ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

COLETTE ANNÉ

Spectre du laplacien et écrasement d'anses

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 20, nº 2 (1987), p. 271-280

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1987_4_20_2_271_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4 série, t. 20, 1987, p. 271 à 280.

SPECTRE DU LAPLACIEN ET ÉCRASEMENT D'ANSES

à Marcel Berger pour son soixantième anniversaire

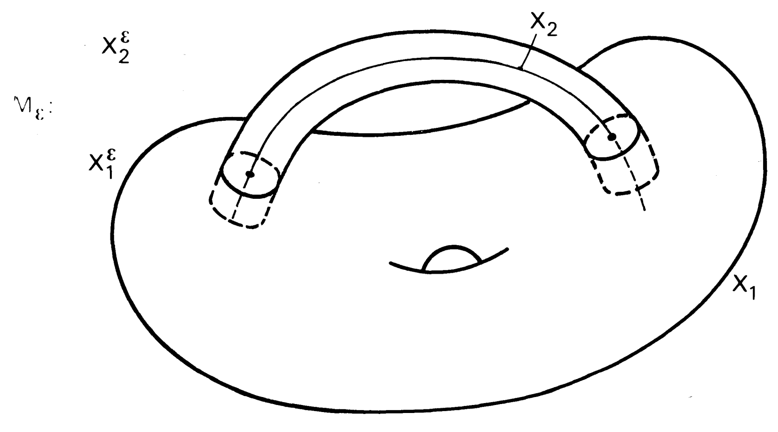
PAR COLETTE ANNÉ

ABSTRACT. — We show, by the study of the convergence of the spectrum of the Laplacian in the case of a manifold X_1 with handles breaking down to a manifold of lower dimension X_2 with boundary in X_1, that the suitable limiting operator is the Laplacian with Dirichlet boundary conditions on X_2.

Introduction

Ce travail s'inscrit dans l'étude des écrasements de variétés riemanniennes compactes sur des espaces de longueur perdant de la dimension. Il donne des résultats de convergence du spectre du laplacien sur les fonctions.

X_1 et X_2 sont deux sous-variétés de $\mathbf{R}^{n+1}$; dim $X_1=n$ et X_1 est compacte sans bord; dim $X_2=q<n$, $\partial X_2 \subset X_1$, X_2 est transverse à X_1 et $X_1 \cap X_2=\partial X_2=Y$. Il existe des variétés M_ε, C^∞ par morceaux, qui convergent pour la distance de Hausdorff vers $X_1 \cup X_2$: on prolonge X_2 (en $\tilde{X}_2$) à travers X_1 grâce à la normale au bord, alors $\mathrm{TUB}^\varepsilon X_2$ coupe X_1 et délimite deux parties $X_1^\varepsilon=X_1-(X_1 \cap \mathrm{TUB}^\varepsilon \tilde{X}_2)$ et X_2^ε bord de la partie connexe de $\mathrm{TUB}^\varepsilon \tilde{X}_2$ délimitée par $X_1 \cap \mathrm{TUB}^\varepsilon \tilde{X}_2$; $M_\varepsilon=X_1^\varepsilon \cup X_2^\varepsilon$. Il y a une manière naturelle de définir un laplacien sur M_ε et on montre que son spectre converge vers *l'union du spectre de* X_1 *et du spectre de Dirichlet de* X_2 ce qui permet de définir un *Laplacien naturel sur* $X_1 \cup X_2$.



La méthode utilise un théorème général sur les formes quadratiques (théorème 1). Son application nécessite deux résultats de convergence de spectres, le premier relatif aux perturbations $X - \mathrm{TUB}^{\varepsilon} Y$ où Y est une sous-variété de codimension plus grande que 2 avec condition de Neumann au bord (théorème 2, II.2), ce résultat n'était connu que lorsque Y est réduit à un point, *voir* [O] et [R-T], et vient d'être utilisé par Gilles Courtois pour en déduire des développements asymptotiques de valeurs propres; le deuxième relatif à la variation canonique de la métrique d'un fibré riemannien telle qu'elle est définie dans [B-B] (théorème 3, II.3) et qui est à rapprocher des résultats de Kenji Fukaya dans [F 2]. L'auteur a des prescriptions de courbure ($|K| \leqq 1$) qui lui assurent que la variété qui s'effondre fibre sur la variété limite. Ici nous faisons cette hypothèse de fibration, le résultat se démontre alors simplement et sans que soit nécessaire une hypothèse sur la courbure (qui va d'ailleurs tendre vers l'infini). On en déduit alors des résultats pour des perturbations définies avec les courbes de niveau d'une fonction de Morse-Bott (II.3) ce qui nous permet de résoudre en toute généralité le problème de départ et complète les travaux de Chavel et Feldman dans [C-F 2] où ils donnent des conditions pour que le rajout d'une anse ne s'entende pas.

DÉFINITIONS. — 1. — Une forme quadratique positive $(q, \mathscr{D})$ dans un espace de Hilbert H est compacte si elle est fermée, son domaine est dense dans H et l'injection $(\mathscr{D}, N_q) \to H$ $(N_q(f) = \sqrt{\|f\|^2 + q(f)})$ est compacte. On sait qu'alors l'opérateur obtenu par extension de Friedrich admet un spectre discret de valeurs propres positives de multiplicité finie et ne pouvant s'accumuler qu'en $+\infty$.

2. — Le laplacien sur une union $M_1 \cup_Z M_2$ de deux variétés riemanniennes (M_i, g_i) à bord isométrique Z est l'opérateur obtenu à partir de l'extension de Friedrich de la forme quadratique $q(f, h) = \int_{M_1} |df|^2 + \int_{M_2} |dh|^2$ de domaine

$$H^1(M_1 \cup_Z M_2) = \{(f, h) \in H^1(\bar{M}_1) \times H^1(\bar{M}_2) / f|_Z = h|_Z \text{ dans } L_2(Z)\}$$

dans l'espace de Hilbert $L_2(M_1) \times L_2(M_2)$. On vérifie que q est positive fermée et que si M_1 et M_2 sont relativement compactes elle est compacte (*voir* [A]).

Outils

1. FORMULES MINI-MAX et MAX-MIN. — Soient $(q, \mathscr{D})$ une forme quadratique positive compacte définie dans un espace de Hilbert H, (λ_n), $n \geqq 1$ son spectre; il vérifie :

$$\lambda_n = \inf\{\sup_{f \in E,\ \|f\|=1} q(f) / E \text{ sous-espace vectoriel de } \mathscr{D},\ \dim E = n\},$$

$$\lambda_n = \sup\{\inf_{f \in E,\ \|f\|=1} q(f) / E \text{ sous-espace vectoriel de } \mathscr{D},\ \operatorname{codim} E = n-1\}$$

2. ISOMÉTRIE ASYMPTOTIQUE.

DÉFINITION. — Deux familles de variétés riemanniennes $(X_\eta, g_\eta)_{0<\eta\leqq a}$ et $(Y_\eta, \gamma_\eta)_{0<\eta\leqq a}$ sont asymptotiquement isométriques s'il existe des difféomorphismes $J_\eta : X_\eta \to Y_\eta$ et une fonction $\omega :]0, a] \to \mathbf{R}^+$ tels que $\lim_{\eta \to 0} \omega(\eta) = 0$ et

$$(1-\omega(\eta))\, g_\eta \leqq J_\eta^* \gamma_\eta \leqq (1+\omega(\eta))\, g_\eta.$$

Conséquence pour le spectre de l'opérateur de Laplace. — On suppose toutes ces variétés compactes et de dimension p, $\lambda_n(\eta)_{n \geqq 1}$ et $\mu_n(\eta)_{n \geqq 1}$ les spectres sur X_η et Y_η, la formule du Mini-Max permet de montrer l'encadrement uniforme en η et n :

$$\frac{(1-\omega(\eta))^{p/2}}{(1+\omega(\eta))^{1+(p/2)}} \lambda_n(\eta) \leqq \mu_n(\eta) \leqq \frac{(1+\omega(\eta))^{p/2}}{(1-\omega(\eta))^{1+(p/2)}} \lambda_n(\eta).$$

I. Théorème fondamental

1. FORMES QUADRATIQUES.

THÉORÈME 1. — *Soient $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}'$ deux espaces de Hilbert séparables,*

- *dans $\mathscr{H}$ est définie une forme quadratique q_1 positive compacte avec des domaines $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}_\varepsilon^0$ et $\mathscr{D}_\varepsilon$, $\mathscr{D}_\varepsilon^0 \subset \mathscr{D}_\varepsilon$, on pose $\| f \|_1^2 = \| f \|_{\mathscr{H}}^2 + q_1(f)$;*
- *dans $\mathscr{H}'$ sont définies des formes quadratiques positives compactes $(q_\varepsilon, \mathscr{K})$ et $\mathscr{K} = \mathscr{K}_0 \oplus \mathscr{K}_\varepsilon$, la somme étant orthogonale pour q_ε, on note d_ε et h_ε les projecteurs correspondants;*
- *il existe des opérateurs de couplage bornés*

$$C_\varepsilon : \quad (\mathscr{D}_\varepsilon, \| \,.\, \|_1) \to (\mathscr{K}_\varepsilon, \| \,.\, \|_{\mathscr{H}'}).$$

On note alors Q_ε, Q_ε^0, Q_ε^1 la forme quadratique $q_1 \oplus q_\varepsilon$ regardée avec les domaines $\mathscr{D}(Q_\varepsilon) = \{(f, h) \in \mathscr{D}_\varepsilon \times \mathscr{K} / C_\varepsilon(f) = h_\varepsilon(h)\}$, $\mathscr{D}(Q_\varepsilon^0) = \mathscr{D}_\varepsilon^0 \times \mathscr{K}_0$, $\mathscr{D}(Q_\varepsilon^1) = \mathscr{D}_\varepsilon \times \mathscr{K}_0$ et $\lambda_n(\varepsilon)$, $\lambda_n^0(\varepsilon)$, $\lambda_n^1(\varepsilon)$ leur spectre. On suppose enfin

H 1 $\mathscr{D}_\varepsilon^0 \subset \operatorname{Ker} C_\varepsilon$ *et* $\lim_{\varepsilon \to} \| C_\varepsilon \| = 0$,

H 2 $\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_n^0(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_n^1(\varepsilon) = \lambda_n$;

alors $\forall n \geqq 1$ $\lim_{\varepsilon \to 0} \lambda_n(\varepsilon) = \lambda_n$.

Démonstration. — Elle utilise la formule du Mini-Max.

- $\mathscr{D}(Q_\varepsilon^0) \subset \mathscr{D}(Q_\varepsilon) \Rightarrow \forall n \geqq 1,\ \lambda_n(\varepsilon) \leqq \lambda_n^0(\varepsilon)$;
- $\mathscr{D}(Q_\varepsilon)$ et $\mathscr{D}(Q_\varepsilon^1)$ sont isomorphes par

$$\begin{array}{lcl} \Phi_\varepsilon : \ \mathscr{D}(Q_\varepsilon) \to \mathscr{D}(Q_\varepsilon^1) & \quad \text{et} \quad & \Phi_\varepsilon^{-1}(f, h) = (f, h + C_\varepsilon(f)). \\ \qquad (f, h) \mapsto (f, d_\varepsilon(h)) & & \end{array}$$

En testant le quotient de Rayleigh-Ritz de Q_ε^1 sur l'image par Φ_ε des n premières fonctions propres de Q_ε on obtient, avec l'inégalité précédente :

$$(1 - \| C_\varepsilon \| \sqrt{1 + \lambda_n^0(\varepsilon)})^2 \lambda_n^1(\varepsilon) \leqq \lambda_n(\varepsilon).$$

2. Application a l'écrasement d'anses. — Rappelons qu'une fonction sur la variété X est de Morse-Bott le long de la sous-variété Y si tous ses points critiques sont sur Y et si elle est non dégénérée dans les directions transverses; son hessien est donc d'indice constant sur Y, nous le supposerons égal à (codim Y, 0). On reprend la situation de l'introduction. X_2 est paramétré au voisinage de son bord Y par des coordonnées normales, $\mathbf{n}$ est la normale sortante le long de Y. Pour α assez petit $NX_{2\,|\,Y}\times\,]-\alpha, \alpha[$ paramètre $N\tilde{X}_2$ au voisinage de Y grâce au transport parallèle $\tau_{t,\,y}$ le long de $\exp_y t\,\mathbf{n}(y)$.

$$\begin{aligned}\Psi:\quad & NX_{2\,|\,Y}\times\,]-\alpha, \alpha[\,\to N\tilde{X}_2\\ & ((y, v), t)\mapsto(\exp_y t\,\mathbf{n}(y), \tau_{t,\,y}(v))\end{aligned}$$

réalise un difféomorphisme sur un voisinage U de Y, de plus pour ε petit

$$U\cap TU^{\varepsilon}\tilde{X}_2=\{\Psi((y, v), t)/\|v\|<\varepsilon\},$$

le transport parallèle conservant la norme.

Enfin X_2 étant transverse à X_1 le long de Y le théorème des fonctions implicites nous assure l'existence d'une application χ d'un voisinage V de $Y\subset N\tilde{X}_2$ dans $]-\alpha, \alpha[$ telle que

$$V\times\chi(V)\subset U \qquad \text{et} \qquad X_1\cap TUB^{\varepsilon}\tilde{X}_2=\{\Psi((y, v), \chi(y, v))/\|v\|<\varepsilon\}.$$

Soit $F_0(z)=d^2(z, \tilde{X}_2)$, et Φ_α le difféomorphisme de $N\tilde{X}_2$ défini sur $NX_{2\,|\,Y}\times\,]-\alpha, \alpha[$ dans la carte Ψ par

$$\Phi_\alpha(z, t)=(z, t+\chi(z)\,.\,e^{(2/\alpha^2)-((1/(t+\alpha)^2)+(1/(t-\alpha)^2))})$$

et prolongé par l'identité. $\Phi_\alpha(z, 0)$ est sur X_1 et donc

$$X_2^{\varepsilon}=\{z/z\in NX_2 \text{ et } F_0\circ\Phi_\alpha(z)=\varepsilon\},$$
$$X_1^{\varepsilon}=\{x\in X_1/d^2(x, \tilde{X}_2)>\varepsilon\}$$

et les fonctions $F_0\circ\Phi_\alpha$ et F_0 sont de Morse-Bott.

Le théorème 4 nous donnera la convergence des spectres de Neumann et de Dirichlet sur X_1^{ε} vers celui de X_1; le théorème 5 nous donnera la convergence du spectre de Dirichlet sur X_2^{ε}, mais cette limite doit être indépendante de α, c'est donc vers le spectre de Dirichlet de X_2 et H 2 est vérifiée.

Ainsi le résultat découle du fait que M_ε muni de la métrique induite est asymptotiquement isométrique à $(M_\varepsilon, g_\varepsilon)$ où on a muni X_2^{ε} de la métrique $(F_0\circ\Phi_\alpha)^*\bar{g}_\varepsilon$, $\bar{g}_\varepsilon$ étant la variation canonique de la métrique de NUX_2; et de l'application du théorème fondamental à cette dernière avec : $\mathscr{H}=L_2(X_1)$, $\mathscr{D}=H^1(X_1)$, $\mathscr{D}_\varepsilon^0=H_0^1(X_1^{\varepsilon})$, $\mathscr{D}_\varepsilon=H^1(X_1^{\varepsilon})$ et $q_1(f)=\int|df|^2$.

$$M=\{v\in NX_2/H_{F(\Pi(v))}<v, v>=1\}\ \mathscr{H}'=L_2(M),$$

$\mathscr{K}=\mathrm{H}^1(\mathrm{M})$, $\mathscr{K}_0=\mathrm{H}_0^1(\mathrm{M})$ et $\mathscr{K}_\varepsilon$ est l'ensemble des fonctions harmoniques pour le laplacien riemannien issu de $\bar{g}_\varepsilon$; $q_\varepsilon(f)=\int_{\mathrm{M}} |\nabla_{\mathrm{H}} f|^2+(1/\varepsilon^2)|\nabla_{\mathrm{V}} f|^2\, dv_{\mathrm{M}}$. Rappelons que sur l'anse les fonctions ont été multipliées par $\varepsilon^{(n-q)/2}$ (*voir* II.2). Posons donc $d=n-q$ alors $\operatorname{codim}_{\mathrm{X}_1} \mathrm{Y}=d+1$.

Enfin pour $f\in \mathrm{H}^1(\mathrm{X}_1^\varepsilon)$, $\mathrm{C}_\varepsilon(f)=\varepsilon^{d/2} h$ où $h\in\mathscr{K}_\varepsilon$ est la solution du problème de Dirichlet avec la donnée au bord :

$$(y, v)\in \mathrm{M}_{|\mathrm{Y}}, \qquad h(y, v)=f(\Phi_\alpha(y, \varepsilon^{d/2} v)).$$

D'après le principe du maximum appliqué à h on a

$$\|\mathrm{C}_\varepsilon(f)\|\leqq \mathrm{Vol}(\mathrm{M})\,\varepsilon^{d/2} \sup_{x\in\partial \mathrm{X}_2^\varepsilon} |f(x)|$$

la majoration faite pour le lemme 3 du II.2 donne

$$x\in\partial \mathrm{X}_2^\varepsilon \quad\Rightarrow\quad |f(x)|^2\leqq \int_\varepsilon^{r_0} \frac{1}{r^d}\,dr\, \|f\|_1^2$$

donc

$$\|\mathrm{C}_\varepsilon\|=\omega(\varepsilon^{d/2})\left(\int_\varepsilon^{r_0}\frac{1}{r^d}\,dr\right)^{1/2}$$

et l'hypothèse H 1 est vérifiée.

II. Spectres Marginaux

1. Convergence du spectre de Neumann de $\mathrm{X}-\mathrm{TUB}^\varepsilon \mathrm{Y}$, $\operatorname{codim}\mathrm{Y}\geqq 2$.

Théorème 2. — *Soient* (X, g) *une variété riemannienne compacte et* Y *une sous-variété de* X *de codimension* $d\geqq 2$, *le spectre* $(\nu_n(\varepsilon))_{n\geqq 1}$ *du laplacien sur* $\mathrm{X}_\varepsilon=\mathrm{X}-\mathrm{TUB}^\varepsilon \mathrm{Y}$ *avec condition de Neumann au bord converge, quand* ε *tend vers* 0, *vers le spectre* $(\nu_n)_{n\geqq 1}$ *du laplacien sur* X.

Lemme 1. — $C_0^\infty(\mathrm{X}-\mathrm{Y})$ *est dense dans* $\mathrm{H}^1(\mathrm{X})$.
Ce lemme démontré dans [A 1], signifie que Y est de capacité nulle.

Lemme 2. — *Le spectre* $\nu_n^0(\varepsilon)$ *du laplacien avec conditions de Dirichlet sur* X_ε *converge, quand* ε *tend vers* 0, *vers celui de* X.

Ce résultat dont on peut trouver une démonstration dans [CH], paragraphe IX est aussi une conséquence directe du lemme précédent et de la formule du Mini-Max.

Corollaire. — $\limsup_{\varepsilon\to 0} \nu_n(\varepsilon)\leqq \nu_n$.
En effet de l'inclusion $\mathrm{H}_0^1(\mathrm{X}_\varepsilon)\subset \mathrm{H}^1(\mathrm{X}_\varepsilon)$ on tire $\nu_n(\varepsilon)\leqq \nu_n^0(\varepsilon)$, on conclut alors avec le lemme précédent.

DÉFINITION. — Le couple (X, Y) vérifie la propriété (E) si X est isométrique au voisinage de chaque point y de Y à $Y \times R^d$.

LEMME 3. — *Si* (X, Y) *vérifie* (E) *il existe une constante* C(X) *et des opérateurs de prolongement* P_ε *définis sur le domaine* $\mathscr{D}(\Delta_\varepsilon)$ *du laplacien avec condition de Neumann sur* X_ε *et à valeurs dans* $H^1(X)$ *tels que*

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(\Delta_\varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} P_\varepsilon(\varphi)_{| X_\varepsilon} = \varphi \\ \| P_\varepsilon(\varphi) \|_1 \leqq C\left(\int_{X_\varepsilon} |\varphi|^2 + \int_{X_\varepsilon} |\Delta\varphi|^2\right) \\ \| P_\varepsilon(\varphi)_{| \mathrm{TUB}^\varepsilon Y} \|_{L_2} \leqq 0(1) \| \varphi \|_{H_1(X_\varepsilon)} \end{array} \right.$$

Démonstration. — Grâce à une partition de l'unité au voisinage de Y on se ramène à des ouverts isométriques à ceux de $R^d \times Y$ au voisinage de Y. Il est montré dans [RT] et [A] que les opérateurs r_ε : $H^1(R^d - B_\varepsilon) \to H^1(R^d)$ de prolongement harmonique sont uniformément bornés; posons ici

$$\mathscr{S}_\varepsilon = H^1(R^d - B_\varepsilon) \otimes H^1(Y) = H^1(R^d - B_\varepsilon, H^1(Y)),$$

on prend alors

$$p_\varepsilon : \quad \mathscr{S}_\varepsilon \xrightarrow{r_\varepsilon \otimes \mathrm{Id}} H^1(R^d) \otimes H^1(Y) \xrightarrow{\text{inj. can.}} H^1(R^d \times Y)$$

et il suffit de majorer, pour une fonction φ dans le domaine $\mathscr{D}(\Delta_\varepsilon)$ du laplacien de Neumann de $R^d - B_\varepsilon$, sa norme dans $\mathscr{S}_\varepsilon$ en fonction de $\int |\varphi|^2$, $\int |d\varphi|^2$, $\int |\Delta\varphi|^2$. Cette majoration se fait facilement en utilisant la formule de Stokes et la commutation des dérivées suivant Y et des dérivées dans les directions orthogonales à Y, conséquence de la propriété (E).

De plus P_ε vérifie $\| P_\varepsilon(\varphi)_{| \mathrm{TUB}^\varepsilon Y} \| \leqq o(1) \| \varphi \|_{H^1(X_\varepsilon)}$: ceci résulte de l'inégalité [en coordonnées polaires (r, σ), $f(r, \sigma)$ pour $f \in H^1(R^d - B_\varepsilon)$ supposée nulle pour $r > r_0$ quitte à la multiplier par une fonction plateau]

$$|f(\varepsilon, \sigma)| = \left| \int_\varepsilon^{r_0} \frac{\partial f}{\partial r} dr \right| \leqq \left(\int_\varepsilon^{r_0} \frac{1}{r^{d-1}} dr \right)^{1/2} \left(\int_\varepsilon^{r_0} \left| \frac{\partial f}{\partial r} \right|^2 r^{d-1} dr \right)^{1/2}$$

une fonction harmonique est majorée par sa valeur au bord, on en déduit donc

$$\int_{B_\varepsilon} |r_\varepsilon(f)|^2 \leqq \omega(\varepsilon) \int_{R^d - B_\varepsilon} \left| \frac{\partial f}{\partial r} \right|^2$$

où

$$\omega(\varepsilon) = \mathrm{Vol}(B_\varepsilon)^2 \int_\varepsilon^{r_0} \frac{1}{r^{d-1}} dr \quad \text{vérifie } \lim_{\varepsilon \to 0} \omega(\varepsilon) = 0.$$

Il suffit alors d'intégrer cette inégalité sur Y.

PROPOSITION 1. — *Si* (X, Y) *vérifie* (E) *alors* $\lim_{\varepsilon \to 0} \nu_n(\varepsilon) = \nu_n$.

Grâce au lemme 3 toutes les fonctions propres peuvent être vues dans un même espace où elles constituent des pseudo-modes. Des arguments classiques de compacité faible permettent alors de montrer que $\nu_n = \liminf_{\varepsilon \to 0} \nu_n(\varepsilon)$ (*voir* [A 2]).

PROPOSITION 2. — *Il existe sur* X *des métriques* g_η *pour lesquelles* (X, Y) *vérifient* (E) *et telles que* (X, g) *et* (X, g_η) *ainsi que* (X_ε, g) *et* (X_ε^η, g_η) *soient asymptotiquement isométriques quand* η *tend vers* 0 (X_ε^η *désignant la variété où on ôte à* X *le tube de rayon* ε *calculé avec* g_η *autour de* Y).

Prenons un recouvrement fini $U_i (i \in I)$ de Y qui trivialise $N^{\varepsilon_0} Y$ et $\chi_i (i \in I)$ une partition de l'unité adaptée.

Dans une carte $N^{\varepsilon_0} Y_{|U_i} = U_i \times \{v \in R^d / \|v\| < \varepsilon_0\}$, on pose

$$g_0(y, \nu) = g(y, 0)_{|T_y Y} + dv_1^2 + \ldots + dv_d^2$$

et on définit

$$g_\eta = \sum_i \chi_i \left(\psi\left(\frac{r}{\eta}\right) g_0 + \left(1 - \psi\left(\frac{r}{\eta}\right)\right) g \right)$$

où r est la distance à Y et ψ la fonction introduite dans le lemme 1.

On en déduit des encadrements des valeurs propres uniformes en ε; en appliquant la proposition 1 on démontre alors le théorème.

2. VARIATION CANONIQUE DE LA MÉTRIQUE D'UN FIBRÉ RIEMANNIEN. — Soit $\Pi : (M, \bar{g}) \to (Y, g)$ un fibré riemannien compact; on suppose la fibre connexe et on note $n = \dim M$ et $p = \dim Y$. En chaque point m de M il existe une distribution horizontale H_m et une distribution verticale V_m orthogonales entre elles et $T_m \Pi \mid H_m$ est une isométrie; le gradient ∇f d'une fonction définie sur M se projette horizontalement en $\nabla_H f$ et verticalement en $\nabla_V f$. La métrique s'écrit $\bar{g}(m) = \bar{g}_{H_m} + \bar{g}_{V_m}$, et sa variation canonique est $\bar{g}_\varepsilon(m) = \bar{g}_{H_m} + \varepsilon^2 \bar{g}_{V_m}$ et la forme volume s'écrit $\varepsilon^{n-p} dv_M$; on est donc ramenée, en multipliant les fonctions par $\varepsilon^{(n-p)/2}$, à l'étude spectrale de la forme quadratique

$$q_\varepsilon(f) = \int_M \left(\left\| \nabla_H f \right\|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \left\| \nabla_V f \right\|^2 \right) dv_M$$

par rapport à la norme euclidienne fixe $\int_M |f|^2 dv_M$. Le domaine de q_ε est $E = H^1(M)$; notons E_0 le sous-espace des fonctions constantes sur chaque fibre : $E_0 = H^1(Y) \circ \Pi$, E_1 son orthogonal pour la norme L_2 et Π_1 la projection orthogonale sur E_1. Introduisons $c(y) = \mathrm{Vol}(M_y)$ et l'opérateur A de domaine $H^2(Y)$:

$$A(h) = \Delta h - \left\langle \frac{\nabla_c}{c}, \nabla_h \right\rangle.$$

Pour h_1, $h_2 \in \mathrm{H}^1(\mathrm{Y})$, $q_\varepsilon(h_1 \circ \Pi, h_2 \circ \Pi) = \int_{\mathrm{Y}} \mathrm{A}(h_1)\, \bar{h}_2\, c\, dv_{\mathrm{Y}}$; A est un opérateur autoadjoint pour le produit scalaire défini dans $\mathrm{L}_2(\mathrm{Y})$ par

$$\langle h_1, h_2 \rangle_f = \int_{\mathrm{Y}} h_1\, \bar{h}_2\, c\, dv_{\mathrm{Y}},$$

Il est à résolvante compacte parce que Y est compacte et que c est de classe C^∞ minorée par une valeur strictement positive (l'injection de Sobolev de H^1 dans L_2 est donc compacte lorsqu'on multiplie la forme volume par c). A a donc un spectre positif discret admettant un unique point d'accumulation : $+\infty$, notons ce spectre $\mu_1 = 0 < \mu_2 \leqq \ldots$

THÉORÈME 3. — *Le spectre* $\lambda_1(\varepsilon) = 0 < \lambda_2(\varepsilon) \leqq \ldots$ *du laplacien* Δ_ε *de* $(\mathrm{M}, \bar{g}_\varepsilon)$ *converge ponctuellement quand* ε *tend vers* 0 *vers le spectre de* A.

Démonstration. — La fibre étant connexe, la deuxième valeur propre $\lambda_2(\mathrm{M}_y)$ de chaque fibre est non nulle, Y étant compacte les axiomes des fibrés entraînent l'existence de $\alpha > 0$ tel que $\lambda_2(\mathrm{M}_y) \geqq \alpha$ pour tout y. En testant le quotient de Rayleigh-Ritz de q_ε sur E_0 la formule du minimax entraîne $\lambda_n(\varepsilon) \leqq \mu_n$. L'autre inégalité se démontre avec la formule Max-Min en remarquant qu'une fonction de $\mathrm{H}^1(\mathrm{M})$ vérifie

$$\| \Pi_1(f) \|^2_{\mathrm{L}_2(\mathrm{M})} \leqq \frac{1}{\alpha} \varepsilon^2 q_\varepsilon(f).$$

(les détails se trouvent dans [A 2])

3. GÉNÉRALISATION PAR DES FONCTIONS DE MORSE.

UN LEMME DE MORSE-BOTT. — (X, g) *est une variété riemannienne compacte,* $\mathrm{F} : \mathrm{X} \to \mathbb{R}$, *une fonction de Morse dégénérée au sens de Bott le long d'une sous-variété* Y *de codimension d. Supposons la valeur critique nulle et le hessien de* F *d'indice* $(d, 0)$. *Alors pour chaque* y_0 *dans* Y *il existe un difféomorphisme* $\tilde{\varphi}$ *défini sur un voisinage de* y_0 *dans* NY *de la forme*

$$\tilde{\mathrm{U}} = \{ v \in \mathrm{NY};\ \Pi(v) \in \mathrm{U}_0 \ et\ \| v \| < r_0 \}$$

tel que

$$v \in \tilde{\mathrm{U}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{F} \circ \tilde{\varphi}(v) = \frac{1}{2} \mathrm{H}_{\mathrm{F}}(\Pi(v)) \langle v, v \rangle$$

$\mathrm{H}_{\mathrm{F}(y)}$ *étant la forme bilinéaire hessienne de* F *restreinte à la fibre* $\mathrm{N}_y\mathrm{Y}$ du fibré normal à $\mathrm{Y}(\Pi : \mathrm{NY} \to \mathrm{Y})$, *de plus* $\tilde{\varphi}$ *est une isométrie en* $y \in \mathrm{U}_0$ *identifié à la section nulle.*

(*a*) *Perturbation* $\{\mathrm{F} > \varepsilon\}_{\varepsilon \to 0}$ (*conditions au bord de Neumann ou Dirichlet*).

THÉORÈME 4. — *Supposons* X, Y, F *dans les conditions du lemme,* $n = \dim \mathrm{X}$, $p = \dim \mathrm{Y}$ *et* $d = n - p \geqq 2$ *pour* $\varepsilon > 0$ *on définit* $\mathrm{X}_\varepsilon = \mathrm{X} - \{\mathrm{F} \leqq \varepsilon\}$. *Les spectres du laplacien sur* $(\mathrm{X}_\varepsilon, g)$ *avec les conditions au bord de Neumann ou de Dirichlet convergent quand* ε *tend vers* 0 *vers le spectre du laplacien de* X.

(*b*) *Perturbation* $\{F=\varepsilon\}_{\varepsilon\to 0}$.

THÉORÈME 5. — *Supposons* X, Y, F *dans les conditions du lemme* $n=\dim X$, $p=\dim Y$. *Pour* $\varepsilon>0$ *petit, on pose* $Y_\varepsilon=\{F=\varepsilon\}$ (Y_ε *converge vers* Y *au sens de Hausdorff*). *Le spectre du laplacien sur* Y_ε *a une limite : celui de l'opérateur* $\Delta_Y-\sqrt{\det 1/2\, H_F}<\nabla(\det 1/2\, H_F)^{-1/2}, \nabla.>$ *sur* Y, *où* $\det H_F$ *désigne le déterminant dans une base orthonormée de la hessienne de* F *restreinte à la fibre* $N_y Y$.

Remarque. — Si X est une variété à bord ainsi que Y avec $\partial Y\subset\partial X$ on a par le même raisonnement la convergence du spectre de Dirichlet de Y_ε vers le spectre de Dirichlet de Y et de même pour ceux de Neumann.

Ces résultats se démontrent par isométrie asymptotique avec les situations du chapitre précédent, on trouvera une démonstration complète dans [A2].

Conclusion

Le couplage est une technique qui donne des résultats dans les problèmes spectraux; rappelons qu'elle a été utilisée fructueusement par Yves Colin de Verdière [CV] pour décrire un modèle qui permet d'interpréter, par exemple l'interaction d'un pendule et du milieu ambiant, par Gérard Besson [B] qui fait apparaître le laplacien total d'une submersion riemanienne à fibre totalement géodésique comme un couplage donné par le groupe de structure entre la base et la fibre type, aussi par Josef Dodziuk et Burton Randol [D-R] qui obtiennent des minorations du λ_1 en voyant une variété hyperbolique comme un couplage entre sa partie fine et sa partie épaisse.

BIBLIOGRAPHIE

[A] C. ANNÉ, *Spectre du laplacien et limites de variétés avec perte de dimension I*, Prépublication de l'Institut Fourier, 1985.

[A1] C. ANNÉ, *Perturbation du spectre* X-TUB$^\varepsilon$Y (*conditions de Neumann*) (*Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie de l'Institut Fourier*, vol. 4, 1986, p. 17-23).

[A2] C. ANNÉ, *Écrasement d'anses et spectre du laplacien*, Prépublications de l'Institut Fourier, n° 67, 1986.

[B-B] L. BÉRARD-BERGERY et J. P. BOURGUIGNON, *Laplacians and Riemannian Submersions with Totally Geodesic Fibres* (*Illinois J. of Math.*, vol. 26, 1982, p. 181-200).

[B] G. BESSON, *A Kato Type Inequality for Riemannian submersions with Totally Geodesic Fibers*, (*Annals of Global Analysis and Geometry*, 1986).

[B-G-M] M. BERGER, P. GAUDUCHON et E. MAZET, *Le spectre d'une variété riemannienne* (*Lecture Notes in Math.*, vol. 194, Springer-Verlag, 1971).

[C] G. COURTOIS, *Spectre des variété privées d'un ε-tube*, Prépublications de l'Institut Fourier, 1986.

[Ch] I. CHAVEL, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press, 1984.

[C-F1] I. CHAVEL et E. A. FELDMAN, *Spectra of Domains in Compact Manifolds* (*J. Fcn'l Anal.*, vol. 30, 1978, p. 198-222).

[C-F2] I. CHAVEL et E. A. FELDMAN, *Isoperimetric Constants of Manifolds with Small handles* (*Math. Zeit.*, vol. 184, 1983, p. 435-448).

[CV] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Résonances* (*Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie de l'Institut Fourier*, 1984, p. 85.

[D] J. J. DUISTERMATT, *Fourier Integral Operators* (*Lecture Notes of the Courant Institute of Mathematical Sciences*, New York, 1973).

[D-R] J. DODZIUK et B. RANDOL, *Lower Bounds for λ_1 on a Finite-volume Hyperbolique Manifold* (à paraître), 1986.

[F1] K. FUKAYA, *Collapsing Riemannian manifolds to Lower Dimentional on* [*J. Diff. Geom.*, 1986 (à paraître)].

[F2] K. FUKAYA, *Collapsing of Riemannian Manifolds and Eigenvalues of the Laplace Operator* [*Invent. Math.*, 1986 (à paraître)].

[K] T. KATO, *Perturbation Theory for Linear Operators* (*Lecture Notes in Math.*, vol. 132, Springer-Verlag, 1976).

[O] S. OZAWA, *Spectra of Domains with Small spherical Neumann Boundary* (*J. Fac. Sc. Univ. of Tokyo*, vol. 30, n° 2, 1983, p. 259-277).

[R-T] J. RAUCH et M. TAYLOR, *Potential and Scattering theory on Wildly Perturbed Domains* (*J. Fcn'l Anal.*, 1975, p. 27-59).

(Manuscrit reçu le 1[er] décembre 1986,
révisé le 10 février 1987).

Colette ANNÉ,
Institut Fourier,
B.P. n° 74,
38402 Saint-Martin d'Hères Cedex,
France.