

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PATRICE LE CALVEZ

## Propriétés dynamiques des régions d'instabilité

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 4<sup>e</sup> série*, tome 20, n° 3 (1987), p. 443-464

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1987\\_4\\_20\\_3\\_443\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1987_4_20_3_443_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## PROPRIÉTÉS DYNAMIQUES DES RÉGIONS D'INSTABILITÉ

PAR PATRICE LE CALVEZ

---

ABSTRACT. — We consider a conservative twist map of the annulus which has a region of instability and we show, following an idea of Birkhoff, that there is an orbit which goes from a border of the region to the other one, and that we can find, in each neighbourhood of a border, a point whose  $\alpha$  and  $\omega$ -limit sets are contained in the other one. These results remain valid in the case of an infinite region of instability. We also show that,  $C^1$ -generically, there is a smallest element for the inclusion, among the closed connected invariant sets contained in the region of instability and containing the two borders, and that this set has a dense orbit.

On s'intéresse ici à la dynamique des régions d'instabilité d'un difféomorphisme de l'anneau  $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ , déviant la verticale et préservant la mesure, c'est-à-dire des couronnes délimitées par deux courbes invariantes disjointes, homotopes à  $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$  et ne possédant pas d'autre courbe invariante, homotope à  $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$ . Une grande partie des résultats ont déjà été annoncés par J. Mather [Ma] avec des hypothèses légèrement distinctes, mais surtout à l'aide d'une méthode totalement différente. Les méthodes que nous allons employer ici sont purement topologiques et donnent une description assez précise de la dynamique d'une région d'instabilité : elles sont dues à Birkhoff ([B 1] et [B 2]), de même que la plupart des résultats du paragraphe 2, dont nous donnons ici des démonstrations complètes et rigoureuses, voire nouvelles dans certains cas.

Après un paragraphe consacré aux définitions et au rappel de certains résultats sur les applications déviant la verticale, nous montrerons au paragraphe 2 qu'il existe un point traversant la région d'instabilité (théorème 2.2) et dans tout voisinage d'un bord un point dont les ensembles  $\alpha$ -limite et  $\omega$ -limite sont contenus dans l'autre bord (théorème 2.1). Dans le paragraphe 3, nous montrerons, sous une hypothèse supplémentaire très faible, qu'une région d'instabilité contient un ensemble fermé connexe  $X_0$ , contenant les deux bords, invariant par  $f$  et ayant une propriété de minimalité parmi tous ces ensembles (théorème 3.2); cet ensemble se définit très précisément (théorème 3.1) et, sous des hypothèses un peu plus fortes, possède une orbite dense (théorème 3.3). Enfin, dans le paragraphe 4, nous transposons les résultats du paragraphe 2 au cas des régions d'instabilité infinies; nous montrons par exemple qu'un difféomorphisme de l'anneau déviant la verticale et ayant une propriété stricte d'intersection possède une orbite qui traverse l'anneau (théorème 4.1).

Je tiens à remercier Michel Herman de m'avoir signalé les idées de Birkhoff et proposé ce travail, je remercie aussi Bernadette Barbichon pour le soin avec lequel elle a tapé le manuscrit.

### 1. Notations, définitions, rappels

On note  $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  le tore de dimension 1 et on définit sur  $\mathbb{A} = \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$ , muni de sa structure de variété orientée habituelle, les projections  $p_1: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{T}^1$ ,  $(\theta, r) \mapsto \theta$  et  $p_2: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(\theta, r) \mapsto r$ . On définit de même sur le revêtement universel  $\tilde{\mathbb{A}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  de  $\mathbb{A}$ , les projections

$$\tilde{p}_1: \tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{R}, (\tilde{\theta}, r) \mapsto \tilde{\theta} \quad \text{et} \quad \tilde{p}_2: \tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{R}, (\tilde{\theta}, r) \mapsto r,$$

ainsi que les applications  $\pi: \tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \mathbb{A}$ ,  $(\tilde{\theta}, r) \mapsto (\tilde{\theta} + \mathbb{Z}, r)$  et  $\tilde{\Gamma}: \tilde{\mathbb{A}} \rightarrow \tilde{\mathbb{A}}$ ,  $(\tilde{\theta}, r) \mapsto (\tilde{\theta} + 1, r)$ .

Si  $X$  est une partie de  $\mathbb{A}$  ou de  $\tilde{\mathbb{A}}$ , on écrira respectivement  $\text{Ad}(X)$ ,  $\text{Int}(X)$ ,  $\text{Fr}(X)$  pour l'adhérence, l'intérieur et la frontière de  $X$ ; et si  $Y$  est inclus dans  $X$  on écrira  $X \setminus Y$  pour le complémentaire de  $Y$  dans  $X$ . D'autre part, pour toute partie  $X$  de  $\mathbb{A}$ , on pose :  $\tilde{X} = \pi^{-1}(X)$ .

Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont deux applications de  $\mathbb{T}^1$  dans  $\mathbb{R}$ , on écrira  $\varphi \leq \psi$  (resp.  $\varphi < \psi$ ) si, pour tout  $\theta$  appartenant à  $\mathbb{T}^1$ , on a :  $\varphi(\theta) \leq \psi(\theta)$  [resp.  $\varphi(\theta) < \psi(\theta)$ ].

On considère dans ce qui suit un difféomorphisme  $f$  de  $\mathbb{A}$ , de classe  $C^1$ , homotope à l'identité, tel que :

(i) L'application  $f$  préserve une mesure qui charge les ouverts de  $\mathbb{A}$ , par exemple la mesure de Lebesgue.

(ii) L'application  $f$  dévie la verticale à droite, c'est-à-dire que, pour tout relèvement  $\tilde{f}$  de  $f$  à  $\tilde{\mathbb{A}}$ , on a les relations suivantes :

$$\partial \tilde{p}_1 \circ \tilde{f} / \partial r > 0;$$

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \tilde{p}_1 \circ \tilde{f}(\tilde{\theta}, r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \tilde{p}_2 \circ \tilde{f}(\tilde{\theta}, r) = +\infty, \text{ pour tout } \tilde{\theta} \in \mathbb{R};$$

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} \tilde{p}_1 \circ \tilde{f}(\tilde{\theta}, r) = \lim_{r \rightarrow -\infty} \tilde{p}_2 \circ \tilde{f}(\tilde{\theta}, r) = -\infty, \text{ pour tout } \tilde{\theta} \in \mathbb{R}.$$

(iii) L'application  $f$  possède une région d'instabilité : il existe deux applications continues  $\psi^-, \psi^+ : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant  $\psi^- < \psi^+$ , dont les graphes, notés respectivement  $C^-$  et  $C^+$  sont invariants par  $f$ , et tels que la couronne  $C = \{(\theta, r) \mid \psi^-(\theta) \leq r \leq \psi^+(\theta)\}$  ne possède aucun autre graphe, invariant par  $f$ , d'application continue de  $\mathbb{T}^1$  dans  $\mathbb{R}$ .

On note alors  $\mathcal{D}$  l'ensemble des applications  $\psi$  de  $\mathbb{T}^1$  dans  $\mathbb{R}$  continues et vérifiant  $\psi^- < \psi < \psi^+$ . D'autre part, pour tout point  $x = (\theta, r)$  appartenant à  $C$ , on définit  $V^-(x) = \{\theta\} \times [\psi^-(\theta), r]$  et  $V^+(x) = \{\theta\} \times [r, \psi^+(\theta)]$ .

La topologie de  $\mathbb{A}$  (resp. de  $\tilde{\mathbb{A}}$ ) étant définie par une distance  $d$  (resp.  $\tilde{d}$ ), on définit pour tout point  $x$  de  $\mathbb{A}$  (resp. tout point  $\tilde{x}$  de  $\tilde{\mathbb{A}}$ ) les ensembles :

$$W^s(x) = \{y \in \mathbb{A} \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0\}$$

et

$$W^u(x) = \{y \in \mathbb{A} \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0\}$$

$$(\text{resp. } W^s(\tilde{x}) = \{\tilde{y} \in \tilde{\mathbb{A}} \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{d}(\tilde{f}^n(\tilde{x}), \tilde{f}^n(\tilde{y})) = 0\})$$

et

$$W^u(\tilde{x}) = \{\tilde{y} \in \tilde{\mathbb{A}} \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{d}(\tilde{f}^{-n}(\tilde{x}), \tilde{f}^{-n}(\tilde{y})) = 0\}.$$

### Rappels sur la théorie de Birkhoff

L'étude de la dynamique des régions d'instabilité que l'on va entreprendre aura pour base le résultat fondamental suivant, dont on trouvera une démonstration dans Birkhoff [B 3] ou dans Herman [H], et qui peut s'énoncer ainsi :

**THÉORÈME 1.1.** — *Si  $X$  est une partie fermée de  $C$ , connexe, séparant  $\mathbb{A}$  (i.e. tel que  $\mathbb{A} \setminus X$  ait deux composantes connexes non bornées) et invariante par  $f$ , alors :*

- soit  $X$  est égal à  $C^-$ ,
- soit  $X$  est égal à  $C^+$ ,
- soit  $X$  contient à la fois  $C^-$  et  $C^+$ .

Comme première application de ce théorème à l'étude de la dynamique de  $f$ , on peut noter le résultat suivant, déjà remarqué par Birkhoff, qui justifie le nom de région d'instabilité donnée à la couronne  $C$ , et dont on rappelle la démonstration (voir Birkhoff [B 3] ou Herman [H]).

**PROPOSITION 1.1.** — *Pour tout élément  $\psi$  de  $\mathcal{D}$ , on a l'inclusion*

$$C^+ \subset \text{Ad} \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(U_\psi^-) \right), \quad \text{où } U_\psi^- = \{(\theta, r) \in \mathbb{A}, \psi^-(\theta) \leq r < \psi(\theta)\}.$$

**Démonstration.** — L'ensemble  $\text{Ad} \left( \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^k(U_\psi^-) \right)$  est fermé, connexe, invariant par  $f$ , et sépare  $\mathbb{A}$  puisqu'il contient  $C^-$ . Comme il n'est pas réduit à  $C^-$ , il contient donc  $C^+$  d'après le théorème précédent. Mais en écrivant  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^k(U_\psi^-) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} f^{-m} \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(U_\psi^-) \right)$ , on fait apparaître l'ensemble  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^k(U_\psi^-)$  comme une réunion croissante d'ouverts de  $C$  ayant tous même mesure, puisque  $f$  préserve la mesure. On en déduit que  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^k(U_\psi^-)$  et  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(U_\psi^-)$  ont même mesure, et comme celle-ci charge les ouverts, qu'ils ont même adhérence. On obtient finalement l'inclusion demandée.  $\square$

### Rappels sur les ensembles d'Aubry-Mather (voir Chenciner [Che]).

On appelle ensemble  $f$ -ordonné un ensemble compact non vide  $\Xi$ , se projetant injectivement par  $p_1$  sur  $\mathbb{T}^1$ , invariant par  $f$  et tel que l'ordre qui est alors défini naturellement par  $\tilde{p}_1$  sur  $\tilde{\Xi} = \pi^{-1}(\Xi)$  soit préservé par tout relèvement  $\tilde{f}$  de  $f$  à  $\mathbb{A}$ . Il existe alors un réel  $\tilde{\rho}$  tel que, pour tout  $\tilde{x} \in \tilde{\Xi}$  et tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on ait  $-1 < \tilde{p}_1 \circ \tilde{f}^k(\tilde{x}) - \tilde{p}_1(\tilde{x}) - k\tilde{\rho} < 1$ , appelé nombre de rotation de  $\Xi$ . Ce nombre dépend du relèvement choisi; par contre,  $\tilde{\rho} + \mathbb{Z}$ , élément de  $\mathbb{T}^1$ , ne dépend que de  $f$ . L'ensemble  $\alpha$ -limite de tout point  $x \in \Xi$  (de même que l'ensemble  $\omega$ -limite) est un ensemble  $f$ -ordonné minimal; on appelle un tel ensemble un *ensemble d'Aubry-Mather*.

Un ensemble d'Aubry-Mather de nombre de rotation  $p/q$  pour un relèvement  $\tilde{f}$  de  $f$ , où  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  sont premiers entre eux, est l'orbite d'un point périodique de  $f$  de période  $q$ ; un ensemble d'Aubry-Mather de nombre de rotation  $\tilde{\rho}$  irrationnel est, soit le graphe d'une application continue de  $\mathbb{T}^1$  dans  $\mathbb{R}$ , soit un ensemble de Cantor.

Les deux bords  $C^-$  et  $C^+$  sont  $f$ -ordonnés, fixons alors un relèvement  $\tilde{f}$  de  $f$  à  $\tilde{\mathbb{A}}$  et notons  $\tilde{\rho}^-$  et  $\tilde{\rho}^+$  les nombres de rotations de  $C^-$  et  $C^+$ ; on montre facilement que  $\tilde{\rho}^- < \tilde{\rho}^+$ . S. Aubry et J. Mather ont aussi montré l'existence pour tout  $\tilde{\rho} \in ]\tilde{\rho}^-, \tilde{\rho}^+[$  d'un ensemble d'Aubry-Mather de nombre de rotation  $\tilde{\rho}$ .

Finalement, rappelons le résultat suivant (Katok [K]) : Si  $(\Xi)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'ensemble  $f$ -ordonnés de nombre de rotation  $\tilde{\rho}_n$ , pour un relèvement  $\tilde{f}$  de  $f$  fixé, convergeant pour la distance de Hausdorff vers  $\Xi$ , alors  $\Xi$  est  $f$ -ordonné et son nombre de rotation  $\tilde{\rho}$  vérifie  $\tilde{\rho} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\rho}_n$ .

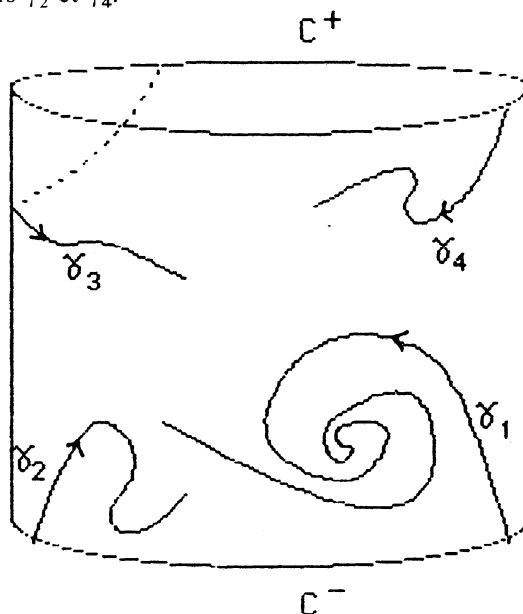
### Rappels sur les chemins positifs et négatifs

DÉFINITION. — On appelle *chemin positif* issu de  $C^-$  (resp. de  $C^+$ ) un plongement  $\gamma : [0, 1] \rightarrow C$  de classe  $C^1$ , tel que :

- $\gamma(0)$  appartient à  $C^-$  (resp. à  $C^+$ );
- le relèvement à  $\mathbb{R}$  de l'angle que fait le vecteur  $(0, 1)$  [resp.  $(0, -1)$ ] avec la tangente en  $\gamma(0)$ , et qui est entre 0 et  $\pi$  en  $\gamma(0)$ , est toujours strictement positif.

On définit de façon analogue un *chemin négatif* issu de  $C^-$  ou de  $C^+$  en demandant dans la définition précédente que l'angle soit strictement négatif.

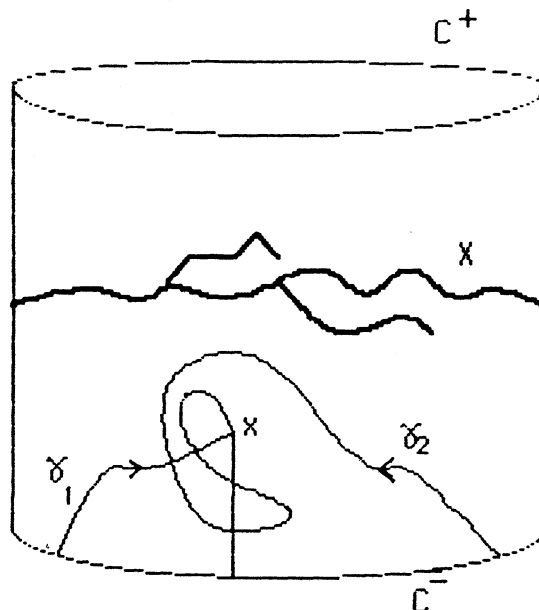
Exemple de deux chemins positifs  $\gamma_1$  et  $\gamma_3$  issus respectivement de  $C^-$  et de  $C^+$ , et de deux chemins négatifs  $\gamma_2$  et  $\gamma_4$ .



On a alors les deux résultats suivants (voir la démonstration dans Birkhoff [B 3] ou dans Le Calvez [L 1]).

PROPOSITION 1.2. — *L'image par  $f^{-1}$  d'un chemin positif est un chemin positif, l'image par  $f$  d'un chemin négatif est un chemin négatif.*

PROPOSITION 1.3. — *Soit  $X$  une partie fermée connexe de  $C$ , séparant  $A$  et ne rencontrant pas  $C^-$ . Si deux chemins  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  issus de  $C^-$ , respectivement négatif et positif, aboutissent au même point  $x$  sans que leurs images rencontrent  $X$ , la verticale  $V^-(x)$  ne rencontre pas  $X$ .*



## 2. Propriétés des ensembles stables et instables des bords de C

On va exposer dans ce paragraphe comment Birkhoff arrive, grâce au théorème 1.1, à construire, pour chacun des bords, deux ensembles analogues à la variété stable et instable d'un point fixe, puis on montrera comment obtenir des intersections « homoclines » et « hétéroclines » pour ceux-ci. On construira pour cela un certain nombre de familles de parties fermées de C de la façon suivante :

On définit, pour tout élément  $\psi$  de  $\mathcal{D}$ , la couronne  $C_\psi^- = \{(\theta, r) \in \mathbb{A}, \psi^-(\theta) \leq r \leq \psi(\theta)\}$ , adhérence de l'ensemble  $U_\psi^-$  défini dans la proposition 1.1.

L'ensemble  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(C_\psi^-)$  (resp.  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(C_\psi^-)$ ) est alors fermé et contient le bord  $C^-$ ; on note  $A_\psi^-$  (resp.  $\Omega_\psi^-$ ) sa composante connexe qui contient  $C^-$ , elle est aussi fermée. On définit de même  $C_\psi^+ = \{(\theta, r) \in \mathbb{A}, \psi(\theta) \leq r \leq \psi^+(\theta)\}$  et la composante connexe, notée  $A_\psi^+$  (resp.  $\Omega_\psi^+$ ) de  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(C_\psi^+)$  [resp.  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(C_\psi^+)$ ] qui contient  $C^+$ .

PROPOSITION 2.1. — *Pour tout  $\psi$  appartenant à  $\mathcal{D}$ , on a les propriétés suivantes :*

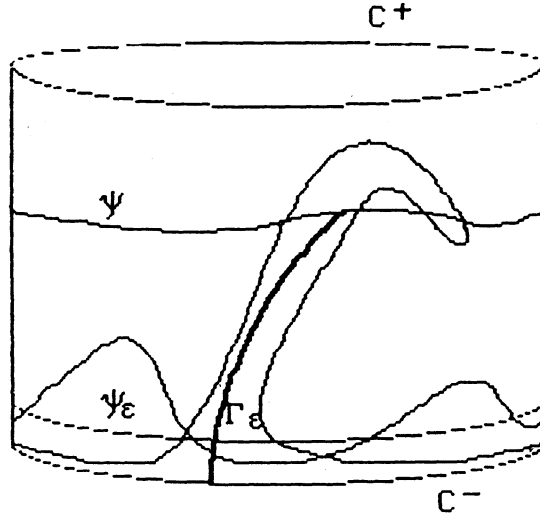
- (i)  $f^{-1}(A_\psi^\pm) \subset A_\psi^\pm$ ,  $f(\Omega_\psi^\pm) \subset \Omega_\psi^\pm$ ;
- (ii)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-n}(A_\psi^-) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(\Omega_\psi^-) = C^-$ ;  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-n}(A_\psi^+) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(\Omega_\psi^+) = C^+$ ;
- (iii) le graphe de  $\psi$  rencontre chacun des ensembles  $A_\psi^-$ ,  $\Omega_\psi^-$ ,  $A_\psi^+$  et  $\Omega_\psi^+$ .

*Démonstration.* — La propriété (i) est une conséquence directe de la définition des ensembles  $A_\psi^-$ ,  $\Omega_\psi^-$ ,  $A_\psi^+$  et  $\Omega_\psi^+$ ; ainsi, par exemple  $f^{-1}(A_\psi^-)$  contient  $C^-$ , est connexe et contenu dans  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(C_\psi^-)$ ; il est donc contenu dans  $A_\psi^-$ .

La propriété (ii) non plus n'est pas très difficile à montrer; la suite  $(f^{-n}(A_\psi^-))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite décroissante de parties compactes de  $\mathbb{A}$ , elle converge donc pour la distance de Hausdorff vers  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}(A_\psi^-)$ . Sa limite est alors compacte, connexe, séparant  $\mathbb{A}$  puisqu'elle contient  $C^-$ , contenue dans C et invariante par  $f$ . Comme elle ne rencontre pas  $C^+$ , on sait par le théorème 1.1 qu'elle est réduite à  $C^-$ . Les trois autres égalités se montrent de façon analogue.

Montrons maintenant que  $A_\psi^-$  rencontre le graphe de  $\psi$  et pour cela définissons, pour  $\varepsilon > 0$ , la fonction  $\psi_\varepsilon: \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\theta \mapsto \psi^-(\theta) + \varepsilon$ . Si  $\varepsilon$  est suffisamment petit, on sait que  $\psi_\varepsilon$  appartient à  $\mathcal{D}$ , grâce à la proposition 1.1 que  $C^+$  est inclus dans  $\text{Ad}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(C_{\psi_\varepsilon}^-))$ , et donc que l'ensemble  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(C_{\psi_\varepsilon}^-)$  rencontre le graphe de  $\psi$ . On note alors  $N_\varepsilon$  le premier entier  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $f^n(C_{\psi_\varepsilon}^-)$  rencontre le graphe de  $\psi$ . Puisque  $f^{N_\varepsilon}(C_{\psi_\varepsilon}^-)$  est connexe par arc, on peut construire un arc dont l'image  $\Gamma_\varepsilon \subset f^{N_\varepsilon}(C_{\psi_\varepsilon}^-)$  joint le graphe de  $\psi$  à celui de  $\psi^-$ , et que l'on peut d'ailleurs toujours supposer contenue dans  $C_\psi^-$ . Par la définition de

$N_\varepsilon$ , on sait que l'ensemble  $f^{N_\varepsilon-k}(C_\psi^-)$  ne rencontre pas le graphe de  $\psi$ , si  $k \in \{1, \dots, N_\varepsilon\}$ ,  
 et donc que  $f^{-k}(\Gamma_\varepsilon)$  est contenu dans  $C_\psi^-$ . Ainsi  $\Gamma_\varepsilon$  est inclus dans  $\bigcap_{k=0}^{N_\varepsilon} f^k(C_\psi^-)$ .



On utilise maintenant des propriétés classiques de la distance de Hausdorff (voir Choquet [Cho]). L'ensemble des fermés de  $C$  est compact puisque  $C$  est compact et on peut considérer une suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels positifs tendant vers zéro, tels que la suite  $(\Gamma_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$  soit convergente. La limite  $\Gamma$  de cette suite est alors connexe et rencontre à la fois le graphe de  $\psi$  et celui de  $\psi^-$ . De l'inclusion  $\Gamma_\varepsilon \subset \bigcap_{0 \leq n \leq N_\varepsilon} f^n(C_\psi^-)$  et de la relation

évidente  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N_\varepsilon = +\infty$ , on déduit alors aisément que  $\Gamma$  est inclus dans  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(C_\psi^-)$ .

Puisque  $\Gamma$  est connexe, il est contenu dans  $A_\psi^-$ , ce dernier ensemble rencontre donc le graphe de  $\psi$ . Avec un raisonnement analogue pour les autres ensembles, on obtient la propriété (iii).

En particulier, l'ensemble  $\alpha$ -limite de tout point  $x \in A_\psi^-$  est contenu dans  $C^-$ .  $\square$

On va poursuivre notre étude des ensembles  $A_\psi^-$ ,  $\Omega_\psi^-$ ,  $A_\psi^+$  et  $\Omega_\psi^+$  en examinant les applications  $\alpha_\psi^-$ ,  $\omega_\psi^-$ ,  $\alpha_\psi^+$  et  $\omega_\psi^+$  de  $\mathbb{T}^1$  dans  $\mathbb{R}$  définies, pour tout point  $\theta$  de  $\mathbb{T}^1$ , par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\alpha_\psi^-(\theta) &= \sup \{ p_2(x) \mid x \in \{\theta\} \times \mathbb{R} \cap A_\psi^- \} \\ \omega_\psi^-(\theta) &= \sup \{ p_2(x) \mid x \in \{\theta\} \times \mathbb{R} \cap \Omega_\psi^- \} \\ \alpha_\psi^+(\theta) &= \inf \{ p_2(x) \mid x \in \{\theta\} \times \mathbb{R} \cap A_\psi^+ \} \\ \omega_\psi^+(\theta) &= \inf \{ p_2(x) \mid x \in \{\theta\} \times \mathbb{R} \cap \Omega_\psi^+ \}.\end{aligned}$$

PROPOSITION 2.2. — On a les propriétés suivantes, pour tout élément  $\psi$  de  $\mathcal{D}$  :

(i) Les graphes de  $\alpha_\psi^-$ ,  $\omega_\psi^-$ ,  $\alpha_\psi^+$  et  $\omega_\psi^+$  rencontrent le graphe de  $\psi$  et on a les inégalités :  
 $\alpha_\psi^- \leq \psi \leq \alpha_\psi^+$ ,  $\omega_\psi^- \leq \psi \leq \omega_\psi^+$ ;



(ii) Les applications  $\alpha_\psi^-$  et  $\omega_\psi^-$  sont semi-continues supérieurement, alors que  $\alpha_\psi^+$  et  $\omega_\psi^+$  sont semi-continues inférieurement;

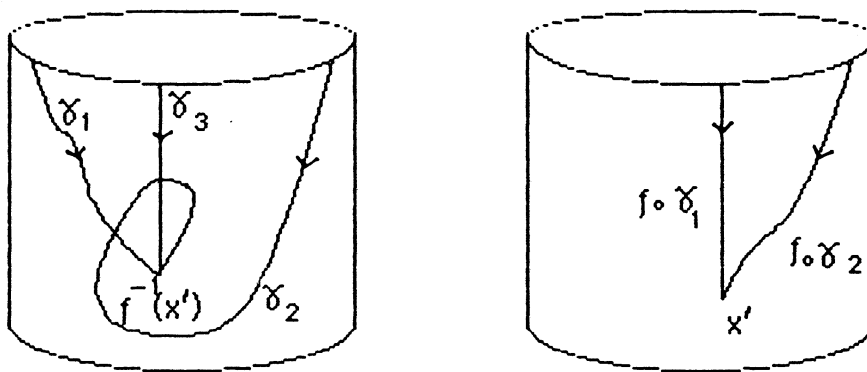
(iii) Les applications  $\alpha_\psi^-$  et  $\omega_\psi^+$  sont continues à gauche, alors que  $\alpha_\psi^+$  et  $\omega_\psi^-$  sont continues à droite ;

(iv) Il existe  $\phi$  appartenant à  $\mathcal{D}$  tel que  $\alpha_\phi^- \geq \psi$  et  $\omega_\phi^- \geq \psi$ , il existe  $\phi'$  appartenant à  $\mathcal{D}$  tel que  $\alpha_{\phi'}^+ \leq \psi$  et  $\omega_{\phi'}^+ \leq \psi$ .

*Démonstration.* — Les propriétés (i) et (ii) sont évidentes; la première est une conséquence de la proposition précédente [en particulier de la propriété (iii)], la seconde est une conséquence du caractère fermé des ensembles  $A_\psi^-$ ,  $\Omega_\psi^-$ ,  $A_\psi^+$  et  $\Omega_\psi^+$ . Démontrons que  $\alpha_\psi^-$  vérifie la propriété (iii), la démonstration étant analogue pour les autres fonctions.

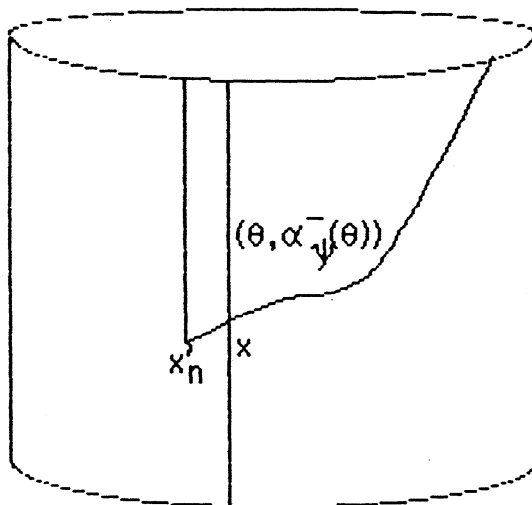
LEMME. — Pour tout point  $x = (\theta, r)$  de  $\mathbb{A}$  vérifiant  $\alpha_\psi^-(\theta) < r \leq \psi(\theta)$ , il existe  $x' = (\theta, r')$  vérifiant  $\alpha_\psi^-(\theta) < r' \leq r$  et tel que  $f(V^+(f^{-1}(x')))$  ne rencontre pas  $A_\psi^-$ .

*Démonstration.* — Soit  $x = (\theta, r)$  un point de  $\mathbb{A}$  vérifiant  $\alpha_\psi^-(\theta) < r \leq \psi(\theta)$ . Comme l'ensemble  $A_\psi^- \cup \{\theta\} \times ]\alpha_\psi^-(\theta), r]$  est distinct de  $A_\psi^-$  et connexe, il n'est pas contenu dans  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(C_\psi^-)$ ; il existe donc un point  $x' = (\theta, r')$  vérifiant  $\alpha_\psi^-(\theta) < r' \leq r$  et un entier  $k \geq 0$  tel que  $f^{-k}(x')$  n'appartienne pas à  $C_\psi^-$ , entier d'ailleurs non nul puisque  $x'$  appartient à  $C_\psi^-$ . L'ensemble  $f^{-1}(V^+(x'))$  définit un chemin positif  $\gamma_1$  issu de  $C^+$ , aboutissant en  $f^{-1}(x')$  et ne rencontrant pas  $f^{-1}(A_\psi^-)$ . D'autre part,  $V^+(f^{-k}(x'))$  ne rencontre pas  $A_\psi^-$ , *a fortiori* ne rencontre pas  $f^{-k}(A_\psi^-)$  qui est inclus dans  $A_\psi^-$ . Ainsi, l'ensemble  $f^{k-1}(V^+(f^{-k}(x')))$  ne rencontre pas  $f^{-1}(A_\psi^-)$ ; il représente un chemin négatif  $\gamma_2$  issu de  $C^+$  dans le cas où  $k > 1$ , la verticale  $V^+(f^{-1}(x'))$  dans le cas où  $k = 1$ . De toute façon, grâce à la propriété 1.3, on sait, dans chaque cas, que  $V^+(f^{-1}(x'))$  ne rencontre pas  $f^{-1}(A_\psi^-)$ . Aussi,  $f(V^+(f^{-1}(x')))$  ne rencontre pas  $A_\psi^-$ ; ce qui prouve le lemme.  $\square$



*Suite de la démonstration de la proposition.* — Soit  $\theta$  un point de  $\mathbb{T}^1$  et  $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergente vers  $\theta$  par valeur négative, et telle que la suite  $(\alpha_\psi^-(\theta_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $r$ . Puisque  $\alpha_\psi^-$  est semi-continue supérieurement, on sait que  $r$  est inférieur à  $\alpha_\psi^-(\theta)$ . Montrons par l'absurde qu'on a l'égalité et pour cela supposons que  $r$  soit strictement inférieur à  $\alpha_\psi^-(\theta)$ . Dans ce cas, pour  $n$  assez grand, on aura  $\alpha_\psi^-(\theta_n) < \psi(\theta_n)$ ;

on peut alors construire une suite  $(x_n)_{n \geq N}$  définie à partir d'un certain rang, convergeant vers  $x = (\theta, r)$  et vérifiant, pour tout  $n \geq N$ ,  $x_n = (\theta_n, r_n)$  avec  $\alpha_\psi^-(\theta_n) < r_n \leq r'_n$ . Grâce au lemme précédent, on sait qu'il existe une suite  $(x'_n)_{n \geq N}$  vérifiant, pour tout entier  $n$ ,  $x'_n = (\theta_n, r'_n)$  avec  $\alpha_\psi^-(\theta_n) < r_n \leq r'_n$ , et qui converge donc vers  $x$ , et telle que  $f(V^+(f^{-1}(x'_n)))$  ne rencontre pas  $A_\psi^-$ . Puisque la suite  $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x$  et puisque  $\alpha_\psi^-(\theta)$  est strictement supérieur à  $r$ , le point  $(\theta, \alpha_\psi^-(\theta))$  doit se trouver, pour  $n$  assez grand au-dessus de la courbe  $f(V^+(f^{-1}(x'_n)))$  ce qui contredit la connexité de  $A_\psi^-$ , puisque  $(V^+(x'_n) \cup f(V^+(f^{-1}(x'_n))))$  ne rencontre pas  $A_\psi^-$ .



Il reste à prouver la propriété (iv). Pour cela, on définit, pour tout point  $\theta$  de  $\mathbb{T}^1$ , les ensembles

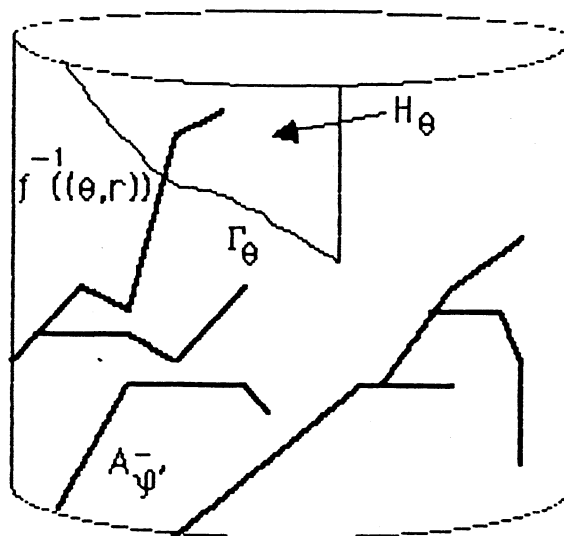
$$\Gamma_\theta = f^{-1}(V^+(\theta, \psi(\theta))) \quad \text{et} \quad H_\theta = \{x \in C \mid V^-(x) \cap \Gamma_\theta \neq \emptyset\}.$$

La suite  $(f^n(A_\psi^-))_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et l'ensemble  $\text{Ad}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(A_\psi^-))$  est fermé, connexe et

sépare  $\mathbb{A}$ , non réduit à  $C^-$  et invariant par  $f$ ; ainsi il contient  $C^+$ . Par conséquent, pour tout  $\theta_0$  appartenant à  $\mathbb{T}^1$ , il existe un entier  $n$  tel que  $f^n(A_\psi^-)$  rencontre l'ensemble  $\text{Int } H_{\theta_0}$ ; il rencontre aussi  $\text{Int } H_\theta$  pour  $\theta$  proche de  $\theta_0$ . Grâce à la compacité de  $\mathbb{T}^1$  et à la croissance de la suite  $(f^n(A_\psi^-))_{n \in \mathbb{N}}$ , on en déduit finalement l'existence d'un entier  $N$  tel que, pour tout  $\theta$ , l'ensemble  $f^N(A_\psi^-)$  rencontre  $\text{Int } H_\theta$ . Choisissons maintenant  $\phi'$  tel que  $f^N(A_\psi^-)$  soit inclus dans  $C_{\phi'}^-$  et montrons que, pour tout  $\theta$ , l'ensemble  $A_{\phi'}^-$  rencontre  $\Gamma_\theta$ . Les inclusions  $f^{-k+N}(A_\psi^-) \subset f^N(A_\psi^-) \subset C_{\phi'}^-$  et la définition de  $C_{\phi'}^-$  prouvent que  $A_{\phi'}^-$  contient  $f^N(A_\psi^-)$  et donc que, si  $\theta$  est fixé, l'ensemble

$$B = \{x \in \Gamma_\theta \mid V^+(x) \cap A_{\phi'}^- = \emptyset\},$$

qui est un ouvert de  $\Gamma_\theta$ , est distinct de  $\Gamma_\theta$  puisque  $f^N(A_\psi^-)$  rencontre  $H_\theta$ . Ainsi l'une des composantes connexes de  $B$  s'écrit  $f^{-1}(\{\theta\} \times ]r, \psi^+(\theta)[)$  avec  $\psi(\theta) \leq r < \psi^+(\theta)$ , mais comme l'application  $\alpha_{\phi'}^-$  est continue à gauche, l'ensemble  $A_{\phi'}^-$  ne peut rencontrer  $V^+(f^{-1}(\theta, r))$  qu'au point  $f^{-1}(\theta, r)$ ; ainsi  $A_{\phi'}^-$  rencontre  $\Gamma_\theta$ .



L'ensemble  $f(A_{\psi}^{-})$  rencontre donc chacun des ensembles  $V^{+}((\theta, \psi(\theta)))$ , où  $\theta$  décrit  $\mathbb{T}^1$ . Pour obtenir la propriété (iv), on choisit un élément  $\varphi$  de  $\mathcal{D}$  tel que  $f(A_{\psi}^{-}) \subset C_{\varphi}^{-}$ ; la définition de  $A_{\psi}^{-}$  prouve alors que  $f(A_{\psi}^{-}) \subset A_{\varphi}^{-}$ , que  $A_{\psi}^{-}$  rencontre chacun des ensembles  $V^{+}(\theta, \psi(\theta))$ ,  $\theta \in \mathbb{T}^1$  et donc que  $\psi \leq \alpha_{\varphi}^{-}$ .  $\square$

On peut maintenant énoncer les deux théorèmes.

**THÉORÈME 2.1.** — *Pour tout élément  $\psi$  de  $\mathcal{D}$ , il existe  $\varphi$  appartenant à  $\mathcal{D}$  tel que  $A_{\varphi}^{-} \cap \Omega_{\varphi}^{-} \cap C_{\psi}^{+} \neq \emptyset$ ; en particulier, il existe un point dans  $C_{\psi}^{+}$  dont les ensembles  $\alpha$ -limite et  $\omega$ -limite sont contenus dans  $C^{-}$ . De même, il existe  $\varphi'$  appartenant à  $\mathcal{D}$  tel que  $A_{\varphi'}^{+} \cap \Omega_{\varphi'}^{+} \cap C_{\psi}^{-} \neq \emptyset$ .*

*Démonstration.* — Soit  $\psi$  un élément de  $\mathcal{D}$ . On sait, grâce à la propriété (iv) de la proposition précédente, qu'il existe  $\varphi \in \mathcal{D}$  telle que  $\alpha_{\varphi}^{-} \geq \psi$  et  $\omega_{\varphi}^{-} \geq \psi$ ; on va montrer, par un raisonnement par l'absurde, qu'il existe un élément  $\theta$  de  $\mathbb{T}^1$  tel que  $\alpha_{\varphi}^{-}(\theta) = \omega_{\varphi}^{-}(\theta)$ , ce qui impliquera le théorème.

Si tel n'est pas le cas, on peut écrire  $\mathbb{T}^1 = S_1 \cup S_2$  avec  $S_1 = \{(\theta, r) \mid \alpha_{\varphi}^{-}(\theta) < \omega_{\varphi}^{-}(\theta)\}$  et  $S_2 = \{(\theta, r) \mid \omega_{\varphi}^{-}(\theta) < \alpha_{\varphi}^{-}(\theta)\}$ . Puisque  $\alpha_{\varphi}^{-}$  et  $\omega_{\varphi}^{-}$  coïncident au moins en un point avec  $\varphi$ , et puisque on a  $\alpha_{\varphi}^{-} \leq \varphi$  et  $\omega_{\varphi}^{-} \leq \varphi$ , on sait qu'aucun des ensembles  $S_1$  et  $S_2$  n'est vide.

On écrit ensuite  $\mathbb{R} = \tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_2$  où  $\tilde{S}_1 = \{\tilde{\theta} \in \mathbb{R} \mid \tilde{\theta} + \mathbb{R} \subset S_1\}$  et  $\tilde{S}_2 = \{\tilde{\theta} \in \mathbb{R} \mid \tilde{\theta} + \mathbb{R} \subset S_2\}$ ; on fixe un point  $\tilde{\theta}_2$  de  $\tilde{S}_2$  et on définit le réel  $\tilde{\theta}_0 = \sup \tilde{S}_1 \cap ]-\infty, \tilde{\theta}_2]$ , qui appartient soit à  $\tilde{S}_1$ , soit à  $\tilde{S}_2$ . Si  $\tilde{\theta}_0$  appartient à  $\tilde{S}_2$ , on a l'inégalité  $\omega_{\varphi}^{-}(\tilde{\theta}_0 + \mathbb{R}) < \alpha_{\varphi}^{-}(\tilde{\theta}_0 + \mathbb{R})$ , et comme  $\alpha_{\varphi}^{-}$  est continue à gauche et  $\omega_{\varphi}^{-}$  semi-continue supérieurement, cette inégalité est encore vraie pour tout point à gauche et proche de  $\tilde{\theta}_0$ , ce qui contredit la définition de ce point. Ainsi  $\tilde{\theta}_0$  est distinct de  $\tilde{\theta}_2$  et vérifie  $\omega_{\varphi}^{-}(\tilde{\theta}_0 + \mathbb{R}) > \alpha_{\varphi}^{-}(\tilde{\theta}_0 + \mathbb{R})$ , mais comme  $\omega_{\varphi}^{-}$  est continue à droite et  $\alpha_{\varphi}^{-}$  semi-continue supérieurement, tout point proche et à droite de  $\tilde{\theta}_0$  vérifiera cette inégalité et sera contenu dans  $\tilde{S}_1$ . On obtient une nouvelle contradiction, la partition  $\mathbb{R} = \tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_2$  est impossible.  $\square$

THÉORÈME 2.2. — Pour tout élément  $\psi$  de  $\mathcal{D}$ , il existe  $\varphi$  appartenant à  $\mathcal{D}$  tel que  $A_\varphi^-$  rencontre  $\Omega_\psi^+$ , en particulier il existe un point de  $C$  dont l'ensemble  $\alpha$ -limite est contenu dans  $C^-$  et l'ensemble  $\omega$ -limite contenu dans  $C^+$ . De même, il existe  $\varphi'$  appartenant à  $\mathcal{D}$  tel que  $\Omega_{\varphi'}^-$  rencontre  $A_\psi^+$ .

Démonstration. — On va raisonner par l'absurde, fixer  $\psi$  dans  $\mathcal{D}$ , supposer que les ensembles  $A_\varphi^-$  et  $\Omega_\psi^+$  ne se rencontrent pas quand  $\varphi$  parcourt  $\mathcal{D}$  et obtenir une contradiction de la connexité de l'ensemble  $\mathcal{D}$  quand on munit celui-ci de la topologie de la convergence uniforme.

Fixons  $\varphi \in \mathcal{D}$  et définissons les ensembles

$$S'_1 = \{ \theta \in \mathbb{T}^1, \alpha_\varphi^-(\theta) < \omega_\psi^+(\theta) \}$$

et

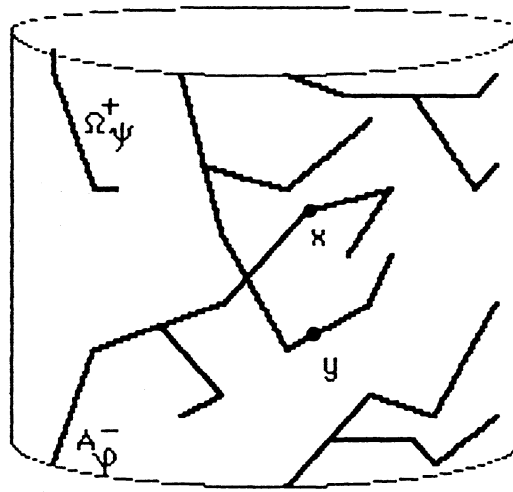
$$S'_2 = \{ \theta \in \mathbb{T}^1, \alpha_\varphi^-(\theta) > \omega_\psi^+(\theta) \}.$$

Puisque  $\alpha_\varphi^-$  est semi-continue supérieurement et  $\omega_\psi^+$  semi-continue inférieurement, on sait que  $S'_1$  est ouvert; d'autre part, puisque  $\alpha_\varphi^-$  et  $\omega_\psi^+$  sont toutes deux continues à gauche, on sait que, si  $\theta$  appartient à  $S'_2$ , alors tout point de  $\mathbb{T}^1$  proche et à gauche de  $\theta$  sera contenu dans  $S'_2$ . Ainsi par un raisonnement identique à celui employé dans la démonstration du théorème 2.1, on peut montrer qu'une partition  $\mathbb{T}^1 = S'_1 \cup S'_2$  est impossible et que l'un des ensembles  $S'_1$  ou  $S'_2$  doit être vide. On peut donc écrire  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ , avec

$$\mathcal{D}_1 = \{ \varphi \in \mathcal{D} \mid \alpha_\varphi^- < \omega_\psi^+ \} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2 = \{ \varphi \in \mathcal{D} \mid \omega_\psi^+ < \alpha_\varphi^- \}.$$

Les applications  $\alpha_\varphi^-$  et  $\varphi$  coïncident en un point; aussi, pour toute application  $\varphi$  de  $\mathcal{D}_1$ , il existe  $\theta$  appartenant à  $\mathbb{T}^1$  tel que  $\varphi(\theta) < \omega_\psi^+(\theta)$ . Cette inégalité étant encore vraie dans un voisinage de  $\varphi$  pour la topologie uniforme, on en déduit, puisque  $\alpha_\varphi^- \leq \varphi$ , que  $\mathcal{D}_1$  est ouvert. De plus,  $\mathcal{D}_1$  est non vide, il contient en effet toutes les applications  $\varphi$  de  $\mathcal{D}$  vérifiant  $\varphi < \psi$  puisque  $\alpha_\varphi^- \leq \varphi$  et  $\psi \leq \omega_\psi^+$ . Supposons maintenant que  $\varphi$  appartienne à  $\mathcal{D}_2$ . Puisque, par hypothèse,  $A_\varphi^-$  et  $\Omega_\psi^+$  ne se rencontrent pas et puisque ces ensembles sont fermés, il existe un réel  $a > 0$  tel que  $\omega_\psi^+ < \alpha_\varphi^- - a$ . On en déduit alors l'inégalité  $\omega_\psi^+ < \varphi - a$ , puisque  $\alpha_\varphi^- \leq \varphi$ , et on peut trouver un voisinage de  $\varphi$  dans  $\mathcal{D}$  dont tout élément  $\varphi'$  vérifie l'inégalité  $\omega_\psi^+ < \varphi' - a/2$ . Puisque  $\alpha_{\varphi'}$  et  $\varphi'$  coïncident en un point, l'inégalité  $\omega_\psi^+ < \varphi'$  est vérifiée en ce point et  $\varphi'$  doit donc appartenir à  $\mathcal{D}_2$ . Ainsi  $\mathcal{D}_2$  est ouvert, et comme  $\psi$  et  $\omega_\psi^+$  coïncident en un point, il doit contenir l'ensemble des applications  $\varphi$  de  $\mathcal{D}$  telles que  $\psi < \alpha_\varphi^-$ , ensemble non vide d'après la proposition 2.2. On obtient finalement une contradiction du fait que  $\mathcal{D}$  est connexe.  $\square$

Remarque. — On peut donner aussi une démonstration topologique directe du théorème 2 en montrant d'abord, ce qui n'est pas difficile, que tout point de  $C \setminus A_\varphi^-$  est accessible par un chemin négatif issu de  $C^+$  et que tout point de  $C \setminus \Omega_\psi^+$  est accessible par un chemin positif issu de  $C^-$ . Par des propriétés des chemins positifs et négatifs plus fines que celles rappelées au paragraphe 1, on montre ensuite que si  $x$  et  $y$ , appartenant respectivement à  $A_\psi^-$  et à  $\Omega_\psi^+$  vérifient  $p_1(x) = p_1(y)$  et  $p_2(x) > p_2(y)$ , alors  $A_\psi^-$  et  $A_\psi^+$  se rencontrent.



### 3. Construction d'un ensemble invariant exceptionnel contenant la dynamique de la région d'instabilité

On va supposer dans ce paragraphe que  $f$  vérifie une propriété supplémentaire très faible (au moins générique pour la  $C^\infty$ -topologie). On fixe un relèvement  $\tilde{f}$  de  $f$  à  $\tilde{\mathbb{A}}$ , on note alors  $\tilde{\rho}^-$  et  $\tilde{\rho}^+$  les nombres de rotation respectifs de  $C^-$  et de  $C^+$  et on suppose qu'il existe un rationnel  $\tilde{\rho}_0 = p/q$  appartenant à  $] \tilde{\rho}^-, \tilde{\rho}^+ [$ , où  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  sont premiers entre eux, tel que tout ensemble d'Aubry-Mather de nombre de rotation  $\tilde{\rho}_0$  soit une orbite périodique hyperbolique de  $f$  ou alors une orbite elliptique en tout point de laquelle la différentielle de  $f^q$  soit linéairement conjuguée à une rotation d'angle  $2\pi\alpha$  avec  $\alpha$  irrationnel et tel que les intersections homoclines ou hétéroclines des variétés stables et instables des ensembles d'Aubry-Mather de nombre de rotation  $\tilde{\rho}_0$  hyperboliques soient toujours transverses. Cette propriété est alors générique pour la  $C^\infty$ -topologie.

L'hypothèse supplémentaire demandée à l'application  $f$  permet d'établir l'existence d'un ensemble d'Aubry-Mather de nombre de rotation  $\tilde{\rho}_0$ , formé d'une orbite hyperbolique ayant des intersections hétéroclines (voir Katok [K]); cette propriété sera essentielle dans la suite du paragraphe.

**PROPOSITION 3.1.** — *Il existe un ensemble d'Aubry-Mather  $\Xi_0$  de nombre de rotation  $\tilde{\rho}_0$  pour  $\tilde{f}$ , contenu dans  $C$ , qui est l'orbite d'un point périodique hyperbolique ayant des intersections homoclines de la forme suivante :*

*si on écrit  $\pi^{-1}(\Xi_0) = \{\tilde{x}_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ , où la suite  $(\tilde{p}_1(\tilde{x}_i))_{i \in \mathbb{Z}}$  est strictement croissante, on a la relation  $W^u(\tilde{x}_i) \cap W^s(\tilde{x}_j) \neq \emptyset$  pour tout couple  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$  vérifiant  $i < j$ .*

**Démonstration.** — On considère une suite  $(\tilde{\rho}_n)_{n \geq 1}$  d'éléments de  $] \tilde{\rho}_0, \tilde{\rho}^+ [$  convergent vers  $\tilde{\rho}_0$  et on choisit, pour tout  $n \geq 1$ , un ensemble d'Aubry-Mather  $\Xi_n$  de  $\tilde{f}$ , de nombre de rotation  $\tilde{\rho}_n$ . Puisque  $C$  est compact, quitte à extraire une sous-suite de la suite initiale, on peut toujours supposer que la suite  $(\Xi_n)_{n \geq 1}$  est convergente pour la distance de

Hausdorff. Sa limite, notée  $\Xi$ , est alors un ensemble fermé invariant  $f$ -ordonné de nombre de rotation  $\tilde{\rho}_0$  (voir § 1); on rappelle que les ensembles  $\alpha$ -limite et  $\omega$ -limite de tout point de  $\Xi$  sont des ensembles d'Aubry-Mather de nombres de rotation  $\tilde{\rho}_0$  (voir § 1). Puisque, par hypothèse, tout ensemble d'Aubry-Mather de nombre de rotation  $\tilde{\rho}_0$  est une orbite périodique hyperbolique ou elliptique, la réunion des ensembles d'Aubry-Mather contenus dans  $\Xi$ , notée  $\Xi^*$ , est finie. On écrit  $\pi^{-1}(\Xi^*) = \{\tilde{y}_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ , où la suite  $(\tilde{p}_1(\tilde{y}_i))_{i \in \mathbb{Z}}$  est strictement croissante, et on va montrer par l'absurde que  $\tilde{\Xi}$  rencontre  $[\tilde{p}_1(\tilde{y}_i), \tilde{p}_1(\tilde{y}_{i+1})] \times \mathbb{R}$ , pour tout  $i$  appartenant à  $\mathbb{Z}$ .

Supposons donc que  $\tilde{\Xi}$  soit disjoint de  $[\tilde{p}_1(\tilde{y}_{i_0}), \tilde{p}_1(\tilde{y}_{i_0+1})] \times \mathbb{R}$  pour un certain entier  $i_0$  et posons  $E = \tilde{\Xi} \cap [\tilde{p}_1(\tilde{y}_{i_0+1}) - 1, \tilde{p}_1(\tilde{y}_{i_0})] \times \mathbb{R}$ . Puisque  $\tilde{f}^{q_0}(E) = \tilde{T}^{p_0}(E)$ , si  $W$  est un voisinage suffisamment proche de  $E$ ,  $\tilde{f}^{q_0}(W)$  est disjoint de  $\tilde{T}^k(W)$  pour  $k$  distinct de  $p_0$ . D'autre part, si  $n \in \mathbb{N}$  est assez grand, on aura l'inclusion  $\tilde{\Xi}_n \subset \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{T}^k(W)$  et la relation

$\tilde{f}^{q_0}(\tilde{\Xi}_n \cap W) \subset \tilde{\Xi}_n \cap \tilde{T}^{p_0}(W)$ . Ainsi tout point  $\tilde{x} \in \tilde{\Xi}_n \cap W$  vérifiera

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (\tilde{p}_1 \circ \tilde{f}^{kq_0}(\tilde{x})) / k = p_0,$$

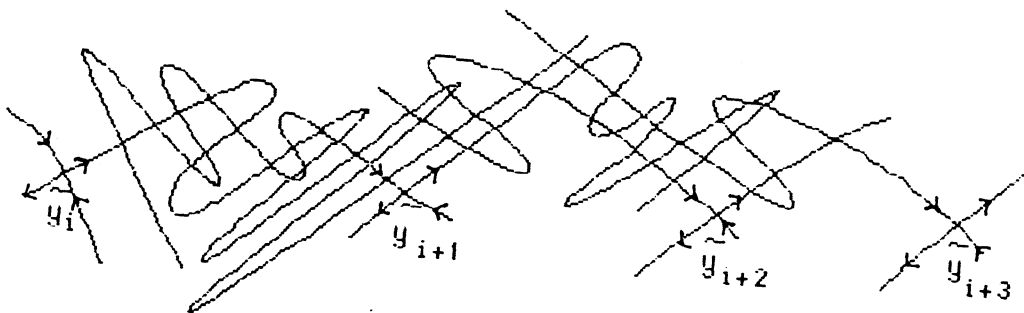
ce qui contredit l'hypothèse  $\tilde{\rho}_n > \tilde{\rho}_0$ .

Il existe donc, pour tout entier  $i$ , un point  $\tilde{z}_i$  de  $\tilde{\Xi}$  vérifiant  $\tilde{p}_1(\tilde{y}_i) < \tilde{p}_1(\tilde{z}_i) < \tilde{p}_1(\tilde{y}_{i+1})$ . Mais, puisque  $\tilde{p}_1 \circ \tilde{f}^{q_0}(\tilde{x}) > \tilde{p}_1(\tilde{x}) + p_0$  pour tout  $n \geq 1$  et tout  $\tilde{x}$  appartenant à  $\tilde{\Xi}_n$ , on obtient, par passage à la limite  $\tilde{p}_1 \circ \tilde{f}^{q_0}(\tilde{x}) \geq \tilde{p}_1(\tilde{x}) + p_0$ , pour tout  $\tilde{x}$  appartenant à  $\tilde{\Xi}$ . Ainsi chaque point  $\tilde{z}_i$  vérifie :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{d}(\tilde{f}^{-n}(\tilde{z}_i), \tilde{f}^{-n}(\tilde{y}_i)) = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{d}(\tilde{f}^n(\tilde{z}_i), \tilde{f}^n(\tilde{y}_{i+1})) = 0.$$

Fixons un entier  $i$  et posons  $z_i = \pi(\tilde{z}_i)$ . La suite  $(f^{-nq_0}(z_i))_{n \in \mathbb{Z}}$  converge vers  $y_i = \pi(\tilde{y}_i)$  et reste à droite de ce point; la différentielle de  $f^{q_0}$  en  $y_i$  ne peut pas être linéairement conjuguée à une rotation d'angle irrationnel, elle est donc hyperbolique et sans réflexion (i. e. avec des valeurs propres positives). On étudie de même la suite  $(f^{nq_0}(z_i))_{n \in \mathbb{N}}$  et on montre finalement que  $z_i$  appartient à  $W^u(y_i) \cap W^s(y_{i+1})$  et, dans le revêtement  $\tilde{\mathbb{A}}$ , que  $\tilde{z}_i$  appartient à  $W^u(\tilde{y}_i) \cap W^s(\tilde{y}_{i+1})$ .

Par hypothèse, cette intersection est transverse et on peut appliquer le  $\lambda$ -lemme; la variété instable de  $\tilde{y}_i$  s'accumule sur la variété instable de  $\tilde{y}_{i+1}$ , elle doit donc rencontrer la variété stable de  $\tilde{y}_{i+2}$  et par une récurrence immédiate on montre finalement la relation  $W^u(\tilde{y}_i) \cap W^s(\tilde{y}_j) \neq \emptyset$ , si  $i < j$ . Grâce à cette relation, on obtient la proposition en choisissant un ensemble d'Aubry-Mather  $\Xi_0$  quelconque contenu dans  $\Xi^*$ .  $\square$

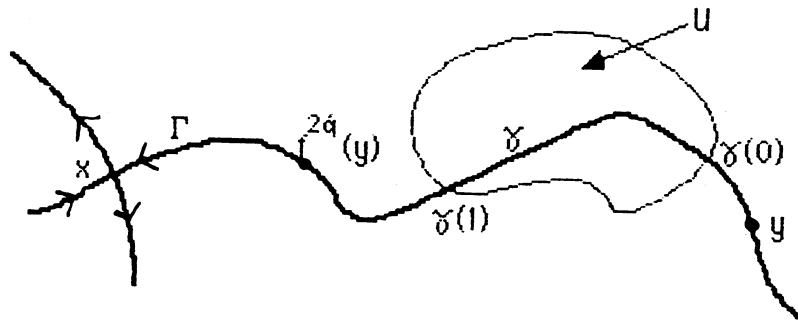


*Remarque.* — Dans la proposition précédente, on a montré plus précisément l'existence, pour tout point  $\tilde{x}$  de  $\tilde{\Xi}_0$ , de deux branches  $W_d^s(\tilde{x})$  et  $W_g^s(\tilde{x})$  [resp.  $W_d^u(\tilde{x})$  et  $W_g^u(\tilde{x})$ ] de  $W^s(\tilde{x})$  [resp.  $W^u(\tilde{x})$ ], telles que  $W_d^u(\tilde{x}_i)$  et  $W_g^s(\tilde{x}_{i+1})$  s'intersectent, pour tout entier  $i$ . En considérant une suite  $(\tilde{\rho}_n)_{n \geq 1}$  convergeant vers  $\tilde{\rho}_0$  par valeur inférieure, on obtient un ensemble d'Aubry-Mather  $\tilde{\Xi}'_0$  de nombre de rotation  $\tilde{\rho}_0$  formé de points hyperboliques, éventuellement distinct de  $\tilde{\Xi}_0$ , et tel qu'en écrivant  $\tilde{\Xi}'_0 = \{\tilde{x}'_i, i \in \mathbb{Z}\}$ , où la suite  $(\tilde{\rho}_1(\tilde{x}'_i))_{i \in \mathbb{Z}}$  est strictement croissante, on obtienne  $W_d^s(\tilde{x}_i) \cap W_g^u(\tilde{x}_{i+1}) \neq \emptyset$ , pour tout entier  $i$ .

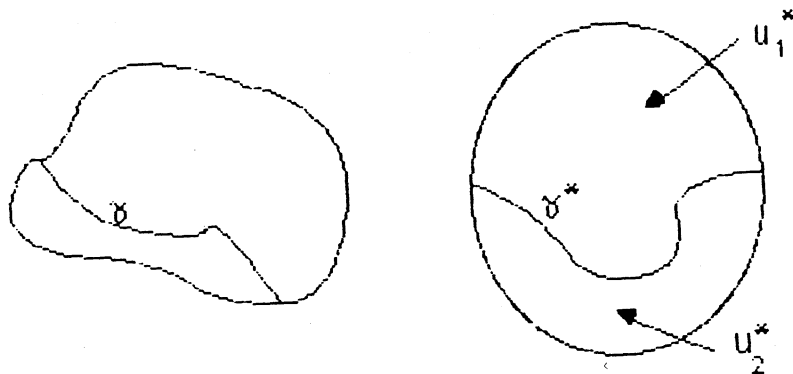
On considère maintenant une partie  $X$  de  $C$ , fermée, connexe, séparant  $\mathbb{A}$ , invariante par  $f$  et ne se réduisant pas à un bord de  $C$ . On sait déjà que  $X$  contient à la fois  $C^-$  et  $C^+$  (théorème 1.1); on va chercher d'autres propriétés vérifiées par  $X$  en énonçant un certain nombre de lemmes, conséquences des résultats du paragraphe 1 et de la proposition précédente.

**LEMME 3.1.** — *Si  $x$  est un point périodique hyperbolique de  $f$  appartenant à  $C$  et si l'une des branches de la variété stable ou de la variété instable de  $x$  rencontre  $X$  en un point distinct de  $x$ , elle est entièrement contenue dans  $X$ .*

*Démonstration.* — Supposons que  $x$  soit un point périodique hyperbolique de  $f$  de période  $q$  et, par exemple, qu'une branche  $\Gamma$  de  $W^s(x)$  rencontre  $X$  en un point  $y$  distinct de  $x$ . Elle le rencontre aussi au point  $f^{2q}(y)$ ; dès lors, pour montrer que  $\Gamma$  est contenue dans  $X$ , il suffit de montrer que la partie de  $\Gamma$  joignant  $y$  à  $f^{2q}(y)$  est contenue dans  $X$ . Si tel n'est pas le cas, on peut trouver une composante connexe  $U$  de  $C \setminus X$  et un arc  $\gamma: [0, 1] \rightarrow C$  vérifiant:  $\gamma(0) \in X$ ,  $\gamma(1) \in X$ ,  $\gamma([0, 1]) \subset U$ ,  $\gamma([0, 1]) \subset \Gamma$ .



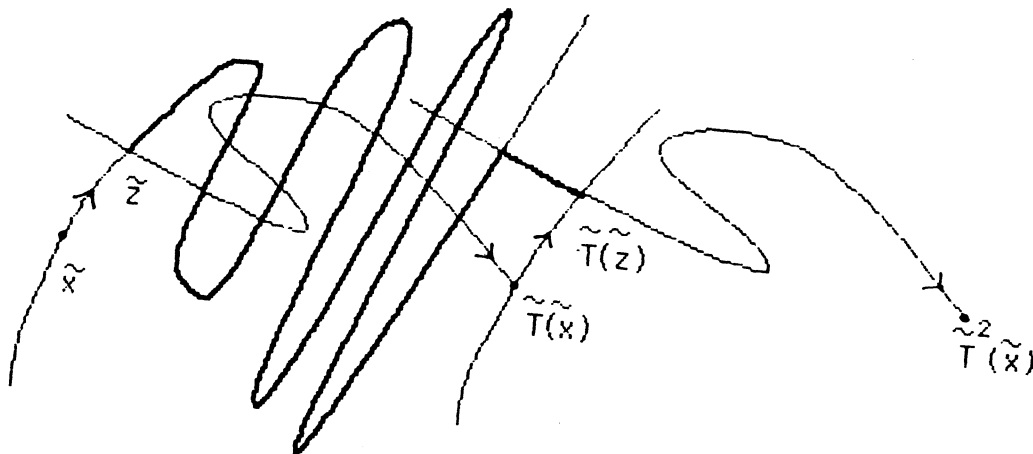
Puisque  $f$  préserve une mesure chargeant les ouverts, il existe un entier  $q' > 0$  tel que  $f^{q'}(U)$  rencontre  $U$ ; puisque  $X$  est invariant par  $f$  et  $U$  une composante connexe de  $C \setminus X$ ,  $f^q(U)$  est en fait égal à  $U$ . Puisque  $X$  est connexe,  $U$  est simplement connexe; aussi, par le théorème de Riemann sur les applications conformes, on sait qu'il existe un difféomorphisme de classe  $C^\infty$ ,  $\Phi: U \rightarrow D$  où  $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, u^2 + v^2 < 1\}$ . L'image de l'arc  $\gamma^* = \Phi \circ \gamma$ , défini sur  $]0, 1[$ , divise alors  $D$  en deux ouverts connexes  $U_1^*$  et  $U_2^*$  (par la théorie de Carathéodory, on sait d'ailleurs que cet arc se prolonge de façon continue aux deux extrémités).



L'application  $h^* = \Phi \circ f^{q'} \circ \Phi^{-1}$  est un homéomorphisme de  $D$  qui préserve une mesure chargeant les ouverts, ainsi il existe un entier  $k > 0$ , choisi aussi grand que l'on veut tel que  $h^{*k}(\gamma^*([0, 1[))$  intersecte  $\gamma^*([0, 1[)$ . Ainsi l'intersection  $f^{q^k}(\gamma([0, 1[)) \cap \gamma([0, 1[)$  n'est pas vide, ce qui est impossible dès que  $k$  grand, puisque  $\gamma([0, 1[)$  est inclus dans  $W^s(x)$ .  $\square$

LEMME 3. 2. — Les branches  $W_d^u(x)$  et  $W_g^s(x)$  d'un point  $x$  de  $\Xi_0$  sont contenues dans  $X$ .

*Démonstration.* — Considérons un point  $\tilde{x}$  de  $\tilde{\Xi}_0$ . La proposition 3.1 nous dit, en particulier, que  $W_d^u(\tilde{x})$  et  $W_g^s(\tilde{T}^k(\tilde{x}))$  se rencontrent, pour tout entier  $k \geq 1$ . Il n'est pas difficile ensuite de construire une application continue  $\gamma: \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{A}$ , homotope à l'application  $\gamma_0: \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{A}$ ,  $\theta \mapsto (\theta, 0)$  et dont l'image est contenue dans  $(W_d^u(x) \cup W_g^s(x)) \setminus \{x\}$  où  $x = \pi(\tilde{x})$ . En effet, on commence par choisir un point  $\tilde{z}$  de  $W_d^u(\tilde{x}) \cap W_g^s(\tilde{T}(\tilde{x}))$ , et à partir de ce point on suit la variété instable de  $\tilde{x}$ ; puisque celle-ci s'accumule sur  $W_d^u(\tilde{T}(\tilde{x}))$ , elle doit s'approcher de  $\tilde{T}(\tilde{z})$ ; dès qu'on est près de ce point, on considère un morceau de  $W_d^s(\tilde{T}^2(\tilde{x}))$  qui aboutit en  $\tilde{T}(\tilde{z})$ . La projection sur  $\mathbb{A}$  de ce chemin nous donne alors l'application demandée.



L'ensemble  $X$  étant connexe et contenant  $C^-$  et  $C^+$ , il doit rencontrer l'image de  $\gamma$ . Supposons par exemple qu'il la rencontre en un point de  $W_g^s(x) \setminus \{x\}$ ; il contient alors  $W_g^s(x)$  à cause du lemme 1.1, et comme  $W_g^s(x) \cap W_d^u(x)$  ne se réduit pas au point  $x$ , il rencontre aussi  $W_d^u(x) \setminus \{x\}$ , il contient donc  $W_d^u(x)$ .  $\square$



LEMME 3.3. — *Il existe une application continue  $\gamma: \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{A}$  homotope à l'application  $\gamma_0: \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{A}$ ,  $\theta \mapsto (\theta, 0)$ , et dont l'image est contenue à la fois dans l'intérieur de  $C$  et dans  $X$ .*

*Démonstration.* — On a construit dans la démonstration du lemme précédent une application continue  $\gamma: \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{A}$ , homotope à l'application  $\gamma_0: \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{A}$ ,  $\theta \mapsto (\theta, 0)$ , et dont l'image était contenue dans  $W_d^u(x) \cup W_g^s(x)$ . Le résultat est alors une conséquence du lemme 3.2.  $\square$

LEMME 3.4. — *Si  $U$  est une composante connexe de  $C \setminus X$ , son adhérence ne rencontre ni  $C^-$ , ni  $C^+$  et ne sépare pas  $\mathbb{A}$ . En particulier, il existe un chemin joignant  $C^-$  à  $C^+$  qui ne rencontre pas  $U$ .*

*Démonstration.* — Soit  $U$  une composante connexe de  $C \setminus X$ , on a remarqué dans le lemme 1.1 qu'elle était périodique; on note  $q$  sa plus petite période. Supposons que  $Ad(U)$  rencontre  $C^-$ ; dans ce cas, l'ensemble  $\Lambda = C^- \cup \left( \bigcup_{k=0}^{q-1} f^k(\bar{U}) \right)$  est fermé, connexe,

invariant par  $f$ , séparant  $\mathbb{A}$  puisqu'il contient  $C^-$  et non réduit à  $C^-$  puisqu'il contient l'ouvert  $U$ . Le théorème du paragraphe nous dit que  $\Lambda$  contient  $C^+$ ; il existe donc un entier  $k \in \{0, \dots, q-1\}$  tel que  $f^k(Ad(U))$  rencontre  $C^+$ , ainsi sait-on que  $Ad(U)$  rencontre  $C^+$ . Mais, l'ouvert  $U$  étant connexe et adhérent à la fois à  $C^-$  et à  $C^+$ , il doit rencontrer l'image de l'arc  $\gamma$  défini au lemme 3.3, ce qui est contradictoire puisque celle-ci est contenue dans  $X$ . On montre de même que  $Ad(U)$  ne rencontre pas  $C^+$ .

Considérons maintenant l'ensemble  $\Lambda' = \bigcup_{k=0}^{q-1} f^k(Ad(U))$ , qui est fermé et invariant par  $f$ ,

et qui ne rencontre ni  $C^-$  ni  $C^+$ , et montrons par l'absurde qu'il ne sépare pas  $\mathbb{A}$ . En effet, dans le cas contraire, l'adhérence de la composante connexe  $W_1$  de  $\mathbb{A} \setminus \Lambda'$ , qui contient  $C^-$ , ne contient pas  $C^+$  et la frontière  $\Lambda''$  de la composante connexe  $W_2$  de  $\mathbb{A} \setminus \bar{W}_1$  qui contient  $C^+$  est fermée, connexe, invariante par  $f$ , contenue dans  $\Lambda'$  et sépare  $\mathbb{A}$ . D'autre part, elle ne rencontre ni  $C^-$  ni  $C^+$ , ce qui contredit le théorème du paragraphe.

Par conséquent,  $\Lambda'$  ne sépare pas  $\mathbb{A}$ , il en est donc de même de  $Ad(U)$ ; en particulier, on peut trouver un arc joignant  $C^-$  à  $C^+$  sans rencontrer  $Ad(U)$ , et donc sans rencontrer  $U$ .  $\square$

On montre maintenant un résultat liant l'ensemble  $X$  et les ensembles stables et instables des bords de  $C$  (voir §2). On définit

$$\begin{aligned} A^- &= \{x \in C \mid \alpha(x) \subset C^-\}, & A^+ &= \{x \in C \mid \alpha(x) \subset C^+\}, \\ \Omega^- &= \{x \in C \mid \omega(x) \subset C^-\} & \text{et} & & \Omega^+ &= \{x \in C \mid \omega(x) \subset C^+\}. \end{aligned}$$

LEMME 3.5. — *L'ensemble  $X$  contient les ensembles  $A^-$ ,  $A^+$ ,  $\Omega^-$  et  $\Omega^+$ .*

*Démonstration.* — Soit  $x$  un point de  $C \setminus X$ , il est alors contenu dans une composante connexe  $U$  de  $C \setminus X$ . On a vu dans le lemme précédent que l'ensemble  $\Lambda' = \bigcup_{k=0}^{q-1} f^k(Ad(U))$ , où  $q$  est la période de  $U$ , ne rencontrait ni  $C^-$  ni  $C^+$ . Comme les

ensembles  $\alpha$ -limite et  $\omega$ -limite de  $x$  sont contenus dans  $\Lambda'$ , ce point n'est ni dans  $A^-$ , ni dans  $A^+$ , ni dans  $\Omega^-$ , ni dans  $\Omega^+$  et le lemme est démontré.  $\square$

LEMME 3.6. — Pour tout point  $x$  de  $C \setminus X$ , il existe un nombre rationnel  $\tilde{\rho}$  tel que pour  $\tilde{x}$  appartenant à  $\pi^{-1}(\{x\})$  on ait  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{f}^n(x))/n = \tilde{\rho}$ .

En particulier, tous les ensembles d'Aubry-Mather contenus dans  $C$  de nombre de rotation irrationnel sont contenus dans  $X$ .

Démonstration. — Soit  $x$  un point de  $C \setminus X$ ,  $U$  la composante connexe de  $C \setminus X$  qui le contient et  $q$  sa plus petite période. Puisque, par le lemme 3.4, il existe un chemin joignant  $C^-$  à  $C^+$  sans rencontrer  $U$ , on peut écrire  $\tilde{U} = \pi^{-1}(U) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{T}^k(U^*)$  où  $U^*$  est

un ouvert borné sur lequel  $\pi$  définit un homéomorphisme avec  $U$ . D'autre part, il existe  $p$  appartenant à  $\mathbb{Z}$ , tel que  $\tilde{f}^q(U^*) = \tilde{T}^p(U^*)$ . Ainsi, on a l'égalité  $\tilde{f}^{kq}(U^*) = \tilde{T}^{kp}(U^*)$  pour tout entier  $k$ , et, puisque  $U^*$  est borné, la relation  $\lim_{k \rightarrow \pm \infty} (\tilde{\rho}_1 \circ \tilde{f}^{kq}(\tilde{x}^*))/k = p$ , pour tout

point  $\tilde{x}^*$  appartenant à  $U^* \cap \pi^{-1}(\{x\})$ . De façon générale, on obtient  $\lim_{n \rightarrow \pm \infty} (\tilde{f}^n(\tilde{x}^*))/n = p/q$ . Cette relation est vraie pour tout  $\tilde{x}$  appartenant à  $\pi^{-1}(\{x\})$ ,

puisque  $\tilde{f}$  commute avec  $\tilde{T}$ .  $\square$

On peut maintenant énoncer les théorèmes suivants.

THÉORÈME 3.1. — Les ensembles  $A^-$ ,  $A^+$ ,  $\Omega^-$  et  $\Omega^+$  ont même adhérence. Celle-ci, notée  $X_0$ , est aussi l'adhérence commune des ensembles  $W_d^u(x)$ , où  $x$  appartient à  $\Xi_0$ , et des ensembles  $W_g^s(x)$ . L'ensemble  $X_0$  est fermé, connexe, invariant par  $f$ , il sépare  $\mathbb{A}$  et il n'est réduit ni à  $C^-$  ni à  $C^+$ , il contient tous les ensembles d'Aubry-Mather contenus dans  $C$  de nombre de rotation irrationnel.

Démonstration. — Grâce aux lemmes 3.2, 3.5 et 3.6, il suffit de montrer que chacun des ensembles  $\text{Ad}(A^-)$ ,  $\text{Ad}(A^+)$ ,  $\text{Ad}(\Omega^-)$  et  $\text{Ad}(\Omega^+)$ , de même que chacun des ensembles  $\text{Ad}(W_d^u(x))$  et  $\text{Ad}(W_g^s(x))$ , où  $x \in \Xi_0$ , contient un ensemble fermé, connexe, séparant  $\mathbb{A}$ , invariant par  $f$  et réduit ni à  $C^-$  ni à  $C^+$ .

Commençons par  $\text{Ad}(A^-)$ , la démonstration étant analogue pour  $\text{Ad}(A^+)$ ,  $\text{Ad}(\Omega^-)$  et  $\text{Ad}(\Omega^+)$ , et pour cela considérons un élément  $\psi$  de  $\mathcal{D}$  (voir § 1) et l'ensemble  $A_\psi^-$  défini au paragraphe 2. La suite  $(f^n(A_\psi^-))_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante, formée d'ensembles connexes contenus dans  $A^-$ , contenant  $C^-$  et distincts de ce bord. Ainsi l'ensemble  $\text{Ad}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^n(A_\psi^-))$  vérifie les conditions demandées. Fixons maintenant  $x$  appartenant à  $\Xi_0$

et montrons que  $\text{Ad}(W_d^u(x))$ , que l'on sait déjà connexe et non réduit à un bord de  $C$ , est invariant par  $f$  et sépare  $\mathbb{A}$ . Pour cela, écrivons  $\tilde{\Xi} = \{\tilde{x}_i | i \in \mathbb{Z}\}$  où la suite  $(\tilde{\rho}_1(\tilde{x}_i))_{i \in \mathbb{Z}}$  est strictement croissante, et où  $\pi(\tilde{x}_0) = x$ . Du fait que  $W_d^u(\tilde{x}_i)$  et  $W_g^s(\tilde{x}_j)$  s'intersectent pour  $i < j$ , on en déduit d'abord que  $W_d^u(\tilde{x}_j)$  est inclus dans  $\text{Ad}(W_d^u(\tilde{x}_i))$  pour  $i < j$ , puis que  $\text{Ad}(W_d^u(\pi(\tilde{x}_j)))$  est inclus dans  $\text{Ad}(W_d^u(\pi(\tilde{x}_i)))$  pour  $i < j$ . Cette dernière relation prouve en fait que l'ensemble  $\text{Ad}(W_d^u(x))$  est indépendant du point  $x$  choisi dans  $\Xi_0$  et donc qu'il est invariant. D'autre part, du fait que  $\tilde{x}_j$  appartient à  $\text{Ad}(W_d^u(\tilde{x}_i))$  pour  $i < j$ ,

on en déduit que  $W_d^u(\tilde{x}_0)$  n'est pas borné et donc que  $\text{Ad}(W_d^u(x))$  sépare  $\mathbb{A}$ . On a évidemment un résultat analogue pour  $\text{Ad}(W_g^s(x))$ .  $\square$

**THÉORÈME 3.2.** — *Tout ensemble fermé  $X$  de  $C$ , connexe, séparant  $\mathbb{A}$ , invariant par  $f$  et réduit ni à  $C^-$ , ni à  $C^+$ , contient  $X_0$ ; de plus, si  $X$  est topologiquement transitif (i. e. possède une orbite dense), il est égal à  $X_0$ .*

*Démonstration.* — La première partie du théorème est une conséquence du lemme 3.2 ou du lemme 3.5. Supposons maintenant que  $X$  soit fermé, connexe, séparant  $\mathbb{A}$ , invariant par  $f$ , réduit ni à  $C^-$ , ni à  $C^+$  et soit topologiquement transitif. On sait déjà que  $X_0$  est inclus dans  $X$ . S'il n'y a pas égalité entre  $X_0$  et  $X$ , l'orbite dense de  $X$  n'est pas l'orbite d'un point de  $X_0$ ; il existe donc une composante connexe  $U$  de  $C \setminus X_0$  et un point  $x$  de  $U$  tel que  $X = \text{Ad}(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{f^k(x)\})$ . Or on a vu dans la démonstration du lemme 3.4. que  $U$  était périodique et que l'ensemble  $\text{Ad}(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} f^k(U))$  ne rencontrait ni  $C^-$ , ni  $C^+$ .

*A fortiori*, il ne peut pas contenir  $X$ .  $\square$

*Remarque.* — Le résultat du théorème 1.1 est encore vrai quand on change la condition d'invariance de  $X$  ( $f(X) = X$ ) par une condition de périodicité (il existe un entier  $q \geq 1$  tel que  $f^q(X) = X$ ). On peut ainsi montrer de façon analogue que l'ensemble  $X_0$  obtenu est contenu dans tout fermé de  $C$ , connexe, séparant  $f$ , périodique et réduit ni à  $C^-$ , ni à  $C^+$ .

On connaît d'autre part, des conditions  $C^1$ -génériques pour que  $X_0$  soit topologiquement transitif.

**THÉORÈME 3.3.** — *Si l'ensemble  $W^u(x) \cap W^s(x)$  est dense dans  $W^u(x)$  ou dans  $W^s(x)$  pour un point  $x$  de  $\Xi_0$ , alors  $X_0$  est topologiquement transitif.*

*Démonstration.* — Dans le cas où  $W^u(x) \cap W^s(x)$  est dense dans  $W^u(x)$  [ou dans  $W^s(x)$ ], on sait que l'ensemble  $\bigcup_{k=0}^{q-1} \text{Ad}(W^u(f^k(x)))$  est invariant par  $f$  et topologiquement transitif (voir Takens [T]). Comme les ensembles  $\text{Ad}(W_d^u(f^k(x)))$ ,  $k=0, \dots, q-1$ , sont tous égaux, il est connexe. En appliquant le théorème 3.2, on en déduit qu'il est égal à  $X_0$ ; ce dernier est donc topologiquement transitif.  $\square$

#### 4. Étude du cas des régions d'instabilité infinie

On transpose dans ce paragraphe les résultats du paragraphe 2 au cas où la région d'instabilité est l'anneau  $\mathbb{A}$  tout entier. On considère ici un difféomorphisme  $f$  de  $\mathbb{A}$ , de classe  $C^1$ , homotope à l'identité, déviant la verticale à droite (voir §1) et vérifiant la condition suivante :

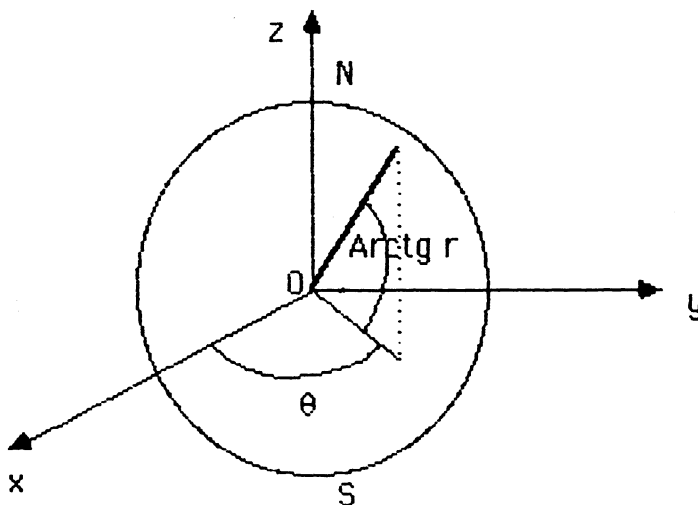
L'image par  $f$  de tout ensemble  $X$  compact, connexe et séparant  $\mathbb{A}$ , rencontre à la fois  $U(X)$  et  $V(X)$ , composantes connexes non bornées respectivement inférieure et supérieure de  $\mathbb{A} \setminus X$ .

Notons d'une part que  $f$  ne laisse invariant aucun graphe d'application continue de  $\mathbb{T}^1$  dans  $\mathbb{R}$ , d'autre part qu'elle a une propriété d'intersection; celle-ci va jouer ici le rôle de la propriété de préservation des aires supposée dans les paragraphes précédents.

Considérons la sphère  $S^2 = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid u^2 + v^2 + w^2 = 1\}$ , le plongement  $\Phi : \mathbb{A} \rightarrow S^2$ ,

$$(\theta, r) \mapsto \left( \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \cos 2\pi\theta, \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \sin 2\pi\theta, \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} \right),$$

et les points  $N=(0, 0, 1)$  et  $S=(0, 0, -1)$ .



Puisque  $f$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{A}$  homotope à l'identité, il existe un unique homéomorphisme de  $S^2$  qui prolonge l'application  $\Phi \circ f \circ \Phi^{-1}$ , définie sur  $\mathbb{A} \setminus \{N, S\}$ ; il laisse fixe les points  $N$  et  $S$ , on le note  $\hat{f}$ . On peut alors montrer les résultats suivants (voir Le Calvez [L2]).

**PROPOSITION 4.1.** — *Si  $\hat{U}$  est un ouvert connexe, simplement connexe, contenant  $S$  (resp.  $N$ ), ne contenant pas  $N$  (resp.  $S$ ), distinct de  $S^2 \setminus \{N\}$  (resp.  $S^2 \setminus \{S\}$ ) et vérifiant  $\hat{f}(\hat{U}) \subset \hat{U}$  ou  $\hat{f}^{-1}(\hat{U}) \subset \hat{U}$ , il existe un réel  $M$  tel que pour tout  $\theta$  appartenant à  $\mathbb{T}^1$ ,  $\hat{U}$  ne contienne pas  $\Phi(\{\theta\} \times ]-\infty, M])$  [resp.  $\Phi(\{\theta\} \times [M, +\infty[)$ .*

**PROPOSITION 4.2.** — *Si  $\hat{U}$  est un ouvert connexe simplement connexe, contenant  $S$  (resp.  $N$ ), ne contenant pas  $N$  (resp.  $S$ ) et invariant par  $\hat{f}$ , alors  $\hat{U} = S^2 \setminus \{N\}$  (resp.  $\hat{U} = S^2 \setminus \{S\}$ ).*

Ces résultats, particulièrement la proposition 4.2 qui est du même type que le théorème 1.1, permettent de montrer le théorème suivant.

**THÉORÈME 4.1.** — (i) *il existe  $x \in \mathbb{A}$  tel que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_2 \circ f^{-n}(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} p_2 \circ f^n(x) = +\infty ;$$

(ii) il existe  $x \in \mathbb{A}$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_2 \circ f^{-n}(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} p_2 \circ f^n(x) = -\infty;$$

(iii) pour tout réel  $M$ , il existe  $x \in \mathbb{T}^1 \times [M, +\infty[$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_2 \circ f^{-n}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_2 \circ f^n(x) = -\infty;$$

(iv) pour tout réel  $M$ , il existe  $x \in \mathbb{T}^1 \times ]-\infty, M]$  tel que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_2 \circ f^{-n}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} p_2 \circ f^n(x) = +\infty.$$

*Démonstration.* — On suit le plan du paragraphe 2. On définit l'ensemble  $\mathcal{D}$  des applications continues de  $\mathbb{T}^1$  dans  $\mathbb{R}$  et, pour tout élément  $\psi$  de  $\mathcal{D}$ , les ensembles  $C_\psi^- = \{(\theta, r) \in \mathbb{A}, r \leq \psi(\theta)\}$  et  $\hat{C}_\psi^- = \Phi(C_\psi^-) \cup \{S\}$ ; on note ensuite  $\hat{A}_\psi^-$  (resp.  $\hat{\Omega}_\psi^-$ ) la composante connexe de  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \hat{f}^n(\hat{C}_\psi^-)$  [resp.  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \hat{f}^{-n}(\hat{C}_\psi^-)$ ] qui contient  $S$ . On définit de façon analogue  $C_\psi^+ = \{(\theta, r) \in \mathbb{A}, r \geq \psi(\theta)\}$ ,  $\hat{C}_\psi^+ = \Phi(C_\psi^+) \cup \{N\}$  et les composantes connexes, notées respectivement  $\hat{A}_\psi^+$  et  $\hat{\Omega}_\psi^+$ , de  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \hat{f}^n(\hat{C}_\psi^+)$  et de  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \hat{f}^{-n}(\hat{C}_\psi^+)$ .

On considère enfin les applications  $\alpha_\psi^-$ ,  $\omega_\psi^-$ ,  $\alpha_\psi^+$  et  $\omega_\psi^+$ , de  $\mathbb{T}^1$  dans  $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ , définies pour tout point  $\theta$  de  $\mathbb{T}^1$ , par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_\psi^-(\theta) &= \sup(\{\theta\} \times \mathbb{R} \cap \Phi^{-1}(\hat{A}_\psi^-)), \\ \omega_\psi^-(\theta) &= \sup(\{\theta\} \times \mathbb{R} \cap \Phi^{-1}(\hat{\Omega}_\psi^-)), \\ \alpha_\psi^+(\theta) &= \inf(\{\theta\} \times \mathbb{R} \cap \Phi^{-1}(\hat{A}_\psi^+)), \\ \omega_\psi^+(\theta) &= \inf(\{\theta\} \times \mathbb{R} \cap \Phi^{-1}(\hat{\Omega}_\psi^+)). \end{aligned}$$

On fixe maintenant un élément  $\psi$  de  $\mathcal{D}$  et on montre l'équivalent de la proposition 2. 1.

L'inclusion  $\hat{f}^{-1}(\hat{A}_\psi^-) \subset \hat{A}_\psi^-$  est évidente pour les raisons invoquées au paragraphe 2. Montrons maintenant que l'ensemble  $\hat{X} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \hat{f}^{-n}(\hat{A}_\psi^-) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \hat{f}^{-n}(\hat{A}_\psi^-)$  se réduit à

$S$ . L'ensemble  $\hat{X}$  est fermé, connexe, invariant par  $f$ , contient  $S$  et ne contient pas  $N$ ; ainsi la composante connexe  $\hat{W}$  de  $S^2 \setminus \hat{X}$  qui contient  $N$  est simplement connexe et invariante par  $\hat{f}$  et doit donc, par la proposition 4.2 être égale à  $S^2 \setminus \{S\}$ ; ce qui prouve que  $\hat{X} = \{S\}$ . Il reste à montrer que  $\hat{A}_\psi^-$  rencontre l'image par  $\Phi$  du graphe de  $\psi$ . Pour cela, on choisit un élément  $\varphi$  de  $\mathcal{D}$  qui vérifie  $\varphi < \psi$ , et on considère l'ensemble  $\hat{Z}_\psi = \text{Ad}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \hat{f}^n(\hat{C}_\psi^-))$  qui est fermé, connexe et contient son image par  $\hat{f}$ . Dans le cas où

$\hat{Z}_\psi$  ne contient pas  $N$ , la composante connexe  $\hat{W}$  de  $S^2 \setminus \hat{Z}_\psi$ , qui contient  $N$ , vérifie  $\hat{W} \subset \hat{f}(\hat{W})$  et l'ensemble  $X = \Phi^{-1}(\text{Fr } W)$ , qui est compact, connexe et sépare  $\mathbb{A}$ , a son image par  $f$  disjointe de  $V(X)$ . L'hypothèse faite sur  $\hat{f}$  prouve donc que  $\hat{Z}_\psi$  contient toujours  $N$  et par conséquent qu'il existe un entier  $N_\varphi$  tel que  $\hat{f}^{N_\varphi}(\hat{C}_\psi^-)$  rencontre  $\Phi(\text{gr } \psi)$ . Il est alors facile, par un raisonnement analogue à celui de la proposition 2. 1, de montrer que  $\hat{A}_\psi^-$  rencontre  $\Phi(\text{gr } \psi)$ .

Montrons maintenant l'équivalent de la proposition 2.2. La composante connexe  $\hat{W}$  de  $S^2 \setminus A_\psi^-$  qui contient  $N$  est simplement connexe, ne contient pas  $S$  et vérifie  $\hat{f}(\hat{W}) \subset \hat{W}$ ; on en déduit grâce à la proposition 4.2 que  $\alpha_\psi^-$  est à valeurs réelles. Le fait que cette dernière application soit semi-continue supérieurement, qu'elle vérifie  $\alpha_\psi^- \leq \psi$  et que son graphe rencontre celui de  $\psi$ , sont des propriétés évidentes, et le fait qu'elle soit continue à gauche se démontre de la même façon que dans la proposition 2.2. Il reste à montrer l'existence d'une application  $\phi$  de  $\mathcal{D}$  telle que  $\alpha_\phi^- \geq \psi$ . On utilise pour cela un raisonnement analogue à celui effectué dans la proposition 2.2. Puisque  $f$  dévie la verticale, il existe un réel  $M$  tel que, pour  $\theta$  appartenant à  $\mathbb{T}^1$  et  $x$  appartenant au graphe de  $\psi$ , les ensembles  $\{\theta\} \times ]-\infty, M]$  et  $f^{-1}(V^+(x))$  se coupent. Notons alors  $\psi_M: \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  l'application constante égale à  $M$ , et considérons  $\alpha_{\psi_M}^-$ . Cette application est continue à gauche semi-continue supérieurement, et égale à  $M$  en un point, son graphe doit donc rencontrer  $f^{-1}(V^+(x))$ , pour tout point  $x$  du graphe de  $\psi$ . Si on choisit  $\phi$  dans  $\mathcal{D}$  tel que  $\hat{f}(\hat{A}_{\psi_M}^-)$  soit inclus dans  $\hat{A}_\phi^-$ , on en déduit que  $\Phi^{-1}(\hat{A}_\phi^-)$  rencontre  $V^+(x)$  pour tout point  $x$  du graphe de  $\psi$  et donc que  $\alpha_\phi^- \geq \psi$ .

Pour montrer la proposition, il n'y a plus qu'à utiliser la connexité de  $\mathcal{D}$ , muni de la topologie de la convergence uniforme, et les arguments employés au paragraphe 2. Pour tout élément  $\psi$  de  $\mathcal{D}$ , on montre qu'il existe :

- $\phi_1$  appartenant à  $\mathcal{D}$  tel que  $A_{\phi_1}^- \cap \Omega_\psi^+ \neq \emptyset$ ,
- $\phi_2$  appartenant à  $\mathcal{D}$  tel que  $\Omega_{\phi_2}^- \cap A_\psi^+ \neq \emptyset$ ,
- $\phi_3$  appartenant à  $\mathcal{D}$  tel que  $C_\psi^- \cap A_{\phi_3}^+ \cap \Omega_{\phi_3}^+ \neq \emptyset$ ,
- $\phi_4$  appartenant à  $\mathcal{D}$  tel que  $C_\psi^+ \cap A_{\phi_4}^- \cap \Omega_{\phi_4}^- \neq \emptyset$ ;

ce qui montre les propriétés (i), (ii), (iii) et (iv).  $\square$

*Remarque.* — Notons réciproquement que si  $f$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{A}$  homotope à l'identité, tel que l'homéomorphisme  $\hat{f}$  de  $S^2$  qui prolonge  $\Phi \circ f \circ \Phi^{-1}$  vérifie la condition (iii), la condition (iv) ou les conditions (i) et (ii) du théorème précédent, alors l'image par  $f$  de tout ensemble compact, connexe  $X$  séparant  $\mathbb{A}$  doit rencontrer  $U(X)$  et  $V(X)$ . Ainsi, parmi les difféomorphismes de  $\mathbb{A}$  de classe  $C^1$ , homotopes à l'identité et déviant la verticale, on a une équivalence entre la condition (iii), la condition (iv), les conditions (i) et (ii) réunies et la propriété d'intersection énoncée plus haut.

## BIBLIOGRAPHIE

- [B1] G. D. BIRKHOFF, *Surface Transformation and their Dynamical Applications* (*Acta Math.*, vol. 43, 1920, p. 1-119); aussi dans *Collected Math. Papers of G. D. Birkhoff*, vol. II, p. 111-229.
- [B2] G. D. BIRKHOFF, *Sur quelques courbes fermées remarquables* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, vol. 60, 1932, p. 1-26 et *Collected Math. Papers*, vol. II, p. 444-461).
- [B3] G. D. BIRKHOFF, *Nouvelles recherches sur les systèmes dynamiques* (*Memoriae Pont. Acad. Sci. Novi Lyncaei*, vol. 1, 1935, p. 85-216 et *Collected Math. Papers*, vol. II, p. 530-661).
- [Che] A. CHENCINER, *Séminaire Bourbaki*, exposé n° 622 (*Astérisque*, Soc. Math. France, vol. 121-123, 1985, p. 147-170).
- [Cho] G. CHOQUET, *Lectures on Analysis*, vol. II, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1969.
- [H] M. HERMAN, *Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau* (*Astérisque*, Soc. Math. France, vol. 103-104, 1983).

- [K] A. KATOK, *Some Remarks on Birkhoff and Mather Twist Map Theorem* (*Ergod. Th. and Dynam. Sys.*, vol. 2, 1982, p. 185-194).
- [L1] P. LE CALVEZ, *Propriétés des attracteurs de Birkhoff* [*Ergod. Th. and Dynam. Sys.* (à paraître)].
- [L2] P. LE CALVEZ, *Propriétés générales des applications déviant la verticale*, preprint, Univ. d'Orsay.
- [M] J. MATHER, *Exposé au Séminaire de Systèmes Dynamiques*, M. Herman, École Polytechnique, 1985.
- [T] F. TAKENS, *Homoclinic Points in Conservative Systems* (*Inventiones Math.*, vol. 18, 1972, p. 267-292).

(Manuscrit reçu le 16 décembre 1986,  
révisé le 9 mars 1987).

Patrice LE CALVEZ,  
Université Paris-Sud  
et U.A. n° 1169 du C.N.R.S.,  
Mathématiques, Bât. n° 425,  
91405 Orsay Cedex, France.

---