W_{l=0}\ll N^3\,R^4\,S^4\,x^{-1+\varepsilon}. \tag{4.4}$$

2. LES TERMES NON DIAGONAUX : $W_{l\neq 0}$. — Dans la formule (4.1), on voit que k_1 décrit un intervalle, on utilise donc le lemme 3. Celui borne pour ainsi dire, une somme de Kloosterman-Ramanujan par la racine carrée du dénominateur. Dans le cas présent, le dénominateur vaut à peu près $N^2\,RS^2$, et l'intervalle parcouru par k_1 est environ de longueur RS, le lemme 3 est donc utile pour N petit.

Plus précisément, on a

$$\sum_{\substack{k_1\sim K_1\\(k_1,\,n_1\,n'_1\,r'\,s'\,s'')=1}} \ll (N^2\,RS^2)^{1/2+\varepsilon}\,(l,\,n_1\,n'_1\,r'\,s'\,s'')^{1/2}. \tag{4.5}$$

Ainsi, pour majorer $W_{l\neq 0}$, en utilisant l'inégalité $|\tilde\beta|\leqq 1$, on est amené à considérer la somme

$$G=\sum_{r'\sim R'}\ \sum_{h,\,h'\sim H'}\ \sum_{\substack{n_1,\,n'_1\sim Nd^{-1}\,d_1^{-1}\\ n_2,\,n'_2\sim N\,d^{-1}\\ d_1\,n_1\neq n_2}}\ \sum_{\substack{s',\,s''\sim S'\\ l\neq 0}} (l,\,n_1\,n'_1\,r'\,s'\,s'')^{1/2}$$

qui, à cause de l'inégalité

$$(l,\,n_1\,n'_1\,r'\,s'\,s'')^{1/2}\leqq (l,\,n_1\,r'\,s')^{1/2}\,(l,\,n'_1\,r'\,s'')^{1/2}\leqq (l,\,n_1\,r'\,s')+(l,\,n'_1\,r'\,s'')$$

et de l'inégalité suivante [conséquence de (4.2)]:

$$(l,\, n_1 r' s') \leqq (l,\, r')\,(ahn'_1\, n'_2\, s''\,(d_1 n_1 - n_2),\, n_1 s')$$
$$\leqq (l,\, r')\,(ahn'_1\, n'_2\, s'',\, n_1)\,(ahn'_1\, n'_2\, s''\,(d_1 n_1 - n_2),\, s')$$

vérifie

$$G \leqq 2 \sum_{\substack{h,\, n_1,\, n_2,\, s' \\ h',\, n'_1,\, n'_2,\, s'' \\ d_1 n_1 \neq n_2,\, l \neq 0}} (ahn'_1\, n'_2\, s'',\, n_1)\,(ahn'_1\, n'_2\, s''\,(d_1 n_1 - n_2),\, s') \sum_{r' \sim R'} (l,\, r').$$

Puisque l ne dépend pas de r', on utilise le lemme 2, pour sommer sur r', puis de nouveau ce lemme pour sommer sur s', on a donc

$$G \ll RS\, x^{\varepsilon} \sum_{h,\, h',\, n_1,\, n'_1,\, n_2,\, n'_2,\, s''} (ahn'_1\, n'_2\, s'',\, n_1)$$

et finalement

$$G \ll H^2 N^4 RS^2 x^{3\varepsilon} \ll N^6 R^5 S^6 x^{-2+3\varepsilon}. \tag{4.6}$$

En regroupant (4.1), (4.4), (4.5) et (4.6) on a l'inégalité

$$W_5(\tilde{\beta}) \ll RS^{1/2} \{ N^3 R^4 S^4 x^{-1+\varepsilon} + N^7 R^{11/2} S^7 x^{-2+5\varepsilon} \}^{1/2}$$
$$\ll \{ N^{3/2} R^3 S^{5/2} x^{-1/2} + N^{7/2} R^{15/4} S^4 x^{-1} \} x^{3\varepsilon}.$$

Ainsi $W_5(\tilde{\beta})$ vérifie (3.19) dès que la condition (C.1) est satisfaite, ce qui termine la démonstration du Théorème dans ce cas.

3. Variante de la méthode. — Il est possible de moduler les importances relatives de la diagonale et des termes non diagonaux, en utilisant différemment l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

La relation (3.16) entraîne la majoration

$$W_5(\tilde{\beta}) \leqq \sum_{k_1 \sim K_1} \sum_{\substack{(r',\, k_1 D')=1 \\ r' \sim R'}} \sum_{(n_1,\, k_1 D')=1} \left| \sum_{\substack{h,\, n_2,\, s' \\ (n_1 r' s',\, k_1 n_2 D')=1}} \tilde{\beta}(h,\, n_1,\, n_2,\, s')\, e\left(ah\,(d_1 n_1 - n_2) \frac{\bar{D}'\, \bar{n}_2\, \bar{k}_1}{n_1 r' s'} \right) \right|$$

ce qui conduit à

$$(4.7)\quad W_5(\tilde{\beta}) \ll N^{1/2} K_1^{1/2} R'^{1/2} \Big\{ \sum_{\substack{r' \sim R' \\ (r', D')=1}} \sum_{\substack{h,\, n_2,\, s',\, n_1 \\ h',\, n_2',\, s'' \\ (n_2 n_2' D',\, n_1 r' s' s'')=1}} \tilde{\beta}(h, n_1, n_2, s') \bar{\tilde{\beta}}(h', n_1, n_2', s'') \sum_{\substack{k_1 \sim K_1 \\ (k_1,\, n_1 r' s' s'')=1}} e\Big(l \frac{\bar{D}' \bar{n}_2 \bar{n}_2' \bar{k}_1}{n_1 r' s' s''} \Big) \Big\}^{1/2}$$

$$= N^{1/2} K_1^{1/2} R'^{1/2} \{ W_{l=0} + W_{l \neq 0} \}^{1/2}$$

où l est maintenant défini par

$$(4.8)\qquad l = a(hn_2' s''(d_1 n_1 - n_2) - h' n_2 s' (d_1 n_1 - n_2')).$$

La contribution à (4.7) de la diagonale est alors plus importante, puisque, de façon identique au calcul précédent, on a

$$(4.9)\qquad W_{l=0} \ll R' NK_1 (H' NS' x^{\varepsilon}) \ll N^3 R^4 S^4 x^{-1+2\varepsilon}.$$

Par contre le dénominateur de la somme de Kloosterman est plus petit que dans la première technique, ce qui donne la majoration

$$(4.10)\qquad W_{l \neq 0} \ll H'^2 N^3 R' S'^2 (NRS^2)^{1/2} x^{\varepsilon} \ll N^{11/2} R^{11/2} S^7 x^{-2+3\varepsilon}.$$

En reportant (4.9) et (4.10) dans (4.7), on obtient

$$W_5(\tilde{\beta}) \ll \{ N^2 R^3 S^{5/2} x^{-1/2} + N^{13/4} R^{15/4} S^4 x^{-1} \} x^{2\varepsilon}.$$

Ainsi le théorème est prouvé sous la condition (C.2).

Signalons que l'ordre de grandeur de a n'est apparu que lors de l'intégration par parties au paragraphe III.6 et lors de l'application du lemme 1, sous la forme de la fonction nombre de diviseurs de a, ceci explique la grande région d'uniformité sur a, sous les conditions (C.1) ou (C.2).

V. Majoration de $W_5(\tilde{\beta})$. Seconde méthode

On désire maintenant utiliser le lemme 4. Pour ce faire, il faut tout d'abord lisser les variables k_1 et r' : la relation (3.16) entraîne que $W_5(\tilde{\beta})$ vérifie

$$W_5(\tilde{\beta}) \leqq \sum_{\substack{k_1 \\ (r',\, k_1 D')=1}} \sum_{r'} \tilde{I}_{K_1}(k_1) \tilde{I}_{R'}(r') \Big| \sum_{h,\, n_1,\, n_2,\, s'} \dots \Big|$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$(5.1)\quad W_5(\tilde{\beta}) \ll K_1^{1/2} R'^{1/2} \Bigg\{ \sum_{\substack{h,\, n_1,\, n_2,\, s' \\ h',\, n_1',\, n_2',\, s''}} \tilde{\beta}(h, n_1, n_2, s') \overline{\tilde{\beta}}(h', n_1', n_2', s'')$$

$$\times \sum_{\substack{k_1,\, r' \\ (n_2 n_2' D' k_1,\, n_1 n_1' r' s' s'') = 1}} \tilde{I}_{K_1}(k_1) \tilde{I}_{R'}(r') e\left(l \frac{\bar{D}' \bar{n}_2 \bar{n}_2' \bar{k}_1}{n_1 n_1' r' s' s''} \right) \Bigg\}^{1/2}$$

$$= K_1^{1/2} R'^{1/2} \{ W_{l=0} + W_{l\neq 0} \}^{1/2}$$

où l est défini par (4.2).

Ici, aussi les termes diagonaux vérifient (4.4) ce qui, compte tenu de l'inégalité (3.19) qu'on veut démontrer, amène à supposer

$$(5.2)\qquad N^{-1} R^2 S \leqq x^{1-10\varepsilon}.$$

1. Majoration de $W_{l\neq 0}$. — Pour appliquer le lemme 4, les rôles des variables

$$c,\quad d,\quad l,\quad r \quad \text{et} \quad s$$

seront joués respectivement par

$$r',\quad k_1,\quad l,\quad D' n_2 n_2' \quad \text{et} \quad n_1 n_1' s' s''$$

si bien que les quantités

$$C,\quad D,\quad R \quad \text{et} \quad S$$

ont alors pour ordre de grandeur, à un facteur $x^{10\varepsilon}$ près,

$$R,\quad RS,\quad N^2 \quad \text{et} \quad N^2 S^2.$$

Quant à L, il vérifie

$$1 \leqq L \leqq 8 |a| H N^3 S \ll N^4 R^2 S^3 x^{-1+2\varepsilon}.$$

Après avoir découpé l'intervalle de variation de l et avoir remarqué que la valeur maximale de L fournit, dans le lemme 4, la majoration la plus grande, on écrit

$$(5.3)\quad K^2(C, D, L, R, S) \ll x^{100\varepsilon} \{ N^2 RS^2 (N^4 S^2 + N^4 R^2 S^3 x^{-1})(R + N^2 RS)$$
$$+ N^4 R^4 S^3 x^{-1} + N^2 R^3 S^3 \sqrt{(N^4 S^2 + N^4 R^2 S^3 x^{-1}) N^2} \}$$
$$\ll x^{100\varepsilon} \{ N^8 R^2 S^5 + N^8 R^4 S^6 x^{-1} + N^5 R^3 S^4 + N^5 R^4 S^{9/2} x^{-1/2} \}.$$

Il reste à évaluer le terme

$$(5.4)\qquad \mathscr{B} = \sum_{\substack{l,\, r,\, s \\ l \neq 0}} |b_{l,\, r,\, s}|^2$$

où $b_{l,\,r,\,s}$ vaut

$$\sum \tilde{\beta}(h, n_1, n_2, s')\,\bar{\tilde{\beta}}(h', n'_1, n'_2, s'')$$

Cette somme est faite sur les $(h, h', n_1, n'_1, n_2, n'_2, s', s'')$ vérifiant (4.2) et les égalités

$$r = \mathrm{D}' n_2 n'_2 \qquad \text{et} \qquad s = n_1 n'_1 s' s''.$$

$\mathscr{B}$ vérifie l'inégalité

$$\begin{aligned}\mathscr{B} \ll x^{\varepsilon} \bigl| \{ &(h, h', h_1, h'_1, n_1, n'_1, n_2, n'_2, s', s''); (d_1 n_1, n_2) = 1, \\ &hn'_1 n'_2 s'' (d_1 n_1 - n_2) - h' n_1 n_2 s' (d_1 n'_1 - n'_2) = h_1 n'_1 n'_2 s'' (d_1 n_1 - n_2) - h'_1 n_1 n_2 s' (d_1 n'_1 - n'_2), \\ &0 < |h|, |h'|, |h_1| \text{ et } |h'_1| \leqq \mathrm{H},\ 0 < n_1, n'_1, n_2, n'_2 \leqq 2\mathrm{N},\ 0 < s' \text{ et } s'' < 2\mathrm{S} \} \bigr|.\end{aligned}$$

L'équation ci-dessus se ramène à

$$n'_1 n'_2 s'' (d_1 n_1 - n_2)(h - h_1) = n_1 n_2 s' (d_1 n'_1 - n'_2)(h' - h'_1) \tag{5.5}$$

dont le nombre de solutions se détermine en envisageant deux cas :

– si on impose $h = h_1$, on trouve $O(\mathrm{H}^2 \mathrm{N}^4 \mathrm{S}^2)$ solutions;

– si on impose $h \neq h_1$, la condition $(d_1 n_1, n_2) = 1$ entraîne que $n_1 n_2 \mid n'_1 n'_2 s'' (h - h_1)$ ce qui fournit $O(\mathrm{H}^3 \mathrm{N}^2 \mathrm{S} x^{\varepsilon})$ autres solutions.

Finalement, on a l'inégalité

$$\mathscr{B} \ll x^{2\varepsilon} (\mathrm{H}^2 \mathrm{N}^4 \mathrm{S}^2 + \mathrm{H}^3 \mathrm{N}^2 \mathrm{S}) \ll x^{5\varepsilon} (\mathrm{N}^6 \mathrm{R}^4 \mathrm{S}^6 x^{-2} + \mathrm{N}^5 \mathrm{R}^6 \mathrm{S}^7 x^{-3}) \ll \mathrm{N}^6 \mathrm{R}^4 \mathrm{S}^6 x^{-2+15\varepsilon}$$

d'après la condition (5.2). En regroupant cette majoration et (5.3), on obtient la relation

$$\mathrm{W}_{l \neq 0} \ll (\mathrm{N}^7 \mathrm{R}^3 \mathrm{S}^{11/2} x^{-1} + \mathrm{N}^7 \mathrm{R}^4 \mathrm{S}^6 x^{-3/2} + \mathrm{N}^{11/2} \mathrm{R}^{7/2} \mathrm{S}^5 x^{-1} + \mathrm{N}^{11/2} \mathrm{R}^4 \mathrm{S}^{21/4} x^{-5/4}) x^{20\varepsilon}.$$

En reportant cette majoration dans (5.1), on voit que pour obtenir l'inégalité (3.19), il suffit, en plus de l'inégalité (5.2), qu'on ait la relation

$$\max(\mathrm{N}^3 \mathrm{R} \mathrm{S}^{5/2}, \mathrm{N}^2 \mathrm{R}^{4/3} \mathrm{S}^2, \mathrm{N}^{3/2} \mathrm{R}^{3/2} \mathrm{S}^2, \mathrm{N}^{6/5} \mathrm{R}^{8/5} \mathrm{S}^{9/5}) \leqq x^{1 - 1\,000\varepsilon}.$$

Ces deux conditions sont équivalentes à (C.3), car la condition

$$\mathrm{N}^2 \mathrm{R}^{4/3} \mathrm{S}^2 \leqq x^{1 - 1\,000\varepsilon}$$

est superflue puisqu'on a l'équivalence

$$\mathrm{N}^2 \mathrm{R}^{4/3} \mathrm{S}^2 \leqq \mathrm{N}^{3/2} \mathrm{R}^{3/2} \mathrm{S}^2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{R} \geqq \mathrm{N}^3.$$

Pour $\mathrm{R} \leqq \mathrm{N}^3$, la condition

$$\mathrm{N}^3 \mathrm{R} \mathrm{S}^{5/2} \leqq x^{1 - 1\,000\varepsilon}$$

conduit à $\mathrm{RS} \leqq x^{1/2 - \varepsilon}$ cas déjà traité par l'inégalité de grand crible.

2. Première variante de cette méthode. — Ici aussi, il est possible de modifier l'importance relative des termes diagonaux et non diagonaux. On obtient ainsi une

inégalité semblable à (4.7), à la différence près qu'il y a dans l'accolade le facteur

$$\tilde{\mathbf{1}}_{K_1}(k_1)\,\tilde{\mathbf{1}}_{R'}(r').$$

Le nombre l est toujours défini par (4.8) et la majoration (4.9) de $W_{l=0}$ est toujours valable, conduisant, pour vérifier (3.19), à l'inégalité

$$R^2 S \leqq x^{1-2\,000\varepsilon}. \tag{5.6}$$

Pour étudier $W_{l\neq 0}$, on applique le lemme 4 avec

$$C, \quad D, \quad L, \quad R \quad \text{et} \quad S$$

valant respectivement (à un facteur $x^{5\varepsilon}$ près)

$$R, \quad RS, \quad HN^2 S \ll N^3 R^2 S^3 x^{-1+\varepsilon}, \quad N^2 \quad \text{et} \quad NS^2,$$

ce qui donne l'inégalité

$$\begin{aligned} K^2(C, D, L, R, S) \ll x^{100\varepsilon}\{&NRS^2(N^3S^2+N^3R^2S^3x^{-1})(R+N^2RS)+N^4R^4S^3x^{-1} \\ &+NR^3S^3\sqrt{(N^3S^2+N^3R^2S^3x^{-1})N^2}\} \ll (N^6R^2S^5+N^{7/2}R^3S^4)\,x^{100\varepsilon} \end{aligned} \tag{5.7}$$

en utilisant (5.6).

Pour majorer $\mathscr{B}$, défini par (5.4) mais où $b_{l,\,r,\,s}$ est défini comme

$$b_{l,\,r,\,s}=\sum \tilde{\beta}(h, n_1, n_2, s')\,\overline{\tilde{\beta}}(h', n_1, n'_2, s'')$$

la somme étant faite sur les $(h, h', n_1, n_2, n'_2, s', s'')$ vérifiant (4.8) et les égalités

$$r=D'n_2n'_2 \qquad \text{et} \qquad s=n_1s's'',$$

on est ramené à évaluer le nombre de solutions de l'équation

$$n'_2s''(d_1n_1-n_2)(h-h_1)=n_2s'(d_1n_1-n'_2)(h'-h'_1)$$

qui remplace (5.5). A cause de la condition $(d_1 n_1, n_2)=1$, on voit que le nombre de solutions est

$$O(H^2N^3S^2+H^3N^2Sx^{\varepsilon})=O(N^5R^4S^6x^{-2+2\varepsilon})$$

d'après (5.6). En regroupant (4.7), (5.6), (5.7) et (5.8) on conclut que le théorème est démontré sous la condition (C.4).

3. Seconde variante de cette méthode. — L'égalité (3.16) entraîne l'inégalité

$$W_5(\tilde{\beta}) \leqq \sum_{k_1} \sum_{\substack{r' \\ (r',\,k_1 D')=1}} \tilde{\mathbf{1}}_{K_1}(k_1)\,\tilde{\mathbf{1}}_{R'}(r') \sum_{n_1}\sum_{n_2}\Big|\sum_{h,\,s'}\dots\Big|$$

qui donne la majoration

$$(5.8)\quad W_5(\tilde{\beta}) \ll NRS^{1/2}\Bigg\{ \sum_{\substack{h,\, s',\, n_1 \\ h',\, s'',\, n_2}} \tilde{\beta}(h, n_1, n_2, s')\,\bar{\tilde{\beta}}(h', n_1, n_2, s'')$$

$$\sum_{(n_2 D' k_1,\, n_1 r' s' s'')=1} \tilde{1}_{K_1}(k_1)\,\tilde{1}_{R'}(r')\, e\left(l\frac{\bar{D}'\bar{n}_2\bar{k}_1}{n_1 r' s' s''}\right)\Bigg\}^{1/2} = NRS^{1/2}\{W_{l=0}+W_{l\neq 0}\}^{1/2}$$

avec $l=a(hs''-h's')(d_1 n_1 - n_2)$.

De même que précédemment, on obtient

$$W_{l=0} \ll N^3 R^4 S^4 x^{-1+2\varepsilon}.$$

La contribution de la diagonale est importante, puisque, pour obtenir (3.19), on est amené à supposer

$$(5.9)\qquad NR^2 S \leqq x^{1-2\,000\varepsilon}.$$

Le lemme 4, s'applique avec C, D, L, R et S valant respectivement R, RS, $N^2 R^2 S^3 x^{-1+\varepsilon}$, N et NS^2.

Ainsi les majorations de K^2

$$K^2(C, D, L, R, S) \ll (N^4 R^2 S^5 + N^{5/2} R^3 S^4)\, x^{100\varepsilon}$$

et de la quantité $\mathscr{B}$ correspondante

$$\mathscr{B} \ll (H^2 N^2 S^2 + H^3 N^2 S)\, x^{\varepsilon} \ll N^4 R^4 S^6 x^{-2+3\varepsilon}$$

obtenue à l'aide de (5.9), conduisent à l'évaluation

$$W_{l\neq 0} \ll (N^4 R^3 S^{11/2} x^{-1} + N^{13/4} R^{7/2} S^5 x^{-1})\, x^{110\varepsilon}.$$

Il reste à reporter cette majoration dans (5.8) pour terminer la démonstration du théorème sous l'hypothèse (C.5).

Dans cette variante, la majoration du lemme 3 ne fournit apparemment aucun résultat intéressant; pour conclure, signalons que chacune des trois méthodes décrites au paragraphe V, basées sur le lemme 4, donne des inégalités très sensibles à l'ordre de grandeur de a, puisque la quantité L est proportionnelle à a, et c'est pour simplifier que nous avons supposé $|a| \leqq \mathscr{L}^A$.

VI. Démonstration du corollaire 5

Les résultats de ce corollaire peuvent être améliorés, en affinant les raisonnements combinatoires ci-dessous. On se restreint ici à une présentation simple qui se réfère à la démonstration du théorème 8 de [3].

1. RESTRICTION SUR θ_2. — On montre facilement — par une représentation graphique — qu'on a l'inégalité

$$(6.1)\qquad (\theta_1, \theta_2) \in \mathscr{D}' \setminus \mathscr{D}^* \quad \Rightarrow \quad \theta_1 < \frac{45}{133} \quad \text{et} \quad \theta_2 < \frac{51}{266}$$

inégalité que l'on supposera réalisée, par la suite.

2. RÉDUCTION DE LA DÉMONSTRATION. — La démonstration de [3] débute par l'application de l'identité d'Heath-Brown pour ramener la preuve à l'étude de la répartition de produits de convolution de la forme

$$\mu\, \mathbf{1}_{M_1} * \ldots * \mu\, \mathbf{1}_{M_j} * \mathbf{1}_{N_1} * \ldots * \mathbf{1}_{N_j}$$

$1 \leqq j \leqq 7$. Si on pose $M_i = x^{\mu_i}$ et $N_i = x^{\nu_i}$ les exposants μ_i et ν_i vérifient les inégalités

$$0 \leqq \mu_j \leqq \ldots \leqq \mu_1 \leqq 1/7, \qquad 0 \leqq \nu_j \leqq \ldots \leqq \nu_1$$

et

$$\mu_1 + \ldots + \mu_j + \nu_1 + \ldots + \nu_j = 1.$$

Maintenant, en notant

$$\rho_1 = 2(\theta_1 + \theta_2) - 1, \qquad \rho_2 = \frac{5}{6} - \frac{4}{3}(\theta_1 + \theta_2), \qquad \rho_3 = \theta_2$$

$$\rho_4 = \min\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\theta_2 - \theta_1, \frac{2}{5}(1 - \theta_1), \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\theta_1\right\}, \qquad \rho_5 = \theta_1 \qquad \text{et} \qquad \rho_6 = \frac{1}{2}(1 - \theta_2)$$

Bombieri, Friedlander et Iwaniec grâce aux théorèmes 1, 2 et 3 de [3], ramènent leur démonstration à vérifier, pour tout A, l'inégalité

$$(6.2)\qquad E((\gamma) * (\delta), (\mu\, \mathbf{1}_{M_1}) * \ldots * (\mu\, \mathbf{1}_{M_j}) * (\mathbf{1}_{N_1}) * \ldots * (\mathbf{1}_{N_j}); x, x^{\theta_1 + \theta_2}; a) \ll x\, \mathscr{L}^{-A}$$

lorsqu'il n'y a pas de somme partielle de l'ensemble $\mathscr{M} = \{\mu_1, \ldots, \mu_j, \nu_1, \ldots, \nu_j\}$ dans les intervalles $[\rho_1 + \varepsilon, \rho_2 - \varepsilon]$, $[\rho_3 + \varepsilon, \rho_4 - \varepsilon]$ et $[\rho_5 + \varepsilon, \rho_6 - \varepsilon]$.

Puis en appliquant le théorème 5 de [3], on peut supposer que $\nu_1 \leqq \rho_6 - \varepsilon$, et d'après ce qui précède

$$\nu_1 \leqq \rho_5 + \varepsilon.$$

C'est ici qu'on introduit un argument nouveau fourni par le théorème.

3. CAS OU UNE SOMME PARTIELLE DE $\mathscr{M}$ EST DANS $[\varepsilon, \rho_1 + \varepsilon]$. — Soit ν cette somme partielle, on applique le théorème [condition (C.2)] avec

$$R = x^{\theta_1}, \qquad S = x^{\theta_2}, \qquad N = x^{\nu}$$

pour prouver, dans ce cas, l'inégalité (6.2).

Il reste à vérifier les inégalités

$$2\theta_1+\theta_2<\frac{29}{56}+\theta_1<1 \quad \text{d'après } (6.1)$$

et

$$\frac{5}{4}\nu+\frac{7}{4}\theta_1+2\theta_2\leqq\frac{17}{4}\theta_1+\frac{9}{2}\theta_2-\frac{5}{4}+\frac{5}{4}\varepsilon=\frac{17}{4}(\theta_1+\theta_2)+\frac{\theta_2}{4}-\frac{5}{4}+\frac{5}{4}\varepsilon$$
$$<1-\varepsilon \quad \text{d'après } (6.1).$$

Ainsi, on est ramené au cas où

$$\rho_2-\varepsilon<\nu_4\leqq\rho_3+\varepsilon, \qquad \rho_4-\varepsilon\leqq\nu_3\leqq\nu_2\leqq\nu_1\leqq\rho_5+\varepsilon$$

et la somme des μ_i et ν_i restants (appelée ν) satisfait

$$\nu\leqq\varepsilon.$$

Le théorème a donc permis d'éliminer les petites variables.

4. Cas ou $\nu_2<(137/532)-\varepsilon:=\xi$. — En effet dans ce cas, ν_1 est assez grand, et on applique le lemme 6 avec

$$L=x^{\nu_2}, \qquad N=x^{\nu_1}, \qquad M=x^{\nu_3+\nu_4+\nu}=x^{1-\nu_1-\nu_2} \qquad \text{et} \qquad Q=x^{\theta_1+\theta_2}.$$

Pour vérifier les conditions $LN>Qx^{\varepsilon}$, $L^4MQ<x^{2-\varepsilon}$ et $L^2MQ^2<x^{2-\varepsilon}$, il suffit de constater que l'on a

$$\nu_1+\nu_2=1-\nu_3-\nu_4-\nu\geqq1-\xi-\rho_3-\varepsilon=\frac{395}{532}-\theta_2\geqq\frac{293}{532}>\theta_1+\theta_2$$

et

$$4\nu_2+(1-\nu_1-\nu_2)+\theta_1+\theta_2=4\nu_2+\nu_3+\nu_4+\nu+\theta_1+\theta_2\leqq5\xi+\rho_3+\theta_1+\theta_2+2\varepsilon$$
$$=5\xi+(\theta_1+\theta_2)+\theta_2+2\varepsilon<2$$

grâce à (6.1), et l'inégalité $\theta_1+\theta_2<29/56$, enfin

$$2\nu_2+(\nu_3+\nu_4+\nu)+2(\theta_1+\theta_2)\leqq3\xi+2\theta_1+3\theta_2+2\varepsilon=3\xi+2(\theta_1+\theta_2)+\theta_2+2\varepsilon<2.$$

Il reste le cas où ν_2 est grand.

5. Cas ou $\nu_2\geqq\xi$. — Nous suivons la fin de la démonstration de [3], en faisant appel au lemme 5, que nous appliquons avec

$$L=x^{\nu_2}, \qquad M=x^{1-\nu_2-\nu_3}, \qquad N=x^{\nu_3} \qquad \text{et} \qquad Q=x^{\theta_1+\theta_2}$$

après avoir utilisé le lemme fondamental du crible pour satisfaire à la condition que $\beta_n\lambda_l=0$ dès que l ou n ont un petit facteur premier (cette technique est employée dans [3]).

La vérification de la première condition : $LN \geqq Qx^{\varepsilon}$, se ramène à

$$\nu_2+\nu_3 \geqq \xi+\rho_4-\varepsilon > \theta_1+\theta_2+\varepsilon$$

cette inégalité a lieu, puisqu'on a les inégalités

$$4\theta_1+\theta_2 < \frac{403}{266}, \qquad 7\theta_1+5\theta_2 < 2+5\xi, \qquad \frac{7}{4}\theta_1+\theta_2 < \frac{403}{532}.$$

Pour vérifier $L^3 N^2 \leqq Qx^{1-\varepsilon}$, on écrit, en s'inspirant de [3]

$$\begin{aligned} 3\nu_2+2\nu_3 &\leqq \frac{5}{3}(\nu_1+\nu_2+\nu_3)=\frac{5}{3}(1-\nu_4-\nu) \leqq \frac{5}{3}(1-\rho_2+\varepsilon) \\ &\leqq \frac{5}{18}+\frac{20}{9}(\theta_1+\theta_2)+\frac{5}{3}\varepsilon < 1+\theta_1+\theta_2-\varepsilon \quad \text{car } \theta_1+\theta_2 < \frac{13}{22}. \end{aligned}$$

De même pour $L^2 N^4 (L+N) < x^{2-\varepsilon}$, on a

$$3\nu_2+4\nu_3 \leqq \frac{7}{3}(\nu_1+\nu_2+\nu_3)=\frac{7}{3}(1-\nu_4-\nu) \leqq \frac{7}{3}(1-\rho_2+\varepsilon) < 2-\varepsilon$$

puisque $\theta_1+\theta_2 < \dfrac{29}{56}$.

Ceci termine la démonstration du corollaire 5.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Balog, *On Additive Representation of Integers* (preprint).

[2] E. Bombieri, *On the Large-Sieve* (*Mathematika*, vol. 12, 1965, p. 201-225).

[3] E. Bombieri, J. Friedlander et H. Iwaniec, *Primes in Arithmetic Progressions to Large Moduli* (*Acta Math.*, vol. 156, 1986, p. 203-251).

[4] E. Bombieri, J. Friedlander et H. Iwaniec, *Primes in Arithmetic Progressions to Large Moduli, II* (*Math. Annalen*, vol. 277, 1987, p. 361-393).

[5] J.-M. Deshouillers et H. Iwaniec, *Kloosterman Sums and the Fourier Coefficients of Cusp Forms* (*Invent. Math.*, vol. 70, 1982, p. 219-288).

[6] E. Fouvry, *Répartition des suites dans les progressions arithmétiques. Résultats du type Bombieri-Vinogradov avec exposant supérieur à 1/2* (*Thèse de Doctorat ès-Sciences*, Université de Bordeaux-I, 1981).

[7] E. Fouvry, *Répartition des suites dans les progressions arithmétiques* (*Acta Arith.*, vol. 41, 1982, p. 49-72).

[8] E. Fouvry, *Autour du théorème de Bombieri-Vinogradov* (*Acta Math.*, vol. 152, 1984, p. 219-244).

[9] E. Fouvry, *Théorème de Brun-Titchmarsh; application au théorème de Fermat* (*Invent. Math.*, vol. 79, 1985, p. 383-407).

[10] E. Fouvry et F. Grupp, *On the Switching Principle in Sieve Theory* (*J. fur die reine und angewandte Mathematik*, vol. 370, 1986, p. 101-126).

[11] E. Fouvry et H. Iwaniec, *On a Theorem of Bombieri-Vinogradov-Type* (*Mathematika*, vol. 27, 1980, p. 135-172).

[12] E. Fouvry et H. Iwaniec, *Primes in Arithmetic Progressions* (*Acta Arith.*, vol. 42, 1983, p. 197-218).

[13] C. Hooley, *Applications of Sieve Methods to the Theory of Numbers*, Cambridge University Press, n° 70, 1976.

[14] H. Iwaniec, *A New Form of the Error Term in the Linear Sieve* (*Acta Arith.*, vol. 37, 1980, p. 307-320).

[15] H. IWANIEC, *On the Brun-Titchmarsh Theorem* (*J. Math. Soc. of Japan*, vol. 34, 1982, p. 95-123).

[16] P. SHIU, *A Brun Titchmarsh Theorem for Multiplicative Functions* (*J. fur die reine und angewandte Mathematik*, vol. 313, 1980, p. 161-170).

[17] A. I. VINOGRADOV. *L'hypothèse de densité pour les séries* L *de Dirichlet* (en russe) (*Izv. Akad. Nauk S.S.S.R.*, Ser. Math., vol. 29, 1965, p. 903-904; *Corrigendum* (*Ibid.*, vol. 30, 1966, p. 719-720).

(Manuscrit reçu le 29 janvier 1987,
révisé le 1er juin 1987).

Étienne FOUVRY,
Mathématiques Bât. n° 425,
Université de Paris-Sud,
91405 Orsay Cedex.