ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JEAN-PIERRE DEMAILLY
CHRISTINE LAURENT-THIÉBAUT

# Formules intégrales pour les formes différentielles de type $(p,q)$ dans les variétés de Stein

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série*, tome 20, nº 4 (1987), p. 579-598

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1987_4_20_4_579_0>

*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*,
4e série, t. 20, 1987, p. 579 à 598.

# FORMULES INTÉGRALES POUR LES FORMES DIFFÉRENTIELLES DE TYPE $(p, q)$ DANS LES VARIÉTÉS DE STEIN

PAR JEAN-PIERRE DEMAILLY ET CHRISTINE LAURENT-THIEBAUT

RÉSUMÉ. — On construit sur toute variété de Stein un noyau global permettant de démontrer des formules de Koppelman et Koppelman-Leray pour des formes différentielles de type $(p, q)$ quelconque.

ABSTRACT. — We construct on every Stein manifold a global kernel which enables us to prove Koppelman and Koppelman-Leray formulas for differential forms of arbitrary type $(p, q)$.

## Introduction

Henkin et Leiterer ont construit dans [2] et ([3], chap. 4) des noyaux globaux sur une variété de Stein grâce auxquels ils démontrent des formules intégrales pour les $(0, q)$-formes différentielles. Dans cet article nous démontrons des formules intégrales du type Koppelman et Koppelman-Leray pour les formes différentielles de type $(p, q)$ quelconque sur une variété de Stein. Celles-ci généralisent à la fois les formules démontrées par Henkin et Leiterer pour les $(0, q)$-formes différentielles (*cf.* [2] et [3], chap. 4) et les formules de Koppelman et Koppelman-Leray pour les $(p, q)$-formes différentielles dans $\mathbb{C}^n$ (*cf.* [8], [7] et [1]); elles permettent sous certaines conditions de résoudre des problèmes de $\bar\partial$ avec estimations de croissance ou de régularité.

Dans un premier paragraphe nous construisons des noyaux dont nous donnons une expression globale sur la variété de Stein M; ce sont des formes différentielles continues sur $M \times M$ privé de sa diagonale. La nécessité d'avoir des formes différentielles invariantes par changement de coordonnées permettant d'obtenir des formules intégrales pour les $(p, q)$-formes différentielles nous a amenés dans le cas $p \geqq 1$ à introduire la connexion de Chern du fibré tangent.

Aux paragraphes 2 et 3 nous nous intéressons principalement à un noyau du type précédent qui généralise le noyau de Bochner-Martinelli. Il en résulte une formule de Koppelman pour les $(p, q)$-formes différentielles sur une variété de Stein (théorème 2.2), et la transformée de Bochner-Martinelli se généralise également dans ce contexte (théorème 3.1).

Le paragraphe 4 est consacré à la démonstration de deux formules de Koppelman-Leray dont on peut déduire des formules de résolution du $\bar\partial$ pour les $(p, q)$-formes différentielles dans un domaine strictement pseudoconvexe d'une variété de Stein. La première généralise la formule intégrale donnée par Lieb [7] et Øvrelid [8] dans $\mathbb{C}^n$ et la seconde la formule de base de l'article [1] de Andersson et Berndtsson.

Le dernier paragraphe donne une méthode, différente de celle utilisée par Henkin et Leiterer ([3], § 4.12), pour obtenir des formules intégrales pour les formes différentielles à valeurs dans un fibré vectoriel holomorphe sur une variété de Stein.

## 1. Préliminaires

Soit X une variété analytique complexe; si $u$ et $v$ sont des $n$-uplets de fonctions $\mathscr{C}^1$ définies sur un ouvert de $X \times X$, on pose

$$\omega_{z,\,\zeta}(u) = \bigwedge_{j=1}^{n} d_{z,\,\zeta}\, u_j$$

$$\bar{\omega}'_{z,\,\zeta}(v) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} v_j \bigwedge_{k \neq j} \bar{\partial}_{z,\,\zeta}\, v_k$$

$$\langle u, v \rangle = \sum_{j=1}^{n} u_j v_j$$

[$(z, \zeta)$ désignent les variables dans $X \times X$].

Le noyau de Bochner-Martinelli dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ est alors donné par les expressions suivantes :

$$K_{BM}(z, \zeta) = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n} \frac{\bar{\omega}'_{z,\,\zeta}(\bar{z}-\bar{\zeta}) \wedge \omega_{z,\,\zeta}(z-\zeta)}{|z-\zeta|^{2n}}$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n} \frac{\langle \bar{z}-\bar{\zeta}, d_{z,\,\zeta}(z-\zeta) \rangle \wedge (\langle \bar{\partial}_{z,\,\zeta}(\bar{z}-\bar{\zeta}), d_{z,\,\zeta}(z-\zeta) \rangle)^{n-1}}{|z-\zeta|^{2n}}.$$

Il permet de démontrer des formules de représentation intégrale pour les formes différentielles de bidegré $(p, q)$ quelconque dans $\mathbb{C}^n$.

Dans [2] et [3], chapitre 4, Henkin et Leiterer construisent des noyaux qui conduisent à la représentation des formes différentielles de bidegré $(0, q)$ dans une variété de Stein.

Précisons maintenant la méthode de construction utilisée par Henkin et Leiterer.

On considère une variété de Stein M de dimension $n$ dont l'orientation est définie par la condition suivante : si $(z_1, \ldots, z_n)$ sont des coordonnées holomorphes locales, la forme différentielle

$$(-i)^n d\bar{z}_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_n \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n = (-1)^{n(n-1)/2}\, i^n dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$$

est positive.

On notera $T(M)$ et $T^*(M)$ les fibrés tangent et cotangent de $M$ et $\tilde{T}(M \times M)$, $\tilde{T}^*(M \times M)$ leurs images réciproques respectives par la projection de $M \times M$ sur $M$, $(z, \zeta) \mapsto z$.

Soit $s : M \times M \to \tilde{T}(M \times M)$ la section holomorphe de $\tilde{T}(M \times M)$ définie par Henkin et Leiterer ([2] et [3], lemme 4.2.4) qui vérifie :

- $s(z, z) = 0$ pour tout $z \in M$
- $s(z, .) : M \to T_z(M)$ est une application biholomorphe d'un voisinage de $z$ dans $M$ sur un voisinage de 0 dans $T_z(M)$.

Rappelons brièvement la construction de $s$. Soit $f : M \hookrightarrow \mathbb{C}^N$ un plongement propre de $M$ dans $\mathbb{C}^N$ et soit

$$0 \to T(M) \to M \times \mathbb{C}^N \to N(M) \to 0$$

la suite exacte définissant le fibré normal à $M$, noté $N(M)$.

D'après le théorème B de Cartan on a $H^1(M, \mathrm{Hom}(N(M), T(M))) = 0$, donc la suite exacte ci-dessus admet un scindage global $g : M \times \mathbb{C}^N \to T(M)$ tel que $g \circ df = \mathrm{Id}_{T(M)}$. La section $s$ est alors définie par

$$s(z, \zeta) = g(z, f(\zeta) - f(z)).$$

Grâce au théorème B appliqué sur $M \times M$, on peut d'autre part construire une fonction $\varphi$ holomorphe sur $M \times M$, égale à 1 sur la diagonale $\Delta(M)$ de $M \times M$ et dont la restriction à $M \times M \setminus \Delta(M)$ appartient au sous-faisceau de $\mathcal{O}(M \times M)$ engendré par $s$. De plus il existe un entier $\chi \geqq 0$ tel que la fonction $\varphi^\chi / |s|_\theta^2$ soit de classe $\mathscr{C}^2$ sur $M \times M \setminus \Delta(M)$ (*cf.* [2] et [3], lemme 4.2.4).

Si $D$ est un ouvert relativement compact de $M$ dont le bord $\partial D$ est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, on appellera section de Leray pour $(D, s, \varphi)$ (*cf.* [3], § 4.3.2) un couple $(s^*, \chi^*)$ où $\chi^*$ est un entier et $s^*$ une section de $\tilde{T}^*(M \times M)$ définie sur $D \times V_{\partial D}$, $V_{\partial D}$ étant un voisinage de $\partial D$ dans $M$, telle que

- $\langle s^*(z, \zeta), s(z, \zeta) \rangle \neq 0$ pour $z \in D$, $\zeta \in \partial D$ tels que $\varphi(z, \zeta) \neq 0$ ($\langle\ ,\ \rangle$ désigne le crochet de dualité entre $\tilde{T}(M \times M)$ et $\tilde{T}^*(M \times M)$).
- $\varphi^{\chi^*}(z, \zeta) / \langle s^*(z, \zeta), s(z, \zeta) \rangle$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un voisinage de $D \times \partial D$ dans $D \times M$.

Si $U$ est un ouvert de carte de $M$ et $(e_j)_{j=1}^n$ un repère trivialisant holomorphe de $\tilde{T}(M \times M)$, nous noterons respectivement $u$ et $u^*$ les expressions de $s$ et $s^*$ dans ce repère et son dual. Henkin et Leiterer posent alors

$$\tilde{\Omega}^0(\varphi^\mathrm{v}, s^*, s) = \frac{(n-1)!}{(2 i \pi)^n} \varphi^{\mathrm{v}n} \frac{\bar{\omega}'_{z, \zeta}(u^*) \wedge \omega_\zeta(u)}{\langle u^*, u \rangle^n}$$

ce qui définit une forme différentielle sur $D \times \partial D$.

Mais ce noyau ne contient que des termes de bidegré $(0, q)$ en $z$.

Pour passer à la représentation des formes différentielles de type $(p, q)$ quelconque il convient donc de compléter ce noyau. La première expression du noyau de Bochner-Martinelli conduirait à remplacer $\omega_\zeta(u)$ par $\omega_{z, \zeta}(u)$ dans la définition de $\tilde{\Omega}^0(\varphi^\mathrm{v}, s^*, s)$

mais cela ne permet plus de définir une forme différentielle invariante par changement de coordonnées car $s$ est une section du fibré vectoriel $\tilde{T}(M \times M)$. Nous devons donc, pour obtenir un noyau défini globalement sur $D \times \partial D$, utiliser une connexion de $\tilde{T}(M \times M)$.

Soit $\theta$ une métrique hermitienne $\mathscr{C}^\infty$ sur $T(M)$, elle induit une métrique hermitienne, notée encore $\theta$ sur $\tilde{T}(M \times M)$ et une application antilinéaire $\sigma : \tilde{T}(M \times M) \to \tilde{T}^*(M \times M)$, $\xi \mapsto \langle\, .\, , \xi \rangle_\theta$. On appellera D la connexion de Chern de $\tilde{T}(M \times M)$ relative à $\theta$ et $\nabla$ la connexion de Chern de $\tilde{T}^*(M \times M)$ associée à la métrique $\theta^*$ induite par $\theta$ sur $\tilde{T}^*(M \times M)$.

On notera $\hat{s}$ la section $\mathscr{C}^\infty$, $M \times M \to \tilde{T}^*(M \times M)$ définie par $\hat{s} = \sigma \circ s$, il est facile de voir que $(\hat{s}, \chi)$ est une section de Leray pour $(D, s, \varphi)$, D étant n'importe quel ouvert relativement compact à bord $\mathscr{C}^1$ par morceaux de M. Remarquons que si $\theta$ est la métrique hermitienne construite par Henkin et Leiterer à l'aide d'une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement trivialisant de $T(M)$, alors $\hat{s}$ coïncide avec la section $\bar{s}$ qu'ils ont définie dans [2] et [3], § 4.3.1. De plus $\hat{s}$ et $\bar{s}$ possèdent les mêmes propriétés.

On peut alors définir la forme différentielle $\tilde{\Omega}(\varphi^\nu, s^*, s)$ par

$$\tilde{\Omega}(\varphi^\nu, s^*, s) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n}\, \varphi^{\nu n} \frac{\langle s^*, Ds \rangle \wedge (\langle \nabla'' s^*, Ds \rangle)^{n-1}}{\langle s^*, s \rangle^n}.$$

C'est une forme différentielle continue sur un voisinage de $D \times \partial D$ dans $D \times M$ si $(s^*, \chi^*)$ est une section de Leray associée à $(D, s, \varphi)$ et $\nu \geqq \chi^*$. Si de plus $s^* = \hat{s}$, la forme différentielle $\tilde{\Omega}(\varphi^\nu, \hat{s}, s)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $M \times M \smallsetminus \Delta(M)$ si $\nu \geqq \chi$ et admet une singularité d'ordre $2n-1$ en $z = \zeta$.

Étudions l'expression de la forme différentielle $\tilde{\Omega}(\varphi^\nu, s^*, s)$ dans des coordonnées locales.

Soient U un ouvert de carte de M et $(e_j)_{j=1}^n$ un repère trivialisant holomorphe de $\tilde{T}(M \times M)$. La métrique $\theta$ est donnée dans ce repère par une matrice hermitienne définie positive H, $\mathscr{C}^\infty$, ne dépendant que de la variable $z$ et la métrique induite par $\theta$ sur $\tilde{T}^*(M \times M)$ est donnée dans le repère dual par la matrice $\bar{H}^{-1}$.

Soient $u$, $u^*$, $\hat{u}$ les expressions respectives de $s$, $s^*$ et $\hat{s}$ dans les repères choisis; alors les expressions de $Ds$, $\nabla s^*$ et $\nabla \hat{s}$ dans ces repères sont données classiquement par $du + (H^{-1}\partial H) \wedge u$, $du^* + (\bar{H}\,\partial \bar{H}^{-1}) \wedge u^*$ et $d\hat{u} + (\bar{H}\,\partial \bar{H}^{-1}) \wedge \hat{u}$, et par définition de $\hat{s}$ on a : $\hat{u} = \bar{H}\,\bar{u}$.

On en déduit que :

$$\langle \nabla'' s^*, Ds \rangle = \sum_{j=1}^{n} \bar{\partial} u_j^* \wedge (du_j + ((H^{-1}\partial H) \wedge u)_j)$$

$$\langle s^*, Ds \rangle = \sum_{j=1}^{n} u_j^* (du_j + ((H^{-1}\partial H) \wedge u)_j).$$

Un calcul analogue à celui du lemme 3 de [1] montre que

$$\langle s^*, \mathrm{D}s\rangle \wedge (\langle \nabla'' s^*, \mathrm{D}s\rangle)^{n-1} = (-1)^{n(n-1)/2}(n-1)!\left[\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}u_j^* \underset{k\neq j}{\wedge} \bar\partial u_k^*\right] \wedge \bigwedge_{p=1}^{n}(du_p + ((\mathrm{H}^{-1}\partial\mathrm{H})\wedge u)_p).$$

On a donc pour $z$ et $\zeta$ dans des compacts

$$\langle s^*, \mathrm{D}s\rangle \wedge (\langle \nabla'' s^*, \mathrm{D}s\rangle)^{n-1} = (-1)^{n(n-1)/2}(n-1)!\,[\bar\omega'_{z,\zeta}(u^*)\wedge\omega_{z,\zeta}(u) + O(|u|_\theta)].$$

Dans le cas particulier où l'on prend comme section $s^*$ la section $\bar s$ de [3] et pour $\theta$ la métrique intervenant dans la définition de $\bar s$ on obtient sur $\mathrm{U}\times\mathrm{V}\setminus\Delta(\mathrm{U})$

$$\tilde\Omega(\varphi^\vee, \bar s, s) = \tilde{\mathrm{K}} + O\left(\frac{1}{|u|_\theta^{2n-2}}\right)$$

(si $z$ et $\zeta$ varient dans des compacts de M).

$\tilde{\mathrm{K}}$ étant le noyau défini localement dans [5] et qui est une solution fondamentale locale du $\bar\partial$ ([5], § 2).

Remarquons d'autre part que si $\mathrm{M}=\mathbb{C}^n$ et si la métrique $\theta$ est la métrique habituelle de $\mathbb{C}^n$ alors les connexions D et $\nabla$ coïncident avec la différentielle ordinaire et si on prend :

$$\varphi(z, \zeta) = 1, \qquad \forall (z, \zeta)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n$$
$$s(z, \zeta) = z-\zeta \qquad \text{et} \qquad s^*(z, \zeta) = \bar z - \bar\zeta$$

le noyau $\tilde\Omega(\varphi^\vee, \bar s, s)$ n'est autre que le noyau de Bochner-Martinelli dans $\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n$.

## 2. Formule de Koppelman pour les $(p, q)$-formes différentielles

Dans ce paragraphe nous allons étendre au cas des $(p, q)$-formes différentielles, $0\leqq p$, $q\leqq n$ la formule de Koppelman donnée dans les variétés de Stein par Henkin et Leiterer pour les $(0, q)$-formes différentielles ([3], théorème 4.5.2).

Considérons le noyau $\tilde\Omega(\varphi^\vee, \hat s, s)$ défini au paragraphe précédent. Remarquons tout d'abord que $s$ étant holomorphe on a $\mathrm{D}s=\mathrm{D}'s$; les connexions D et $\nabla$ sont d'autre part liées par la relation naturelle $\nabla\hat s = \nabla(\sigma\circ s) = \sigma\circ\mathrm{D}s$ où $\sigma$ est antilinéaire; par suite $\nabla\hat s = \nabla''\hat s$ et

$$\tilde\Omega(\varphi^\vee, \hat s, s) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n}\varphi^{\vee n}\frac{\langle\hat s, \mathrm{D}s\rangle\wedge(\langle\nabla\hat s, \mathrm{D}s\rangle)^{n-1}}{|s|_\theta^{2n}}.$$

Le noyau $\tilde{\Omega}(\varphi^{\vee}, \hat{s}, s)$ admet la décomposition suivante :

$$\tilde{\Omega}(\varphi^{\vee}, \hat{s}, s) = \sum_{\substack{1 \leq p \leq n \\ 1 \leq q \leq n-1}} \Omega_q^p(\varphi^{\vee}, \hat{s}, s)$$

où $\Omega_q^p(\varphi^{\vee}, \hat{s}, s)$ est de type $(p, q)$ en $z$ et $(n-p, n-q-1)$ en $\zeta$. On peut remarquer que si $\hat{s}$ coïncide avec la section $\bar{s}$ de Henkin et Leiterer, $\sum_{1 \leq q \leq n-1} \Omega_q^0(\varphi^{\vee}, \bar{s}, s)$ n'est autre que le noyau $\tilde{\Omega}^0$ défini par Henkin et Leiterer ([2], § 2.4 et [3], § 4.5) pour démontrer la formule de Koppelman pour les $(0, q)$-formes différentielles : ceci résulte du fait que la forme de connexion $H^{-1}\partial H$ qui intervient dans la définition de $\tilde{\Omega}(\varphi^{\vee}, \hat{s}, s)$ ne dépend que de la variable $z$. On pose $\Omega_{-1}^0 = \Omega_n^0 = 0$.

Pour simplifier les expressions ultérieures, nous noterons $\tilde{\Omega}$ et $\Omega_q^p$ les noyaux $\tilde{\Omega}(\varphi^{\vee}, \hat{s}, s)$ et $\Omega_q^p(\varphi^{\vee}, \hat{s}, s)$ lorsqu'il ne risque pas d'y avoir de confusion.

Désignons par $c(\tilde{T}(M \times M)) = D^2$ et $c(\tilde{T}^*(M \times M)) = \nabla^2$ les formes de courbure des fibrés $\tilde{T}(M \times M)$ et $\tilde{T}^*(M \times M)$ pour les connexions D et $\nabla$; elles sont de bidegré (1, 1) et ne dépendent que de la variable $z$.

LEMME 2.1. — *On a sur* $M \times M \setminus \Delta(M)$.

$$\bar{\partial}\tilde{\Omega} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n} \frac{\varphi^{\vee n}}{\langle \hat{s}, s \rangle^n} [\langle \hat{s}, c(\tilde{T}(M \times M) \wedge s \rangle \wedge (\langle \nabla \hat{s}, Ds \rangle)^{n-1}$$
$$+ (n-1) \langle \hat{s}, Ds \rangle \wedge \langle \nabla \hat{s}, c(\tilde{T}(M \times M)) \wedge s \rangle \wedge (\langle \nabla \hat{s}, Ds \rangle)^{n-2}].$$

*et donc* $\bar{\partial}\tilde{\Omega}$ *a une singularité d'ordre* $2n-2$ *sur la diagonale.*

*Si de plus* $c(\tilde{T}(M \times M)) = 0$ *on a* $\bar{\partial}\tilde{\Omega} = 0$.

*Démonstration.* — Calculons tout d'abord

$$d\left[\frac{\langle \hat{s}, Ds \rangle \wedge (\langle \nabla \hat{s}, Ds \rangle)^{n-1}}{\langle \hat{s}, s \rangle^n}\right].$$

On a

$$d\langle \hat{s}, s \rangle = \langle \nabla \hat{s}, s \rangle + \langle \hat{s}, Ds \rangle$$
$$d\langle \hat{s}, Ds \rangle = \langle \nabla \hat{s}, Ds \rangle + \langle \hat{s}, c(\tilde{T}(M \times M)) \wedge s \rangle$$
$$d(\langle \nabla \hat{s}, Ds \rangle)^{n-1} = (n-1)[\langle c(\tilde{T}^*(M \times M) \wedge \hat{s}, Ds \rangle$$
$$- \langle \nabla \hat{s}, c(\tilde{T}(M \times M)) \wedge s \rangle] \wedge (\langle \nabla \hat{s}, Ds \rangle)^{n-2}.$$

D'où

$$d\left[\frac{\langle \hat{s}, Ds \rangle \wedge (\langle \nabla \hat{s}, Ds \rangle)^{n-1}}{\langle \hat{s}, s \rangle^n}\right] = \frac{1}{(\langle \hat{s}, s \rangle)^{n+1}} [\langle \hat{s}, s \rangle (\langle \nabla \hat{s}, Ds \rangle)^n$$
$$+ \langle \hat{s}, s \rangle \langle \hat{s}, c(\tilde{T}(M \times M)) \wedge s \rangle \wedge (\langle \nabla \hat{s}, Ds \rangle)^{n-1}$$
$$- (n-1) \langle \hat{s}, s \rangle \langle \hat{s}, Ds \rangle \wedge (\langle c(\tilde{T}^*(M \times M)) \wedge \hat{s}, Ds \rangle$$
$$- \langle \nabla \hat{s}, c(\tilde{T}(M \times M)) \wedge s \rangle) \wedge (\langle \nabla \hat{s}, Ds \rangle)^{n-2}$$
$$- n(\langle \nabla \hat{s}, s \rangle + \langle \hat{s}, Ds \rangle) \wedge \langle \hat{s}, Ds \rangle \wedge (\langle \nabla \hat{s}, Ds \rangle)^{n-1}]$$

or

$$\langle \hat{s}, \mathrm{D}s \rangle \wedge \langle \hat{s}, \mathrm{D}s \rangle = 0$$
$$\langle \hat{s}, s \rangle (\langle \nabla \hat{s}, \mathrm{D}s \rangle)^n = n \langle \nabla \hat{s}, s \rangle \wedge \langle \hat{s}, \mathrm{D}s \rangle \wedge (\langle \nabla \hat{s}, \mathrm{D}s \rangle)^{n-1}$$

(il suffit de reprendre les calculs du lemme 3 de [1]).

Revenons au noyau $\tilde{\Omega}$, comme $\varphi$ est holomorphe et $\nabla \hat{s} = \nabla'' \hat{s}$, on a pour des raisons de degré

$$\bar{\partial}\tilde{\Omega} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n} \varphi^{\nu n} \times \frac{\left\{ \begin{array}{l} \langle \hat{s}, c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M}\times\mathrm{M})) \wedge s \rangle \wedge (\langle \nabla \hat{s}, \mathrm{D}s \rangle)^{n-1} \\ \quad + (n-1) \langle \hat{s}, \mathrm{D}s \rangle \wedge \langle \nabla \hat{s}, c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M}\times\mathrm{M})) \wedge s \rangle \wedge (\langle \nabla \hat{s}, \mathrm{D}s \rangle)^{n-2} \end{array} \right\}}{\langle \hat{s}, s \rangle^n},$$

Étudions maintenant la singularité de $\bar{\partial}\tilde{\Omega}$ en $z = \zeta$. Par définition de $\hat{s}$, on a $\langle \hat{s}, s \rangle = |s|_\theta$ et si $z$ et $\zeta$ varient dans des compacts de M, les formes différentielles $c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M}\times\mathrm{M})$, $\nabla \hat{s}$ et $\mathrm{D}s$ sont bornées donc : $\bar{\partial}\tilde{\Omega} = O(|s|_\theta^{-2n+2})$ car $|\hat{s}| = |\sigma s| = O(|s|_\theta)$.

THÉORÈME 2.2. — *Soient* D *un domaine relativement compact à bord* $\mathscr{C}^1$ *par morceaux de la variété de Stein* M *et* $\nu \geqq 2\chi$. *Si* $f$ *est une* $(p, q)$*-forme différentielle continue sur* $\bar{\mathrm{D}}$, *telle que* $\bar{\partial} f$ *soit aussi continue sur* $\bar{\mathrm{D}}$, $0 \leqq p, q \leqq n$, *on a pour* $z \in \mathrm{D}$

$$(2.1)\quad f(z) = (-1)^{p+q} \left[ \left[ \int_{\zeta\in\partial\mathrm{D}} f(\zeta) \wedge \Omega_q^p(z, \zeta) - \int_{\zeta\in\mathrm{D}} \bar{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge \Omega_q^p(z, \zeta) \right. \right. + \bar{\partial}_z \int_{\zeta\in\mathrm{D}} f(\zeta) \wedge \Omega_{q-1}^p(z, \zeta) + (-1)^{p+q+1} \int_{\zeta\in\mathrm{D}} f(\zeta) \wedge \mathrm{P}_q^p(z, \zeta) \Bigg]$$

*où* $\Omega_q^p(z, \zeta) = \Omega_q^p(\varphi^\nu, \hat{s}, s)(z, \zeta)$ *et* $\mathrm{P}_q^p(z, \zeta)$ *est la partie de bidegré* $(p, q)$ *en* $z$ *de* $\bar{\partial}\tilde{\Omega}$.

*Remarque* 1. — Si $p = 0$, $\mathrm{P}_q^p = 0$ car $c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M}\times\mathrm{M}))$ est de bidegré (1, 1) en $z$, on retrouve donc la formule (2.4.6) de [2].

*Remarque* 2. — Si la métrique $\theta$ est telle que $c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M}\times\mathrm{M})) = 0$, on obtient la formule de Koppelman classique pour les $(p, q)$-formes différentielles.

*Démonstration.* — La méthode utilisée ici est la même que celle de la démonstration du théorème 4.5.2 de [3]. Il nous a semblé plus clair d'en rappeler ici les principales étapes.

Il suffit de prouver pour toute forme différentielle $g$ de bidegré $(n-p, n-q)$, $\mathscr{C}^\infty$ à support compact dans D, que

$$\int_{z\in\mathrm{D}} f(z) \wedge g(z) = (-1)^{p+q} \left[ \left[ \int_{(z, \zeta)\in\mathrm{D}\times\partial\mathrm{D}} f(\zeta) \wedge \Omega_q^p(z, \zeta) \wedge g(z) - \int_{(z, \zeta)\in\mathrm{D}\times\mathrm{D}} \bar{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge \Omega_q^p(z, \zeta) \wedge g(z) \right] \right.$$
$$+ \int_{(z, \zeta)\in\mathrm{D}\times\mathrm{D}} f(\zeta) \wedge \Omega_{q-1}^p(z, \zeta) \wedge \bar{\partial}_z g(z) - \int_{(z, \zeta)\in\mathrm{D}\times\mathrm{D}} f(\zeta) \wedge \mathrm{P}_q^p(z, \zeta) \wedge g(z).$$

Par des considérations de bidegré on peut remplacer $\Omega_q^p$ et $\Omega_{q-1}^p$ par $\tilde{\Omega}$, $P_q^p$ par $\bar{\partial}\tilde{\Omega}$ ainsi que $\bar{\partial}f$ et $\bar{\partial}g$ par $df$ et $dg$. On doit donc démontrer l'égalité

$$(2.2)\quad \int_{z\in D} f(z)\wedge g(z)$$
$$=(-1)^{p+q}\Bigg[\int_{(z,\,\zeta)\in D\times\partial D} f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)-\int_{(z,\,\zeta)\in D\times D} d_\zeta f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)\Bigg]$$
$$+\int_{(z,\,\zeta)\in D\times D} f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge d_z g(z)-\int_{(z,\,\zeta)\in D\times D} f(\zeta)\wedge\bar{\partial}_{z,\,\zeta}\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z).$$

Grâce aux propriétés de $s$, on peut trouver un voisinage $U_\Delta\subset M\times M$ de la diagonale $\Delta=\{(z,z)\,|\,z\in M\}$ tel que pour tout $z$ fixé dans M, $s(z,\zeta)$ soit biholomorphe pour tout $\zeta\in M$ tel que $(z,\zeta)\in U_\Delta$. On considère les ouverts

$$U_\varepsilon=\{(z,\zeta)\in U_\Delta\times U_\Delta\,|\,|s|_\theta<\varepsilon\},\qquad \varepsilon>0.$$

Comme $D\subset\subset M$, pour $\varepsilon$ assez petit, $\partial U_\varepsilon\cap(D\times D)$ est lisse.

Nous allons appliquer la formule de Stokes à la forme différentielle $f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)$ sur l'ouvert $D_\varepsilon=D\times D\setminus U_\varepsilon$.

Nous choisissons $\varepsilon$ pour que

$$\partial D_\varepsilon\cap(\operatorname{supp} g\times M)=(D\times\partial D\cup\partial U_\varepsilon)\cap(\operatorname{supp} g\times M),$$

alors

$$\int_{(z,\,\zeta)\in D\times\partial D} f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)-\int_{(z,\,\zeta)\in\partial U_\varepsilon} f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)$$
$$=\int_{(z,\,\zeta)\in D_\varepsilon} d_{z,\,\zeta}(f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)).$$

Or

$$d_{z,\,\zeta}(f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z))=d_\zeta f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)$$
$$+(-1)^{p+q}f(\zeta)\wedge d_{z,\,\zeta}\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)+(-1)^{p+q+1}f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge d_z g(z)$$

et pour des raisons de bidegré on peut remplacer $d_{z,\,\zeta}\tilde{\Omega}$ par $\bar{\partial}_{z,\,\zeta}\tilde{\Omega}$, on en déduit donc que

$$(2.3)\quad \int_{(z,\,\zeta)\in D\times\partial D} f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)-\int_{(z,\,\zeta)\in\partial U_\varepsilon} f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)$$
$$=\int_{(z,\,\zeta)\in D_\varepsilon} d_\zeta f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)+(-1)^{p+q}\int_{(z,\,\zeta)\in D_\varepsilon} f(\zeta)\wedge\bar{\partial}_{z,\,\zeta}\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)$$
$$+(-1)^{p+q+1}\int_{(z,\,\zeta)\in D_\varepsilon} f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge d_z g(z).$$

Il est clair que $\tilde{\Omega}$ ayant une singularité d'ordre $2n-1$ au voisinage de la diagonale et $\bar{\partial}_{z,\,\zeta}\tilde{\Omega}$ une singularité d'ordre $2n-2$, ces deux formes différentielles sont localement intégrables sur $\mathrm{D}\times\bar{\mathrm{D}}$ et par conséquent les intégrales du second membre de (2.3) tendent vers les intégrales correspondantes de (2.2) quand $\varepsilon\to 0$. Il reste donc à montrer que

$$(2.4)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{(z,\,\zeta)\in\partial\mathrm{U}_\varepsilon} f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(z,\zeta)\wedge g(z)=(-1)^{p+q}\int_{z\in\mathrm{D}} f(z)\wedge g(z).$$

Après usage d'une partition de l'unité sur le support de $g$, on peut supposer que le support de $g$ est contenu dans un ouvert de carte U de M. Soit V un ouvert tel que $\operatorname{supp} g\subset\mathrm{V}\subset\subset\mathrm{U}$.

Si $\varepsilon$ est assez petit, les conditions $z\in\mathrm{V}$ et $(z,\zeta)\in\mathrm{U}_\varepsilon$ impliquent $\zeta\in\mathrm{U}$. Avec les notations du paragraphe 1, le noyau $\tilde{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, s)$ admet pour $(z,\zeta)\in\mathrm{V}\times\mathrm{U}$ l'expression en coordonnées locales

$$\tilde{\Omega}(z,\zeta)=\frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n}\varphi^{\mathrm{v}n}\frac{\bar{\omega}'_{z,\,\zeta}(\hat{u})\wedge\omega_{z,\,\zeta}(u)}{|u|_\theta^{2n}}+O(|u|_\theta^{-2n+2}).$$

En particulier sur $\partial\mathrm{U}_\varepsilon\cap(\mathrm{V}\times(\mathrm{U}\cap\bar{\mathrm{D}}))$

$$\tilde{\Omega}(z,\zeta)=\frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n}\varphi^{\mathrm{v}n}\frac{\bar{\omega}'_{z,\,\zeta}(\hat{u})\wedge\omega_{z,\,\zeta}(u)}{\varepsilon^{2n}}+O(\varepsilon^{-2n+2}).$$

Or la mesure de l'ensemble $\partial\mathrm{U}_\varepsilon\cap(\mathrm{V}\times\mathrm{U})$ est un $O(\varepsilon^{2n-1})$, il en résulte que (2.4) se déduira de

$$(2.5)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{(z,\,\zeta)\in\partial\mathrm{U}_\varepsilon\cap(\mathrm{V}\times\mathrm{U})} f(\zeta)\wedge\mathrm{K}(z,\zeta)\wedge g(z)=(-1)^{p+q}\int_{z\in\mathrm{V}} f(z)\wedge g(z)$$

où

$$\mathrm{K}(z,\zeta)=\frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n}\varphi^{\mathrm{v}n}\frac{\bar{\omega}'_{z,\,\zeta}(\hat{u})\wedge\omega_{z,\,\zeta}(u)}{\varepsilon^{2n}}.$$

Or ce résultat est démontré dans ([3], p. 176-177) pour la section $\bar{s}$ et donc pour $\hat{s}$ car ces deux sections ont les mêmes propriétés (*cf.* [3], § 4.3.1).

Le théorème est ainsi démontré.

COROLLAIRE 2.3. — *Le noyau* $\tilde{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, \hat{s}, s)$ *définit un courant sur* $\mathrm{M}\times\mathrm{M}$ *qui vérifie*

$$\bar{\partial}\tilde{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, \hat{s}, s)=[\Delta]+\mathrm{P}$$

*où* $[\Delta]$ *est le courant d'intégration sur la diagonale* $\Delta$ *de* $\mathrm{M}\times\mathrm{M}$ *et* P *la forme différentielle localement intégrable qui coïncide avec* $\bar{\partial}\tilde{\Omega}$ *sur* $\mathrm{M}\times\mathrm{M}\setminus\Delta(\mathrm{M})$. *En particulier si* $c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M}\times\mathrm{M}))=0$, *alors* $\bar{\partial}\tilde{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, \hat{s}, s)=[\Delta]$.

Ce résultat n'est autre que l'interprétation en terme de courants de la formule (2.1); il montre que le courant d'intégration $[\Delta]$ n'est autre que le résidu au sens de Griffiths et Harris ([10], p. 369) de la forme différentielle $\tilde{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, \hat{s}, s)$.

### 3. Transformée de Bochner-Martinelli

On considère une hypersurface réelle V fermée, orientée de classe $\mathscr{C}^{1+\alpha}$, $\alpha>0$, dans un ouvert U de la variété de Stein M, telle que $U \setminus V$ ait exactement deux composantes connexes $U^+$ et $U^-$.

On suppose que l'orientation sur V est celle obtenue lorsque l'on considère que V est la frontière de $U^+$.

Si $f$ est une $(p, q)$-forme différentielle de classe $\mathscr{C}^1$ sur V, à support compact on appelle transformée de Bochner-Martinelli de $f$ la forme différentielle F définie sur $U \setminus V$ par

$$F(z)=\int_{\zeta \in V} f(\zeta) \wedge \Omega_q^p(\varphi^\vee, \hat{s}, s)(z, \zeta).$$

Dans [6] nous avons déjà étudié les propriétés de F, lorsque $f$ est une $(0, q)$-forme différentielle, les résultats obtenus s'étendent au cas des $(p, q)$-formes différentielles.

Les notations sont celles de [6], § 3. On suppose que

$$V=\{z \in M/\rho(z)=0\}, \qquad \rho \in \mathscr{C}^{1+\alpha}(M).$$

Si $f \in \mathscr{C}_{p,q}(V)$ on notera $f_t$ sa projection sur l'espace quotient de $\mathscr{C}_{p,q}(V)$ par les formes différentielles normales complexes. Si F est une $(p, q)$-forme différentielle continue sur $U^+$ ou $U^-$ nous dirons qu'elle se prolonge continûment à $U^\pm \cup V$ modulo $\bar{\partial}\rho$ s'il existe une $(p, q)$-forme différentielle $\tilde{F}$ continue sur $U^\pm \cup V$ telle que $\tilde{F}-F=\bar{\partial}\rho \wedge G$ sur $U^\pm$, G étant une forme différentielle continue sur $U^\pm$ de bidegré $(p, q-1)$.

THÉORÈME 3.1. — *Soit $f$ une $(p, q)$-forme différentielle, $\mathscr{C}^1$ sur V, à support compact. La transformée de Bochner-Martinelli de $f$*

$$F(z)=\int_{\zeta \in V} f(\zeta) \wedge \Omega_q^p(\varphi^\vee, \hat{s}, s)(z, \zeta)$$

*admet, modulo $\bar{\partial}\rho$, des prolongements continus à $U^+ \cup V$ et $U^- \cup V$ notés $F^+$ et $F^-$ et on a*

$$F_t^+ - F_t^- = (-1)^{p+q} f_t.$$

*Démonstration.* — Il s'agit d'un problème local, on peut donc supposer que U est un domaine de carte de M.

Choisissons des coordonnées et un repère trivialisant de $\tilde{T}(M \times M)$ sur cet ouvert, on a alors d'après le paragraphe 1

$$(3.1) \qquad \tilde{\Omega}(\varphi^\vee, \hat{s}, s)=\frac{(n-1)!}{(2 i \pi)^n} \varphi^{\vee n} \frac{\bar{\omega}'_{z,\zeta}(\hat{u}) \wedge \omega_{z,\zeta}(u)}{|u|_\theta^{2n}}+O(|u|_\theta^{-2n+2})$$

si $(z, \zeta) \in U \times U \setminus \Delta(U)$, $z$ et $\zeta$ variant dans des compacts de M.

Pour des raisons de degré

$$F(z)=\int_{\zeta\in V} f(\zeta)\wedge\tilde{\Omega}(\varphi^{\vee},\hat{s},s)$$

et par conséquent grâce à (3.1) la forme F est somme d'un terme continu au voisinage de V et de la forme

$$F_0(z)=\frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n}\int_{\zeta\in V} f(\zeta)\wedge\varphi^{\vee n}(z,\zeta)\frac{\bar{\omega}'_{z,\zeta}(\hat{u})\wedge\omega_{z,\zeta}(u)}{|u|_\theta^{2n}}.$$

Le théorème résulte donc du théorème analogue montré pour $F_0$ dans [6] (prop. 2.3.1).

*Remarque.* – Dans [6] nous avions étudié lorsque $f$ est une $(n,\ n-q-1)$-forme différentielle

$$G(\zeta)=\int_{z\in V} f(z)\wedge\Omega_q^0(\varphi^{\vee},\bar{s},s)(z,\zeta)=\int_{z\in V} f(z)\wedge\tilde{\Omega}^0(\varphi^{\vee},\bar{s},s)(z,\zeta)$$

où $\tilde{\Omega}^0=\sum_{0\leqq q\leqq n-1}\Omega_q^0$.

Il n'est pas surprenant que F et G possèdent les mêmes propriétés au voisinage de V. En effet d'après (3.1) et le lemme 2.3.5 de [6], si $\tilde{\Omega}^n=\sum_{0\leqq q\leqq n-1}\Omega_q^n$,

$$\tilde{\Omega}^n(\varphi^{\vee},\bar{s},s)(z,\zeta)-\tilde{\Omega}^0(\varphi^{\vee},\bar{s},s)(\zeta,z)$$

possède une singularité d'ordre $2n-2$ en $z=\zeta$.

## 4. Formule de Koppelman-Leray

Sur $M\times M\times[0,1]$ on désigne par $\bar{T}^*(M\times M\times[0,1])$ le fibré vectoriel image réciproque de $T^*(M)$ par l'application $(z,\zeta,\lambda)\mapsto z$.

On notera $\bar{\theta}^*$ la métrique induite par la métrique $\theta$ de $T(M)$ sur ce fibré.

Soit $\Delta$ la connexion hermitienne sur $\bar{T}^*(M\times M\times[0,1])$ relative à la métrique $\bar{\theta}^*$, holomorphe en les variables $(z,\zeta)$ et invariante par translation dans la direction $\lambda$.

Si $\mathscr{C}_k^\infty(M\times M\times[0,1],\bar{E}^*)$ désigne l'espace des formes différentielles $\mathscr{C}^\infty$ de degré $k$ sur $M\times M\times[0,1]$ à valeurs dans $\bar{E}^*=\bar{T}^*(M\times M\times[0,1])$, on a la décomposition suivante

$$\mathscr{C}_k^\infty(M\times M\times[0,1],\bar{E}^*)=\bigoplus_{p+q+r=k}\mathscr{C}_{p,q,r}^\infty(M\times M\times[0,1],\bar{E}^*)$$

où $\mathscr{C}_{p,q,r}^\infty(M\times M\times[0,1],\bar{E}^*)$ désigne l'espace des formes différentielles de bidegré $(p,q)$ en $(z,\zeta)$ et de degré $r$ en $\lambda$.

La connexion $\Delta$ se décompose en $\Delta'+\Delta''$ où

$$\Delta':\quad \mathscr{C}_{p,q,r}^\infty(M\times M\times[0,1],\bar{E}^*)\to\mathscr{C}_{p+1,q,r}^\infty(M\times M\times[0,1],\bar{E}^*)$$

$$\Delta'': \quad \mathscr{C}^{\infty}_{p,q,r}(\mathrm{M}\times\mathrm{M}\times[0, 1], \bar{\mathrm{E}}^*)$$
$$\to \mathscr{C}^{\infty}_{p,q+1,r}(\mathrm{M}\times\mathrm{M}\times[0, 1], \bar{\mathrm{E}}^*) \oplus \mathscr{C}^{\infty}_{p,q,r+1}(\mathrm{M}\times\mathrm{M}\times[0, 1], \bar{\mathrm{E}}^*).$$

Étudions l'expression de $\Delta$ en coordonnées locales. Choisissons une trivialisation de $\bar{\mathrm{T}}^*(\mathrm{M}\times\mathrm{M}\times[0, 1])$ et notons $v^*$ l'expression d'une section $t^*$ de $\bar{\mathrm{T}}^*(\mathrm{M}\times\mathrm{M}\times[0, 1])$ alors

$$\Delta' t^* = \bar{\mathrm{H}}(\partial_{z,\zeta}(\bar{\mathrm{H}}^{-1} v^*))$$

où H est la matrice de la métrique $\theta$ dans la trivialisation correspondante de $\mathrm{T}(\mathrm{M})$

$$\Delta'' t^* = (\bar{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda) v^*.$$

Soit D un ouvert relativement compact, à bord $\mathscr{C}^1$ par morceau de M et $(s^*, \chi^*)$ une section de Leray pour $(\mathrm{D}, s, \varphi)$ (*cf.* § 1).

Comme Henkin et Leiterer ([3], § 4.5), on pose pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $z \in \mathrm{D}$ et $\zeta \in \mathrm{V}'_{\partial\mathrm{D}}$ tel que $\langle s^*(z, \zeta), s(z, \zeta)\rangle \neq 0$

$$t^*(z, \zeta, \lambda) = (1-\lambda)\frac{s^*(z, \zeta)}{\langle s^*(z, \zeta), s(z, \zeta)\rangle} + \lambda \frac{\hat{s}(z, \zeta)}{|s(z, \zeta)|_\theta^2}. \tag{4.1}$$

D'après les propriétés de $\varphi$, $s$ et $s^*$ l'application

$$(z, \zeta, \lambda) \mapsto \varphi^{\max(\chi, \chi^*)}(z, \zeta)\, t^*(z, \zeta, \lambda)$$

définit une section $\mathscr{C}^1$ de $\bar{\mathrm{T}}^*(\mathrm{M}\times\mathrm{M}\times[0, 1])$ sur un voisinage de $\mathrm{D}\times\partial\mathrm{D}\times[0, 1]$ dans $\mathrm{D}\times\mathrm{M}\times[0, 1]$. On en déduit que pour tout entier $\nu \geqq \max(\chi, \chi^*)$ la forme différentielle $\bar{\Omega}(\varphi^\nu, s^*, \hat{s}, s) = (-1)^{n-1}/(2\pi)^n \varphi^{\nu n} \langle t^*, \mathrm{D}s\rangle \wedge (\langle \Delta'' t^*, \mathrm{D}s\rangle)^{n-1}$ est continue sur un voisinage de $\mathrm{D}\times\partial\mathrm{D}\times[0, 1]$ dans $\mathrm{D}\times\mathrm{M}\times[0, 1]$.

LEMME 4.1. — *On a les égalités suivantes*

$$\bar{\Omega}(\varphi^\nu, s^*, \hat{s}, s)|_{\lambda=0} = \tilde{\Omega}(\varphi^\nu, s^*, s)$$
$$\bar{\Omega}(\varphi^\nu, s^*, \hat{s}, s)|_{\lambda=1} = \tilde{\Omega}(\varphi^\nu, \hat{s}, s).$$

*Démonstration.* — D'après l'expression (4.1) de $t^*$ il suffit de montrer que pour toute fonction $\mu$ de classe $\mathscr{C}^1$, définie sur un ouvert de $\mathrm{M}\times\mathrm{M}$ contenant le domaine de définition d'une section $s^*$ de $\tilde{\mathrm{T}}^*(\mathrm{M}\times\mathrm{M})$ on a

$$\langle \mu s^*, \mathrm{D}s\rangle \wedge (\langle \Delta''(\mu s^*), \mathrm{D}s\rangle)^{n-1} = \mu^n \langle s^*, \mathrm{D}s\rangle \wedge (\langle \Delta'' s^*, \mathrm{D}s\rangle)^{n-1};$$

on appliquera cette formule successivement avec $\mu = \langle s^*, s\rangle^{-1}$ pour $\lambda = 0$ et $\mu = \langle \hat{s}, s\rangle^{-1} = |s|_\theta^{-2}$, $s^* = \hat{s}$ pour $\lambda = 1$.

La formule résulte elle-même immédiatement du fait que

$$\langle \mu s^*, \mathrm{D}s\rangle \wedge \langle d''\mu \wedge s^*, \mathrm{D}s\rangle = -\mu\, d''\mu \wedge \langle s^*, \mathrm{D}s\rangle \wedge \langle s^*, \mathrm{D}s\rangle = 0.$$

LEMME 4.2. — *Soit* $W \times [0, 1]$ *le domaine de définition de* $\bar{\Omega}(\varphi^\nu, s^*, \hat{s}, s)$, $W \subset D \times M$. *Pour tout* $(z, \zeta, \lambda) \in W \times [0, 1]$, *on a*

$$(\bar{\partial}_{z,\zeta}+d_\lambda)\bar{\Omega}(\varphi^\nu, s^*, \hat{s}, s)=\frac{(-1)^{n-1}}{(2\pi)^n}\varphi^{\nu n}[\langle t^*, c(\tilde{T}(M\times M)) \wedge s\rangle \wedge (\langle \Delta'' t^*, Ds\rangle)^{n-1}$$
$$+(n-1)\langle t^*, Ds\rangle \wedge \langle \Delta'' t^*, c(\tilde{T}(M\times M)) \wedge s\rangle \wedge (\langle \Delta'' t^*, Ds\rangle)^{n-2}].$$

*Si de plus* $c(\tilde{T}(M\times M))=0$, *on a* $(\bar{\partial}_{z,\zeta}+d_\lambda)\bar{\Omega}(\varphi^\nu, s^*, \hat{s}, s)=0$.

*Démonstration :*

$$(\bar{\partial}_{z,\zeta}+d_\lambda)\bar{\Omega}(\varphi^\nu, s^*, \hat{s}, s)=\frac{(-1)^{n}}{(2\pi)^n}\varphi^{\nu n}[(\langle \Delta'' t^*, Ds\rangle)^n+\langle t^*, D^2 s\rangle \wedge (\langle \Delta'' t^*, Ds\rangle)^{n-1}$$
$$-(n-1)\langle t^*, Ds\rangle(\langle \Delta''^2 t^*, Ds\rangle-\langle \Delta'' t^*, D^2 s\rangle)$$
$$\wedge (\langle \Delta'' t^*, Ds\rangle)^{n-2}]$$

or $\Delta''^2=0$, $D^2 s=c(\tilde{T}(M\times M)) \wedge s$.

Considérons une trivialisation de $\bar{T}^*(M\times M\times[0, 1])$, soit $v^*$ l'expression de $t^*$ dans cette trivialisation et $u$ l'expression de $s$ dans la trivialisation correspondante de $\tilde{T}(M\times M)$

$$\varphi^{\nu n}(\langle \Delta'' t^*, D s\rangle)^n$$
$$=(-1)^{n(n-1)/2}n!\left(\bigwedge_{j=1}^{n}(\bar{\partial}_{z,\zeta}+d_\lambda)(\varphi^\nu v_j^*)\right)\wedge\left(\bigwedge_{k=1}^{n} du_k+((H^{-1}\partial H)\wedge u)_k\right).$$

On reprend alors la démonstration du lemme 4.5.4 de [3] : on a $\sum_{k=1}^{n}\varphi^\nu v_k^* u_k=\varphi^\nu$ par définition de $t^*$ les fonctions $\varphi$ et $u_k$ étant holomorphes en $(z, \zeta)$ et indépendantes de $\lambda$, on en déduit

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(\bar{\partial}_{z,\zeta}+d_\lambda)(\varphi^\nu v_k^*)=0$$

d'où $\bigwedge_{k=1}^{n}(\bar{\partial}_{z,\zeta}+d_\lambda)(\varphi^\nu v_k^*)=0$ car le membre de gauche est continu d'après les propriétés des sections de Leray et l'ensemble $\{(z, \zeta, \lambda)\in W\times[0, 1] \mid s(z, \zeta)\neq 0\}$ est dense dans $W\times[0, 1]$. On a donc : $\varphi^{\nu n}(\langle \Delta'' t^*, Ds\rangle)^n=0$ et le lemme est démontré.

Nous allons maintenant pouvoir généraliser au cas des $(p, q)$-formes différentielles la formule de Koppelman-Leray donnée par Henkin et Leiterer ([3], théorème 4.5.3).

THÉORÈME 4.3. — *Soient* D *un domaine relativement compact à bord* $\mathscr{C}^1$ *par morceaux de la variété de Stein* M, $(s^*, \chi^*)$ *une section de Leray pour* $(D, s, \varphi)$ *et* $\nu$ *un entier plus grand que* $\max(2\chi, \chi^*)$. *On suppose de plus que toutes les dérivées de* $(\varphi^\nu s^*/\langle s^*, s\rangle)(z, \zeta)$ *qui sont d'ordre* $\leqq 2$ *en* $z$ *et d'ordre* $\leqq 1$ *en* $\zeta$ *sont continues pour tout* $(z, \zeta)$ *dans un voisinage* W *de* $D\times\partial D$ *dans* $D\times M$. *Alors pour toute* $(p, q)$*-forme différentielle* $f$ *continue* *sur* $\bar{\mathrm{D}}$ *telle que* $\bar{\partial} f$ *soit aussi continue sur* $\bar{\mathrm{D}}$, $0 \leqq p,\ q \leqq n$, *on a*

$$\begin{aligned}(-1)^{p+q} f(z) = & \int_{\zeta \in \partial \mathrm{D}} f(\zeta) \wedge \Omega_q^p(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, s)(z, \zeta) - \int_{\zeta \in \mathrm{D}} \bar{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge \Omega_q^p(\varphi^{\mathrm{v}}, \hat{s}, s)(z, \zeta) \\ & - \int_{(\zeta, \lambda) \in \partial \mathrm{D} \times [0,\ 1]} \bar{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge \bar{\Omega}_q^p(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, \hat{s}, s)(z, \zeta, \lambda) \\ & + \bar{\partial}_z \Bigg( \int_{\zeta \in \mathrm{D}} f(\zeta) \wedge \Omega_{q-1}^p(\varphi^{\mathrm{v}}, \hat{s}, s)(z, \zeta) \\ & + \int_{(\zeta, \lambda) \in \partial \mathrm{D} \times [0,\ 1]} f(\zeta) \wedge \bar{\Omega}_{q-1}^p(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, \hat{s}, s)(z, \zeta, \lambda) \Bigg) \\ & + (-1)^{p+q+1} \left[ \int_{\zeta \in \mathrm{D}} f(\zeta) \wedge \mathrm{P}_q^p(z, \zeta) - \int_{(\zeta, \lambda) \in \partial \mathrm{D} \times [0,\ 1]} f(\zeta) \wedge \mathrm{Q}_q^p(z, \zeta, \lambda) \right], \quad z \in \mathrm{D},\end{aligned}$$

*où* $\Omega_q^p(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, s)$, $\Omega_q^p(\varphi^{\mathrm{v}}, \hat{s}, s)$, $\bar{\Omega}_q^p(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, \hat{s}, s)$, $\mathrm{P}_q^p$ et $\mathrm{Q}_q^p$ *désignent respectivement les parties de type* $(p, q)$ *en* $z$ *de* $\tilde{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, s)$, $\tilde{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, \hat{s}, s)$, $\bar{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, \hat{s}, s)$, $\bar{\partial}_{z, \zeta} \tilde{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, \hat{s}, s)$, $(\bar{\partial}_{z, \zeta} + d_\lambda) \bar{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, \hat{s}, s)$.

*Remarque* 1. — Si $p=0$, $\mathrm{P}_q^p = \mathrm{Q}_q^p = 0$ car $c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M} \times \mathrm{M}))$ est de bidegré $(1, 1)$ en $z$, on retrouve donc la formule (4.5.32) de [3].

*Remarque* 2. — Si la métrique $\theta$ est telle que $c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M} \times \mathrm{M})) = 0$ alors $\mathrm{P}_q^p = \mathrm{Q}_q^p = 0$ et on obtient la généralisation aux variétés de Stein de la formule de Koppelman-Leray pour les $(p, q)$-formes différentielles de $\mathbb{C}^n$.

En suivant la méthode utilisée par Henkin et Leiterer dans la démonstration du théorème 4.5.3 de [3], il suffit, pour prouver le théorème 4.3, d'appliquer la formule de Stokes à la forme différentielle $f(\zeta) \wedge \bar{\Omega}(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, \hat{s}, s)$.

COROLLAIRE 4.4. — *Sous les hypothèses du théorème* 4.3, *si de plus* $s^*(z, \zeta)$ *dépend holomorphiquement de* $z \in \mathrm{D}$, $q \geqq 1$ *et* $c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M} \times \mathrm{M})) = 0$, *alors*

$$\begin{aligned} f(z) = (-1)^{p+q} \Bigg[ & \bar{\partial}_z \Bigg( \int_{\zeta \in \mathrm{D}} f(\zeta) \wedge \Omega_{q-1}^p(\varphi^{\mathrm{v}}, \hat{s}, s)(z, \zeta) \\ & + \int_{(\zeta, \lambda) \in \partial \mathrm{D} \times [0,\ 1]} f(\zeta) \wedge \bar{\Omega}_{q-1}^p(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, \hat{s}, s)(z, \zeta, \lambda) \Bigg) - \Bigg( \int_{\zeta \in \mathrm{D}} \bar{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge \Omega_q^p(\varphi^{\mathrm{v}}, \hat{s}, s)(z, \zeta) \\ & + \int_{(\zeta, \lambda) \in \partial \mathrm{D} \times [0,\ 1]} \bar{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge \bar{\Omega}_q^p(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, \hat{s}, s)(z, \zeta, \lambda) \Bigg) \Bigg]. \end{aligned}$$

*En particulier pour toute* $(p, q)$-*forme différentielle continue sur* $\bar{\mathrm{D}}$ *telle que* $\bar{\partial} f = 0$ *sur* D

$$\begin{aligned} g(z) = (-1)^{p+q} \Bigg( & \int_{\zeta \in \mathrm{D}} f(\zeta) \wedge \Omega_{q-1}^p(\varphi^{\mathrm{v}}, \hat{s}, s)(z, \zeta) \\ & + \int_{(\zeta, \lambda) \in \partial \mathrm{D} \times [0,\ 1]} f(\zeta) \wedge \bar{\Omega}_q^p(\varphi^{\mathrm{v}}, s^*, \hat{s}, s)(z, \zeta, \lambda) \Bigg) \end{aligned}$$

*est une solution continue de l'équation* $\bar{\partial} g=f$ *dans* D.

*Démonstration.* — Cela se déduit immédiatement du théorème 4.3 car si $s^*(z, \zeta)$ est holomorphe en $z$, $\Omega_q^p(\varphi^\vee, s^*, s)=0$ dès que $q \geqq 1$ et comme $c(\tilde{T}(M \times M))=0$ $P_q^p=Q_q^p=0$ d'après les lemmes 2.1 et 4.2.

Nous allons maintenant prouver une autre formule de Leray-Koppelman, analogue à celle du théorème 1 de [1]. Une telle formule pourrait permettre d'aborder des problèmes de division dans les ouverts des variétés de Stein comme l'a fait Berndtsson [9] pour les ouverts de $\mathbb{C}^n$.

Dans toute la suite du paragraphe, on considèrera un domaine D relativement compact à bord $\mathscr{C}^1$ par morceaux de la variété de Stein M, $(s^*, \chi^*)$ une section de Leray pour $(D, s, \varphi)$ vérifiant:

- $s^*$ est une section de classe $\mathscr{C}^2$ de $\tilde{T}^*(M \times M)$ définie sur $\bar{D} \times \bar{D}$.
- Pour tout compact L de D, il existe des constantes positives $c_1(L)$, $c_2(L)$ et $\eta(L)$ telles que si $d(z, \zeta)$ désigne la distance entre $z$, $\zeta$ on ait

$$|s^*(z, \zeta)|_{\theta^*} \leqq c_1(L)\, d(z, \zeta)$$
$$|\langle s^*(z, \zeta), s(z, \zeta)\rangle| \geqq c_2(L)\,(d(z, \zeta))^2$$

si $d(z, \zeta)<\eta(L)$ pour $\zeta \in \bar{D}$ et $z \in L$.

Remarquons que de telles sections existent: par exemple $\hat{s}$.

On désignera par K une forme différentielle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\bar{D} \times \bar{D} \setminus \Delta(\bar{D})$ de degré $2n-1$ telle que:

1. $dK=R$ sur $\bar{D} \times \bar{D} \setminus \Delta(\bar{D})$, où R est une forme différentielle localement intégrable sur $\bar{D} \times \bar{D}$.
2. Pour tout compact L de D il existe une constante $c_3(L)$ telle que

$$|K-\tilde{\Omega}(\varphi^\vee, s^*, s)| \leqq c_3(L)\,(d(z, \zeta))^{-2n+2} \qquad \text{si} \quad \zeta \in \bar{D} \quad \text{et} \quad z \in L.$$

3. K est de bidegré $(n, n-1)$.

THÉORÈME 4.5. — *Sous les hypothèses ci-dessus, si f est une* $(p, q)$*-forme différentielle continue sur* $\bar{D}$ *telle que* $\bar{\partial} f$ *soit aussi continue sur* $\bar{D}$, $0 \leqq p, q \leqq n$, *on a pour tout* $z \in D$

$$(-1)^{p+q} f(z)=\int_{\zeta \in \partial D} f(\zeta) \wedge K_q^p(z, \zeta)-\int_{\zeta \in D} \bar{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge K_q^p(z, \zeta)$$
$$+\bar{\partial}_z\left[\int_{\zeta \in D} f(\zeta) \wedge K_{q-1}^p(z, \zeta)\right]+(-1)^{p+q-1} \int_{\zeta \in D} f(\zeta) \wedge R_q^p(z, \zeta).$$

$K_q^p$, $R_q^p$ *désignant les composantes de bidegré* $(p, q)$ *en z et* $(n-p, n-q-1)$ *en* $\zeta$ *de* K *et* R, *avec la convention* $K_{p,-1}=0$.

*Démonstration.* — La démonstration est analogue à celle de la formule de Koppelman (théorème 2.2) (*voir* aussi [1] démonstration du théorème 1).

Grâce aux propriétés 1 et 3 du noyau K en appliquant la méthode utilisée au début de la démonstration du théorème 2.2 on se ramène à démontrer la formule 2.4 où

$\tilde{\Omega}(\varphi^\vee, \hat{s}, s)$ est remplacé par K, soit en gardant les mêmes notations

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{(z,\zeta) \in \partial U_\varepsilon \cap (V \times U)} f(\zeta) \wedge K(z, \zeta) \wedge g(z) = (-1)^{p+q} \int_{z \in V} f(z) \wedge g(z).$$

De plus d'après la propriété 2 de K, il suffit de démontrer ce résultat pour $\tilde{\Omega}(\varphi^\vee, s^*, s)$. Puisque nous l'avons déjà démontré lorsque $s^* = \hat{s}$ il suffit de prouver que si

$$I_\varepsilon = \int_{(z,\zeta) \in \partial U_\varepsilon \cap (V \times U)} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(\varphi^\vee, s^*, s)(z, \zeta) \wedge g(z) - \int_{(z,\zeta) \in \partial U_\varepsilon \cap (V \times U)} f(\zeta) \wedge \tilde{\Omega}(\varphi^\vee, \hat{s}, s)(z, \zeta) \wedge g(z)$$

on a $\lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon = 0$.

Dans $V \times U \times [0, 1]$ on considère la variété à bord

$$X_\varepsilon = \{(z, \zeta) \in V \times U \mid d(z, \zeta) = \varepsilon\} \times [0, 1]$$

on a

$$\partial X_\varepsilon = \{d(z, \zeta) = \varepsilon\} \times \{1\} \cup \{d(z, \zeta) = \varepsilon\} \times \{0\}.$$

On va appliquer la formule de Stokes à la forme différentielle

$$f(\zeta) \wedge \bar{\Omega}(\varphi^\vee, s^*, \hat{s}, s) \wedge g(z)$$

et à la variété à bord $X_\varepsilon$ :

$$\int_{\partial X_\varepsilon} f(\zeta) \wedge \bar{\Omega}(\varphi^\vee, s^*, \hat{s}, s)(z, \zeta) \wedge g(z) = \int_{X_\varepsilon} d_{z,\zeta,\lambda}(f(\zeta) \wedge \bar{\Omega}(\varphi^\vee, s^*, \hat{s}, s)(z, \zeta) \wedge g(z)).$$

Grâce au lemme 4.1 on a par définition de $\partial X_\varepsilon$

$$I_\varepsilon = -\int_{\partial X_\varepsilon} f(\zeta) \wedge \bar{\Omega}(\varphi^\vee, s^*, \hat{s}, s)(z, \zeta) \wedge g(z).$$

Par des considérations de degré on voit que

$$\begin{aligned} d_{z,\zeta,\lambda}&(f(\zeta) \wedge \bar{\Omega}(\varphi^\vee, s^*, \hat{s}, s)(z, \zeta) \wedge g(z)) \\ &= (\bar{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda)(f(\zeta) \wedge \bar{\Omega}(\varphi^\vee, s^*, \hat{s}, s)(z, \zeta) \wedge g(z)) \\ &= \bar{\partial}_\zeta f(\zeta) \wedge \bar{\Omega}(\varphi^\vee, s^*, \hat{s}, s) \wedge g(z) + (-1)^{p+q+1} f(\zeta) \wedge \bar{\Omega}(\varphi^\vee, s^*, \hat{s}, s) \wedge \bar{\partial}_z g(z) \\ &\quad + (-1)^{p+q} f(\zeta) \wedge (\bar{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda) \bar{\Omega}(\varphi^\vee, s^*, \hat{s}, s) \wedge g(z). \end{aligned}$$

Évaluons $\bar{\Omega}(\varphi^\vee, s^*, \hat{s}, s)$ et $(\bar{\partial}_{z,\zeta} + d_\lambda) \bar{\Omega}(\varphi^\vee, s^*, \hat{s}, s)$ sur $X_\varepsilon$.
Puisque nous sommes sur $V \times U$ nous pouvons exprimer $\Omega(\varphi^\vee, s^*, \hat{s}, s)$ en coordonnées locales; si $u$, $v$, $\hat{u}$, $u^*$ sont les expressions de $s$, $t^*$, $\hat{s}$, $s^*$ dans les coordonnées choisies

on a

$$\Omega(\varphi^{\vee}, s^*, \hat{s}, s) = \frac{(n-1)!}{(2i\pi)^n}\varphi^{\vee n}\left(\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1} v_j \underset{k\neq j}{\wedge} (\bar{\partial}_{z,\zeta}+d_\lambda) v_k\right)\wedge\left(\bigwedge_{l=1}^{n} du_l + ((\mathrm{H}^{-1}\partial\mathrm{H})\wedge u)_l\right)$$

En fait seule intervient la composante $\alpha$ de $\bar{\Omega}(\varphi^{\vee}, s^*, \hat{s}, s)$ de degré 1 en $d\lambda$.

Puisque

$$v_k=(1-\lambda)\frac{u_k^*}{\langle u^*, u\rangle}+\lambda\frac{\hat{u}_k}{\langle \hat{u}, u\rangle},$$

car $t^*$ est définie par (4.1)

$$(\bar{\partial}_{z,\zeta}+d_\lambda) v_k = d\lambda\left(\frac{\hat{u}_k}{\langle \hat{u}, u\rangle}-\frac{u_k^*}{\langle u^*, u\rangle}\right)+(1-\lambda)\bar{\partial}_{z,\zeta}\left(\frac{u_k^*}{\langle u^*, u\rangle}\right)+\lambda\bar{\partial}_{z,\zeta}\left(\frac{\hat{u}_k}{\langle \hat{u}, u\rangle}\right)$$

$\alpha$ vérifie alors d'après les estimations (4.2) et la définition de $\hat{s}$

$$|\alpha|<\mathrm{C}|v|\left|\frac{\hat{u}_k}{\langle \hat{u}, u\rangle}-\frac{u_k^*}{\langle u^*, u\rangle}\right|(d(z,\zeta))^{-2n+4}\leqq \mathrm{C}'(d(z,\zeta))^{-2n+2}$$

pour $\zeta\in\mathrm{U}$ et $z\in\mathrm{V}$ compact de D.

De même en utilisant l'expression de $(\bar{\partial}_{z,\zeta}+d_\lambda)\bar{\Omega}(\varphi^{\vee}, s^*, \hat{s}, s)$ donnée dans le lemme 4.2 ainsi que la définition de $\hat{s}$ et les estimations (4.2) vérifiées par $s^*$, on voit que la composante $\beta$ de $(\bar{\partial}_{z,\zeta}+d_\lambda)\bar{\Omega}(\varphi^{\vee}, s^*, \hat{s}, s)$ de degré 1 en $d\lambda$ vérifie $|\beta|=0(d(z,\zeta)^{-2n+3})$ sur $\mathrm{V}\times\mathrm{U}$ au voisinage de la diagonale. Par conséquent

$$d_{z,\zeta,\lambda}(f(\zeta)\wedge\bar{\Omega}(\varphi^{\vee}, s^*, \hat{s}, s)(z,\zeta)\wedge g(z))$$

est un $O(d(z,\zeta)^{-2n+2})$ et comme la mesure de $\mathrm{X}_\varepsilon$ est un $O(\varepsilon^{2n-1})$, on obtient

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathrm{I}_\varepsilon=0.$$

On peut également déduire du théorème 4.5 le corollaire suivant relatif à la résolution du $\bar{\partial}$.

COROLLAIRE 4.6. — *Sous les hypothèses du théorème* 4.5, *si de plus* $s^*(z,\zeta)$ *dépend holomorphiquement de* $z\in\mathrm{D}$ *et si* $d\mathrm{K}=0$, *pour toute* $(p,q)$*-forme différentielle* $f$ *continue sur* $\bar{\mathrm{D}}$ *telle que* $\bar{\partial}f=0$ *sur* D, $0\leqq p\leqq n$, $1\leqq q\leqq n$,

$$g(z)=(-1)^{p+q}\left(\int_{\zeta\in\mathrm{D}} f(\zeta)\wedge\mathrm{K}_{q-1}^{p}(z,\zeta)\right)$$

*est une solution continue de* $\bar{\partial}g=f$ *dans* D.

*Remarque* 3. — Pour obtenir un noyau K vérifiant $d\mathrm{K}=0$, il suffit de prendre $\mathrm{K}=\tilde{\Omega}(\varphi^{\vee}, s^*, s)$ dans un cas où la métrique $\theta$ peut-être choisie telle que $c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M}\times\mathrm{M}))=0$.

*Remarque* 4. — Henkin et Leiterer ont construit dans [3] une section $s^*$ vérifiant les hypothèses du corollaire 4.4 lorsque le domaine D est supposé strictement pseudoconvexe de classe $\mathscr{C}^2$.

On peut en déduire par des méthodes analogues à celles de Kerzman [4] dans $\mathbb{C}^n$ une section $s^*$ vérifiant les hypothèses du corollaire 4.6 et une solution du $\bar\partial$ vérifiant les estimées $\mathrm{L}^p$.

*Remarque* 5. — Lorsque $f$ est une $p$-forme différentielle holomorphe le théorème 4.5 nous donne si $d\mathrm{K}=0$ la représentation de Cauchy-Leray suivante de $f$

$$f(z)=(-1)^p\int_{\partial\mathrm{D}} f(\zeta)\wedge \mathrm{K}_0^p(z,\zeta).$$

## 5. Noyaux pour les formes différentielles à valeurs dans un fibré vectoriel holomorphe

On considère un fibré vectoriel holomorphe F sur M, et si $\Pi_1$ et $\Pi_2$ désignent les projections de $\mathrm{M}\times\mathrm{M}$ sur M, $(z,\zeta)\mapsto z$ et $(z,\zeta)\mapsto\zeta$, on notera $\mathrm{G}=\mathrm{Hom}(\Pi_2^*\mathrm{F},\Pi_1^*\mathrm{F})$; c'est un fibré vectoriel holomorphe sur $\mathrm{M}\times\mathrm{M}$ dont les fibres sont données par $\mathrm{G}_{(z,\zeta)}=\mathrm{Hom}(\mathrm{F}_\zeta,\mathrm{F}_z)$.

Nous allons construire un noyau $\Lambda$, c'est-à-dire une forme différentielle $\mathscr{C}^1$ sur $\mathrm{M}\times\mathrm{M}\setminus\Delta(\mathrm{M})$ à valeurs dans le fibré vectoriel G, qui nous permettra d'obtenir une formule de Koppelman pour les formes différentielles à valeurs dans le fibré F.

LEMME 5.1. — *Il existe une section holomorphe $\psi$ de* G *vérifiant*

(i) $$\psi(z,z)=\mathrm{Id}_{\mathrm{F}_z}\quad \textit{pour tout}\ z\in\mathrm{M}.$$

*Démonstration.* — Appliquons le théorème B de Cartan au faisceau $\mathrm{G}\otimes\mathscr{I}_\Delta$ dans la suite exacte

$$0\to\mathrm{G}\otimes\mathscr{I}_\Delta\to\mathrm{G}\to\mathrm{G}|_\Delta\to0,$$

où $\mathscr{I}_\Delta$ désigne l'idéal de la diagonale. Il en résulte que le morphisme de restriction

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{M}\times\mathrm{M},\mathrm{G})\to\mathrm{H}^0(\Delta,\mathrm{G}|_\Delta)\simeq\mathrm{H}^0(\mathrm{M},\mathrm{Hom}(\mathrm{F},\mathrm{F}))$$

est surjectif, d'où le lemme.

PROPOSITION 5.2. — *La forme différentielle $\Lambda(z,\zeta)=\psi(z,\zeta)\tilde\Omega(\varphi^\vee,\hat s,s)(z,\zeta)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathrm{M}\times\mathrm{M}\setminus\Delta(\mathrm{M})$ et à valeur dans* G, *elle vérifie*

$$\bar\partial\Lambda=[\Delta].\mathrm{Id}_\mathrm{F}+\mathrm{P}.\psi$$

*où* $[\Delta]$ *est le courant d'intégration sur la diagonale* $\Delta$ *de* $\mathrm{M} \times \mathrm{M}$ *et* P *une forme différentielle localement intégrable sur* $\mathrm{M} \times \mathrm{M}$ *proportionnelle à* $c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M} \times \mathrm{M}))$. *En particulier si* $c(\tilde{\mathrm{T}}(\mathrm{M} \times \mathrm{M}))=0$ *on a* $\bar{\partial}\Lambda=[\Delta].\mathrm{Id}_{\mathrm{F}}$.

*Démonstration.* — Il suffit d'appliquer le lemme 5.1 et le corollaire 2.3 pour obtenir la proposition.

Le courant d'intégration sur la diagonale $[\Delta]$, apparaît donc ici également comme le résidu de la forme différentielle $\Lambda$.

On en déduit alors immédiatement la formule de Koppelman suivante pour les formes différentielles à valeurs dans le fibré vectoriel F.

COROLLAIRE 5.3. — *Soient* D *un domaine relativement compact à bord* $\mathscr{C}^1$ *par morceaux de la variété de Stein* M *et* $\nu \geqq 2\chi$. *Si* $f$ *est une* $(p, q)$*-forme différentielle continue sur* $\bar{\mathrm{D}}$, *à valeurs dans* F *telle que* $\bar{\partial} f$ *soit aussi continue sur* $\bar{\mathrm{D}}$, $0 \leqq p, q \leqq n$, *on a pour* $z \in \mathrm{D}$

$$f(z)=\left[\int_{\zeta \in \partial\mathrm{D}} \Lambda(z, \zeta) \wedge f(\zeta)-\int_{\zeta \in \mathrm{D}} \Lambda(z, \zeta) \wedge \bar{\partial}_{\zeta} f(\zeta)\right.$$
$$\left.+\bar{\partial}_z \int_{\zeta \in \mathrm{D}} \Lambda(z, \zeta) \wedge f(\zeta)+(-1)^{p+q+1} \int_{\zeta \in \mathrm{D}} \mathrm{P}(z, \zeta)\, \psi(z, \zeta) \wedge f(\zeta)\right].$$

*Remarque.* — Le noyau que nous venons de construire pour les formes différentielles à valeurs dans un fibré vectoriel permet de ramener le cas des $(p, q)$-formes différentielles à celui des $(0, q)$-formes différentielles; en effet

$$\mathscr{C}_{p, q}^{\infty}(\mathrm{M}, \mathrm{F}) \simeq \mathscr{C}_{0, q}^{\infty}(\mathrm{M}, \Lambda^p \mathrm{T}^* \mathrm{M} \otimes \mathrm{F}).$$

Ceci permet de faire disparaître le terme en courbure $\mathrm{P}_q^p$ dans toutes les formules de Koppelman.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] M. ANDERSSON et B. BERNDTSSON, *Henkin-Ramirez Formulas with Weight Factors* (*Ann. de l'Inst. Fourier*, vol. 32, 1982, p. 91-110).

[2] G. HENKIN et J. LEITERER, *Global Integral Formulas for Solvering the* $\bar{\partial}$*-Equation on Stein Manifolds* (*Ann. Pol. Math.*, vol. 39, 1981, p. 93-116).

[3] G. HENKIN et J. LEITERER, *Theory of Functions on Complex Manifolds*, Birkhaüser, Verlag, 1984.

[4] N. KERZMAN, *Hölder and* $\mathrm{L}^p$ *Estimates for Solution of* $\bar{\partial} u=f$ *in Strongly Pseudoconvex Domains* (*Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 24, 1971, p. 301-379).

[5] Ch. LAURENT-THIEBAUT, *Formules intégrales de Koppelman sur une variété de Stein* (*Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 90, 1984, p. 221-225).

[6] Ch. LAURENT-THIEBAUT, *Transformation de Bochner-Martinelli dans une variété de Stein.*

[7] I. LIEB, *Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf streng pseudokonvexen Gebieten* (*Math. Ann.*, vol. 190, 1971, p. 6-44 et 199, 1972, p. 241-256).

[8] N. ØVRELID, *Integral Representation Formulas and* $L^p$ *Estimates for the* $\bar{\partial}$*-Equation* (*Math. Scand.*, vol. 29, 1971, p. 137-160).

[9] B. BERNDTSSON, *A Formula for Interpolation and Division in* $\mathbb{C}^n$ (*Math. Ann.*, vol. 263, 1983, p. 393-418).

[10] P. GRIFFITHS et J. HARRIS, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley-interscience, New York, 1978.

(Manuscrit reçu le 12 décembre 1986,
révisé le 1er juin 1987).

J.-P. Demailly
Université de Grenoble I,
Institut Fourier, B.P. 74,
L.A. au C.N.R.S. n° 188,
38400 Saint-Martin d'Hères

C. Laurent-Thiebaut
Université Paris-VI,
Analyse complexe et géométrie,
L.A. au C.N.R.S. n° 213,
4, place Jussieu,
75252 Paris Cedex 05.